

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Предлагаемая книга представляет собой задачник по специальной и общей теории относительности. Она написана группой активно работающих молодых ученых, имена которых хорошо известны по их работам в области релятивистской астрофизики. Поскольку каждая глава содержит краткое введение и четыре пятых книги посвящены подробному решению задач, то данную книгу можно рассматривать как своеобразный и оригинальный учебник, рассчитанный на тех, кто хотел бы изучить этот важный и сложный раздел современной физики не пассивным, а активным путем.

Специальная теория относительности является основой для всех разделов современной физики. Общая теория относительности в последние годы стала играть важную роль в развитии современной астрофизики. В этом отношении для предлагаемой книги характерна тесная связь рассматриваемых в ней задач с актуальными проблемами астрофизики. Достаточно указать на то, что гл. 16—20 посвящены таким проблемам как релятивистская структура звезд, черные дыры, гравитационное излучение, космология и экспериментальная проверка общей теории относительности. Следует также сказать, что только часть задач может рассматриваться как упражнения для изучающих данный раздел физики. Значительное же количество их основано на оригинальных работах последних лет. Поэтому их относительная трудность не должна отпугивать читателя, приступающего к изучению книги. Терпеливый читатель не только изучит предмет, но и войдет в круг вопросов и почувствует особенности задач, решаемых современной теоретической физикой. Характер книги таков, что ее с пользой могут читать не только студенты, изучающие теоретическую физику, но и специалисты, работающие в области теории гравитации и релятивистской астрофизики.

Перевод гл. 1—11 (условия и решения задач) выполнен Ю. А. Даниловым, а гл. 12—21 (условия и решения задач) — А. П. Бондаревым. В перевод внесены исправления, любезно присланные авторами в июне 1979 г.

Член-корреспондент АН СССР  
*И. М. Халатников*



## ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРОВ

Эта книга содержит почти 500 задач с решениями по специальной и общей теории относительности, гравитации, релятивистской астрофизике и космологии. При подборе задач мы руководствовались убеждением, что существо названных разделов физики кроется не в возможности строгого аксиоматического построения их и даже не в присущей им внутренней красоте, а скорее в тех результатах, которые позволяет вычислить теория, предсказаниях и моделях явлений, происходящих в реальной Вселенной. Движимые этим убеждением, мы стремились отбирать задачи, формулируемые в общепринятых физических терминах, и пытались по возможности избавлять их содержание от условностей, связанных с выбором обозначений. Мы хотели пробудить любопытство читателей («Интересно, как *можно было бы* доказать, что ...?») и избегали задач чисто технического содержания, встречающихся в учебниках, типа «Доказать соотношение (17.4.38)». При отборе решений мы хотели научить читателя разумному подходу к вычислениям, методам и приемам, позволяющим в значительной мере сократить затраты труда, неизбежные при бесхитроном «лобовом» подходе, и в то же время исключить другую опасность — введение чрезмерно сложного, хотя и мощного, формализма для решения простой задачи. Равновесие между этими крайностями оставляет достаточный простор, и читатель не должен удивляться, если окажется, что его решение использует более узкий (или, наоборот, более широкий) набор вычислительных средств.

Первые пять глав нашей книги посвящены специальной теории относительности и предназначены для студентов старших курсов и аспирантов, специализирующихся по любому разделу современной физики, классической механики или электромагнетизму. Материал по главам распределен в порядке постепенного нарастания сложности. Начальный уровень задач приблизительно соответствует уровню, на котором написана книга Тейлора и Уилера [*Taylor E. F., Wheeler J. A., Spacetime Physics (Freeman, 1963)*]<sup>1)</sup>, но в каждой главе имеются и трудные, и легкие задачи.

<sup>1)</sup> Имеется перевод: *Тейлор Э., Уилер Дж.* Физика пространства-времени. — М.: Мир, 1971, — *Прим. перев.*

Остальная часть книги предназначена для студентов, слушающих курс общей теории относительности и космологии. Отдельные главы посвящены различным аспектам метрической геометрии, эйнштейновской теории гравитации (и некоторым другим теориям), взаимодействию гравитации с другими физическими явлениями и приложениям теории к различным экспериментальным и астрофизическим ситуациям. В последней главе рассматриваются более формальные вопросы. Их приложения не столь непосредственны.

Каждая глава начинается с вводных замечаний, предназначенных главным образом для того, чтобы ввести определения используемых понятий. Эти замечания отнюдь не являются полным или последовательным изложением материала, затрагиваемого в главе, но должны помочь тем, кто привык к другим обозначениям. Предполагается, что читатель имеет возможность почерпнуть необходимые сведения в одном из следующих курсов (которые мы основательно использовали в процессе работы над книгой):

1. *Misner C. W., Thorne K. S., Wheeler J. A., Gravitation* (Freeman, 1973). (Имеется перевод: *Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж.* Гравитация. Т. 1—3, М.: Мир, 1977.)
2. *Weinberg S., Gravitation and Cosmology* (Wiley, 1972). (Имеется перевод: *Вейнберг С.* Гравитация и космология. — М.: Мир, 1975.)
3. *Adler R., Bazin M., Schiffer M., Introduction to General Relativity*, 2nd ed. (McGraw-Hill, 1975).

Сильное влияние на нас оказали также следующие учебники и монографии:

4. *Anderson J. L., Principles of Relativity Physics* (Academic Press, 1967).
5. *Батыгин В. В., Топтыгин И. Н.* Сборник задач по электродинамике. — М.: Физматгиз, 1962.
6. *Hawking S. W., Ellis G. F. R., The Large-Scale Structure of Space-Time* (Cambridge University Press, 1973). (Имеется перевод: *Хокинг С., Эллис Дж.* Крупномасштабная структура пространства-времени. — М.: Мир, 1977.)
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. — М.: Физматгиз, 1960.
8. *Peebles P. J. E., Physical Cosmology* (Princeton University Press, 1971).
9. *Robertson H. P., Noonan T. W., Relativity and Cosmology* (Saunders, 1968).
10. *Sextl R. U., Urbantke H. K., Gravitation und Kosmologie* (Wiener Berichte über Gravitationstheorie, 1973).

Ссылки на оригинальную литературу приведены в соответствующих местах решений.

Мы хотели бы выразить свою признательность коллегам, предложившим свои задачи для нашего сборника: Дугласу Эрдли, Чарлзу Мизнеру, Дону Пейджу, Бернарду Шутцу и нашему другу и учителю Кипу С. Торну.

Нам также приятно выразить благодарность Ч. Олкоку, Б. Барруа, Дж. Конуэллу, Г. Френчу, К. Ианкаитису, С. Ковачу и У. Расселлу за ценную помощь, способствовавшую улучшению задач и решений, и Стиву Уилсону за подготовку большинства иллюстраций к этой книге. Мы весьма признательны руководству физического факультета Калифорнийского технологического института за поддержку, оказанную нам во время пребывания в стенах этого учебного заведения. Разумеется, мы несем всю ответственность за ошибки, неизбежные в изданиях такого рода. Мы стремились по возможности избавиться от *принципиальных* ошибок в задачах и решениях, но заранее приносим извинения за мелкие алгебраические ошибки, которые несомненно обнаружит вдумчивый читатель; мы с благодарностью примем все его замечания.

*А. Лайтман  
В. Пресс  
Р. Прайс  
С. Тюкольски*

Пасадена, май 1974

## ОБОЗНАЧЕНИЯ

При выборе обозначений мы стремились не слишком сильно отходить от нескольких различных учебников, в каждом из которых авторы придерживаются своих собственных обозначений, поэтому единой системы обозначений, действующей на протяжении всей книги, у нас не существует. Почти во всех случаях смысл используемых обозначений ясен из контекста. Приводимый ниже список поясняет, в каком смысле *обычно* следует понимать наиболее часто используемые обозначения и символы.

$\alpha, \beta, \mu, \nu \dots$	Греческие индексы принимают значения 0, 1, 2, 3 и соответствуют пространственно-временным координатам, компонентам и т. д.
$i, j, k, \dots$	Латинские индексы принимают значения 1, 2, 3 и соответствуют координатам и т. д. в 3-мерном пространстве
$e_\alpha, e_j, \dots$	Базисные векторы
$A$	(Любая буква, набранная полужирным шрифтом.) Пространственно-временной вектор, тензор или форма
$\vec{A}$	3-мерный вектор
$A^\mu, B^\alpha_\beta \dots$	Компоненты тензора
$(A^0, A^1, A^2, A^3)$	Вектор, заданный своими компонентами
$A^0, \vec{A}$	Вектор, заданный своей временной компонентой и пространственной частью
$\hat{\phantom{a}}$	Единичный вектор или компоненты в ортонормированном репере
$d/d\lambda$	Обозначение, иногда применяемое для вектора (см. введение в гл. 7)
$A(f)$	Вектор, действующий на функцию ( $= A^\alpha f_{,\alpha}$ )
$\tilde{\omega}$	1-форма
$\otimes$	Тензорное произведение, прямое произведение (например, $A \otimes B$ имеет компоненты $A^\mu B^\nu$ )

$\wedge$	Полностью антисимметризованное произведение внешних форм (см. введение в гл. 8)
$\nabla$	Оператор ковариантного дифференцирования (см. введение в гл. 7). Как и в обычной физике, мы используем также обозначения $\nabla \times = \text{rot}$ , $\nabla^2$ — оператор Лапласа и т. д.
$\nabla_A$	Производная по направлению (см. введение в гл. 7)
$D/d\lambda$	Ковариантная производная вдоль кривой (см. введение в гл. 7)
$d$	Оператор градиента, например в 1-форме $\widetilde{df}$ (см. введение в гл. 8)
$\mathcal{L}$	Производная Ли (см. задачу 8.13)
$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$	Символ Кристоффеля (см. введение в гл. 7)
$\square$	Оператор Даламбера в специальной теории относительности ( $\equiv \nabla^2 - \partial^2/\partial t^2$ )
,	Частная производная
;	Ковариантная производная (см. введение в гл. 7)
$R_{\alpha\beta\gamma\delta}$	Тензор Римана (см. введение в гл. 9)
$R_{\alpha\beta}$	Тензор Риччи ( $\equiv R^{\gamma}_{\alpha\gamma\beta}$ )
$R$	Скаляр Риччи ( $\equiv R^{\alpha}_{\alpha}$ ), а также скалярный множитель в метрике Робертсона — Уокера
$G_{\alpha\beta}$	Тензор Эйнштейна (см. введение в гл. 9)
$C_{\alpha\beta\gamma\delta}$	Тензор (конформный) Вейля (см. введение в гл. 9)
$K_{ij}$	Тензор внешней кривизны (см. введение в гл. 9)
$\tau$	Собственное время
$c$	Скорость света (обычно принимаемая в задачах равной единице)
$G$	Гравитационная постоянная (обычно принимаемая в задачах равной единице)
$u$	4-скорость
$a$	4-ускорение ( $\equiv du/d\tau$ )
$p$ или $P$	4-импульс
$p$ или $P$	Давление
$T^{\mu\nu}$	Тензор энергии-импульса (см. введение в гл. 5)
$F^{\mu\nu}$	Тензор электромагнитного поля (см. введение в гл. 4)
$J^{\mu}$	Плотность тока (см. введение в гл. 4)
$J^{\mu\nu}$	Тензор углового момента (см. задачи 11.1, 11.2)
$\eta_{\mu\nu}$	Метрика Минковского (см. введение в гл. 1)
$h_{\mu\nu}$	Возмущения метрики (см. введение в гл. 13)

ц. м.	Центр масс
$\nu, \omega$	Частота в герцах и циклическая частота в радианах за единицу времени
$\gamma$	Лоренцевский фактор $\equiv (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ , а также обозначение фотона
$\Lambda^{\alpha}_{\beta}$	Матрица преобразования Лоренца
det	Определитель
Sp	След
$\langle \rangle$	Средняя величина ( $\langle E \rangle$ — средняя энергия)
$\langle , \rangle$	Скалярная комбинация вектора и 1-формы, например $\langle \tilde{\omega}, \mathbf{A} \rangle$ (см. введение в гл. 8)
[ ]	Антисимметризация (см. задачу 3.17), коммутатор (см. введение в гл. 8) или разрыв величины (см. задачу 21.9)
( )	Симметризация
$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$	Полностью антисимметричный тензор (см. задачу 3.20)
*	Символ дуальности (см. задачу 3.25)
Re	Вещественная часть
$\Omega$	Телесный угол (например, в $\int d\Omega$ ), угловая скорость
$\rho^{\alpha\beta}$	Проекционный тензор (см. задачи 5.18, 6.6)
$\oplus$	Расширение (см. задачу 5.18)
$\sigma_{\alpha\beta}$	Поперечный сдвиг (см. задачу 5.18)
$\omega_{\alpha\beta}$	Вращение (см. задачу 5.18)
$\tilde{I}_{jk}$	Тензор приведенного квадрупольного момента (см. введение в гл. 18)
$H_0$	Постоянная Хаббла
$q_0$	Параметр замедления
$M_{\odot}, R_{\odot}$	Масса, радиус, ... Солнца
$z$	Величина красного смещения (см. задачу 8.28, введение в гл. 19)
$\mathcal{O}$	Порядок величины
$\sim$	Пропорциональность (например, $r^3 \sim t^2$ ) или параллельность векторов (например, $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ )



# ЗАДАЧИ

## ГЛАВА I

### КИНЕМАТИКА СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Траектория наблюдателя в пространстве-времени называется мировой линией данного наблюдателя. Время, измеряемое по часам, движущимся вместе с наблюдателем, называется собственным временем наблюдателя  $\tau$  и определяется соотношением

$$-d\tau^2 \equiv ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

где  $t, x, y, z$  — координаты (Минковского) точек, принадлежащих мировой линии наблюдателя. Здесь и далее, если нет особых оговорок, мы используем систему единиц, в которой скорость света  $c$  равна 1.

Векторы 4-скорости  $u$  с компонентами  $(dt/d\tau, dx/d\tau, dy/d\tau, dz/d\tau)$  и 4-ускорения  $a \equiv du/d\tau$  с компонентами  $(d^2t/d\tau^2, d^2x/d\tau^2, d^2y/d\tau^2, d^2z/d\tau^2)$  определены на мировой линии. Контравариантные компоненты этих и других 4-векторов условимся обозначать  $u^\alpha, a^\beta, A^\gamma, B^\delta$  и т. д., где греческий индекс означает любую из 4 компонент  $t, x, y, z \equiv 0, 1, 2, 3$ . Латинские индексы  $i, j, k, \dots$  используются лишь для обозначения пространственных компонент  $x, y, z \equiv 1, 2, 3$ .

Мы будем также придерживаться эйнштейновского правила суммирования, т. е. предполагать, что по любому повторяющемуся буквенному индексу необходимо произвести суммирование, придав ему все допустимые значения. Например,

$$V = V^\mu e_\mu$$

означает вектор, записанный в виде суммы его контравариантных компонент, умноженных на базисные векторы  $e_0 \equiv (1, 0, 0, 0)$ ,  $e_1 \equiv (0, 1, 0, 0)$  и т. д.

Инвариантное скалярное произведение двух 4-векторов в координатах Минковского определяется выражением

$$A \cdot B = -A^0 B^0 + A^1 B^1 + A^2 B^2 + A^3 B^3.$$

Его можно представить в виде

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_\mu B^\mu,$$

где числа  $A_\mu$ , называемые ковариантными компонентами 4-вектора  $\mathbf{A}$ , заданы соотношениями

$$A_\mu \equiv \eta_{\mu\nu} A^\nu \quad \text{или} \quad A^\mu \equiv \eta^{\mu\nu} A_\nu,$$

а

$$\eta_{\mu\nu} \equiv \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \eta^{\mu\nu}.$$

Векторы называются пространственноподобными, времениподобными или изотропными в зависимости от того, положителен, отрицателен или равен нулю их скалярный квадрат  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ . Векторы 4-скорости всегда времениподобны.

Две лоренцевские системы отсчета могут отличаться либо на относительную 3-скорость  $\vec{v}$ , либо на пространственный поворот, либо на комбинацию относительной скорости и поворота. Если  $t, x, y, z$  — координаты в одной системе отсчета, то координаты в другой системе отсчета обычно принято обозначать  $t', x', y', z'$ . Во второй системе отсчета (со штрихами) компоненты векторов записывают в виде  $A^{\mu'}, B_{\nu'}$  и т. д., а базисные векторы — как  $\mathbf{e}_{\mu'}$ . В лоренцевских системах отсчета базисные векторы и компоненты векторов связаны соотношениями.

$$\mathbf{e}_{\mu'} = \Lambda_{\mu'}^\alpha \mathbf{e}_\alpha, \quad V_{\mu'} = \Lambda_{\mu'}^\alpha V_\alpha, \\ V^{\mu'} = \Lambda_\alpha^{\mu'} V^\alpha \quad (\Lambda_\alpha^{\mu'} \text{ — матрица, обратная матрице } \Lambda_{\mu'}^\alpha),$$

где  $\Lambda$  — матрицы преобразований Лоренца. Особый интерес представляют так называемые «бусты» — преобразования, изменяющие только скорости, но не содержащие пространственных поворотов. Для штрихованной системы отсчета, движущейся со скоростью  $\beta$  в направлении оси  $x$  исходной системы отсчета, имеем

$$\Lambda_{\nu'}^{\mu'} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \gamma \equiv (1 - \beta^2)^{-1/2}.$$

Относительную скорость двух систем отсчета иногда параметризуют, вводя величину  $\Phi = \text{Arth } \beta$  («параметр быстроты»).

Частица с массой покоя  $m$  и 4-скоростью  $\mathbf{u}$  обладает 4-импульсом  $\mathbf{p} \equiv m\mathbf{u}$ . Если  $m=0$  (фотоны), то  $\mathbf{p}$  определяется своими компонентами в системе отсчета любого наблюдателя:  $p^0$  — энергия фотона,  $p^i \equiv \vec{p}$  — 3-импульс фотона.

**Задача 1.1.** 4-скорость  $u$  соответствует 3-скорости  $\vec{v}$ . Выразить:

- а)  $u^0$  через  $|\vec{v}|$ ,
- б)  $u^j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) через  $\vec{v}$ ,
- в)  $u^0$  через  $u^j$ ,
- г)  $d/d\tau$  через  $d/dt$  и  $\vec{v}$ ,
- д)  $v^j$  через  $u^j$ ,
- е)  $|\vec{v}|$  через  $u^0$ .

**Задача 1.2.** Найти матрицу преобразования Лоренца, состоящего из буста  $v_x$  в направлении оси  $x$ , вслед за которым производится буст  $v_y$  в направлении оси  $y$ . Доказать, что те же бусты, производимые в обратном порядке, порождают другое преобразование Лоренца.

**Задача 1.3.** Две системы отсчета движутся с 3-скоростями  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$ . Доказать, что их относительная скорость удовлетворяет соотношению

$$v^2 = \frac{(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 - (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)^2}{(1 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)^2}.$$

**Задача 1.4.** Тележка катится по длинному столу со скоростью  $\beta$ . По первой тележке в том же направлении со скоростью  $\beta$  относительно нее катится вторая тележка меньших размеров. По второй тележке в том же направлении со скоростью  $\beta$  относительно нее катится третья тележка и т. д. Общее число тележек равно  $n$ . Найти скорость  $v_n$   $n$ -й тележки в системе отсчета, связанной со столом. К чему стремится  $v_n$  при  $n \rightarrow \infty$ ?

**Задача 1.5.** Пуля, летящая со скоростью  $v$  относительно камеры и имеющая в своей системе покоя длину  $b$ , сфотографирована с большого расстояния. За пулей параллельно ее траектории расположен метровый стержень, покоящийся относительно камеры. Направление на камеру составляет угол  $\alpha$  с направлением скорости пули. Чему равна кажущаяся длина пули, измеренная по снимку? (Какая часть метрового стержня на снимке будет закрыта пулей?)

**Задача 1.6.** Тахионами называются гипотетические частицы, скорости которых превышают скорость света. Предположим, что источник тахионов испускает частицы с постоянной скоростью  $u > c$  в своей системе покоя. Тахионный сигнал послан наблюдателю, покоящемуся относительно источника и находящемуся на расстоянии  $L$  от него. Через какое время можно получить тахионный ответ от наблюдателя? Через какое время придет ответ, если наблюдатель удаляется от источника со скоростью  $v$  и в момент

получения сигнала отправляет ответ, находясь от источника на расстоянии  $L$ ? (Доказать, что при  $u > [1 + (1 - v^2)^{1/2}]/v$  ответ можно получить до отправления сигнала!)

**Задача 1.7.** Система отсчета  $S'$  движется со скоростью  $\vec{v}$  относительно системы отсчета  $S$ . Стержень в системе отсчета  $S'$  составляет угол  $\theta'$  с направлением движения. Какой угол  $\theta$  составляет этот стержень с направлением движения в системе отсчета  $S$ ?

**Задача 1.8.** Система отсчета  $S'$  движется со скоростью  $\vec{\beta}$  относительно системы отсчета  $S$ . Под углом  $\theta'$  к направлению движения в системе отсчета  $S'$  выпущена пуля со скоростью  $\vec{v}'$ . Чему равен этот угол  $\theta$  в системе отсчета  $S$ ? Что произойдет, если «пулей» будет фотон?

**Задача 1.9.** Предположим, что с точки зрения наблюдателя, покоящегося относительно далеких неподвижных звезд, распределение этих звезд изотропно, т. е. в любом телесном угле  $d\Omega$  он видит  $dN = N(d\Omega/4\pi)$  звезд, где  $N$  — общее число звезд, доступных наблюдению.

Предположим далее, что другой наблюдатель (с которым связана система отсчета  $S'$ ) движется с релятивистской скоростью  $\beta$  в направлении  $e_x$ . Какое распределение звезд увидит второй наблюдатель? Точнее говоря, какова плотность распределения  $P(\theta', \varphi')$ , если число звезд, наблюдаемых в телесном угле  $d\Omega'$  в системе отсчета  $S'$ , равно  $P(\theta', \varphi') d\Omega'$ ? Проверить, что

$$\int P(\theta', \varphi') d\Omega' = N \quad \text{и} \quad P(\theta', \varphi') \rightarrow N/4\pi$$

при  $\beta \rightarrow 0$  на сфере. Где второй наблюдатель увидит скопление звезд?

**Задача 1.10.** Доказать, что в специальной теории относительности  $\mathbf{A} = 3^{1/2}e_t + 2^{1/2}e_x$  — единичный времениподобный вектор. Доказать, что угол между векторами  $\mathbf{A}$  и  $e_t$  — невещественный.

**Задача 1.11.** Два кольца вращаются с равными по величине и противоположными по направлению угловыми скоростями  $\omega$  вокруг общего центра. Предположим, что на одном кольце сидит Адам, на другом — Ева и в некоторый момент времени, когда они проезжают друг мимо друга, показания их часов совпадают. Поровнявшись с Адамом, Ева замечает, что его часы идут медленнее. Поэтому она ожидает, что к их следующей встрече ее часы уйдут вперед, а Адам придерживается противоположного мнения. Что произойдет в действительности? Каким образом это согласуется с наблюдениями Адама (или Евы)?

**Задача 1.12.** Введем мнимую координату  $w = it$ . Доказать, что поворот на угол  $\vartheta$  в плоскости  $x_i w$  ( $i = 1, 2, 3$ ), где  $\vartheta$  — чисто мнимое число, соответствует чистому лоренцевскому «бусту» в координатах  $t, x, y, z$ . Как скорость буста  $v$  связана с углом  $\vartheta$ ?

**Задача 1.13.** Доказать, что кривая

$$\begin{aligned}x &= \int r \cos \vartheta \cos \varphi \, d\lambda, \\y &= \int r \cos \vartheta \sin \varphi \, d\lambda, \\z &= \int r \sin \vartheta \, d\lambda, \\t &= \int r \, d\lambda,\end{aligned}$$

где  $r, \vartheta$  и  $\varphi$  — произвольные функции от  $\lambda$ , представляет собой изотропную кривую в специальной теории относительности. При каких условиях эта кривая будет изотропной геодезической?

**Задача 1.14.** Доказать, что 4-ускорение наблюдателя  $du^\alpha/d\tau$  имеет лишь 3 независимые компоненты. Вывести соотношения, связывающие эти 3 компоненты с тремя компонентами обычного ускорения, которое наблюдатель измерил бы ньютоновским акселерометром в своей локальной системе отсчета.

**Задача 1.15.** Записать в инвариантном виде величину ускорения, измеренного в системе отсчета наблюдателя.

**Задача 1.16.** С точки зрения инерциального наблюдателя  $\mathcal{O}$  частица движется с 3-скоростью  $\vec{u}$  и 3-ускорением  $\vec{a}$ . Другой инерциальный наблюдатель  $\mathcal{O}'$  движется с 3-скоростью  $\vec{v}$  относительно наблюдателя  $\mathcal{O}$ . Доказать, что измеренные наблюдателем  $\mathcal{O}'$  компоненты ускорения частицы, параллельные и перпендикулярные 3-вектору  $\vec{v}$ , равны

$$\begin{aligned}\vec{a}'_{\parallel} &= \frac{(1 - v^2)^{3/2}}{(1 - \vec{v} \cdot \vec{u})^3} \vec{a}_{\parallel}, \\ \vec{a}'_{\perp} &= \frac{(1 - v^2)}{(1 - \vec{v} \cdot \vec{u})^3} [\vec{a}_{\perp} - \vec{v} \times (\vec{a} \times \vec{u})].\end{aligned}$$

**Задача 1.17.** Наблюдатель испытывает постоянное ускорение  $g$  в направлении  $x$ . Зададим для него систему отсчета  $(t, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  следующим образом: 1) наблюдатель находится в точке  $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = 0$  и  $t$  — собственное время наблюдателя; 2) гиперплоскости одновременных с точки зрения наблюдателя событий совпадают с гиперплоскостями одновременных событий мгновенно сопутствующей ему инерциальной системы отсчета; 3) остальные «наблюдатели со стационарными координатами» (т. е. с неизменяющимися

значениями  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$ ) движутся так, что они всегда покоятся относительно наблюдателя на гиперплоскостях одновременных событий. При  $t=0$  наделим все пространственные точки теми индексами, которые они имели бы в мгновенно сопутствующей им инерциальной системе отсчета  $t=0$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Указать преобразование координат, переводящее  $(t, x, y, z)$  в  $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ . Доказать, что часы со стационарными координатами при таком преобразовании не могут остаться синхронизованными.

**Задача 1.18.** Зеркало движется перпендикулярно своей плоскости со скоростью  $v$ . Какой угол с нормалью к зеркалу образует отраженный луч света, если падающий луч составляет с нормалью угол  $\theta$ ? Как меняется при отражении частота света?

**Задача 1.19.** Зеркало движется параллельно своей плоскости. Доказать, что угол падения фотона равен его углу отражения.

**Задача 1.20.** Наблюдатель, движущийся с 4-скоростью  $\mathbf{u}$ , исследует параметры частицы с массой покоя  $m$  и 4-импульсом  $\mathbf{p}$ . Доказать, что:

- а) наблюдатель измеряет энергию  $E = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}$ ,
- б) с точки зрения наблюдателя, масса покоя частицы равна  $m^2 = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}$ ,
- в) по измерениям наблюдателя величина импульса частицы составляет  $|\bar{\mathbf{p}}| = [(\mathbf{p} \cdot \mathbf{u})^2 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}]^{1/2}$ ,
- г) величина измеряемой наблюдателем обычной скорости  $\bar{v}$  равна

$$|\bar{v}| = \left[ 1 + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}}{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{u})^2} \right]^{1/2},$$

- д) 4-вектор  $\mathbf{v}$  с компонентами

$$v^0 = 0, \quad v^j = (dx^j/dt)_{\text{частица}} = \text{обычная скорость}$$

можно представить в виде

$$\mathbf{v} = -\mathbf{u} - \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}}.$$

**Задача 1.21.** Ядро железа испускает мессбауэровское  $\gamma$ -излучение с частотой  $\nu_0$ , измеренной в системе покоя ядра. Само ядро движется со скоростью  $\bar{\mathbf{v}}$  относительно некоторого инерциального наблюдателя. Какую частоту измерит этот наблюдатель, когда испущенное ядром  $\gamma$ -излучение достигнет его? Ответ выразить через  $\bar{\mathbf{v}}$ ,  $\nu_0$  и единичный вектор  $\hat{\mathbf{n}}$ , направленный от наблюдателя к ядру в тот момент, когда по измерениям наблюдателя было испущено  $\gamma$ -излучение.

**Задача 1.22.** К наблюдателю приходит сигнал от источника света, движущегося со скоростью  $\vec{v}$ . В момент испускания света угол между вектором  $\vec{v}$  и прямой, проходящей через наблюдателя и источник света, равен  $\vartheta$ . Как зависит  $\vartheta$  от  $|\vec{v}|$ , если наблюдатель не замечает ни красного смещения, ни смещения к голубому концу спектра?

**Задача 1.23.** Предположим, что в некоторой инерциальной системе отсчета  $S$  фотон обладает 4-импульсом с компонентами

$$p^0 = p^x = E, \quad p^y = p^z = 0.$$

Существует особый класс преобразований Лоренца (так называемая «малая группа 4-вектора  $\mathbf{p}$ »), оставляющих инвариантными компоненты 4-вектора  $\mathbf{p}$ . Примером таких преобразований может служить чистый поворот на угол  $\alpha$  в плоскости  $yz$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Найти последовательность чистых бустов и чистых поворотов, произведение которых *не* совпадает с чистым поворотом в плоскости  $yz$ , но *принадлежит* малой группе 4-вектора  $\mathbf{p}$ .

**Задача 1.24.** Две гигантские лягушки пойманы, заключены в большой металлический цилиндр и помещены в самолет. Во время полета дверцы багажного отделения случайно раскрылись и цилиндр с лягушками выпал. Почуввав неладное, лягушки попытались выбраться наружу. Они собрались посередине цилиндра и, оттолкнувшись друг от друга, одновременно ударили в днища. Затем, мгновенно оттолкнувшись от «своего» днища, каждая лягушка перелетела, не задев другую, через весь цилиндр и ударила в противоположное днище. Так продолжалось до тех пор, пока цилиндр не ударился о землю. Рассмотреть, как выглядело то, что происходило в цилиндре, из некоторой другой инерциальной системы отсчета, падающей с другой скоростью. В этой системе отсчета лягушки ударяют в днища цилиндра *неодновременно*, и поэтому цилиндр то рывком развивает скорость, превосходящую его среднюю скорость  $\beta$ , то рывком начинает двигаться со скоростью, меньшей  $\beta$ . Но в некоторой инерциальной системе отсчета цилиндр покоился. Означает ли это, что одна инерциальная система отсчета может двигаться рывками то вперед, то назад относительно другой инерциальной системы отсчета?

**Задача 1.25.** Пусть  $J_x, J_y, J_z$  — инфинитезимальные операторы поворотов, определенные так, что  $1 + iJ_j\theta/2$  — поворот на малый угол  $\theta$  вокруг оси  $j$ . Пусть  $K_x, K_y, K_z$  — инфинитезимальные операторы буста, определенные так, что  $1 + iK_jv/2$  — буст на малую скорость  $v$  в направлении оси  $j$ . Доказать, что инфинитезимальные операторы  $J_i$  и  $K_i$  удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} [J_x, J_y] &= 2iJ_z, \\ [J_x, K_y] &= 2iK_z, \\ [K_x, K_y] &= -2iJ_z \end{aligned}$$

(а также всем соотношениям, получающимся из этих трех при циклической перестановке индексов). Найти представление группы Лоренца спиновыми матрицами Паули  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  и единичной матрицей.

**Задача 1.26.** Два последовательно выполненных произвольных чистых лоренцевских буста  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  эквивалентны чистому бусту  $\vec{v}_3$ , после которого производится чистый поворот  $\theta\vec{n}$ , где  $\vec{n}$  — единичный вектор. Выразить величину угла  $\theta$  через  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  и доказать, что  $\vec{n} \cdot \vec{v}_3 = 0$ .

**Задача 1.27.** Доказать, что любое собственное (не содержащее обращения времени и четности) однородное преобразование Лоренца оставляет неподвижным по крайней мере одно изотропное направление.

**Задача 1.28.** Каково наименьшее число чистых бустов, порождающих произвольное преобразование Лоренца?

(Примечание. Это очень трудная задача!)



## ГЛАВА 2

### ДИНАМИКА СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

В нашей лабораторной системе отсчета частица с 4-импульсом  $\mathbf{p}$  обладает полной энергией  $E = p^0$  и 3-импульсом  $\vec{p} = p^i$ . Если частица имеет ненулевую массу покоя  $m$ , то ее 4-импульс  $\mathbf{p}$ , 4-скорость  $\mathbf{u}$  и 3-скорость  $\vec{v}$  связаны векторным соотношением

$$\mathbf{p} = m\mathbf{u} = m(\gamma, \gamma\vec{v}), \quad \gamma \equiv (1 - v^2)^{-1/2},$$

в силу чего  $E = \gamma m$ ,  $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$ . Скалярный квадрат 4-импульса, инвариантный во всех системах отсчета, имеет вид

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = -E^2 + \vec{p}^2 = -m^2.$$

Кинетическая энергия частицы равна  $T \equiv E - m$ .

Фундаментальный динамический закон для взаимодействия частиц состоит в том, что в любой системе отсчета векторная сумма 4-импульсов всех частиц сохраняется постоянной во времени.

---

**Задача 2.1.** (Комптоновское рассеяние.) Фотон с длиной волны  $\lambda$  налетает на стационарный электрон (с массой  $m_e$ ) и рассеивается с длиной волны  $\lambda'$  под углом  $\phi$ . Вывести соотношение

$$\lambda' - \lambda = (h/m_e)(1 - \cos \phi).$$

**Задача 2.2.**

а) Если на фотоне рассеивается заряженная частица, движущаяся со скоростью, близкой к скорости света, то говорят, что фотон претерпевает обратное комптоновское рассеяние. Рассмотреть обратное комптоновское рассеяние в том случае, когда заряженная частица с массой покоя  $m$  и полной массой-энергией (относительно лабораторной системы отсчета)  $E \gg m$  налетает на фотон с частотой  $\nu$  ( $h\nu \ll m$ ). Какова максимальная энергия, которую частица может передать фотону?

б) Космическое пространство заполнено излучением абсолютно черного тела с температурой 3 К. В космических лучах встречаются протоны с энергиями до  $10^{20}$  эВ. Сколько энергии может передать протон с энергией  $10^{20}$  эВ фотону с температурой 3 К?

**Задача 2.3.** Доказать, что изолированный свободный электрон не может ни поглотить, ни испустить фотон.

**Задача 2.4.** Частица с массой покоя  $m_1$  и скоростью  $\vec{v}_1$  сталкивается со стационарной частицей с массой покоя  $m_2$ , которая поглощает налетевшую частицу. Найти массу покоя  $m$  и скорость  $\vec{v}$  возникшей в результате столкновения составной системы.

**Задача 2.5.** В системе покоя нейтрона его  $\beta$ -распад изотропен, а скорость испущенного электрона  $v_e = 0,77$ . Какие значения вектора импульса  $\vec{P}$  электрона в лабораторной системе отсчета возможны, если нейтрон пролетает через лабораторию со скоростью  $\beta$ ?

**Задача 2.6.** Вычислить «достижимую энергию» в двух различных экспериментах по протон-протонному рассеянию. В первом эксперименте, проводимом по традиционной схеме, пучок протонов, ускоренный до 30 ГэВ, падает на мишень (например, из жидкого водорода). Во втором эксперименте каждый из двух отдельных пучков протонов ускоряется до 15 ГэВ, после чего пучки направляются навстречу друг другу. Вычислить полную энергию двух сталкивающихся протонов в каждом эксперименте в системе центра масс. До какой энергии пришлось бы ускорять пучок протонов в эксперименте первого типа, чтобы достичь соответствия с протонами, имеющими в эксперименте со встречными пучками энергию 15 ГэВ в системе центра масс?

**Задача 2.7.** Частица с массой покоя  $m$  упруго сталкивается со стационарной частицей равной массы. Налетающая частица обладает кинетической энергией  $T_0$ . Какова ее кинетическая энергия после столкновения, если угол рассеяния равен  $\phi$ ?

**Задача 2.8.** Вычислить пороговую энергию, при которой нуклон  $N$  претерпевает реакцию



где  $\gamma$  — фотон с температурой 3 К. Столкновение фотона с нуклоном центральное, энергия фотона  $\sim kT$ ,  $m_N = 940$  МэВ,  $m_\pi = 140$  МэВ. (По-видимому, именно этот эффект приводит к обрезанию спектра космических лучей при пороговой энергии, которую требуется вычислить.)

**Задача 2.9.** Рассмотрим реакцию  $\pi^+ + n \rightarrow K^+ + \Lambda^0$ . Массы покоя частиц имеют следующие значения:  $m_\pi = 140$  МэВ,  $m_n = 940$  МэВ,  $m_K = 494$  МэВ,  $m_\Lambda = 1115$  МэВ. При какой пороговой кинетической энергии  $\pi$ -мезон рождает  $K$ -мезон под углом  $90^\circ$  в лабораторной системе отсчета, в которой нейтрон  $n$  покоится?

**Задача 2.10.** Рассмотрим реакцию  $A \rightarrow B + C$  (с массами частиц  $m_A, m_B, m_C$ ).

а) Пусть частица  $A$  покоится в лабораторной системе отсчета. Доказать, что в этой системе отсчета частица  $B$  обладает энергией  $E_B = (m_A^2 + m_B^2 - m_C^2)/2m_A$ .

б) Атом с массой  $M$ , находящийся в состоянии покоя, испускает фотон с энергией  $h\nu$  и переходит в состояние покоя с энергией  $M - \delta$ . Доказать, что  $h\nu < \delta$ . Почему в эффекте Мёссбауэра  $h\nu = \delta$ ?

в) Частица  $A$  распадается, двигаясь в лабораторной системе отсчета. Найти соотношение между углом, под которым испускается частица  $B$ , и энергиями частиц  $A$  и  $B$ .

**Задача 2.11.** Рассмотрим реакцию  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ . По определению лабораторной называется система отсчета, в которой  $\vec{P}_2 = 0$ . Системой центра масс (ц. м.) называется система отсчета, в которой  $\vec{P}_1^{ц. м.} + \vec{P}_2^{ц. м.} = 0$ . Доказать, что:

а)  $E_{полн}^{ц. м.} = (m_1^2 + m_2^2 + 2m_2E_1)^{1/2}$ ,

б)  $E_1^{ц. м.} = [(E_{полн}^{ц. м.})^2 + m_1^2 - m_2^2]/2E_{полн}^{ц. м.}$ ,

в)  $P_1^{ц. м.} = m_2P_1/E_{полн}^{ц. м.}$ ,

г)  $\gamma_{ц. м.} = (E_1 + m_2)/E_{полн}^{ц. м.}$

( $v_{ц. м.}$  — скорость ц. м. в лабораторной системе отсчета,  $\gamma_{ц. м.} = (1 - v_{ц. м.}^2)^{-1/2}$ ),

д)  $v_{ц. м.} = P_1/(E_1 + m_2)$ .

**Задача 2.12.** Рассмотрим упругое столкновение частицы с массой  $m_1$  со стационарной частицей с массой  $m_2 < m_1$ . Пусть  $\vartheta_{\max}$  — максимальный угол рассеяния частицы  $m_1$ . При нерелятивистских расчетах  $\sin \vartheta_{\max} = m_2/m_1$ . Доказать, что этот результат остается в силе и при релятивистских расчетах.

**Задача 2.13.**

а) Двигатели ракеты создают постоянное ускорение  $1g$  (относительно мгновенно сопутствующей ракете инерциальной системы отсчета). Ракета стартует из состояния покоя вблизи поверхности Земли. Как далеко улетит ракета от Земли (расстояние измеряется в земной системе отсчета) за 40 земных лет? Как далеко она улетит за 40 лет, измеряемых в системе отсчета, связанной с ракетой?

б) Вычислить собственное время, которое потребуется пассажирам космического корабля, чтобы удалиться от Земли на рас-

стояние 30 000 св. лет к центру Галактики. Предполагается, что первую половину пути космический корабль разгоняется с ускорением  $1g$ , а вторую половину пути — тормозится с ускорением  $1g$ .

в) Какая доля начальной массы ракеты может приходиться на полезный груз в п. «б»? Предполагается, что космический корабль обладает идеальными двигателями, способными превращать массу покоя в излучение со 100% эффективностью и выпускать идеально коллимированные пучки фотонов.

**Задача 2.14.** До какой максимальной энергии может разогнать электроны циклотрон, работающий на постоянной частоте с ускоряющим потенциалом  $V$ ?

**Задача 2.15.** Открыто новое поле  $F^\mu(x^\nu)$ , сообщающее частице с массой  $m$ , находящейся в точке  $x^4$ , 4-ускорение  $a^\mu \equiv du^\mu/d\tau = = m^{-1}F^\mu(x^\nu)$ . (Обращаем внимание читателя на то, что  $F^\mu$  не зависит от  $u^\nu$ .) Доказать, что существование такого поля противоречит специальной теории относительности.

## ГЛАВА 3

### ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ, ИНВАРИАНТЫ И ТЕНЗОРЫ В СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Пространство-время в специальной теории относительности можно описывать при помощи не только «инерциальных» координат, или координат Минковского, но и более общих (криволинейных) координат

$$x^{\mu'} = f^{\mu}(x^{\nu}),$$

где  $x^{\nu}$  — координаты Минковского, а  $f^{\mu}$  — четыре произвольные функции. Нетрудно показать, что базисные векторы и компоненты векторов в новых координатах связаны с базисными векторами и компонентами векторов в старых координатах соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\alpha'} &= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\alpha'}} \mathbf{e}_{\mu}, & \mathbf{e}_{\mu} &= \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\mu}} \mathbf{e}_{\alpha'}, \\ V^{\alpha'} &= \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\mu}} V^{\mu}, & V^{\mu} &= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\alpha'}} V^{\alpha'}, \\ V_{\alpha'} &= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\alpha'}} V_{\mu}, & V_{\mu} &= \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\mu}} V_{\alpha'}. \end{aligned}$$

Иначе говоря, матрица преобразования

$$\Lambda_{\alpha}^{\mu'} \equiv \partial x^{\mu'} / \partial x^{\alpha}$$

заменяет менее общие матрицы Лоренца (применимые лишь к преобразованиям между двумя системами координат Минковского).

Для общих координат по-прежнему остается в силе соотношение  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_{\mu} B^{\mu}$ , но соотношение  $A_{\mu} = \eta_{\mu\nu} A^{\nu}$  не выполняется. Каждой системе координат соответствует метрический тензор с компонентами  $g_{\alpha\beta}$ , такой, что  $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}$ , в силу чего  $A_{\mu} = g_{\mu\nu} A^{\nu}$  и, следовательно,  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = g_{\mu\nu} A^{\mu} B^{\nu}$ . Заметим также, что  $A^{\mu} = g^{\mu\nu} A_{\nu}$ , где  $g^{\mu\nu}$  — матрица, обратная матрице  $g_{\mu\nu}$ .

Формально *тензор* можно определить различными способами. Для наших целей достаточно сказать, что тензор представляет собой геометрический объект, обладающий, подобно вектору, компонентами, численные значения которых различны в разных координатных системах. Тензор обладает  $4^n$  компонентами, где  $n$  — ранг тензора (число «вакантных мест», или индексов, для ком-

понент). Индексы могут быть контравариантными или ковариантными, например:  $T^{\mu\nu}$ ,  $F_{\mu\nu}$ ,  $R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ ,  $G_{\mu}{}^{\nu}$ . При преобразовании тензоров на каждый индекс «затрачивается» одна матрица:

$$G_{\mu}{}^{\nu'} = \Lambda^{\alpha}_{\mu'} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} G^{\alpha}_{\beta}$$

Тензоры можно «свертывать» (суммируя по одному ковариантному и одному контравариантному индексу) и умножать, образуя прямые произведения, на другие тензоры или на себя. Обе операции порождают новые тензоры:

$$Q_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}, \quad A^{\mu} = G^{\mu}{}_{\nu} B^{\nu}, \quad F_{\mu\nu} = A_{\mu} B_{\nu}.$$

Особый случай представляет свертка с метрическим тензором; как и в соотношениях между ковариантными и контравариантными векторами, результат такой свертки принято обозначать тем же символом, что и исходный тензор (например,  $F^{\mu}{}_{\nu} = g_{\nu\alpha} F^{\mu\alpha}$ ). Тензорное выражение, не содержащее свободных индексов (например,  $F_{\mu\nu} A^{\mu} A^{\nu}$ ,  $R_{\beta\gamma} F^{\beta\gamma}$  или  $A^{\alpha} B^{\beta} g_{\alpha\beta}$ ), является скаляром и инвариантом во всех системах отсчета. По аналогии с безындексными обозначениями векторов ( $A$  означает вектор  $A^{\mu}$ ) вводятся безындексные обозначения тензоров ( $T$  означает тензор  $T^{\mu\nu}$ ). В обоих случаях существование ковариантных или контравариантных индексов должно быть ясно из контекста.

В безындексных обозначениях  $\otimes$  соответствует прямому произведению (например,  $F^{\mu\nu} A^{\rho}$  записывается в виде  $F \otimes A$ ), а свертку  $F^{\mu\alpha} A_{\alpha}$  принято записывать в виде  $F \cdot A$ .

Частные производные мы будем обозначать запятыми: например,  $f_{,\alpha} \equiv \partial f / \partial x^{\alpha}$ .

### Задача 3.1.

1) Два события разделены пространственноподобным интервалом. Доказать, что:

а) существует лоренцевская система отсчета, в которой они одновременны;

б) ни в одной лоренцевской системе отсчета они не происходят в одной и той же точке.

2) Два события разделены времениподобным интервалом. Доказать, что:

а) существует система отсчета, в которой они происходят в одной и той же точке;

б) ни в одной лоренцевской системе отсчета они не одновременны.

**Задача 3.2.** Найти 4 линейно-независимых изотропных вектора в пространстве Минковского. Можно ли найти 4 изотропных вектора, которые были бы ортогональны?

**Задача 3.3.** Доказать, что из всех непространственноподобных векторов данному изотропному ненулевому вектору ортогональны лишь кратные ему векторы.

**Задача 3.4.** Доказать, что сумма двух векторов может быть пространственноподобной, изотропной или времениподобной независимо от того, являются ли эти два вектора пространственноподобными, изотропными или времениподобными.

**Задача 3.5.** Доказать, что площадь поперечного сечения параллельного пучка света инвариантна относительно преобразований Лоренца.

**Задача 3.6.** Доказать, что  $\sum_{\mu} D^{\mu\mu}$  и  $\sum_{\mu} D_{\mu\mu}$  не инвариантны относительно преобразований координат, а сумма  $\sum_{\mu} D_{\mu}{}^{\mu}$  инвариантна. (Тензор  $\mathbf{D}$  задан своими компонентами  $D^{\mu\nu}$ .)

**Задача 3.7.** Тензор  $F^{\alpha\beta}$  антисимметричен по двум своим индексам. Доказать, что

$$F_{\mu}{}^{\alpha}{}_{,\nu} F^{\nu}{}_{\alpha} = -F_{\mu\alpha,\beta} F^{\alpha\beta}.$$

**Задача 3.8.** В системе отсчета с координатами  $x^{\mu}$  инвариантный линейный элемент имеет вид  $ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}$ . Доказать, что если координаты подвергнуть преобразованию  $x^{\mu} \rightarrow \bar{x}^{\mu}$ , то линейный элемент примет вид

$$ds^2 = g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} d\bar{x}^{\mu} d\bar{x}^{\nu},$$

и выразить  $g_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$  через частные производные  $dx^{\mu}/d\bar{x}^{\nu}$ . Доказать также, что если  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  — два произвольных 4-вектора, то

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = U^{\alpha} V^{\beta} \eta_{\alpha\beta} = U^{\bar{\alpha}} \bar{V}^{\bar{\beta}} g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}.$$

**Задача 3.9.** Доказать, что определитель метрического тензора  $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$  не является скаляром.

**Задача 3.10.** Доказать, что если  $\Lambda^{\alpha}_{\beta}$  и  $\bar{\Lambda}^{\alpha}_{\beta}$  — две матрицы, преобразующие компоненты тензора из одной системы координат в другую, то матрица  $\Lambda^{\alpha}_{\nu} \bar{\Lambda}^{\nu}_{\beta}$  также задает некоторое преобразование координат.

**Задача 3.11.** Дан тензор  $K^{\alpha\beta}$ . Можно ли проверить, является ли он прямым произведением двух векторов  $K^{\alpha\beta} = A^{\alpha} B^{\beta}$ ? Можно ли записать ход проверки в безындексных обозначениях?

**Задача 3.12.** Доказать, что в общем случае тензор второго ранга в  $n$ -мерном пространстве нельзя представить в виде прямого произведения двух векторов, но его *можно* представить в виде суммы нескольких прямых произведений двух векторов.

**Задача 3.13.** Геометрический «объект» с двумя индексами,  $X^{\mu\nu}$ , определен как «прямая сумма» двух векторов:  $X^{\mu\nu} = A^\mu + B^\nu$ . Можно ли считать  $X^{\mu\nu}$  тензором? Существует ли закон, позволяющий преобразовывать  $X$  в новую систему координат, т. е. получать  $X^{\hat{\mu}\hat{\nu}}$  из  $X^{\mu\nu}$ ?

**Задача 3.14.** Доказать, что тензор второго ранга  $F$ , антисимметричный в одной системе координат ( $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ ), антисимметричен во всех системах координат. Доказать, что контравариантные компоненты тензора  $F$  также антисимметричны ( $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ ). Доказать также, что симметричность тензора второго ранга инвариантна относительно выбора системы координат.

**Задача 3.15.** Пусть  $A_{\mu\nu}$  — антисимметричный тензор ( $A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}$ ), а  $S^{\mu\nu}$  — симметричный тензор ( $S^{\mu\nu} = S^{\nu\mu}$ ). Доказать, что  $A_{\mu\nu}S^{\mu\nu} = 0$ . Вывести следующие два тождества, справедливые для произвольного тензора  $V_{\mu\nu}$ :

$$V^{\mu\nu}A_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(V^{\mu\nu} - V^{\nu\mu})A_{\mu\nu}, \quad V^{\mu\nu}S_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(V^{\mu\nu} + V^{\nu\mu})S_{\mu\nu}.$$

**Задача 3.16.**

а) Сколько независимых компонент существует у тензора  $T^{\alpha\beta\dots}$   $r$ -го ранга, не обладающего никакими симметриями, в  $n$ -мерном метрическом пространстве?

б) Сколько независимых компонент существует у тензора  $T^{\alpha\beta\dots}$ , симметричного по  $s$  индексам?

в) Сколько независимых компонент существует у тензора  $T^{\alpha\beta\dots}$ , антисимметричного по  $a$  индексам?

**Задача 3.17.** Определим квадратные и круглые скобки, содержащие некоторые наборы индексов, следующим образом:

$$V_{(\alpha_1, \dots, \alpha_p)} \equiv \frac{1}{p!} \sum V_{\alpha_{\pi_1} \dots \alpha_{\pi_p}}; \quad V_{[\alpha_1, \dots, \alpha_p]} \equiv \frac{1}{p!} \sum (-1)^\pi V_{\alpha_{\pi_1} \dots \alpha_{\pi_p}}.$$

Суммы берутся по всем перестановкам  $\pi$  чисел  $1, 2, \dots, p$ , а коэффициент  $(-1)^\pi$  равен  $+1$  или  $-1$  в зависимости от того, четна или нечетна перестановка  $\pi$ . У величины  $V$  могут быть и другие индексы, не входящие в число  $p$  индексов  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ , но введенные нами скобочные операции действуют лишь на явно выписанные индексы. Индексы  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_p$  означают те числа, в кото-



рые переходят  $1, 2, \dots, p$  под действием перестановки  $\pi$ . Например,

$$V_{(\alpha_1 \alpha_2)} \equiv \frac{1}{2} (V_{\alpha_1 \alpha_2} + V_{\alpha_2 \alpha_1}),$$

или, что то же,

$$V_{(\mu\nu)} \equiv \frac{1}{2} (V_{\mu\nu} + V_{\nu\mu}).$$

а) Пусть  $F$  — антисимметричная,  $T$  — симметричная и  $V$  — произвольная величины. Пользуясь приведенными выше определениями, вычислить в явном виде  $V_{[\mu\nu]}$ ,  $F_{[\mu\nu]}$ ,  $F_{(\mu\nu)}$ ,  $T_{[\mu\nu]}$ ,  $T_{(\mu\nu)}$ ,  $V_{[\alpha\beta\gamma]}$ ,  $T_{(\alpha\beta, \gamma)}$ ,  $F_{[\alpha\beta, \gamma]}$ .

б) Вывести следующие формулы:

$$V_{((\alpha_1 \dots \alpha_p))} = V_{(\alpha_1 \dots \alpha_p)}; \quad V_{[[\alpha_1 \dots \alpha_p]]} = V_{[\alpha_1 \dots \alpha_p]};$$

$$V_{(\alpha_1 \dots [\alpha_l \alpha_m] \dots \alpha_p)} = 0; \quad V_{[\alpha_1 \dots [\alpha_l \alpha_m] \dots \alpha_p]} = V_{[\alpha_1 \dots \alpha_l \alpha_m \dots \alpha_p]}.$$

в) Пользуясь «скобочными обозначениями», доказать, что из соотношения  $F_{\mu\nu} = A_{\nu, \mu} - A_{\mu, \nu}$  следует соотношение  $F_{\alpha\beta, \gamma} + F_{\beta\nu, \alpha} + F_{\nu\alpha, \beta} = 0$ . (Половина уравнений Максвелла!)

**Задача 3.18.** Доказать, что для любого тензора  $X$  с двумя индексами

$$X_{\alpha\beta} = X_{(\alpha\beta)} + X_{[\alpha\beta]},$$

где скобки  $( )$  и  $[ ]$  означают соответственно симметризацию и антисимметризацию заключенных в них индексов. Доказать также, что в общем случае

$$Y_{\alpha\beta\gamma} \neq Y_{(\alpha\beta\gamma)} + Y_{[\alpha\beta\gamma]}.$$

**Задача 3.19.** Доказать, что дельта-символ Кронекера  $\delta^\mu_\nu$  — тензор.

**Задача 3.20.** Доказать, что существует единственный с точностью до умножения на постоянную тензор  $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ , полностью антисимметричный по всем своим 4 индексам. Обычно его выбирают так, что в координатах Минковского  $\varepsilon_{0123} = 1$ . Каковы компоненты тензора  $\varepsilon$  в общей системе координат с метрикой  $g_{\mu\nu}$ ?

**Задача 3.21.** Доказать, что в локально ортонормированной системе координат

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

Как выглядит аналогичное соотношение в произвольной системе координат с метрикой  $g_{\mu\nu}$ ?

**Задача 3.22.** Вычислить

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}.$$

**Задача 3.23.** Доказать, что для любого тензора  $A^{\alpha}_{\beta}$   
 $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} A^{\alpha}_{\mu} A^{\beta}_{\nu} A^{\gamma}_{\lambda} A^{\delta}_{\sigma} = \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} \det \|A^{\alpha}_{\beta}\|$ ,  
 где  $\|A^{\alpha}_{\beta}\|$  — матрица с компонентами  $A^{\alpha}_{\beta}$ .

**Задача 3.24.** Доказать, что четыре вектора  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{x}$  линейно-независимы в том и только том случае, если  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \wedge \mathbf{x} \neq 0$ . Доказать также, что произведение  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \wedge \mathbf{x}$  четырех линейно-независимых векторов  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{x}$  с точностью до константы совпадает с полностью антисимметричным тензором  $\varepsilon$ . (Произведение  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$  двух векторов по определению равно их антисимметризованному прямому произведению, т. е.  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{u}$ .)

**Задача 3.25.** Пусть  $\mathbf{F}$  — антисимметричный тензор второго ранга с компонентами  $F^{\mu\nu}$ . Построим по  $\mathbf{F}$  другой антисимметричный тензор второго ранга  $*\mathbf{F}$  (так называемый тензор, дуальный тензору  $\mathbf{F}$ ), определив его следующим образом:

$$*\mathbf{F} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \mathbf{e}_{\mu} \otimes \mathbf{e}_{\nu}.$$

Доказать, что  $*(*\mathbf{F}) = -\mathbf{F}$ .

**Задача 3.26.** Доказать, что

$$V_{\sigma} V^{\sigma} = -\frac{1}{3!} (*V)_{\alpha\beta\gamma} (*V)^{\alpha\beta\gamma}.$$

**Задача 3.27.** Тензор  $\delta^{\mu\dots\lambda}_{\rho\dots\sigma}$  задан соотношением

$$\delta^{\mu\dots\lambda}_{\rho\dots\sigma} \equiv \det \begin{bmatrix} \delta^{\mu}_{\rho} & \dots & \delta^{\lambda}_{\rho} \\ \vdots & & \vdots \\ \delta^{\mu}_{\sigma} & \dots & \delta^{\lambda}_{\sigma} \end{bmatrix}.$$

Доказать, что если число верхних (или нижних) индексов больше 4, то этот тензор тождественно равен нулю.

**Задача 3.28.** Доказать, что

$$\delta^{\mu\nu}_{\lambda\kappa} = -\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\lambda\kappa\rho\sigma},$$

и обобщить это соотношение на случай тензоров  $\delta^{\mu\dots\nu}_{\lambda\dots\kappa}$  других рангов.

**Задача 3.29.** Доказать, что если антисимметричный тензор  $p^{\alpha\beta}$  является бивектором (т. е.  $p^{\alpha\beta} = A^{[\alpha} B^{\beta]}$ ), то

$$p^{\alpha\beta} p^{\gamma\delta} + p^{\alpha\gamma} p^{\delta\beta} + p^{\alpha\delta} p^{\beta\gamma} = 0$$

(соотношения Плюккера).

**Задача 3.30.** Определим в 4-пространстве 3-мерный элемент объема на гиперповерхности  $x^\alpha = x^\alpha(a, b, c)$  как  $d^3 \Sigma_\mu = (1/3!) \times \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} da db dc [\partial(x^\alpha, x^\beta, x^\gamma)/\partial(a, b, c)]$ , где последний множитель представляет собой якобиан  $3 \times 3$ . Вычислить компоненты элемента объема  $d^3 \Sigma_\mu$  для пространственноподобной гиперповерхности  $x^0 = \text{const}$ , параметризованной так, что  $x^1 = a$ ,  $x^2 = b$ ,  $x^3 = c$ .

**Задача 3.31.** Доказать, что инвариантный собственный элемент объема в 4-мерном пространстве определяется соотношением

$$dV = (-g)^{\frac{1}{2}} d^4x,$$

где дифференциал  $d^4x = dx dy dz dt$  вычислен в системе координат с метрикой  $g_{\mu\nu}$ .

**Задача 3.32.** Доказать, что собственный 3-мерный элемент объема наблюдателя, движущегося с 4-скоростью  $u$ , имеет вид

$$d^3V = (-g)^{\frac{1}{2}} u^0 d^3x$$

и является скалярным инвариантом.

**Задача 3.33.** Какой вид имеет инвариантный элемент объема контравариантного импульса  $d^4P$  в 3-мерном импульсном пространстве? Какой вид имеет инвариантный 3-мерный элемент объема на «массовой оболочке», т. е. при наложении ограничения  $(-\mathbf{P} \cdot \mathbf{P})^{1/2} = m$ ?

**Задача 3.34.** По данным наблюдений группа из  $N$  частиц занимает в 6-мерном фазовом пространстве объем  $dx dy dz dP^x dP^y \times dP^z$ , в силу чего плотность частиц  $\mathfrak{N}$  в фазовом пространстве определяется соотношением

$$N = \mathfrak{N} dx dy dz dP^x dP^y dP^z.$$

Доказать, что плотность частиц  $\mathfrak{N}$  лоренц-инвариантна, т. е., что все наблюдатели получают для  $\mathfrak{N}$  одно и то же числовое значение.

**Задача 3.35.** Векторное поле  $J^\alpha(x^\mu)$  удовлетворяет уравнению  $J^\alpha_{,\alpha} = 0$ , а его компоненты  $J^\alpha$  на больших расстояниях от начала координат убывают быстрее, чем  $r^{-2}$ .

а) Доказать, что величина  $\int J^0 d^3x$  постоянна по времени.

б) Доказать, что интеграл  $\int J^0 d^3x$  — скаляр, т. е. что

$$\int J^0 d^3x = \int J^{0'} d^3x'.$$

## ГЛАВА 4

### ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

В специальной теории относительности электромагнитное поле описывается антисимметричным тензором электромагнитного поля (тензором Максвелла)  $F^{\mu\nu}$ . В любой лоренцевской системе отсчета компоненты тензора  $F^{\mu\nu}$  связаны с напряженностями электрического и магнитного полей  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  в этой же системе отсчета соотношением

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E^x & E^y & E^z \\ -E^x & 0 & B^z & -B^y \\ -E^y & -B^z & 0 & B^x \\ -E^z & B^y & -B^x & 0 \end{bmatrix},$$

где  $\mu$  — индекс строки, а  $\nu$  — индекс столбца. Уравнения Максвелла можно представить в виде

$$F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 4\pi J^\mu,$$

$$F_{\alpha\beta}{}_{,\gamma} + F_{\gamma\alpha}{}_{,\beta} + F_{\beta\gamma}{}_{,\alpha} = 0,$$

где  $J^\mu = (\rho, \vec{J})$  — плотность 4-тока. Сила Лоренца для частицы с зарядом  $e$ , 4-импульсом  $p$  и 4-скоростью  $u$  равна

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = eF^{\mu\nu} u_\nu.$$

Плотность энергии

$$\mathcal{E} = (E^2 + B^2)/8\pi,$$

вектор потока энергии (вектор Пойнтинга)

$$\vec{S} = (\vec{E} \times \vec{B})/4\pi$$

и 3-мерный тензор напряжений

$$T^{ij} = \left[ -(E^i E^j + B^i B^j) + \frac{1}{2} \delta^{ij} (E^2 + B^2) \right] / 4\pi$$

образуют тензор энергии-импульса электромагнитного поля

$$T^{\mu\nu} = \left( F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) / 4\pi.$$



**Задача 4.1.** Найти магнитное поле  $\vec{B}$  от текущего по бесконечной проволоке тока  $I$ , используя для этого соответствующие преобразования Лоренца и суперпозицию электрических полей, создаваемых распределенными вдоль бесконечной прямой зарядами.

**Задача 4.2.** Доказать, что для электрического и магнитного полей величины  $B^2 - E^2$  и  $\vec{E} \cdot \vec{B}$  инвариантны относительно замены переменных и преобразований Лоренца. Существуют ли какие-нибудь инварианты, не сводящиеся к алгебраическим комбинациям этих двух инвариантов?

**Задача 4.3.** В некотором электромагнитном поле электрический вектор  $E$  образует угол  $\vartheta_0$  с вектором магнитного поля  $\vec{B}$ , причем угол  $\vartheta_0$  инвариантен для всех наблюдателей. Чему равен угол  $\vartheta_0$ ?

**Задача 4.4.** Доказать, что для электромагнитного поля величина  $\mathcal{E}^2 - |\vec{S}|^2$ , где  $\mathcal{E}$  — плотность энергии, а  $\vec{S}$  — вектор Пойнтинга, лоренц-инвариантна.

**Задача 4.5.** Доказать, что при  $(\vec{B} \cdot \vec{E}) + (B^2 - E^2)^2 \neq 0$  всегда найдется преобразование Лоренца, переводящее  $\vec{B}$  и  $\vec{E}$  в параллельные векторы ( $\vec{E}' \times \vec{B}' = 0$ ). [Указание. Рассмотреть векторы  $\vec{v} = \alpha(\vec{E} \times \vec{B})$  и попытаться подобрать значение параметра  $\alpha$ .]

**Задача 4.6.** Предположим, что  $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ . Доказать, что при  $B^2 - E^2 > 0$  существует преобразование Лоренца, обращающее в нуль электрическое поле ( $\vec{E} = 0$ ), а при  $B^2 - E^2 < 0$  — преобразование Лоренца, обращающее в нуль магнитное поле ( $\vec{B} = 0$ ). Что можно утверждать, если, кроме того, выполняется условие  $B^2 - E^2 = 0$ ?

**Задача 4.7.** Частицы в некоторой системе отсчета обладают зарядами  $e_i$ , 3-скоростями  $\vec{v}_i$  и движутся по траекториям  $\vec{x} = \vec{z}_i(t)$ . Вектор 4-тока обладает компонентами

$$J^0 = \sum_i e_i \delta^3[\vec{x} - \vec{z}_i(t)], \quad J^i = \sum_k e_k v^i \delta^3[\vec{x} - \vec{z}_k(t)].$$

Доказать, что его можно представить в виде

$$J^\mu = \sum_k \int e_k \delta^4[x^\alpha - z^\alpha_k(\tau)] u_k^\mu d\tau,$$

где  $u_k^\mu$  — 4-скорость  $k$ -й частицы,

**Задача 4.8.** Записав в явном виде компоненты тензора  $F$ , доказать, что уравнения

$$F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\beta\gamma,\alpha} + F_{\gamma\alpha,\beta} = 0, \quad F^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 4\pi J^{\alpha}$$

сводятся к уравнениям Максвелла

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{B} + \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho, \\ \vec{E} - \vec{\nabla} \times \vec{B} = -4\pi\vec{J}.$$

**Задача 4.9.** Доказать, что если  $F^{\mu\nu}$  — тензор электромагнитного поля, то уравнения Максвелла в вакууме можно представить в виде

$$F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \quad \text{и} \quad *F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$$

(\* $F^{\mu\nu}$  означает тензор, дуальный тензору  $F^{\mu\nu}$ ; см. задачу 3.25).

**Задача 4.10.** Выписав при  $\mu=0$  компоненту уравнения для 4-силы Лоренца

$$du^{\mu}/d\tau = (e/m) F^{\mu\beta} u_{\beta},$$

устанавливающую связь между  $F^{\mu\nu}$  и  $E_i, B_i$ , вывести соотношение

$$dP^0/dt = e\vec{v} \cdot \vec{E}.$$

**Задача 4.11.** Вывести соотношение между  $d\vec{P}/dt$  и векторами  $\vec{E}, \vec{B}$  из пространственных компонент уравнения 4-силы Лоренца ( $\vec{P}$  — пространственная часть 4-вектора  $P$ ).

**Задача 4.12.** Частица с зарядом  $q$  и массой  $m$ , пролетая по лаборатории со скоростью  $v\vec{e}_x$ , попадает в однородное поле  $\vec{E}$ , направленное вдоль оси  $y$ . Найти траекторию  $y(x)$ , по которой частица будет двигаться в дальнейшем.

**Задача 4.13.** Частица с зарядом  $q$ , массой  $m$  движется по круговой орбите радиуса  $R$  в однородном поле  $B\vec{e}_z$ .

а) Выразить  $B$  через  $R, q, m$  и угловую частоту  $\omega$ .

б) Скорость частицы постоянна, поскольку поле  $B$  не производит работы над частицей, однако наблюдателю, движущемуся со скоростью  $v\vec{e}_x$ , скорость частицы не кажется постоянной. Чему равна компонента  $u^{0'}$  4-скорости, измеренная этим наблюдателем?

в) Вычислить  $du^{0'}/d\tau$  и тем самым  $dP^{0'}/d\tau$ . Объяснить, каким образом может изменяться энергия частицы (поле  $B$  не производит работы над частицей).

**Задача 4.14.** Небольшая пробная частица (с массой  $m$  и положительным зарядом  $q$ ) обращается по круговой орбите вокруг

«неподвижного» (т. е. очень массивного) тела с положительным зарядом  $Q$ . Для удержания частицы на орбите приложено постоянное магнитное поле  $\vec{B}$ , перпендикулярное плоскости орбиты. В инерциальной системе, в которой центральное тело покоится, пробный заряд описывает окружность в плоскости, перпендикулярной полю  $B$ , с циклической частотой  $\omega$ . Выразить отношение заряда пробной частицы к ее массе через  $\omega$ ,  $R$ ,  $B$  и  $Q$ .

**Задача 4.15.** Доказать, что тензор энергии-импульса электромагнитного поля в отсутствие зарядов имеет нулевую дивергенцию (т. е.  $T^{\mu\nu}_{,\nu} = 0$ ).

**Задача 4.16.** Доказать, что тензор энергии-импульса электромагнитного поля имеет нулевой след.

**Задача 4.17.** Пусть  $T^{\mu\nu}$  — тензор энергии-импульса электромагнитного поля. Доказать, что

$$T^{\mu}_{\alpha} T^{\alpha}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} [(E^2 - B^2)^2 + (2\vec{E} \cdot \vec{B})^2] / (8\pi)^2.$$

**Задача 4.18.** Записать закон Ома  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$  в инвариантном виде через  $J^{\mu}$ ,  $F^{\mu\nu}$ ,  $\sigma$  и  $u^{\mu}$  (4-скорость проводящего элемента).

**Задача 4.19.** Для заряженной частицы вывести из действия

$$\int J^{\mu} A_{\mu} d^4x - m \int d\tau,$$

где  $J^{\mu}$  — 4-ток,  $A_{\mu}$  — 4-вектор потенциала и  $d\tau^2 \equiv -\eta_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}$ , выражение для 4-силы Лоренца.

**Задача 4.20.**

а) Доказать, что переход к дуальному тензору  $F \rightarrow *F$  сопровождается преобразованиями  $\vec{E} \rightarrow -\vec{B}$  и  $\vec{B} \rightarrow \vec{E}$ .

б) Доказать, что если тензор  $F$  удовлетворяет уравнениям Максвелла для вакуума, то дуальный тензор  $*F$  и тензор  $e^{*\alpha} F \equiv F \cos \alpha + *F \sin \alpha$  при произвольном  $\alpha$  также являются решениями уравнений Максвелла. (Преобразование  $F \rightarrow e^{*\alpha} F$  называется «дуальным поворотом».)

**Задача 4.21.** Если считать, что эстетика призвана играть немаловажную роль при выводе физических законов, то из соображений симметрии уравнения Максвелла следовало бы записать в виде

$$F^{\mu\nu}_{,\nu} = 4\pi J^{\mu},$$

$$*F^{\mu\nu}_{,\nu} = 4\pi K^{\mu}.$$

Каков физический смысл величины  $K$ ?

**Задача 4.22.** В пространстве-времени Минковского существует электромагнитный ток  $J^\mu(x^\nu)$ . Доказать, что величина

$$F^{\mu\nu}(x^\alpha) = \frac{4}{\pi i} \int \frac{r^{[\mu} J^{\nu]} d^4 \tilde{x}}{(r_\sigma r^\sigma)^2},$$

где  $r^\beta \equiv \tilde{x}^\beta - x^\beta$ , удовлетворяет уравнениям Максвелла. (Начать удобнее с построения функции Грина для уравнения  $\square A^\mu = -4\pi J^\mu$ .) Каким запаздывающим граничным условиям соответствует это решение?

**Задача 4.23.** Вывести уравнение для конвективной скорости изменения со временем магнитного поля, «вмороженного» в идеально проводящую жидкость, выразив ее через расхождение мировых линий, поперечный сдвиг и вращение жидкости. (Определения этих величин даны в задаче 5.18.)



## ГЛАВА 5

### ВЕЩЕСТВО И ИЗЛУЧЕНИЕ

При правильном описании энергии, импульса и напряжений релятивистской жидкости или поля используют симметричный тензор энергии-импульса  $T$ . В лоренцевской системе отсчета наблюдателя компоненты этого тензора связаны с произведенными наблюдателем измерениями следующим образом:

$$\begin{aligned}
 T^{00} & \text{— плотность массы-энергии (часто обозначаемая } \rho), \\
 T^{0j} = T^{j0} & \text{— } j\text{-я компонента плотности импульса,} \\
 & \text{— } j\text{-я компонента вектора потока энергии,} \\
 T^{ij} & \text{— компоненты обычного тензора напряжений (например,} \\
 T^{xx} & \text{— компонента давления в направлении оси } x).
 \end{aligned}$$

Если тензор энергии-импульса  $T^{\mu\nu}$  описывает *все* поля, жидкости, частицы и т. д., имеющиеся в системе, то полная информация о взаимосвязи между потоком импульса и обменом энергией содержится в *уравнениях движения*

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0.$$

Основные понятия релятивистской термодинамики и гидродинамики, вытекающие из этих уравнений, развиты в задачах.

Для удобства последующего изложения в некоторых задачах этой главы используется ковариантное дифференцирование, обозначаемое точкой с запятой. Читатель, не знакомый с ковариантным дифференцированием, может заменить все точки с запятыми просто запятыми (означающими частные производные в координатах Минковского). Кроме того, мы используем символ  $\nabla$ . Например,  $\nabla S$  означает  $S^{\alpha}_{;\beta}$ ,  $\nabla f$  соответствует  $f_{,\alpha}$ ,  $\nabla \cdot T$  заменяет прежнее обозначение  $T^{\mu\nu}_{;\nu}$  и т. д.

---

**Задача 5.1.** Вычислить в инерциальной системе отсчета  $S$  ненулевые компоненты тензора энергии-импульса для следующих систем.

а) Для группы частиц, движущихся относительно системы отсчета  $S$  с одной и той же скоростью  $\vec{\beta} = \beta \vec{e}_x$ . Плотность массы покоя этих частиц, измеренная в сопутствующей им системе

отсчета, равна  $\rho_0$ . Предполагается, что плотность частиц очень велика, и приближенно их можно рассматривать как некую сплошную среду.

б) Для кольца из  $N$  одинаковых частиц с массой  $m$ , вращающегося против часовой стрелки в плоскости  $xy$  вокруг неподвижной точки  $S$  и описывающего круги радиуса  $a$  с угловой частотой  $\omega$ . (Ширина кольца много меньше  $a$ .) Силы, удерживающие частицы на орбите, не входят в тензор энергии-импульса. Предполагается, что число  $N$  достаточно велико для того, чтобы частицы можно было считать распределенными по кольцу непрерывно.

в) Для двух колец из частиц, описанных в п. б. Одно кольцо вращается по часовой стрелке, другое — против часовой стрелки; они описывают круги одного и того же радиуса  $a$ . Частицы не сталкиваются и не взаимодействуют никаким другим способом.

**Задача 5.2.** Какой вид имеет тензор энергии-импульса для газа с собственной (т. е. измеренной в локальной системе покоя газа) плотностью  $N$  невзаимодействующих частиц с массой  $m$ , если все частицы обладают одинаковой скоростью  $v$ , но движутся изотропно? (Задачу требуется решить без предположения о том, что  $v \ll c$ .)

**Задача 5.3.** В системе покоя идеальной жидкости ее тензор энергии-импульса, если его записать через плотность массы-энергии  $\rho$  и давление  $p$ , имеет диагональный вид

$$T^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \rho & & & \\ & p & & \\ & & p & \\ 0 & & & p \end{bmatrix}.$$

Найти тензор энергии-импульса элемента объема жидкости с собственной плотностью  $\rho$ , давлением  $p$ , движущийся с 4-скоростью  $u$ .

**Задача 5.4.** Найти тензор энергии-импульса однородного магнитного поля. Чему равен усредненный тензор энергии-импульса, если поле  $B$  статично, но «хаотично», т. е. направление поля  $B$  изменяется, но так, что поле в среднем остается изотропным?

**Задача 5.5.** Площадь поперечного сечения стержня равна  $A$ , а масса, приходящаяся на единицу его длины, равна  $\mu$ . Записать тензор энергии-импульса внутри стержня, к которому приложено растягивающее усилие  $F$ . (Предполагается, что  $F$  равномерно распределено по поперечному сечению стержня.)

**Задача 5.6.** Веревка с массой на единицу длины  $\mu$  разрывается под действием статической нагрузки  $F$ . До какого максимального значения можно довести величину статической нагрузки  $F$ , не нарушая «слабое» условие энергии, согласно которому компонента  $T^{00}$  тензора энергии-импульса должна быть положительна для всех наблюдателей? Сколь близок стальной трос к этому теоретическому максимуму статической нагрузки?

**Задача 5.7.** На концы бесконечно тонкого стержня длины  $2a$  насажены точечные массы  $m$ . Центр стержня закреплен неподвижно в лабораторной системе отсчета, а сам стержень вращается вокруг центра с релятивистской угловой скоростью  $\omega$  (последнее означает, что линейная скорость  $\omega l$  концов стержня сравнима с  $c$ ). Масса стержня равна нулю. Найти тензор энергии-импульса  $T^{\mu\nu}$  для стержня и точечных масс.

**Задача 5.8.** Плоский конденсатор состоит из двух больших пластин площадью  $A$ , перпендикулярных оси  $x$  и разделенных небольшим промежутком  $d$ . Конденсатор заряжен так, что между его обкладками возникло однородное электрическое поле  $E$  (неоднородностью поля на краях обкладок можно пренебречь). «Электростатическая масса» конденсатора в его системе покоя составляет  $E^2 Ad/8\pi$ . Доказать, что электростатическая энергия *уменьшается*, если конденсатор движется в направлении оси  $x$ ! Учтем теперь, что обкладки конденсатора необходимо удерживать на расстоянии  $d$  друг от друга. Предположим, что им не дает сблизиться идеальный газ с собственной плотностью  $\rho_0$ . Доказать, что *полная* энергия конденсатора (электростатическая энергия + энергия газа) возрастает с увеличением скорости движения вдоль оси  $x$  точно так же, как энергия материальной точки.

**Задача 5.9.** Рассмотрим систему дискретных частиц с зарядом  $q_i$  и массой  $m_i$ , взаимодействующих посредством электромагнитных сил. Исходя из явного вида тензора энергии-импульса  $T^{\mu\nu}$  для частиц, доказать, что полный тензор энергии-импульса  $T^{\mu\nu}$  (системы частицы плюс поле) сохраняется:  $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ .

**Задача 5.10.** Спектральная интенсивность  $I_\nu$  излучения служит мерой интенсивности излучения вблизи частоты  $\nu$  в заданном направлении. По определению она равна потоку энергии, соответствующему единичному интервалу частот вблизи частоты  $\nu$  и приходящемуся на единичный телесный угол. Доказать, что величина  $I_\nu/\nu^3$  лоренц-инвариантна.

**Задача 5.11.** Излучение, испускаемое звездой, изотропно в ее системе покоя. Светимость звезды (количество световой энергии,

излучаемой в единицу времени) равна  $L$ . В некоторый момент времени звезда (по измерениям, произведенным с Земли) находится на расстоянии  $R$  и движется со скоростью  $v$ , образующей угол  $\theta$  с лучом зрения наблюдателя, который следит за звездой с Земли. Выразить поток излучения (количество световой энергии, испускаемой за единицу времени единичной площадкой на поверхности звезды), приходящий к наблюдателю на Земле, через  $R$ ,  $v$  и  $\theta$ , вычисленные в тот момент, когда излучение было испущено звездой.

**Задача 5.12.** Сферическая частица с массой  $m$  рассеивает все падающее на нее электромагнитное излучение изотропно в своей системе покоя. Пусть  $A$  — эффективное сечение рассеяния частицы. Вывести уравнение движения частицы в постоянном поле излучения с интенсивностью  $S$  (энергией, переносимой в единицу времени через единичную площадку) и решить его для случая, когда частица первоначально покоилась (эффект Пойнтинга — Робертсона).

**Задача 5.13.** Черная сфера, изготовленная из теплопроводящего материала и снабженная термометром, движется со скоростью  $v$  через поле излучения абсолютно черного тела с температурой  $T_0$ . Что показывает термометр?

**Задача 5.14.** В электронном газе с температурой  $T \ll m_e c^2/k$  фотон с энергией  $E \ll m_e c^2$  претерпевает столкновения и комптоновское рассеяние. Доказать, что в низшем порядке по  $E$  и  $T$  средняя энергия, теряемая фотонами при столкновениях, имеет вид

$$\langle \Delta E \rangle = (E/m_e c^2) (E - 4kT).$$

**Задача 5.15.** Доказать, что в специальной теории относительности тензор энергии-импульса изолированной физической системы конечной протяженности удовлетворяет тензорной теореме вириала:

$$\int T^{ij} d^3x = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int T^{00} x^i x^j d^3x.$$

**Задача 5.16.** Доказать, что тензор энергии-импульса  $T^{\mu\nu}$  обладает времениподобным собственным вектором в том и только в том случае, если физический наблюдатель ни в одном направлении не обнаруживает нескомпенсированного потока энергии. Какой физический смысл имеет собственный вектор тензора энергии-импульса?

**Задача 5.17.**

а) Рассмотрим напряженную среду, движущуюся со скоростью  $|\vec{v}| \ll 1$  относительно некоторой инерциальной системы отсчета.

Доказать, что в первом порядке по скорости пространственные компоненты плотности импульса равны

$$g^j = m^{jk} v^k,$$

где величины  $m^{jk}$  («инертная масса, приходящаяся на единицу объема») определяются из соотношений

$$m^{jk} = T^{0'0'} \delta^{jk} + T^{j'k'}$$

(т. е. выражаются через компоненты тензора энергии-импульса  $T^{\mu\nu}$  в системе покоя жидкости). Чему равны  $m^{jk}$  для идеальной жидкости?

б) Рассмотрим изолированное напряженное тело, находящееся в состоянии покоя и в равновесии ( $T^{\alpha\beta}_{,0} = 0$ ) в лабораторной системе отсчета. Доказать, что полная инертная масса такого тела, определяемая соотношением

$$M^{ij} = \int_{\text{по напряженному телу}} m^{ij} dx dy dz,$$

изотропна и равна массе покоя тела, т. е. доказать, что

$$M^{ij} = \delta^{ij} \int T^{00} dx dy dz.$$

**Задача 5.18.** Пусть  $\mathbf{u}$  — 4-скорость жидкости. Доказать, что  $\nabla \mathbf{u}$  можно представить в виде

$$u_{\alpha;\beta} = \omega_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} \vartheta P_{\alpha\beta} - a_\alpha u_\beta,$$

где  $\mathbf{a}$  — «4-ускорение» жидкости

$$a_\alpha \equiv u_{\alpha;\beta} u^\beta,$$

$\vartheta$  — «расхождение» мировых линий жидкости

$$\vartheta \equiv \nabla \cdot \mathbf{u} = u^\alpha_{;\alpha},$$

$\omega_{\alpha\beta}$  — «2-форма вращения» жидкости, а  $\sigma_{\alpha\beta}$  — «тензор сдвига»:

$$\omega_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} (u_{\alpha;\mu} P^\mu_\beta - u_{\beta;\mu} P^\mu_\alpha),$$

$$\sigma_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} (u_{\alpha;\mu} P^\mu_\beta + u_{\beta;\mu} P^\mu_\alpha) - \frac{1}{3} \vartheta P_{\alpha\beta}.$$

Здесь  $\mathbf{P}$  означает так называемый проекционный тензор

$$P_{\alpha\beta} \equiv g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta,$$

проектирующий векторы на 3-пространство, перпендикулярное 4-вектору  $\mathbf{u}$ .

**Задача 5.19.** Записать первое начало термодинамики для релятивистской жидкости (т. е. записать закон сохранения массы-энергии для элемента жидкости).

**Задача 5.20.** Пользуясь уравнениями движения ( $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ ), доказать, что течение идеальной жидкости изэнтропическое.

**Задача 5.21.** Доказать, что для идеальной жидкости с уравнением состояния  $\rho = \rho(n)$ , где  $n$  — плотность барионов, след тензора энергии-импульса  $T^\mu{}_\mu$  отрицателен в том и только в том случае, если

$$\frac{d \ln \rho}{d \ln n} < \frac{4}{3}.$$

**Задача 5.22.** Доказать, что в релятивистской идеальной жидкости скорость звука  $v_{\text{звук}}$  определяется соотношением

$$v_{\text{звук}}^2 = \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_{S = \text{const}}.$$

Доказать также, что при высоких температурах в релятивистском газе с уравнением состояния  $\rho \approx 3P$  (например, в фотонном газе)  $v_{\text{звук}} \approx 1/\sqrt{3}$ .

**Задача 5.23.** Скорость звука в жидкости определяется соотношением  $v_{\text{звук}}^2 = \partial \rho / \partial p |_{S = \text{const}}$ . Доказать, что

$$v_{\text{звук}}^2 = \Gamma_1 \rho / (\rho + p),$$

где  $\Gamma_1$  — показатель адиабаты:

$$\Gamma_1 = \left. \frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln n} \right|_{S = \text{const}}.$$

**Задача 5.24.** Чему равна скорость звука в идеальном ферми-газе при нулевой температуре?

**Задача 5.25.** В релятивистской аэродинамической трубе поток создают, открывая баллон с идеальным адиабатически сжатым газом. Предположим, что уравнение состояния газа в первом приближении имеет вид  $p \sim n^\gamma$ , где  $\gamma$  — постоянная, а скорость звука в газе равна  $a$ . Какова наибольшая скорость потока  $v_{\text{макс}}$  в такой трубе? (Гравитационными силами пренебречь. Поток считать изэнтропическим.)

**Задача 5.26.** Для идеализированного описания потока тепла в жидкости используют 4-вектор потока тепла  $\mathbf{q}$  с компонентами в системе покоя жидкости  $q^0 = 0$ ,  $q^i$  — энергии, проходящей в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную

базисному вектору  $e_j$  в положительном направлении оси  $j$ ). Какой тензор энергии-импульса соответствует потоку тепла?

**Задача 5.27.** Пусть  $s$ ,  $n$ , и  $q$  означают соответственно энтропию, приходящуюся на один барион, плотность барионов и поток тепла, измеренные в системе покоя жидкости. В этой системе отсчета 4-вектор  $q$  чисто пространственный. Пусть  $S$  — 4-вектор потока плотности энтропии. Доказать, что

$$S = nsu + q/T,$$

где  $u$  — 4-скорость системы покоя жидкости.

**Задача 5.28.** Предположим, что жидкость обладает некоторой теплопроводностью, описываемой 4-вектором  $q$  потока тепла, а в остальном «идеальна». Вычислить локальную скорость производства энтропии  $\nabla \cdot S$ .

**Задача 5.29.** Доказать, что в системе, движущейся равномерно ускоренно, условие теплового равновесия имеет вид не  $T = \text{const} = T_0$ , а

$$T = T_0 \exp(-\vec{a} \cdot \vec{x}),$$

где  $\vec{x}$  — пространственная часть радиус-вектора события относительно системы отсчета, движущейся с ускорением.

**Задача 5.30.** Тензор энергии-импульса для вязкой жидкости имеет вид

$$T^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta + p P^{\alpha\beta} - 2\eta \sigma^{\alpha\beta} - \zeta \Phi P^{\alpha\beta},$$

где  $\eta$  и  $\zeta$  — соответственно первая и вторая вязкости. Величины  $\sigma^{\alpha\beta}$ ,  $\Phi$ ,  $P^{\alpha\beta}$  определены так же, как в задаче 5.18. Давление и плотность равны  $p$  и  $\rho$ . Доказать, что вязкие члены приводят к производству энтропии со скоростью

$$S^\alpha{}_{;\alpha} = (\zeta \Phi^2 + 2\eta \sigma_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta})/T,$$

где  $T$  — температура жидкости. (*Указание.* Сначала необходимо доказать, что в отсутствие потока тепла  $S^\alpha{}_{;\alpha} = [d\rho/d\tau + \Phi(\rho + p)]/T$ , а затем, продифференцировав соотношение  $\rho u^\beta = -T^{\alpha\beta} u_\alpha$ , найти  $d\rho/d\tau$ .)

**Задача 5.31.** Тензор энергии-импульса имеет вид

$$T^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta + p P^{\alpha\beta} - 2\eta \sigma^{\alpha\beta} - \zeta \Phi P^{\alpha\beta}.$$

Доказать, что уравнения движения, выведенные из соотношения

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0,$$

в нерелятивистском пределе переходят в уравнения Навье — Стокса.

**Задача 5.32.** Как и в нерелятивистской термодинамике, удельные теплоемкости газа при постоянном объеме и постоянном давлении определяются соотношениями

$$c_v = T \left. \frac{ds}{dT} \right|_n, \quad c_p = T \left. \frac{ds}{dT} \right|_p.$$

Доказать, что для идеального газа Максвелла — Больцмана  $c_p = c_v + k$ , где  $k$  — постоянная Больцмана. Доказать также, что показатель адиабаты

$$\Gamma_1 \equiv \left. \frac{\partial \ln p}{\partial \ln n} \right|_s$$

равен отношению удельных теплоемкостей

$$\gamma \equiv c_p/c_v.$$

**Задача 5.33.** Доказать, что если для идеального газа Максвелла — Больцмана отношение удельных теплоемкостей  $\gamma$  в рассматриваемом режиме приближенно можно считать постоянным, то  $p = Kn^\gamma$  и при адиабатических условиях  $\rho = mn + Kn^\gamma/(\gamma - 1)$  ( $K$  — постоянная,  $m$  — масса частиц газа).

**Задача 5.34.** Инвариантная функция равновесного распределения релятивистского газа имеет вид

$$\mathfrak{N}(p^\alpha, x^\alpha) \equiv \frac{dN}{d^3x d^3P} = \frac{(2J+1)/h^3}{\exp\left[-\frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{u}}{kT} - \phi\right] - \varepsilon},$$

где  $J$  — спин частиц,  $h$  — постоянная Планка,  $\mathbf{u}$  — средняя 4-скорость газа, а параметр  $\varepsilon$  равен 1, 0 или  $-1$  в зависимости от того, какой статистике (Бозе — Эйнштейна, Максвелла — Больцмана или Ферми — Дирака) подчиняется газ. Параметр  $\phi$  не зависит от  $\mathbf{P}$ . Первые два момента функции распределения  $\mathfrak{N}$  определяются формулами

$$J^\mu = \int \mathfrak{N} P^\mu \frac{d^3P}{(-\mathbf{P} \cdot \mathbf{u})}, \quad T^{\mu\nu} \equiv \int \mathfrak{N} P^\mu P^\nu \frac{d^3P}{(-\mathbf{P} \cdot \mathbf{u})}.$$

Поскольку  $\mathbf{u}$  — единственный свободный вектор, то эти интегралы должны иметь вид

$$J^\mu = n u^\mu, \quad T^{\mu\nu} = (\rho + p) u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}$$

(выписанные соотношения представляют собой не что иное, как определения, даваемые молекулярно-кинетической теорией для величин  $n$ ,  $\rho$ ,  $p$ ).

- Записать  $n$ ,  $\rho$  и  $p$  в виде 1-мерных интегралов.
- Вывести соотношение

$$dp = (\rho + p)/T dT + nkT d\phi.$$



в) Исходя из первого начала термодинамики, доказать, что  $kT\theta$  совпадает с химическим потенциалом  $\mu = (\rho + p)/n - Ts$ .

г) Доказать, что для газа Максвелла — Больцмана  $p = nkT$  при любой температуре  $T$ .

д) Доказать, что для газа Максвелла — Больцмана соотношение  $p = n \left[ m + \frac{3}{2} (kT) \right]$  является приближенным и справедливо лишь при  $kT \ll m$ . Вывести точное соотношение для  $p/n$ . Во что переходит  $p/n$  в пределе при  $kT \gg m$ ? (Здесь  $m$  — масса частицы газа.)

**Задача 5.35.** Найти зависимость  $\gamma(T)$  отношения удельных теплоемкостей при постоянном давлении и объеме от температуры для идеального газа Максвелла — Больцмана.

## ГЛАВА 6

### МЕТРИКА

Метрическая геометрия — геометрия, определяемая формулой расстояния между двумя бесконечно близкими точками  $ds^2 = -g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ , — лежит в основе общей теории относительности и большинства последующих глав этой книги. Разумеется, особо важную роль играет метрика пространства-времени, которую чисто формально можно локально преобразовать в метрику Минковского. Это означает, что для любой точки  $P$  в пространстве-времени существует преобразование координат, в результате которого в точке  $P$  будет выполняться равенство

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}.$$

---

#### **Задача 6.1.**

а) Доказать, что 2-мерное пространство с метрикой

$$ds^2 = dv^2 - v^2 du^2 \quad (1)$$

представляет собой не что иное, как плоское 2-мерное пространство Минковского, обычно описываемое метрикой

$$ds^2 = dx^2 - dt^2. \quad (2)$$

Для этого необходимо найти преобразования координат  $x(v, u)$  и  $t(v, u)$ , переводящие метрику (2) в метрику (1).

б) Доказать, что для свободно движущейся частицы компонента 4-импульса  $P_u$  постоянна, а компонента  $P_v$  отлична от постоянной.

**Задача 6.2.** Доказать, что линейный элемент

$$ds^2 = R^2 [d\alpha^2 + \sin^2 \alpha (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)]$$

соответствует гиперсфере радиуса  $R$  в евклидовом 4-пространстве, т. е. геометрическому месту точек, отстоящих на расстоянии  $R$  от некоторой заданной точки.

**Задача 6.3.** Метрика для поверхности земного шара имеет вид

$$ds^2 = a^2 (d\lambda^2 + \cos^2 \lambda d\varphi^2),$$

где  $\lambda$  — широта, а  $\varphi$  — долгота. Метрика плоской карты мира с прямоугольными координатами  $x$  и  $y$  имеет вид

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Нас интересует не геометрия карты, а геометрия изображенной на ней поверхности земного шара. Записать метрику земной поверхности в координатах  $x$  и  $y$ , нанесенных на карту мира: а) в цилиндрической проекции, б) в стереографической проекции.

**Задача 6.4.** Проекция Меркатора определяется следующим образом. На карте вводятся прямоугольные координаты  $(x, y)$ , такие, что любая прямая на карте соответствует линии постоянного азимута (фиксированного положения стрелки компаса) на поверхности земного шара.

а) Доказать, что в проекции Меркатора точке на поверхности земного шара со сферическими координатами  $(\vartheta, \varphi)$  на карте соответствует точка с координатами  $x = \varphi$ ,  $y = \ln \operatorname{ctg}(\vartheta/2)$ .

б) Как записывается метрика земного шара в координатах  $(x, y)$ ?

в) Доказать, что, за исключением особых случаев, когда  $y = 0$  или  $x = \operatorname{const}$ , большим кругам соответствуют трансцендентные кривые  $\operatorname{sh} y = \alpha \sin(x + \beta)$ .

**Задача 6.5.** Внешне некоторое пространство выглядит как 3-мерное с координатами  $x, y, z$  и метрикой

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - \left( \frac{3}{13} dx + \frac{4}{13} dy + \frac{12}{13} dz \right)^2.$$

Доказать, что в действительности оно двумерное, и найти две новые координаты  $\zeta$  и  $\eta$ , в которых линейный элемент принимает вид

$$ds^2 = d\zeta^2 + d\eta^2.$$

**Задача 6.6.** Доказать, что свертка вектора  $\mathbf{V}$  с «проекционным тензором»  $\mathbf{P} \equiv \mathbf{g} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$  проектирует вектор  $\mathbf{V}$  на 3-пространство, ортогональное вектору 4-скорости  $\mathbf{u}$ . Если  $\mathbf{n}$  — единичный времениподобный вектор, то соответствующий ему проекционный оператор имеет вид  $\mathbf{P} \equiv \mathbf{g} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$  (доказать). Доказать также, что проекционный оператор, ортогональный изотропному вектору, определен неоднозначно.

**Задача 6.7.** Доказать, что при любой функции  $f$  конформное преобразование метрики  $g_{\alpha\beta} \rightarrow f(x^\mu) g_{\alpha\beta}$  сохраняет все углы. (Как определить углы?) Доказать также, что все изотропные кривые под действием конформного преобразования переходят в изотропные кривые.

**Задача 6.8.** Метрику в пространстве скоростей частицы можно ввести, определив расстояние между двумя близкими скоростями как их относительную скорость. Доказать, что эту метрику можно привести к виду

$$ds^2 = d\chi^2 + \text{sh}^2 \chi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2),$$

где величина скорости  $v = \text{th} \chi$ .

**Задача 6.9.** На многообразии, обладающем топологией 2-сферы, в окрестности точки  $\vartheta = \frac{1}{2}$ ,  $\chi = 0$  введена метрика

$$ds^2 = d\vartheta^2 + (\vartheta - \vartheta^3)^2 d\chi^2.$$

На многообразии имеется ровно одна точка, которая не является локально плоской, — в этой точке многообразие имеет «коническую» особенность<sup>1)</sup>. Доказать, что существуют два различных максимальных аналитических продолжения метрики (т. е., что метрику можно продолжить двумя различными способами), удовлетворяющих условию, согласно которому у многообразия существует лишь одна коническая особенность. Это означает, что в локальных координатах метрика не всегда «ухватывает» глобальную структуру многообразия. (*Указание.* Рассмотреть периодичность координаты  $\chi$ .)

**Задача 6.10.** Найти наиболее общий вид (пространственно) сферически-симметричной метрики пространства-времени.

<sup>1)</sup> См. также задачу 16.15. — *Прим. ред.*

## ГЛАВА 7

### КОВАРИАНТНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ

Частные производные вектора или тензора по пространственным координатам (например,  $A^{\mu}_{,\nu}$  или  $Q^{\alpha\beta\dots\gamma\delta\dots,\nu}$ ) сами по себе не являются компонентами тензора. Это обстоятельство, а также криволинейность координат, необязательная в плоском и неизбежная в искривленном пространстве, которую необходимо учитывать, приводят к идее о ковариантном дифференцировании.

Тензор, возникающий при дифференцировании тензора  $\mathbf{Q}$  с компонентами  $Q^{\alpha\beta\dots\gamma\delta\dots}$ , обозначается  $\nabla\mathbf{Q}$  и имеет компоненты

$$Q^{\alpha\beta\dots\gamma\delta\dots;\sigma} \equiv Q^{\alpha\beta\dots\gamma\delta\dots,\sigma} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma} Q^{\nu\beta\dots\gamma\delta\dots} + \\ + \Gamma^{\beta}_{\nu\sigma} Q^{\alpha\nu\dots\gamma\delta\dots} + \dots - \Gamma^{\nu}_{\gamma\sigma} Q^{\alpha\beta\dots\nu\delta\dots} - \\ - \Gamma^{\nu}_{\delta\sigma} Q^{\alpha\beta\dots\gamma\nu\dots}$$

(для каждого индекса исходного тензора  $\mathbf{Q}$  имеется по одному «поправочному» члену). Величины  $\Gamma$  называются символами Кристоффеля, или коэффициентами (аффинной) связности. В координатном репере они связаны с частными производными метрического тензора соотношениями

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = g^{\alpha\mu} \Gamma_{\mu\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} (g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu})$$

(первое равенство *служит определением* величины  $\Gamma_{\mu\beta\gamma}$ ). Символы Кристоффеля представляют собой наборы чисел, но не являются компонентами тензора (преобразуются не так, как тензор).

Свертка ковариантной производной тензора и вектора  $\mathbf{u}$  называется производной тензора  $\mathbf{Q}$  по направлению  $\mathbf{u}$ :

$$(\nabla\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{u} \equiv \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{Q} \equiv Q^{\alpha\beta\dots\gamma\delta\dots;\nu} u^{\nu}.$$

Если вектор  $\mathbf{u}$  совпадает с касательной к кривой, на которой введен параметр  $\lambda$ , то иногда вместо  $u^{\alpha} = dx^{\alpha}/d\lambda$  пишут  $\mathbf{u} = d/d\lambda$  и

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{Q} \equiv \frac{D\mathbf{Q}}{d\lambda}.$$

Если вектор  $\mathbf{u}$  совпадает с одним из базисных векторов  $\mathbf{e}_{\alpha}$ , то  $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{Q}$  принято записывать в виде

$$\nabla_{\mathbf{e}_{\alpha}}\mathbf{Q} \equiv \nabla_{\alpha}\mathbf{Q}.$$

Базисные векторы  $e_\alpha$  позволяют представить символы Кристоффеля в виде

$$\nabla_\beta e_\alpha = \Gamma^\mu_{\alpha\beta} e_\mu \quad \text{или} \quad \Gamma_{\mu\alpha\beta} = e_\mu \cdot \nabla_\beta e_\alpha.$$

Оператор ковариантного дифференцирования  $\nabla$  обладает всеми хорошими свойствами, которые можно ожидать от оператора дифференцирования, за исключением того, что в искривленном пространстве  $\nabla_u \nabla_v \neq \nabla_v \nabla_u$  (см. гл. 9).

Пусть  $\mathbf{u}$  — вектор, касательный к некоторой кривой. Мы скажем, что тензор  $\mathbf{Q}$  параллельно переносится вдоль этой кривой, если

$$\nabla_u \mathbf{Q} = 0.$$

Если параллельно переносится сам касательный вектор  $\mathbf{u}$ , т. е. если

$$\nabla_u \mathbf{u} = 0$$

(иначе говоря, если касательный вектор «ковариантно постоянен», то кривая называется геодезической — обобщением прямой в плоском пространстве. Если  $x^\alpha(\lambda)$  — геодезическая ( $u^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$ ), то компоненты уравнения геодезической имеют вид

$$0 = (\nabla_u \mathbf{u})^\mu = \frac{du^\mu}{d\lambda} + u^\alpha u^\beta \Gamma^\mu_{\alpha\beta}.$$

Параметр  $\lambda$  должен быть аффинным вдоль кривой. Для неизотропных кривых это означает, что параметр  $\lambda$  должен быть пропорционален собственной длине.

Пусть кривая времениподобна,  $\mathbf{u}$  — касательный вектор к кривой и  $\mathbf{a} \equiv \nabla_u \mathbf{u} = D\mathbf{u}/dt$ . Говорят, что вектор  $\mathbf{V}$  переносится вдоль  $\mathbf{u}$  в смысле Ферми — Уокера, если

$$\nabla_u \mathbf{V} = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{a} - \mathbf{a} \otimes \mathbf{u}) \cdot \mathbf{V}.$$

**Задача 7.1.** Доказать, что коэффициенты связности  $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$  не удовлетворяют закону преобразования тензоров.

**Задача 7.2.** Предположим, что в 2-мерном плоском евклидовом пространстве, описываемом полярными координатами  $r, \phi$ , геодезическими служат обычные прямые.

а) Пользуясь тем, что геодезические известны, и уравнением геодезических

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} \Gamma^\mu_{\alpha\beta} = 0,$$

найти коэффициенты связности  $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ .

б) Предположим, что в декартовых координатах  $x, y$ , связанных с полярными координатами  $r, \vartheta$ , как обычно, ковариантная структура задана соотношениями

$$\Gamma^x_{xx} = \Gamma^x_{xy} = \dots = 0.$$

Пользуясь законом преобразования коэффициентов связности, вычислить их в полярных координатах  $r, \vartheta$ .

в) Исходя из линейного элемента  $ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2$ , найти символы Кристоффеля обычным способом — как производные компонент метрического тензора  $g_{\mu\nu}$ . (Разумеется, символы Кристоффеля, вычисленные всеми тремя способами, должны совпадать.)

**Задача 7.3.** Рассмотрим уже знакомое нам метрическое пространство

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2.$$

а) Написать 2 уравнения, вытекающие из уравнения геодезических, и доказать, что

$$r^2 \frac{d\vartheta}{ds} = R_0 = \text{const},$$

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\vartheta}{ds}\right)^2 = 1$$

— первые интегралы этих уравнений.

б) Пользуясь результатами, полученными в п. „а“, вывести дифференциальное уравнение первого порядка для  $r(\vartheta)$  (иначе говоря, исключить параметр  $s$  и ввести вместо него параметр  $\vartheta$ ).

в) Пользуясь тем, что метрическое пространство  $ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2$  является плоским 2-мерным евклидовым пространством, написать общее уравнение прямой в полярных координатах  $r, \vartheta$ . Проверить, что прямая удовлетворяет уравнению, выведенному в п. „б“.

**Задача 7.4.** Найти все коэффициенты связности  $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$  и все времениподобные геодезические для 2-мерной метрики  $ds^2 = (dx^2 - dt^2)/t^2$ .

**Задача 7.5.** Доказать, что метрический тензор ковариантно постоянен.

**Задача 7.6.** Доказать, что в координатном репере с диагональным метрическим тензором символы Кристоффеля определяются соотношениями

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = 0, \quad \Gamma^\mu_{\lambda\lambda} = -\frac{1}{2g_{\mu\mu}} \frac{\partial g_{\lambda\lambda}}{\partial x^\mu},$$

$$\Gamma^\mu_{\mu\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} (\ln(|g_{\mu\mu}|)^{1/2}), \quad \Gamma^\mu_{\mu\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\ln(|g_{\mu\mu}|)^{1/2}).$$

Здесь  $\mu \neq \nu \neq \lambda$ , и по повторяющимся индексам суммирование не производится.

**Задача 7.7.** Доказать следующие тождества:

- а)  $g_{\alpha\beta, \gamma} = \Gamma_{\alpha\beta\gamma} + \Gamma_{\beta\alpha\gamma}$ ;  
 б)  $g_{\alpha\mu} g^{\mu\beta},_{\gamma} = -g^{\mu\beta} g_{\alpha\mu, \gamma}$ ;  
 в)  $g^{\alpha\beta},_{\gamma} = -\Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma} g^{\mu\beta} - \Gamma^{\beta}_{\mu\gamma} g^{\mu\alpha}$ ;  
 г)  $g_{, \alpha} = -g g_{\beta\gamma} g^{\beta\gamma},_{\alpha} = g g^{\beta\gamma} g_{\beta\gamma, \alpha}$ ;  
 д)  $\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta} = (\ln |g|^{1/2}),_{\beta}$  (в координатном репере);  
 е)  $g^{\mu\nu} \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = -\frac{1}{|g|^{1/2}} (g^{\alpha\nu} |g|^{1/2}),_{\nu}$  (в координатном репере);  
 ж)  $A^{\alpha},_{\alpha} = \frac{1}{|g|^{1/2}} (|g|^{1/2} A^{\alpha}),_{\alpha}$  (в координатном репере);  
 з)  $A^{\alpha\beta},_{\beta} = \frac{1}{|g|^{1/2}} (|g|^{1/2} A^{\alpha\beta}),_{\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu} A^{\lambda\mu}$  (в координатном репере);  
 и)  $A^{\alpha\beta},_{\beta} = \frac{1}{|g|^{1/2}} (|g|^{1/2} A^{\alpha\beta}),_{\beta}$  (в координатном репере, если тензор  $A^{\alpha\beta}$  антисимметричен);  
 к)  $\square S = S_{, \alpha} = \frac{1}{|g|^{1/2}} (|g|^{1/2} g^{\alpha\beta} S_{, \beta}),_{\alpha}$  (в координатном репере).

**Задача 7.8.** Пусть  $A \equiv \det(A_{\mu\nu})$ , где  $A_{\mu\nu}$  — тензор второго ранга. Доказать, что  $A$  не скаляр, т. е. что значение  $A$  изменяется при преобразованиях координат. Поскольку  $A$  не скаляр, ковариантную производную нельзя определить как  $A_{, \alpha} = A_{, \alpha}$ . Каким образом следует определить  $A_{, \alpha}$  (через  $A_{, \alpha}$  и  $A$ )?

**Задача 7.9.** В некоторой заданной точке  $P$  геодезическая времениподобна. Доказать, что она времениподобна в любой своей точке. Аналогичные утверждения справедливы для геодезических, пространственноподобных и изотропных в точке  $P$ .

**Задача 7.10.** Вывести уравнение геодезических, пользуясь определением геодезической как кривой экстремальной длины.

**Задача 7.11.** Аффинным называется параметр  $\lambda$ , при котором уравнение геодезических приводится к виду

$$\frac{d^2 x^{\alpha}}{d\lambda^2} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} \frac{dx^{\beta}}{d\lambda} \frac{dx^{\gamma}}{d\lambda} = 0.$$

Доказать, что все аффинные параметры связаны линейными преобразованиями с постоянными коэффициентами.

**Задача 7.12.** Доказать, что в плоском пространстве-времени закон сохранения для 4-импульса свободно движущейся частицы



можно записать в виде  $\nabla_{\mathbf{p}}\mathbf{p}=0$ . Доказать также, что частицы с нулевой массой покоя движутся вдоль времениподобных геодезических.

**Задача 7.13.** Предположим, что координата  $x^1$  циклическая, т. е. компоненты метрического тензора  $g_{\alpha\beta}$  не зависят от  $x^1$ . Доказать, что если  $\mathbf{p}$  — импульс свободно движущейся частицы, то компонента  $p_1$  постоянна вдоль мировой линии частицы.

**Задача 7.14.** Доказать следующий вариант принципа Ферма, справедливый в общей теории относительности. В любой статической метрике ( $g_{0j}=g_{\alpha\beta,0}=0$ ) рассмотрим все изотропные кривые, проходящие через две точки пространства  $x^j=a^j$  и  $x^j=b^j$ . Чтобы добраться из  $a^j$  в  $b^j$  вдоль каждой такой изотропной кривой  $x^j(t)$ , необходимо затратить определенное координатное время  $\Delta t$ . Доказать, что кривые с экстремальным временем  $\Delta t$  являются изотропными геодезическими пространства-времени.

**Задача 7.15.**

а) Доказать, что геодезические в пространстве скоростей с метрикой, введенной в задаче 6.8, служат траекториями, следуя по которым с переменной скоростью, космический корабль расходует наименьшее количество топлива.

б) Космический корабль, летящий в межзвездном пространстве со скоростью  $\vec{V}_1$  (относительно Земли), изменяет скорость полета (новая скорость равна  $\vec{V}_2$ ) так, чтобы свести до минимума расход топлива. Какова наименьшая скорость космического корабля относительно Земли за время этого маневра?

**Задача 7.16.** В точке  $\vartheta = \vartheta_0$ ,  $\varphi = 0$  на поверхности 2-сферы  $ds^2 = d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2$  вектор  $\mathbf{A}$  равен  $\mathbf{e}_\vartheta$ . Во что перейдет вектор  $\mathbf{A}$  после параллельного переноса вдоль окружности  $\vartheta = \vartheta_0$ ? Чему равна величина вектора  $\mathbf{A}$ ?

**Задача 7.17.** Рассмотрим наблюдателя, движущегося с 4-скоростью  $\mathbf{u}$  и переносящего с собой 4 базисных вектора  $\mathbf{e}_\alpha$  по закону

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{e}_\alpha = A_\alpha^\beta \mathbf{e}_\beta.$$

Каков наиболее общий вид тензора  $A_\alpha^\beta$ , если:

- 1) Базисные векторы должны быть ортонормированными?
- 2) Должно еще выполняться равенство  $\mathbf{e}_\delta = \mathbf{u}$  (т. е. система отсчета должна совпадать с системой покоя наблюдателя)?
- 3) Кроме того, пространственные векторы не должны порождать повороты (т. е. наблюдатель должен видеть, что на свободно падающие частицы не действуют кориолисовы силы)?

**Задача 7.18.** Доказать, что скалярное произведение двух векторов не изменится, если их подвергнуть переносу Ферми — Уокера вдоль кривой  $\mathcal{C}$ .

**Задача 7.19.** Доказать, что перенос Ферми — Уокера вдоль геодезической совпадает с параллельным переносом.

**Задача 7.20.** Записать следующие выражения в безындексных обозначениях:

$$\begin{aligned} \text{а) } U_{\alpha;\beta} U^{\beta} U^{\alpha}, & \quad \text{б) } V^{\alpha;\beta} U^{\beta} - U^{\alpha;\beta} V^{\beta}, \\ \text{в) } T_{\alpha\beta;\gamma} V^{\alpha} W^{\beta} U^{\gamma}, & \quad \text{г) } W^{\alpha;\beta} V_{\beta;\gamma} U^{\gamma}, \\ \text{д) } W^{\alpha;\gamma\beta} U^{\gamma} U^{\beta} + W^{\alpha;\gamma} U^{\gamma;\beta} U^{\beta} - U^{\alpha;\beta} W^{\beta;\gamma} U^{\gamma}. \end{aligned}$$

**Задача 7.21.** Доказать, что траектории световых лучей в статическом изотропном пространстве-времени можно описать, введя надлежащим образом подобранный «показатель преломления»  $n(x^j)$ , изменяющийся от одной точки пространства к другой. Как показатель преломления  $n$  зависит от компонент метрического тензора  $g_{\alpha\beta}$ ? Предположить, что  $g_{\alpha\beta}$  имеет вид

$$ds^2 = g_{00} dt^2 - f(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2).$$

**Задача 7.22.** Пьяный астронавт включает двигатели своего корабля короткими импульсами, «выстреливая» выхлопными газами беспорядочно в разные стороны. По измерениям, произведенным в мгновенно сопутствующей системе отсчета, каждое включение двигателей соответствует бусту на  $\Delta v \ll c$ . Найти распределение вероятности для скорости космического корабля после  $n$  включений двигателей, где  $n$  — очень большое число. Доказать, что пьяный астронавт разгонит свой корабль до релятивистских скоростей с гораздо меньшей эффективностью, чем его трезвый коллега (неукоснительно следящий за тем, чтобы корабль двигался в одну и ту же сторону): для достижения одной и той же скорости число включений двигателей у пьяного астронавта в среднем будет больше в  $3c/\Delta v$  раз.

**Задача 7.23.**

а) Предположим, что векторное поле  $k$  ортогонально семейству гиперповерхностей («гиперповерхностно ортогонально»). Доказать, что тогда  $k_{[\mu;\nu} k_{\lambda]} = 0$ .

б) Какой геометрический смысл имеет «гиперповерхностно ортогональное» векторное поле, если  $k_{[\mu;\nu]} = 0$ ?

**Задача 7.24.** Доказать, что любая конгруэнция изотропных кривых (т. е. любая ортогональная им гиперповерхность) состоит из изотропных геодезических.

**Задача 7.25.** Доказать, что вариационный принцип

$$\delta \int (g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta) ds = 0$$

порождает те же геодезические, которые заданы их определяющим свойством

$$\delta \int (g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta)^{1/2} ds = 0,$$

если  $s$  — собственная длина (а не произвольно выбранный параметр) и  $\dot{x} \equiv dx^\alpha/ds$ . Доказать также, что если  $y \equiv (g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta)^{1/2}$ , то

$$\delta \int F(y) ds = 0$$

порождает одни и те же геодезические при *любой* монотонной функции  $F(y)$ .

## ГЛАВА 8

### ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ (НОВЫЕ ПОНЯТИЯ)

Вектор  $\mathbf{V}$  связан со своими контравариантными компонентами  $V^\mu$  соотношением

$$\mathbf{V} = V^\mu \mathbf{e}_\mu,$$

где  $\mathbf{e}_\mu$  — базисные векторы. Ковариантные компоненты  $V_\mu$  задают тот же вектор, но представляют его как «вектор» другого типа — так называемую 1-форму. (Иногда 1-формы также называют «ковариантными векторами».) Для 1-форм аналог приведенного выше соотношения имеет вид

$$\tilde{V} = V_\mu \tilde{\omega}^\mu,$$

где тильда  $\tilde{\phantom{x}}$  означает 1-форму, а  $\tilde{\omega}^\mu$  — базисные 1-формы с ковариантными компонентами  $(1, 0, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0, 0)$  и т. д. Произвольный тензор  $\mathbf{T}$  с компонентами  $T_{\alpha\beta\dots\gamma\delta\dots}$  можно представить в виде

$$\mathbf{T} = T_{\alpha\beta\dots\gamma\delta\dots} \tilde{\omega}^\alpha \otimes \tilde{\omega}^\beta \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_\gamma \otimes \mathbf{e}_\delta \otimes \dots$$

Скалярное произведение двух векторов или двух 1-форм содержит компоненты метрического тензора и обозначается точкой:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu,$$

$$\tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{B}} = g^{\mu\nu} A_\mu B_\nu$$

(здесь  $g^{\mu\nu}$  — матрица, обратная матрице  $g_{\mu\nu}$ ). Скалярное произведение вектора и 1-формы содержит не компоненты метрического тензора, а лишь суммирование по индексу. Иногда это подчеркивают обозначениями, записывая его в виде

$$\tilde{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{A} \equiv \langle \tilde{\mathbf{B}}, \mathbf{A} \rangle \equiv B_\mu A^\mu.$$

Поскольку  $\langle \tilde{\omega}^\mu, \mathbf{e}_\nu \rangle = \delta^\mu_\nu$ , то базис  $\tilde{\omega}^\mu$  называется «взаимным» с базисом  $\mathbf{e}_\mu$ . Если  $\tilde{\mathbf{B}}$  и  $\tilde{\mathbf{A}}$  — 1-формы, соответствующие векторам  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{A}$ , то

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{B}} = \langle \tilde{\mathbf{B}}, \mathbf{A} \rangle = \langle \tilde{\mathbf{A}}, \mathbf{B} \rangle.$$

Особенно часто используется 1-форма  $\tilde{df}$  — *градиент* скалярной функции  $f$ . Скалярное произведение этой 1-формы и вектора  $\mathbf{v}$

порождает производную функции  $f$  по направлению  $v$ :

$$\langle \widehat{df}, v \rangle = \nabla_v f = f_{,\alpha} v^\alpha.$$

Базисные векторы  $e_\alpha$ , соответствующие выбранной системе координат, касательны к координатным линиям. Именно поэтому их иногда обозначают

$$e_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}.$$

Аналогичным образом построенные по таким базисным векторам 1-формы являются градиентами координатных поверхностей

$$\tilde{\omega}^\alpha = \widehat{dx}^\alpha.$$

Наоборот, поскольку метрику пространства-времени всегда можно локально преобразовать в метрику Минковского, то в каждой точке всегда можно найти *ортонормированную* систему базисных векторов и 1-форм, *не обязательно* совпадающих с касательными векторами к координатным линиям и с градиентами к координатным поверхностям. Их принято обозначать  $e_{\hat{\mu}}, \tilde{\omega}^{\hat{\mu}}$ , где  $\hat{\mu}$  указывает на ортонормированность системы. Заметим, что соотношения

$$\langle \tilde{\omega}^\alpha, e_\beta \rangle = \delta^\alpha_\beta, \quad e_\alpha \cdot e_\beta = g_{\alpha\beta} \quad \text{и} \quad \tilde{\omega}^\alpha \cdot \tilde{\omega}^\beta = g^{\alpha\beta}$$

выполняются всегда. Если же базис ортонормированный, то, кроме того, выполняются соотношения

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} \quad \text{и} \quad g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}.$$

Если локальный ортонормированный базис в пространстве-времени свободно падает (т. е. является базисом свободно падающего наблюдателя), то в начале системы отсчета все символы Кристоффеля  $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$  обращаются в нуль.

Коммутатор двух базисных векторных полей

$$\nabla_{e_\alpha} e_\beta - \nabla_{e_\beta} e_\alpha = [e_\alpha, e_\beta] \equiv c_{\alpha\beta}{}^\gamma e_\gamma$$

тождественно равен нулю ( $c_{\alpha\beta}{}^\gamma = 0$ ) в том и только в том случае, если  $e_\alpha$  и  $e_\beta$  — касательный векторы к некоторой системе координатных линий (координатный репер). В общем случае (не обязательно координатного репера)

$$\Gamma_{\mu\beta\gamma} \equiv e_\mu \cdot (\nabla_\gamma e_\beta) = \frac{1}{2} (g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu} + c_{\mu\beta\gamma} + c_{\mu\gamma\beta} - c_{\beta\gamma\mu}).$$

Тензор  $p$ -го ранга со всеми ковариантными индексами, полностью антисимметричный по всем индексам, называется  $p$ -формой. Полностью антисимметризованное прямое произведение форм обозначается  $\wedge$ .

Понятия производной Ли, переноса Ли и внешнего дифференцирования форм развиты в задачах.

### Задача 8.1.

а) В пространстве-времени введены координаты  $x^\alpha$  с базисными векторами  $\partial/\partial x^\alpha$  и базисными 1-формами  $\widetilde{dx}^\alpha$ . Вычислить

$$\langle \widetilde{dx}^0, \partial/\partial x^0 \rangle, \quad \langle \widetilde{dx}^2, \partial/\partial x^3 \rangle, \quad (\partial/\partial x^0) \cdot (\partial/\partial x^1), \\ \widetilde{dx}^0 \cdot \widetilde{dx}^1, \quad \widetilde{dx}^0 \cdot \widetilde{dx}^0.$$

б) Какому вектору соответствует 1-форма  $\widetilde{dx}^1$ ?

**Задача 8.2.** Обычный базис в полярных координатах  $e_{\hat{r}} = e_r$ ,  $e_{\hat{\phi}} = r^{-1}e_\phi$  не является координатным репером. Рассмотреть базис 1-форм  $\hat{\omega}^i$ , взаимный с этим базисом:

$$\langle \hat{\omega}^i, e_{\hat{r}} \rangle = \delta^i_j,$$

Найти функцию  $f$ , для которой  $\hat{\omega}^{\hat{r}} = \widetilde{df}$ , и доказать, что не существует функции  $g$ , для которой  $\hat{\omega}^{\hat{\phi}} = \widetilde{dg}$ . Решить задачу, не налагая на полярные координаты никакой метрики.

**Задача 8.3.** Какому необходимому и достаточному условию должно удовлетворять в 3-мерном евклидовом пространстве поле 1-форм  $\tilde{\sigma}$  для того, чтобы существовала функция  $f$ , для которой  $\tilde{\sigma} = \widetilde{df}$ ?

**Задача 8.4.** Доказать, что если  $\Omega_1$  —  $p$ -форма,  $\Omega_2$  —  $q$ -форма, то

$$\Omega_1 \wedge \Omega_2 = (-1)^{pq} \Omega_2 \wedge \Omega_1.$$

**Задача 8.5.** Внешний дифференциал формы  $\Omega$  можно определить аксиоматически, задав следующие его свойства:

- 1) Если  $\Omega$  —  $p$ -форма, то  $d\Omega$  —  $(p+1)$ -форма.
- 2)  $d(\Omega_1 + \Omega_2) = d\Omega_1 + d\Omega_2$ .
- 3) Для любой 0-формы  $f$  (скаляра)  $\widetilde{df}$  определяется из соотношения  $\langle \widetilde{df}, v \rangle = \nabla_v f$ , которое должно выполняться при любом векторе  $v$ .
- 4)  $d(\Omega_1 \wedge \Omega_2) = d\Omega_1 \wedge \Omega_2 + (-1)^p \Omega_1 \wedge d\Omega_2$ , где  $\Omega_1$  —  $p$ -форма. [Примечание. При  $p=0$  ( $f$  — скаляр) это соотношение принимает вид  $\widetilde{d}(f\Omega) = \widetilde{df} \wedge \Omega + f \widetilde{d\Omega}$ .]
- 5)  $dd\Omega = 0$  для любой дифференциальной формы  $\Omega$ .

Другое определение исходит из того, что  $p$ -форма представляет собой полностью антисимметричный ковариантный тензор

$p$ -го ранга и задает внешнюю производную как полностью антисимметризованную ковариантную производную. Доказать, что оба определения внешнего дифференциала формы эквивалентны.

**Задача 8.6.** Рассмотрим 2-форму в  $n$ -мерном пространстве:

$$\alpha = f(x^1, x^2, \dots, x^n) \tilde{dx}^1 \wedge \tilde{dx}^2.$$

Предположим, что в некоторой области этого пространства, содержащей  $x^1 = 0$ ,

$$d\alpha = 0.$$

Построить 1-форму

$$\tilde{\beta} = \left[ x^1 \int_0^1 f(\xi x^1, x^2, \dots, x^n) d\xi \right] \tilde{dx}^2$$

и доказать, что  $\alpha = d\tilde{\beta}$ .

**Задача 8.7.** Компоненты тензора Максвелла  $F_{\alpha\beta}$  можно рассматривать как компоненты некоторой 2-формы  $\mathbf{F}$ . Доказать, что уравнения Максвелла в вакууме можно представить в виде  $d\mathbf{F} = 0$ ,  $d*\mathbf{F} = 0$ .

**Задача 8.8.** В пространстве-времени 3-поверхность называется пространственноподобной, времениподобной или изотропной, если вектор нормали к ней соответственно пространственноподобный, времениподобный или изотропный. Требуется найти три ортогональных (и, следовательно, линейно-независимых) вектора, принадлежащих некоторой 3-поверхности. Доказать, что для пространственноподобной 3-поверхности все векторы будут пространственноподобными, для времениподобной поверхности два вектора будут пространственноподобными, а один времениподобным и для изотропной поверхности один вектор будет изотропным, а два вектора пространственноподобными.

**Задача 8.9.** Доказать, что интеграл

$$\int_S F^\mu d^3\Sigma_\mu,$$

где  $F^\mu$  — некоторое векторное поле,  $S$  — ориентированная 3-мерная гиперповерхность в пространстве-времени, не зависит от параметризации  $x^\mu = x^\mu(a, b, c)$  гиперповерхности  $S$ . [Определение  $d^3\Sigma_\mu$  приведено в задаче 3.30.]

**Задача 8.10.** (Примечание. Эта задача предполагает знакомство с теорией дифференциальных форм Картана, не входящей в большинство курсов по теории относительности. Для решения

последующих задач знать дифференциальные формы не требуется.) На языке дифференциальных форм обобщенную формулу Стокса можно представить в виде

$$\int_{\Omega} d\vartheta = \int_{\partial\Omega} \vartheta.$$

К чему сводится эта формула в следующих частных случаях:  
 а)  $\Omega$  — 3-мерная ориентированная гиперповерхность,  $\vartheta = f^k d^2S_k$ ;  
 б)  $\Omega$  — 4-мерная ориентированная гиперповерхность,  $\vartheta = f^{\mu} d^3\Sigma_{\mu}$ ;  
 в)  $\Omega$  — 3-мерная ориентированная гиперповерхность,  $\vartheta = F^{\mu\nu} d^2\Sigma_{\mu\nu}$ , где тензор  $F^{\mu\nu}$  антисимметричен.  
 г) Вывести из обобщенной формулы Стокса известное соотношение

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}.$$

**Задача 8.11.** Доказать, что, за исключением самого метрического тензора  $g$  и его произведений на себя (например,  $g \otimes g$ ), не существует других тензоров, образованных из 10 компонент метрического тензора  $g_{\alpha\beta}$  и их 40 первых производных  $g_{\alpha\beta,\mu}$ .

**Задача 8.12.** Доказать, что:

- В координатном репере символ Кристоффеля  $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$  симметричен по двум последним индексам.
- В ортонормированном репере символ Кристоффеля  $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$  антисимметричен по двум первым индексам.

**Задача 8.13.** Производной Ли скалярной функции называется производная по направлению

$$\mathcal{L}_x f = \nabla_x f.$$

Производную Ли для векторного поля  $y$  определим как

$$\mathcal{L}_x y \equiv [x, y] = \nabla_x y - \nabla_y x.$$

Оператор дифференцирования в смысле Ли обладает всеми обычными свойствами оператора дифференцирования и всегда порождает тензор того же ранга, как и дифференцируемый тензор.

- Найти производную Ли 1-формы.
- Найти производную Ли тензора с компонентами  $T^{\alpha}_{\beta}$ .

**Задача 8.14.** Пусть  $A = d/d\lambda$  — касательное векторное поле к конгруэнции (семейству кривых)  $x^{\alpha} = x^{\alpha}(\lambda)$ ,  $B$  — некоторое векторное поле. Доказать, что закон переноса  $\mathcal{L}_A B = 0$  имеет следующий геометрический смысл: векторы  $B$  соединяют точки с равными значениями  $\lambda$ , принадлежащие бесконечно близким кривым конгруэнции.



**Задача 8.15.** Доказать, что дифференцирование в смысле Ли коммутирует с операцией свертки.

**Задача 8.16.** Доказать, что

$$\mathcal{L}_u \mathcal{L}_v - \mathcal{L}_v \mathcal{L}_u = \mathcal{L}_{[u, v]}.$$

**Задача 8.17.** Производную Ли геометрического объекта  $\Phi^A [x^\mu(P)]$  ( $A$  означает все тензорные индексы,  $x^\mu(P)$  — координаты точки  $P$ ) можно определить следующим образом. Выполним инфинитезимальное точечное преобразование  $P_0 \rightarrow P_N$ , или в координатной форме  $x^\mu(P_0) = x^\mu(P_N) + \xi^\mu(P_N)$  (поскольку  $\xi^\mu$  — бесконечно малая величина, ее значение можно вычислять в любой из точек  $P_0$  или  $P_N$ ). Кроме того, произведем инфинитезимальное преобразование координат, придающее координатам точки  $P_N$  те же численные значения, которые соответствовали точке  $P_0$  в исходных координатах:

$$\bar{x}^\mu(P_N) = x^\mu(P_0).$$

После этого положим по определению

$$\mathcal{L}_\xi \Phi^A(P_0) = \lim_{\xi \rightarrow 0} [\Phi^A(P_0) - \bar{\Phi}^A(P_N)].$$

Рассмотрев следующие случаи:

- 1)  $\Phi^A$  — скалярное поле,
- 2)  $\Phi^A = A_\mu$ ,
- 3)  $\Phi^A = T_\mu^\nu$ ,

доказать, что это определение производной Ли эквивалентно определению, данному в задаче 8.13.

**Задача 8.18.** Вектор  $v$  требуется перенести вдоль кривой с касательным вектором  $u$ . Что требуется знать для параллельного переноса Ферми — Уокера и переноса Ли: метрику, коэффициенты аффинной связности или векторное поле  $u(x)$  вне кривой?

**Задача 8.19.** В 3-пространстве с метрикой  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$  задано векторное поле  $v^i = (-y, x, z^\alpha)$ ,  $\alpha = \text{const}$ . Некоторый вектор  $\vec{u}$  перенесен в смысле Ли вдоль  $\vec{v}$  из точки  $A$  в точку  $B$ , а затем параллельно перенесен по тому же маршруту в обратном направлении в точку  $A$ . При каком значении  $\alpha$  существует вектор  $\vec{u}$ , не изменяющийся при таком переносе?

**Задача 8.20.** Найти наиболее общее векторное поле, которое всюду допускает параллельный перенос, перенос Ферми — Уокера и перенос Ли вдоль самого поля.

**Задача 8.21.** Пусть  $\Omega$  —  $p$ -форма. Доказать, что  $\mathcal{L}_x(d\Omega) = d(\mathcal{L}_x\Omega)$ .

**Задача 8.22.** Векторный анализ в 3-мерных ортогональных криволинейных координатах представляет собой частный случай тензорного анализа с  $g_{ij} = h_i^2 \delta_{ij}$  (по повторяющимся индексам суммирование не проводится!), где  $h_i$  — функции координат, называемые «масштабными множителями». Компоненты векторов часто относят к («физическому») ортонормированному реперу  $\vec{\omega}^i = h_i \vec{dx}^i$  (по повторяющимся индексам суммирование не производится!). Вывести выражения для:

- 1)  $\nabla S$ ,
- 2)  $\nabla \times \vec{V}$ ,
- 3)  $\nabla \cdot \vec{V}$ ,
- 4)  $\nabla^2 S$ , где  $S$  — скалярное, а  $\vec{V}$  — векторное поле.

**Задача 8.23.** Вывести выражения для  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$  и  $\vec{\nabla} \times \vec{A}$  в сферических координатах.

**Задача 8.24.** Доказать, что если  $F_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu}$ , то  $F_{[\mu\nu;\lambda]} = 0$ .

**Задача 8.25.** В произвольном пространственно-временном многообразии (не обязательно однородном или изотропном) выберем начальную пространственноподобную гиперповерхность  $S_I$ , зададим на ней произвольную координатную сетку  $(x^1, x^2, x^3)$ , выпустим из точек гиперповерхности ортогональные ей геодезические мировые линии и параметризуем их так, что  $(x^1, x^2, x^3) = \text{const}$ ,  $x^0 \equiv t = t_I + \tau$ , где  $\tau$  — собственное время вдоль каждой мировой линии (гиперповерхность  $S_I$  соответствует  $\tau = 0$ ). Доказать, что в этой системе координат («гауссовы нормальные координаты») метрика принимает синхронную форму:

$$ds^2 = -dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j.$$

**Задача 8.26.**

а) Доказать, что если  $g_{\mu\nu}$  и  $\bar{g}_{\mu\nu}$  — компоненты двух симметричных тензоров, то

$$S^\lambda_{\mu\nu} = \bar{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}$$

— компоненты тензора ( $\Gamma$  и  $\bar{\Gamma}$  — символы Кристоффеля, построенные из компонент тензоров  $g$  и  $\bar{g}$ , как обычно).

б) Предположим, что тензоры  $g_{\mu\nu}$  и  $\bar{g}_{\mu\nu}$  обладают одними и теми же геодезическими. Доказать, что в этом случае

$$S^\lambda_{\mu\nu} = \delta^\lambda_\mu \psi_\nu + \delta^\lambda_\nu \psi_\mu,$$

где  $\psi_\mu$  — компоненты некоторого вектора.

**Задача 8.27.** Вычислить коэффициенты связности метрики

$$ds^2 = -e^{2\alpha} dt^2 + e^{2\beta} dr^2 + e^{2\gamma} (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2),$$

( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  — функции, зависящие от  $r$  и  $t$ )

в ортонормированном репере.

**Задача 8.28.** Красное смещение между двумя наблюдателями (с 4-скоростями  $\mathbf{u}_A$  и  $\mathbf{u}_B$ ) можно измерить двумя способами: 1) по энергиям фотонов (4-импульсам  $\mathbf{p}$ ), распространяющихся вдоль изотропных геодезических между двумя наблюдателями ( $1+z \equiv \mathbf{u}_A \cdot \mathbf{p} / \mathbf{u}_B \cdot \mathbf{p}$ ); 2) по собственному времени между двумя изотропными геодезическими, определив отдельно  $\Delta\tau_A$  между отправлением двух сигналов одним наблюдателем и отдельно  $\Delta\tau_B$  между их приходом к другому наблюдателю, т. е.  $1+z \equiv \Delta\tau_A / \Delta\tau_B$ . Доказать, что оба способа эквивалентны.

## ГЛАВА 9

### КРИВИЗНА

Изучение кривизны основано на рассмотрении в координатном репере тензора кривизны Римана

$$R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} \equiv \frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\nu\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma^{\mu}_{\rho\alpha} \Gamma^{\rho}_{\nu\beta} - \Gamma^{\mu}_{\rho\beta} \Gamma^{\rho}_{\nu\alpha}.$$

Ковариантные компоненты тензора Римана связаны несколькими соотношениями симметрии:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= R_{\gamma\delta\alpha\beta}, & R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= -R_{\beta\alpha\gamma\delta}, \\ R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= -R_{\alpha\beta\delta\gamma}, & R_{\alpha[\beta\gamma\delta]} &= 0. \end{aligned}$$

Из тензора Римана строится (симметричный) тензор Риччи и скаляр Риччи

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} &\equiv R^{\mu}_{\alpha\mu\beta}, \\ R &\equiv R^{\alpha}_{\alpha}. \end{aligned}$$

Тензор Вейля

$$\begin{aligned} C_{\lambda\mu\nu\kappa} &\equiv R_{\lambda\mu\nu\kappa} - \frac{1}{2} (g_{\lambda\nu} R_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa} R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} R_{\lambda\kappa} + g_{\mu\kappa} R_{\lambda\nu}) + \\ &+ \frac{1}{6} (g_{\lambda\nu} g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa} g_{\mu\nu}) R \end{aligned}$$

называют также конформным тензором, желая подчеркнуть его инвариантность относительно конформных преобразований. Он обращается в нуль в том и только в том случае, если метрическое пространство конформно-плоское (т. е. переводится конформным преобразованием в пространство Минковского).

Тензор внешней кривизны гиперповерхности, натянутой на базисные векторы  $e_i, e_j, \dots$ , с единичным вектором нормали  $n$  обозначается  $K$ , а его компоненты как

$$K_{ij} = -e_j \nabla_i n.$$

---

**Задача 9.1.** На сфере радиуса  $a$  локальную декартову систему координат можно попытаться построить двумя способами: а) из геодезических, б) из (ортогональных) линий постоянной

долготы и широты. Оба способа приводят к отклонениям от хорошей декартовой системы координат (например, сумма углов «прямоугольника», образованного линиями координат, отлична от  $2\pi$ , а разности длин «параллельных» сторон не равны нулю). Доказать, что эти отклонения по порядку величины сравнимы с отношением (площадь прямоугольника)/ $a^2$ .

**Задача 9.2.** Сколько независимых компонент имеет тензор Римана в  $n$ -мерном пространстве?

**Задача 9.3.** Математические манипуляции с тензором Римана нередко проводят при помощи ЭВМ. Вместо того чтобы производить вычисления с компонентами  $R(i, j, k, l)$ , где каждый из индексов  $i, j, k, l$  принимает значения 0, 1, 2, 3, и вводить в память машины  $4^4 = 256$  компонент тензора, можно воспользоваться симметриями тензора Римана и существенно уменьшить размеры вводимого в машинную память массива. Написать подпрограмму, в которой все компоненты тензора Римана вводятся в машинную память в виде массива, содержащего не более 21 элемента.

**Задача 9.4.** Вычислить все не обращающиеся в нуль компоненты тензора Римана  $R_{ijkl}$  ( $i, j, k, l = \vartheta, \varphi$ ) для метрики

$$ds^2 = r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)$$

2-сферы.

**Задача 9.5.** Найти символы Кристоффеля и компоненты тензора кривизны Римана в 2-мерном пространстве-времени:

$$ds^2 = dv^2 - v^2 du^2.$$

**Задача 9.6.** Ввести систему координат на торе (2-мерной поверхности «бублика» в 3-мерном евклидовом пространстве). Вычислить все компоненты  $g_{\mu\nu}$ ,  $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$  и  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ .

**Задача 9.7.** В пространстве с размерностью, меньшей 4, тензор Римана удается записать весьма просто.

- Найти тензор Римана в 1-мерном пространстве.
- Выразить тензор Римана в 2-мерном пространстве через метрический тензор и скаляр Риччи.
- Выразить тензор Римана в 3-мерном пространстве через метрический тензор и скаляр Риччи.

**Задача 9.8.** Доказать соотношение

$$2V_{\alpha; [\nu\kappa]} \equiv V_{\alpha; \nu\kappa} - V_{\alpha; \kappa\nu} = V_{\sigma} R^{\sigma}_{\alpha\nu\kappa}$$

и обобщить его для коммутатора вторых производных тензора произвольного ранга  $T_{\alpha \dots \beta \dots}$ .

**Задача 9.9.** Доказать, что вторые производные скалярного поля коммутируют (т. е.  $S_{;\alpha\beta} = S_{;\beta\alpha}$ ). Для третьих производных  $S_{;(\alpha\beta)\gamma}$  вычислить  $S_{;(\alpha\beta)\gamma}$  и  $S_{;\alpha[\beta\gamma]}$ .

**Задача 9.10.** Доказать, что для любого тензора второго ранга

$$A^{\mu\nu}{}_{;\mu\nu} = A^{\mu\nu}{}_{;\nu\mu}.$$

**Задача 9.11.** Бесконечно малый контур в форме параллелограмма можно задать при помощи дифференциальных перемещений  $u, v$ , являющихся сторонами параллелограмма. Вектор  $A$  переносится параллельно вдоль этого контура (т. е. перемещается последовательно на  $u, v, -u, -v$ ). Доказать, что приращение вектора  $A$ , вызванное переносом вдоль бесконечно малого параллелограмма, равно

$$\delta A^\alpha = -R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} A^\beta u^\gamma v^\delta.$$

**Задача 9.12.** Тензор кривизны Римана можно вычислить при помощи оператора Римана  $R$ , определенного соотношением

$$R(A, B)C = (\nabla_A \nabla_B - \nabla_B \nabla_A - \nabla_{[A, B]})C.$$

- а) Доказать, что оператор  $R$  в точке  $P$  линеен по аргументам  $A, B$  и  $C$  и зависит только от их значений в точке  $P$ , а не от того, каким образом они изменяются в окрестности точки  $P$ .  
б) Доказать, что

$$(R(A, B)C)^\alpha = R^\alpha{}_{\mu\lambda\sigma} C^\mu A^\lambda B^\sigma.$$

**Задача 9.13.** На двух «соседних» геодезических аффинные параметры заданы так, что близким точкам соответствует мало отличающиеся значения аффинного параметра  $\lambda$ . Пусть  $u^\alpha \equiv dx^\alpha/d\lambda$  — касательная к одной из геодезических, а  $n$  — бесконечно малый вектор, соединяющий точки, соответствующие равным значениям аффинных параметров на двух геодезических. Доказать, что расхождение геодезических удовлетворяет уравнению

$$\frac{D^2 n^\alpha}{d\lambda^2} + R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} u^\beta n^\gamma u^\delta = 0.$$

**Задача 9.14.** В подходящем образом выбранной системе координат гравитационное поле Земли приближенно (с точностью до наименьшего, не обращающегося в нуль порядка по  $M/r$ ) опи-

сывается метрикой

$$ds^2 = -(1 - 2M/r) dt^2 + (1 + 2M/r) (dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

$$r \equiv (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2},$$

$M$  — масса Земли ( $c = G = 1$ ).

Предположим, что спутник «Скайлэб» обращается вокруг Земли по круговой экваториальной орбите. Чему равен период его обращения? Космонавт запускает контейнер с мусором на близкую орбиту и наблюдает за движением контейнера относительно «Скайлэба». В некоторый момент времени удаление контейнера от «Скайлэба» описывается вектором

$$\xi^i = x^i \text{ (контейнер)} - x^i \text{ (Скайлэб)}.$$

Пользуясь уравнением для расхождения геодезических, найти компоненты относительного движения  $\xi^i$  как функции времени.

**Задача 9.15.** Доказать циклическое тождество

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} = 0$$

и тождества Бианки

$$R_{\alpha\delta\beta\gamma; \nu} + R_{\alpha\delta\nu\beta; \gamma} + R_{\alpha\delta\gamma\nu; \beta} = 0.$$

**Задача 9.16.** Доказать, что нулевая дивергенция тензора Эйнштейна

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

(т. е.  $G^{\mu}_{\nu; \mu} = 0$ ) следует из тождеств Бианки.

**Задача 9.17.** Доказать, что обращение в нуль тензора Римана является достаточным условием для того, чтобы пространство-время было пространством Минковского, т. е. для приведения метрического тензора  $g_{\mu\nu}$  при помощи преобразования координат к виду  $\eta_{\mu\nu}$ .

**Задача 9.18.** Пучок света в некоторой точке имеет в поперечном сечении форму круга. Доказать, что этот пучок света не испытывает растяжения в поперечном направлении (т. е. его поперечное сечение не деформируется в эллипс), если тензор Вейля равен нулю.

**Задача 9.19.** Вычислить тензор Римана, гензор Риччи и скалярную кривизну конформно-плоской метрики  $g_{\mu\nu} = e^{2\varphi} \eta_{\mu\nu}$ , где  $\varphi = \varphi(x^\mu)$  — произвольная функция.

**Задача 9.20.** Вычислить в ортонормированном репере тензор Римана для метрики

$$ds^2 = -e^{2\alpha} dt^2 + e^{2\beta} dr^2 + e^{2\gamma} (dv^2 + \sin^2 v d\varphi^2),$$

$\alpha, \beta, \gamma$  — функции от  $r, t$ .

Найти для этой метрики тензор Риччи, скалярную кривизну и тензор Эйнштейна.

**Задача 9.21.** Рассмотрим тензор Римана, соответствующий плоской гравитационной волне, т. е.  $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\beta\gamma\delta}(u)$ , где  $u$  — «запаздывающее время» ( $\nabla u \cdot \nabla u = 0$ ). Найти число независимых компонент такого тензора Римана. При решении задачи не вводить предположения о том, что  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  удовлетворяет уравнениям поля Эйнштейна.

**Задача 9.22.** В некоторый момент времени измерены координатные ускорения ( $d^2x^\alpha/dt^2$ ) для  $n$  близко расположенных пробных частиц. При каком наименьшем значении  $n$  по данным измерений удастся восстановить все компоненты  $F^{\mu\nu}$  и при каком все компоненты  $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}$ ?

**Задача 9.23.** Пусть  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  — два линейно-независимых вектора, касательных в некоторой точке к 2-мерной поверхности в пространстве размерности  $\geq 2$ . Величина

$$K = \frac{R_{\alpha\nu\beta\delta} A^\alpha A^\nu B^\gamma B^\delta}{(g_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma}) A^\alpha A^\beta B^\gamma B^\delta}$$

называется римановой кривизной 2-мерной поверхности в этой точке. Доказать, что риманова кривизна  $K$  не изменится, если векторы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  заменить их линейными комбинациями.

**Задача 9.24.** Пусть  $K$  — риманова кривизна в некоторой точке на 2-мерной поверхности, определенная в задаче 9.23. Доказать, что если  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  — касательные векторы в этой точке к 2-мерной поверхности, а вектор  $\mathbf{A}$  подвергнут параллельному переносу по малому контуру, лежащему на 2-мерной поверхности, то изменение угла между векторами  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  по порядку величины будет равно

$$\Delta\varphi = |K \Delta\Sigma|,$$

где  $\Delta\Sigma$  — площадь участка 2-мерной поверхности, заключенного внутри контура.

**Задача 9.25.** Предположим, что в некоторой точке  $P$  риманова кривизна  $K$ , определенная в задаче 9.23, не зависит от того, какая 2-мерная поверхность проведена через эту точку. Дока-



зять, что тогда

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = K (g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}).$$

**Задача 9.26.** Доказать, что если риманова кривизна изотропна, то тензор кривизны Римана можно представить в виде

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = K (g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}).$$

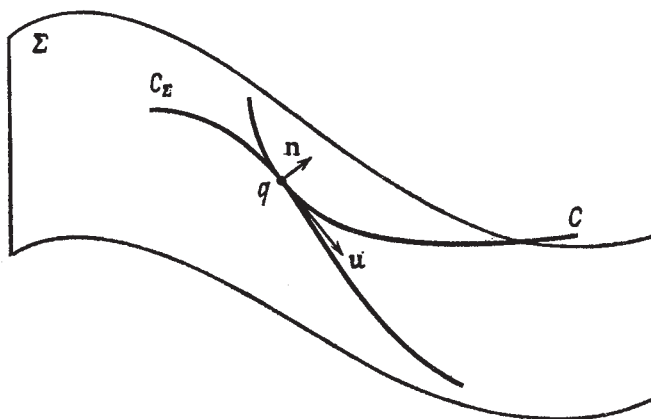
Пользуясь тождествами Бианки, доказать, что в этом случае риманова кривизна  $K$  должна быть постоянной (теорема Шура).

**Задача 9.27.** Доказать, что если тензор Римана можно представить в виде

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = K (g_{\lambda\nu}g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}g_{\mu\nu}),$$

то пространство конформно-плоское.

**Задача 9.28.** В точке  $q$  на 3-поверхности  $\Sigma$  (фиг. 1) касаются 2 кривые: 1)  $C_\Sigma$  — кривая на 3-поверхности и 2)  $C$  — геодезическая 4-мерного пространства, в которое вложена 3-поверхность  $\Sigma$ .



Фиг. 1.

Пусть  $n$  — единичный вектор нормали к поверхности  $\Sigma$ . Вектор  $\xi^\alpha = 1/2 u^\alpha; \beta u^\beta$  (где  $u$  — касательный вектор к  $C_\Sigma$ ) служит мерой скорости, с которой расходятся кривые  $C$  и  $C_\Sigma$ . Доказать, что скорость расхождения  $n \cdot \xi$  можно представить в виде

$$n \cdot \xi = \frac{1}{2} K_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta,$$

где  $K_{\alpha\beta}$  — тензор внешней кривизны для  $\Sigma$ .

**Задача 9.29.** Найти внешнюю кривизну сечения  $\tau = \text{const}$  метрики

$$ds^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau) [\gamma_{ij}(x^k) dx^i dx^j].$$

**Задача 9.30.** Доказать, что внешняя кривизна времениподобной гиперповерхности с единичным вектором нормали  $\mathbf{n}$  равна  $-\frac{1}{2}\mathcal{L}_n P_{\alpha\beta}$ , где  $P_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta$  — проекционный тензор (проектирующий на эту гиперповерхность).

**Задача 9.31.** Если пренебречь силой тяжести, то потенциальная энергия, обусловленная поверхностным натяжением мыльной пленки, пропорциональна площади пленки. Следовательно, мыльная пленка, натянутая на некоторый контур, в состоянии равновесия принимает форму, соответствующую минимальной площади. Доказать, что отсюда следует равенство нулю «средней кривизны» ( $K \equiv K^i_i$ ) мыльной пленки в состоянии равновесия.

**Задача 9.32.** Пусть  $\mathbf{n}$  — единичная нормаль к гиперповерхности  $\Sigma$  ( $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \equiv \varepsilon$ , где  $\varepsilon = +1$  для времениподобной и  $\varepsilon = -1$  для пространственноподобной гиперповерхности). В гауссовых нормальных координатах (см. задачу 8.25), построенных на гиперповерхности  $\Sigma$ , метрика имеет вид

$$ds^2 = \varepsilon dn^2 + {}^{(3)}g_{ij} dx^i dx^j.$$

Вывести уравнения Гаусса — Кодацци

$${}^{(4)}R^m_{ijk} = {}^{(3)}R^m_{ijk} + \varepsilon (K_{ij}K_k^m - K_{ik}K_j^m),$$

$${}^{(4)}R^n_{ijk} = \varepsilon (K_{ik|j} - K_{ij|k}).$$

Индексы 4 и 3 относятся соответственно к геометрии пространства-времени и геометрии гиперповерхности  $\Sigma$ , вертикальная черта означает ковариантное дифференцирование по  ${}^{(3)}g_{ij}$ , компонента тензора Римана, построенная на базисном векторе  $\mathbf{n}$ , имеет индекс  $n$ . Вывести также уравнение для оставшейся компоненты тензора Римана

$${}^{(4)}R^n_{ink} = \varepsilon (K_{ik,n} + K_{im}K^m_k).$$

**Задача 9.33.** Пользуясь результатами задачи 9.32, вывести выражения для компонент  ${}^{(4)}G^\alpha_\beta$  тензора Эйнштейна в гауссовых нормальных координатах.

**Задача 9.34.** Собственные значения и собственные векторы тензора внешней кривизны называются главными кривизнами и главными направлениями кривизны. Найти главные кривизны и направления кривизны для следующих поверхностей, погруженных в 3-мерное евклидово пространство:

1) сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,

2) цилиндра  $x^2 + y^2 = a^2$ ,

3) квадратичной поверхности (вычисления провести только в начале координат)  $z = \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2)$ .

**Задача 9.35.** Доказать, что если  $\Sigma$  — 2-мерная поверхность в плоском 3-пространстве, то ее скалярная кривизна равна

$${}^{(2)}R = \frac{2}{\rho_1 \rho_2},$$

где  $\rho_1$  и  $\rho_2$  — главные радиусы кривизны поверхности  $\Sigma$ . Как выглядит аналогичная формула для 3-поверхности, погруженной в плоское 4-пространство?

## ГЛАВА 10

### ВЕКТОРЫ КИЛЛИНГА И СИММЕТРИИ

Пусть геометрия обладает симметрией, которая состоит в том, что существует векторное поле  $\xi$ , обладающее следующим свойством: если любое множество точек сместить на  $\xi d\lambda$  ( $d\lambda$  — бесконечно малая величина), то все метрические соотношения между точками множества останутся неизменными. Векторное поле  $\xi$  называется векторным полем Киллинга рассматриваемой геометрии и удовлетворяет уравнению Киллинга

$$\xi_{(\alpha; \beta)} \equiv \frac{1}{2} [\xi_{\alpha; \beta} + \xi_{\beta; \alpha}] = 0.$$

---

**Задача 10.1.** Решив уравнения Киллинга, найти векторные поля Киллинга для 2-сферы

$$ds^2 = d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2.$$

**Задача 10.2.** Доказать, что уравнение Киллинга

$$\xi_{\alpha; \beta} + \xi_{\beta; \alpha} = 0$$

эквивалентно уравнению

$$\mathcal{L}_{\xi} g = 0,$$

где  $g$  — метрический тензор. Выяснить геометрический смысл этого утверждения.

**Задача 10.3.**

а) Доказать, что коммутатор двух векторных полей Киллинга является векторным полем Киллинга.

б) Доказать, что линейная комбинация векторов Киллинга с постоянными коэффициентами является вектором Киллинга.

**Задача 10.4.** Доказать, что в евклидовом 3-пространстве три вектора Киллинга, описывающие повороты вокруг осей  $x$ ,  $y$  и  $z$ , линейно независимы в любой заданной точке, но ни одна линейная комбинация их с постоянными коэффициентами не равна нулю. Доказать, что в силу этого генераторы группы вращений

$O(3)$  порождают 2-мерную поверхность, хотя сама группа 3-мерна. Объяснить, почему так происходит.

**Задача 10.5.** Метрика для аксиально симметричной вращающейся звезды допускает 2 вектора Киллинга  $\xi_{(t)}$  и  $\xi_{(\varphi)}$ . Предположим, что других независимых векторов Киллинга не существует. Доказать, что  $\xi_{(t)}$  и  $\xi_{(\varphi)}$  коммутируют.

**Задача 10.6.** Доказать, что любой вектор Киллинга является решением уравнения

$$\xi^{\nu}{}_{;\lambda} + R^{\nu}{}_{\sigma} \xi^{\sigma} = 0.$$

Найти вариационный принцип, аналогичный принципу Гамильтона, из которого можно вывести это уравнение.

**Задача 10.7.** Пусть  $\xi$  — вектор Киллинга. Доказать, что

$$\xi_{\mu;\alpha\beta} = R_{\gamma\beta\alpha\mu} \xi^{\gamma}.$$

**Задача 10.8.** Метрика «стационарна» в том и только в том случае, если она обладает векторным полем Киллинга  $\xi$ , времениподобным на бесконечности («временное» направление задается оператором  $\partial/\partial t$ ). «Статическую» метрику можно определить двумя способами:

1) как стационарную метрику, инвариантную относительно обращения времени  $\partial/\partial t \rightarrow -\partial/\partial t$ ,

2) как стационарную метрику с гиперповерхностно ортогональным (см. задачу 7.23) направлением  $\partial/\partial t$ .

Доказать, что оба определения эквивалентны.

**Задача 10.9.** В плоском пространстве-времени Минковского найти 10 линейно независимых векторов Киллинга.

**Задача 10.10.** Доказать, что если  $\xi(x^{\mu})$  — векторное поле Киллинга и  $u$  — касательный вектор к некоторой геодезической, то скалярное произведение  $\xi \cdot u$  постоянно вдоль этой геодезической.

**Задача 10.11.** Пусть  $\xi$  — вектор Киллинга,  $T$  — тензор энергии-импульса. Доказать, что

$$J^{\mu} \equiv T^{\mu\nu} \xi_{\nu}$$

— сохраняющаяся величина, т. е. что

$$J^{\mu}{}_{;\mu} = 0.$$

Какой смысл имеет  $J$ , когда  $\xi$  — времениподобный вектор Киллинга?

**Задача 10.12.** Пусть  $T$  — тензор энергии-импульса,  $\xi$  — времениподобный вектор Киллинга. Доказать, что интеграл по пространственноподобной гиперповерхности

$$\int_F T^\alpha{}_\beta \xi^\beta d^3 \Sigma_\alpha$$

не зависит от выбора пространственноподобной гиперповерхности  $F$ .

**Задача 10.13.** В плоском пространстве-времени задан тензор энергии-импульса с нулевой дивергенцией.

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0, \quad R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0.$$

Доказать, что в этом случае можно построить 10 глобальных законов сохранения и, следовательно, 10 сохраняющихся величин.

**Задача 10.14.** Доказать, что если  $\xi$  — времениподобный вектор Киллинга и  $u = \xi / |\xi \cdot \xi|^{\frac{1}{2}}$  — 4-скорость, то

$$a \equiv \nabla_u u = \frac{1}{2} \nabla \ln |\xi \cdot \xi|.$$

**Задача 10.15.** В стационарной метрике с времениподобным вектором Киллинга  $\xi$  «энергия на бесконечности»  $E = -\mathbf{p} \cdot \xi$  пробной частицы с 4-импульсом  $\mathbf{p}$  сохраняется. Найти минимальное значение, которое может принимать в заданной точке пространства-времени величина  $E/\mu$  для пробной частицы ( $\mu$  — масса частицы), и выразить его через норму вектора  $\xi$ .

**Задача 10.16.** Доказать, что вектор Киллинга является допустимым решением для векторного потенциала уравнений Максвелла, записанных для пробного поля в пустом пространстве-времени. Какое электромагнитное поле соответствует вектору Киллинга  $\partial/\partial\phi$  в пространстве Минковского?

## ГЛАВА II

### МОМЕНТ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

В эту главу включены задачи из общей теории относительности, связанные с вращением, моментом количества движения, спином и т. д. Все необходимые определения приведены в задачах.

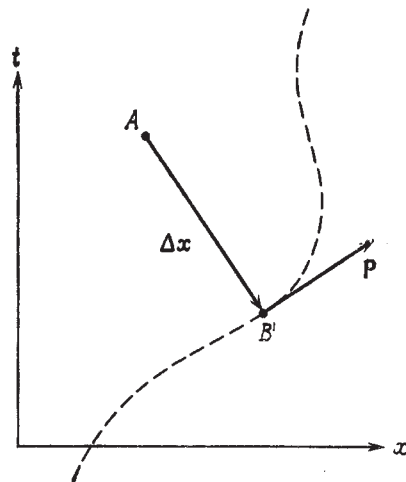
**Задача II.1.** В специальной теории относительности частица, находящаяся в точке  $B$  пространства-времени с 4-импульсом  $p$ , обладает относительно события  $A$  моментом количества движения

$$J = \Delta x \otimes p - p \otimes \Delta x,$$

где  $\Delta x$  — 4-вектор, идущий из события  $A$  в событие  $B$  (фиг. 2).

1) Доказать, что для свободно (т. е. без ускорения) движущейся частицы величина  $J$  сохраняется, т. е.  $dJ/d\tau = 0$ .

2) Предположим, что в точке  $B$  пространства-времени несколько частиц сталкиваются, порождая несколько других частиц. Доказать, что сумма моментов количества движения частиц относительно события  $A$  до столкновения равна сумме моментов количества движения частиц относительно события  $A$  после столкновения



Фиг. 2.

$$\sum_{(k)} J_{(k)} |_{\text{после}} = \sum_{(k)} J_{(k)} |_{\text{до}}.$$

**Задача 11.2.** Доказать, что:

а) полный момент количества движения изолированной системы в плоском пространстве

$$J^{\alpha\beta} \equiv \int d^3x (x^\alpha T^{\beta 0} - x^\beta T^{\alpha 0})$$

— сохраняющийся тензор ( $T^{\alpha\beta}$ ,  $\beta = 0$ ), но

б) не инвариантен относительно преобразования координат  $x^\alpha \rightarrow x^\alpha + a^\alpha$ .

Доказать также, что

в) 4-вектор спина

$$S_\alpha \equiv -\frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} J^{\beta\gamma} u^\delta$$

сохраняется и

г) инвариантен относительно трансляций. Здесь  $u^\alpha$  — 4-скорость центра масс

$$u^\alpha \equiv P^\alpha / (-P^\beta P_\beta)^{1/2},$$

$P^\alpha$  — полный импульс

$$P^\alpha \equiv \int d^3x T^{\alpha 0}.$$

**Задача 11.3.** Доказать, что 4-вектор  $S_\alpha$  внутреннего спина системы ортогонален ее 4-скорости  $u^\alpha$ .

**Задача 11.4.** Доказать, что гироскоп, к которому не приложены никакие моменты, переносит вектор своего спина по Ферми — Уокеру.

**Задача 11.5.**

а) Момент количества движения вычислен относительно центра масс системы. Доказать, что  $J^{\alpha\beta} u_\beta = 0$ .

б) Доказать, что в этом случае момент количества движения (внутренний момент количества движения) можно найти по вектору спина из соотношения

$$J^{\alpha\beta}_{(ц. м.)} \equiv S^{\alpha\beta} = -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} S_\gamma u_\delta.$$

**Задача 11.6.** Два тела  $A$  и  $B$  обладают импульсами  $\mathbf{P}_A$  и  $\mathbf{P}_B$  и спинами  $\mathbf{S}_A$  и  $\mathbf{S}_B$ . Их центры масс расположены так, что тела сталкиваются. После столкновения тела слипаются, образуя составное тело  $C$  со спином  $\mathbf{S}_C$ . Вычислить  $\mathbf{S}_C$  через  $\mathbf{P}_A$ ,  $\mathbf{P}_B$ ,  $\mathbf{S}_A$  и  $\mathbf{S}_B$ .

**Задача 11.7.** (Томасова прецессия.) Рассмотрим («классический») вращающийся электрон, который, обращаясь по круговой орбите вокруг атомного ядра, переносит свой спиновый момент количества движения  $\mathbf{S}$  по Ферми — Уокеру. Относительно лабо-



ракторной системы отсчета электрон движется по круговой орбите радиуса  $r$  в плоскости  $xy$  с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Вычислить спин как функцию времени  $S(t)$  в лабораторной системе отсчета.

**Задача 11.8.** На несферическое вращающееся тело в неоднородном гравитационном поле действует момент, вынуждающий 4-вектор внутреннего спина  $S$  изменяться со временем. Доказать, что если  $u$  — 4-скорость центра масс тела, свободно движущегося вдоль геодезической, то

$$\frac{DS^\kappa}{d\tau} = \varepsilon^{\kappa\beta\alpha\mu} u_\mu u^\sigma u^\lambda t_{\beta\eta} R^\eta{}_{\sigma\alpha\lambda},$$

где  $t_{\beta\eta}$  — «тензор приведенного квадрупольного момента»

$$t^{ij} = \int \rho (x^i x^j - \frac{1}{3} r^2 \delta^{ij}) d^3x$$

в системе покоя центра масс,

$$t^{\alpha\beta} u_\alpha = 0,$$

а тензор Римана порожден внешними (по отношению к рассматриваемому телу) источниками и предполагается постоянным во всем теле.

**Задача 11.9.** Вычислить период прецессии земной оси, вызванной взаимодействием создаваемых Луной и Солнцем приливных сил с квадрупольным моментом (слегка несферической) Земли.

**Задача 11.10.** Рассмотрим группу стационарных наблюдателей в стационарном пространстве-времени (т. е. наблюдателей, у которых 4-скорость пропорциональна времениподобному вектору Киллинга  $\xi = \partial/\partial t$ ). Каждый наблюдатель ориентирует свои пространственные базисные векторы так, что они все время  $t$  направлены на одних и тех же соседних наблюдателей.

1) Доказать, что  $\mathcal{L}_\xi e_\alpha = 0$ , где  $e_\alpha$  — базисный вектор стационарного наблюдателя.

2) Доказать, что скорость изменения компонент любой тензорной величины  $Q$ , измеренная стационарным наблюдателем в единицах  $t$ , равна

$$\frac{dQ^{\hat{\alpha}\dots\hat{\beta}}}{dt} = (\mathcal{L}_\xi Q)^{\hat{\alpha}\dots\hat{\beta}}. \text{ Что такое } \frac{dQ^{\hat{\alpha}\dots\hat{\beta}}}{dt} ?$$

3) Стационарный наблюдатель переносит с собой гироскоп, не прилагая к нему никаких моментов. Доказать, что вектор спина гироскопа прецессирует относительно стационарного наблю-

дателя (эффект Лензе — Тирринга) с угловой скоростью

$$\omega^\alpha = \frac{g^{\alpha\nu} \sigma^\lambda \xi_\nu \xi_\sigma}{2\xi^\nu \xi_\nu},$$

измеренной в единицах собственного времени.

4) Доказать, что если пространство-время статично, а не только стационарно, то  $\omega = 0$ .

**Задача 11.11.** Гироскоп выведен на круглую орбиту вокруг Земли. К нему не приложены никакие моменты. С какой угловой скоростью прецессирует вектор его спина в системе отсчета, неподвижной относительно далеких звезд («геодезическая прецессия» и «эффект Лензе — Тирринга»).

## ГЛАВА 12

### ФИЗИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ ГРАВИТАЦИИ

В этой главе содержатся задачи, в которых рассматриваются физические проявления гравитационных взаимодействий. В большинстве задач используется ньютоновский предел, в котором тяготение описывается скалярным потенциалом  $U$ , удовлетворяющим уравнению

$$\nabla^2 U = -4\pi\rho$$

и создающим гравитационное ускорение

$$\vec{g} = \nabla U.$$

(В литературе иногда используется потенциал  $\Phi \equiv -U$ .) В ньютоновской теории приливные силы зависят от  $\partial^2\Phi/\partial x^i\partial x^k$ ; этим силам отвечают компоненты  $R_{j0k0}$  тензора Римана в соответствующем пределе уравнения расхождения геодезических в общей теории относительности. В некоторых задачах рассматриваются следствия наличия у квантов гравитационного поля спина, равного 2, а также следствия слабости тяготения по сравнению с другими физическими взаимодействиями.

---

**Задача 12.1.** Небольшой спутник обращается с круговой частотой  $\omega$  по орбите радиусом  $r$  вокруг центрального тела с массой  $m$ . Покажите, что если известна только круговая частота обращения спутника  $\omega$ , то мы не можем найти по отдельности ни  $r$ , ни  $m$ , а можем определить лишь эффективную «кеплеровскую плотность» центрального тела  $3m/4\pi r^3$ , получающуюся путем усреднения его массы по сфере радиусом, равным радиусу орбиты. Выразите  $\omega^2$  через кеплеровскую плотность.

**Задача 12.2.** Оцените высоту сизигийных приливов (происходящих во время новолуния или полнолуния, когда Луна и Солнце находятся на одной линии с Землей) и квадратурных приливов (когда направления на Солнце и Луну составляют прямой угол).

**Задача 12.3.** Если амплитуду земных (упругих) приливов как функцию времени подвергнуть преобразованию Фурье, то в

полученном спектре на определенных частотах будут максимумы. Каковы частоты (или периоды), соответствующие 10 наиболее значительным максимумам?

**Задача 12.4.** Положение Солнца на небе в принципе можно определить с помощью чувствительного приливного гравиметра. На какой угол отличается положение, определенное этим способом, от измеренного оптическими средствами? Далее, если бы истинное положение Солнца соответствовало его оптически наблюдаемому положению, то на Землю вдоль направления ее движения должна была бы действовать некая сила. Почему? Как бы в этом случае менялся со временем радиус земной орбиты?

**Задача 12.5.** «Эддингтоновским пределом» светимости звезды заданной массы  $M$  называется светимость, при которой всюду внутри звезды направленное наружу световое давление в точности уравновешивается направленной внутрь силой тяготения. Вычислите это значение. (Можно считать, что все вещество звезды состоит из полностью ионизованного водорода.)

**Задача 12.6.** Показать, что электрон, помещенный в центр отечанного идеально проводящего замкнутого сосуда, находящегося в однородном гравитационном поле, не будет падать под действием сил тяжести. (Под «идеальным проводником» понимается идеально жесткая решетка положительных зарядов, содержащая идеально подвижные электроны проводимости.)

**Задача 12.7.** Тонкий цилиндрический теплоизолированный сосуд высотой  $h$  заполняется воздухом при температуре 300 К, после чего запаивается и помещается на весы на уровне моря. Весы показывают, что вес сосуда с воздухом равен  $W$ . Для какого интервала значений  $h$  вес  $W$  будет уменьшаться при постепенном нагревании содержимого сосуда?

**Задача 12.8.** Определим тензор напряжений, соответствующий ньютоновскому гравитационному потенциалу  $U$ , следующим образом:

$$T_{jk} \equiv \frac{1}{4\pi} (U_{,j}U_{,k} - \frac{1}{2} \delta_{jk}U_{,n}U_{,n}).$$

Покажите, что ньютоновские уравнения движения для испытывающего напряжения вещества с собственной плотностью  $\rho_0$ , движущегося со скоростью  $\vec{v}$ , можно записать в виде

$$\rho_0 \frac{dv_j}{dt} = - \frac{\partial}{\partial x^k} (T_{jk} + t_{jk}),$$

$$(\rho_0 v_j)_{,t} + (T_{jk} + t_{jk} + \rho_0 v_j v_k)_{,k} = 0,$$

где  $t_{jk}$  — обычный трехмерный тензор напряжений.

**Задача 12.9.** Рассмотрим протяженное тело массы  $M$ , на которое действует несколько сил  $\vec{F}_i$ . Используя принцип эквивалентности гравитационной массы и энергии, покажите, что условие равновесия для этого имеет вид

$$\sum \vec{F}_i (1 - \vec{g} \cdot \vec{x}_i / c^2) = -M\vec{g},$$

где  $\vec{g}$  — ускорение силы тяжести, а  $\vec{x}_i$  — радиус-векторы, проведенные в точки приложения каждой из сил и измеряемые в локальной лоренцевской системе отсчета.

**Задача 12.10.** Используя результат задачи 12.9, покажите, что уравнение гидростатического равновесия звезды имеет вид

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2} (\rho + p/c^2),$$

где  $M(r)$  означает «активную» массу, находящуюся внутри оболочки вещества, расположенной на расстоянии  $r$  от центра звезды. Отсюда следует, что в сплошной среде плотность «эффективной инертной массы» есть  $\rho + p/c^2$ . Обратите внимание, что этот результат не зависит от вида полевых уравнений общей теории относительности.

**Задача 12.11.** Покажите, что ньютоновское уравнение движения пробной частицы в поле ньютоновского гравитационного потенциала  $\Phi$  можно записать в виде некоторого уравнения геодезической в 4-мерном пространстве-времени. Вычислите символы Кристоффеля и компоненты тензора Римана и покажите, что их нельзя вывести из какой-либо метрики.

**Задача 12.12.** Рассмотрев относительное ускорение различных траекторий семейства траекторий пробных частиц, движущихся в ньютоновском поле тяготения, и сравнив результат с ньютоновским пределом уравнения расхождения геодезических, вывести соотношение

$$R_{j0k0} = \frac{d^2\Phi}{dx^j dx^k}$$

между ньютоновским потенциалом и тензором Римана. (Ньютоновская пробная частица испытывает воздействие только силы тяготения; пробная частица в релятивистской теории тяготения движется по геодезической.)

**Задача 12.13.** Запишите закон всемирного тяготения Ньютона в ковариантном 4-мерном виде, используя в качестве универсальной ньютоновской функции времени некоторое скалярное поле. Покажите, что получающаяся теория не противоречит специальной теории относительности. Покажите также, что в этой теории сигналы могут распространяться со скоростью, превосходящей

скорость света. Является ли такая теория акаузальной, т. е. допускает ли она существование наблюдателей, способных посылать сигналы в свое собственное прошлое?

**Задача 12.14.** Рассмотрим две частицы с равными массами, одна из которых обладает зарядом  $q$ , а другая электрически нейтральна. Частицы помещены в свободно падающий лифт. В лифте существует электрическое поле  $E$ , направленное вертикально вверх. Требуется вывести уравнение, описывающее изменение со временем разности высот между частицами и учитывающее как приливные, так и электрические эффекты. Показать, что присутствие обоих этих членов не противоречит принципу эквивалентности.

**Задача 12.15.** Предположим, что мы открыли новый вид частиц с массой  $m_0$ , обладающих новым типом заряда, проявляющегося в эксперименте через силовое поле, описываемое классическим законом «обратных квадратов». Пусть некий сосуд содержит идеальный одноатомный газ, состоящий из этих частиц и находящийся в состоянии термодинамического равновесия. Полный заряд внутри сосуда измеряется по средней силе взаимодействия с пробными частицами вне его, причем оказывается, что величина заряда меняется с температурой по закону

$$Q \sim Q_0 (1 + 6kT/m_0).$$

Чему равен спин нового силового поля?

**Задача 12.16.** Покажите (не строго), что поле тяготения является единственным классическим полем, обладающим бесконечным радиусом действия (т. е. квантами с нулевой массой покоя) и спином, равным 2, иначе говоря, что любое другое поле с теми же свойствами точно так же взаимодействовало бы с материальными средами и, следовательно, было бы неотличимо от поля тяготения.

**Задача 12.17.** Используя «геометризованные единицы длины» (т. е. систему единиц, в которой значения гравитационной постоянной  $G$ , скорости света  $c$  и постоянной Больцмана  $k$  приняты равными единице), выразите в сантиметрах значения следующих величин:  $\hbar$ , заряд электрона, отношение  $e/m$  для электрона, массу Солнца, светимость Солнца, 300 К, 1 год, 1 В.

**Задача 12.18.** Сконструируйте «естественные» единицы длины, массы и времени из универсальных физических постоянных  $\hbar$ ,  $G$  и  $c$ .

**Задача 12.19.** Оцените боровский радиус «гравитационного атома», например для находящейся в низшем энергетическом состоянии системы двух нейтронов, связанных только гравитационным притяжением.

## ГЛАВА 13

### УРАВНЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ И ЛИНЕАРИЗОВАННАЯ ТЕОРИЯ

Гравитационное поле, описываемое метрикой пространства-времени  $g_{\mu\nu}$ , порождается тензором энергии-импульса материи  $T^{\mu\nu}$ . Были предложены различные уравнения поля, связывающие  $g_{\mu\nu}$  с  $T^{\mu\nu}$ , но наибольших успехов на сегодняшний день позволили добиться уравнения Эйнштейна, лежащие в основе общей теории относительности:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (1)$$

где  $R_{\mu\nu}$  и  $R$  — тензор Риччи и скалярная кривизна, получаемые из метрики  $g_{\mu\nu}$ , а  $G_{\mu\nu}$  называется тензором Эйнштейна. Эти уравнения нелинейны, так как левая часть их не является линейной функцией метрики.

В приведенных ниже задачах обсуждаются и другие (не столь удачные) уравнения поля; вообще говоря, если это не оговорено особо, всюду следует исходить из уравнений Эйнштейна.

Уравнения движения  $T^{\mu\nu}{}_{; \nu} = 0$  следуют из уравнения (1); если желательно, чтобы тензор  $T^{\mu\nu}$  удовлетворял еще каким-либо условиям (их называют «энергетическими условиями»), то они должны постулироваться независимо из физических соображений.

Когда гравитационное поле слабое, то геометрия пространства-времени близка к плоской и мы можем записать

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu},$$

где все  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ . В этом случае уравнения (1) можно решить приближенно, с точностью до членов первого порядка по  $h_{\mu\nu}$ . Ряд задач иллюстрирует применение такой «линеаризованной» теории.

---

**Задача 13.1.** Попробуем несколько обобщить уравнения Эйнштейна, записав их в виде

$$R_{\mu\nu} - \alpha g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu},$$

где  $\alpha$  — некоторая безразмерная постоянная. Покажите, что если  $\alpha \neq 1/2$ , то такие уравнения поля не согласуются с экспериментом даже в ньютоновском пределе.

**Задача 13.2.** В предложенной Нордстремом в 1913 г. метрической теории  $g_{\mu\nu}$  связывается с  $T_{\mu\nu}$  посредством уравнений

$$\begin{aligned} C_{\mu\nu\rho\sigma} &= 0, \\ R &= \kappa g_{\mu\nu} T^{\mu\nu}, \end{aligned}$$

где  $C_{\mu\nu\rho\sigma}$  — тензор Вейля. Покажите, что эта теория в ньютоновском пределе и при подходящем выборе  $\kappa$  согласуется с ньютоновской теорией тяготения, но не предсказывает эффекта отклонения световых лучей при их прохождении вблизи Солнца. Согласуется ли эта теория с результатами эксперимента Паунда — Ребки, т. е. испытывают ли в ней фотоны красное смещение при движении против поля тяготения вблизи поверхности Земли?

**Задача 13.3.** В теории тяготения Бранса — Дикке ([1], т. 3, стр. 315, а также [2], стр. 174 и далее, где приведены уравнения поля этой теории) измеряемая локально гравитационная «постоянная» Ньютона  $G$  меняется со временем и от точки к точке. Значение ее на бесконечности равно  $G_\infty$ . Покажите, что  $G$  является постоянной внутри самогравитирующей сферической оболочки массы  $M$  и радиуса  $R$ . Для случая  $R \gg G_\infty M/c^2$  выразите значение  $G$  внутри оболочки через  $M$ ,  $R$  и  $G_\infty$  с точностью до членов низшего порядка по  $(G_\infty M/Rc^2)$ .

**Задача 13.4.** Согласно представлениям релятивистской квантовой механики, пустое пространство содержит виртуальные частицы. Из этого можно было бы заключить, что вакуум должен обладать ненулевым тензором энергии-импульса.

1) Какой вид должен иметь тензор энергии-импульса вакуума, если не должно существовать выделенной системы отсчета, связанной с вакуумом? Покажите, что возникающий в этом случае член в уравнениях поля можно интерпретировать как эффективную космологическую постоянную.

2) Предположим, что энергия вакуума обусловлена массой покоя виртуальных протонов или электронов, распределенных равномерно таким образом, что среднее расстояние между ними равно соответствующей комптоновской длине волны. Исключается ли существование такой плотности энергии вакуума наблюдательными фактами?

3) Я. Б. Зельдович<sup>1)</sup> предложил рассматривать плотность

<sup>1)</sup> См. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Теория тяготения и эволюция звезд. — М.: Наука, 1971, стр. 43 и далее. — Прим. перев.



массы-энергии вакуума как обусловленную только лишь гравитационным взаимодействием «близлежащих» виртуальных частиц (разделенных расстояниями порядка их комптоновской длины волны). Каково в этом случае значение плотности энергии вакуума? Опровергается ли оно наблюдательными фактами?

**Задача 13.5.** В некоторой локальной области пространства-времени наблюдатель находит, что скалярная кривизна Риччи практически постоянна, т. е.  $R \approx +1/a^2$ . Почему должен быть выбран знак «+»? Если эта область пространства-времени заполнена только электромагнитным полем, то чему равно  $R$ ?

**Задача 13.6.** Обычно предполагается, что физически допустимый тензор энергии-импульса  $T^{\mu\nu}$  должен удовлетворять (слабому) энергетическому условию:  $T^{00} \geq 0$  для всех физических наблюдателей. Предположим, что у  $T^{\mu\nu}$  имеется времениподобный собственный вектор; каким образом в таком случае данный изолированный наблюдатель может проверить, удовлетворяет ли измеряемый им тензор  $T^{\mu\nu}$  этому условию?

**Задача 13.7.** «Условие энергодоминантности», налагаемое на  $T^{\mu\nu}$ , требует, чтобы, во-первых, удовлетворялось слабое энергетическое условие (плотность энергии неотрицательна для всех наблюдателей) и, во-вторых, для всех наблюдателей плотность энергии была бы больше или равна модулю 3-вектора плотности потока энергии. Покажите, что утверждение

$$\mathbf{u} \cdot (-\mathbf{T})^n \cdot \mathbf{u} \leq 0$$

для всех непространственноподобных векторов  $\mathbf{u}$  сводится к слабому энергетическому условию при  $n=1$  и условию энергодоминантности при  $n=2$ . Как обстоит дело при  $n > 2$ ? [Мы полагаем  $(T^2)_{\mu\nu} \equiv T_{\mu}^{\sigma} T_{\sigma\nu}$  и т. д.]

**Задача 13.8.** Возможно ли подобрать такое распределение материи, являющееся решением уравнений поля Эйнштейна, которое соответствует пустому пространству в направлении к прошлому от некоторой гиперповерхности постоянного времени  $t=0$ , но в направлении к будущему от этой гиперповерхности имеется некоторый ненулевой тензор  $T_{\mu\nu}$ ?

**Задача 13.9.** Пусть имеется некоторая статическая метрика, создаваемая тензором энергии-импульса идеальной жидкости. Покажите, что вектор 4-скорости жидкости параллелен вектору Киллинга, сопряженному времени.

**Задача 13.10.** Сколько числовых значений необходимо задать в каждой точке гиперповерхности Коши (начальных данных), чтобы однозначно определить эволюцию метрики от этой гиперповерхности? [Указание. Покажите вначале, что вторые производные по времени от метрики содержатся только в пространственных компонентах тензора Эйнштейна.]

**Задача 13.11.** Для «почти ньютоновской» метрики

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi) dt^2 + (1 - 2\Phi) \delta_{jk} dx^j dx^k$$

требуется вычислить в первом неисчезающем порядке по  $\Phi$  компоненты псевдотензора энергии-импульса Ландау—Лифшица  $t^{\alpha\beta}_{\text{Л-Л}}$  (см. [7], 6-е изд., стр. 358). При этом предполагается, что поле меняется во времени так медленно, что производными  $\Phi$  по времени можно пренебречь по сравнению с пространственными производными.

**Задача 13.12.** Калибровочным преобразованием называется инфинитезимальное координатное преобразование, переводящее координаты  $x^{\mu'}$  точки  $P$  в новые координаты  $x^{\mu''}$  согласно формуле

$$x^{\mu''}(P) = x^{\mu'}(P) + \xi^{\mu}(P).$$

Такие преобразования приводят к изменению (в первом порядке по  $\xi$ ) функционального вида тензоров. Найдите законы калибровочного преобразования для скаляров, а также для компонент векторов и тензоров 2-го ранга. Для линеаризованных возмущений метрики  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$  покажите, в частности, что

$$h''_{\mu\nu}(x) = h'_{\mu\nu}(x) - 2\xi_{(\mu,\nu)}.$$

**Задача 13.13.** Покажите, что в линеаризованной теории компоненты тензора Римана—Кристоффеля суть

$$R_{\alpha\mu\beta\nu} = \frac{1}{2} (h_{\alpha\nu,\mu\beta} + h_{\mu\beta,\nu\alpha} - h_{\mu\nu,\alpha\beta} - h_{\alpha\beta,\mu\nu}).$$

Продемонстрируйте также в явном виде, что такой тензор Римана инвариантен по отношению к калибровочным преобразованиям.

**Задача 13.14.** В линеаризованной теории часто вместо обычного тензора возмущений метрики  $h_{\alpha\beta}$  используется тензор «с обратным следом»

$$\bar{h}_{\alpha\beta} \equiv h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} h^{\sigma}_{\sigma}.$$

Покажите, что всегда существует калибровочное преобразование к «лоренцевской калибровке», в которой дивергенция  $\bar{h}_{\alpha\beta}$  равна нулю. Является ли это калибровочное преобразование единственным?

**Задача 13.15.** Покажите, что в лоренцевской калибровке (см. задачу 13.14) линеаризованные уравнения поля сводятся к уравнениям

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} \equiv \bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} = -16\pi T_{\mu\nu},$$

где  $\bar{h}_{\mu\nu}$  — тензор  $h_{\mu\nu}$  «с обратным следом».

**Задача 13.16.** В линеаризованной теории плоскую гравитационную волну, распространяющуюся в пустом пространстве-времени, можно представить в виде действительной части комплексного выражения

$$h_{\mu\nu} = \text{Re} \left[ A_{\mu\nu} e^{ik_{\alpha}x^{\alpha}} \right],$$

где  $A_{\mu\nu}$  — некоторый постоянный тензор. Покажите, что вектор  $k$  должен быть изотропным и что  $A$  ортогонально  $k$ .

Для отдельного наблюдателя с 4-скоростью  $u$  в невозмущенной системе покоя данного наблюдателя ( $u^0 = 1, u^i = 0$ ) можно определить «поперечно-бесследовую» калибровку (более специальный вид лоренцевской калибровки) следующим образом:

$$\bar{h}_{\mu 0} = 0, \quad \bar{h}_{\mu}{}^{\mu} = 0.$$

Найдите калибровочное преобразование, позволяющее прийти к такой калибровке. Остается ли при этом тензор  $A$  ортогональным  $k$ ?

**Задача 13.17.** Покажите, что в рамках линеаризованной теории между двумя параллельными узкими световыми лучами отсутствует сила гравитационного притяжения.

**Задача 13.18.** Жесткая сферическая оболочка радиуса  $R$  и пренебрежимо малой толщины медленно вращается с постоянной угловой скоростью  $\Omega$  по отношению к удаленным инерциальным системам отсчета. Полная масса, равномерно распределенная по оболочке, равна  $M$ . Используйте линеаризованные уравнения гравитации для определения  $\omega$  (угловой скорости увлечения инерциальных систем *внутри* оболочки) с точностью до первого порядка по  $\Omega R \ll 1$ . Покажите, что угловая скорость

$$\omega \equiv -\frac{g_{0\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} = \frac{4}{3} \frac{M\Omega}{R} + \mathcal{O}(\Omega^2 R^2),$$

т. е. постоянна всюду внутри оболочки. [Иногда утверждают, что факт постоянства  $\omega$  внутри полости означает, что уравнения Эйнштейна до определенной степени удовлетворяют принципу Маха.]

**Задача 13.19.** В рамках линеаризованной теории тяготения покажите, что уравнения движения вещества  $T^{\mu\nu}{}_{; \nu} = 0$  не согласуются с уравнениями поля для возмущений метрики. Покажите также, что это несовпадение будет второго порядка по возмущению метрики, так что в первом порядке им можно пренебречь.

**Задача 13.20.** Некая гипотетическая частица с отрицательной гравитационной массой  $-M$  высвобождается из состояния покоя на расстоянии  $l \gg M$  от другой фиксированной частицы с положительной массой  $+M$ . Чему равны величина и направление ускорения каждой частицы с точки зрения покоящегося наблюдателя? Рассчитайте траектории движения частиц после того, как они были освобождены, делая при этом любые необходимые разумные допущения.

## ГЛАВА 14

### ФИЗИКА В ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

Эта глава посвящена обобщению законов релятивистской (т. е. согласующейся со специальной теорией относительности) физики, включая сюда гидродинамику, электродинамику и т. д., на искривленное пространство-время. Довольно часто это обобщение заключается попросту в замене обычного частного дифференцирования ковариантным дифференцированием по правилу: «запятая переходит в точку с запятой». Например, обобщение *уравнений движения* состоит в замене уравнения  $T^{\mu\nu}{}_{; \nu} = 0$  на  $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ ; последнее уравнение, включающее точку с запятой, уже учитывает эффекты тяготения.

**Задача 14.1.** Выпишите тензор энергии-импульса для отдельной свободной частицы и покажите, что уравнение движения частицы по геодезической вытекает из уравнения  $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ .

**Задача 14.2.** Покажите, что условие теплового равновесия статической системы в ньютоновском пределе  $T = \text{const}$  заменяется в общей теории относительности условием

$$T (-g_{00})^{1/2} = \text{const},$$

где  $T$  — температура, измеряемая локально покоящимся наблюдателем.

**Задача 14.3.** Выведите из уравнения  $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$  общерелятивистское уравнение Эйлера

$$(\rho + p) \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u} = - [\nabla p + (\nabla_{\mathbf{u}} p) \mathbf{u}]$$

и покажите, что это уравнение обладает правильным ньютоновским пределом.

**Задача 14.4.** Выведите общерелятивистское уравнение гидростатического равновесия

$$\frac{-\partial p}{\partial x^{\nu}} = (\rho + p) \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \ln (-g_{00})^{1/2}$$

и сравните его с соответствующим уравнением ньютоновской теории.

**Задача 14.5.** Покажите, что ультррелятивистская жидкость (уравнение состояния  $p = \frac{1}{3}\rho$ ), находящаяся в гидростатическом равновесии в гравитационном поле, не может обладать свободной поверхностью (т. е. поверхностью, на которой  $\rho \rightarrow 0$ ).

**Задача 14.6.** Два идентичных сосуда, содержащие различные вещества, находятся в однородном статическом гравитационном поле. Плотности массы-энергии для обоих сосудов и их содержимого одинаковы и не зависят от времени, тогда как распределение напряжений (в общем случае анизотропных) различно. Если взвесить эти сосуды на одних и тех же весах, будут ли одинаковы показания весов?

**Задача 14.7.** Пусть  $u$  — 4-скорость идеального газа, участвующего в адиабатическом стационарном течении в стационарном гравитационном поле. Используя релятивистское уравнение Бернулли, докажите, что вдоль линий потока

$$u_\mu = \text{const} \cdot n / (\rho + p),$$

где  $n$  — плотность числа барионов.

**Задача 14.8.** Покажите, что релятивистское уравнение Бернулли, использованное в предыдущей задаче, дает правильный ньютоновский предел для медленных движений и слабых гравитационных полей.

**Задача 14.9.** Рассмотрим движущуюся среду с 4-скоростью  $u(x)$ . Выберем две произвольные соседние частицы  $A$  и  $B$ . Для каждого события вдоль мировой линии  $A$  определим с помощью следующих условий 4-вектор  $\xi$ , который мы назовем «4-векторным расстоянием от  $B$  до  $A$ »: 1)  $\xi$  — некоторый *инфинитезимальный* вектор, проведенный от данного события на мировой линии  $A$  до мировой линии  $B$ ; 2) временная компонента  $\xi$  в ортонормированном базисе, «привязанном» к частице  $A$ , равна нулю, т. е.  $\xi^{\hat{0}} = 0$ .

а) Будем называть движение среды «жестким» в том и только в том случае, когда расстояние  $(\xi \cdot \xi)^{1/2}$  между двумя соседними частицами среды — к примеру, частицами  $A$  и  $B$  в нашем случае — постоянно для всех моментов времени. Покажите, что необходимым и достаточным условием участия среды в жестком движении является выполнение равенств  $\sigma_{\alpha\beta} = 0$  и  $\vartheta = 0$ , где  $\sigma_{\alpha\beta}$  и  $\vartheta$  — величины, введенные в условии задачи 5.18.

б) Сколько независимых уравнений соответствует этим условиям? Сколько степеней свободы существует при релятивистском жестком движении?

**Задача 14.10.** Выведите уравнение Рейчаудхури

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = a^\alpha{}_{;\alpha} + 2\omega^2 - 2\sigma^2 - \frac{1}{3} \phi^2 - R_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta,$$

где  $\phi$  — вторая вязкость для жидкости,  $\omega^2 = 1/2 \omega_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}$ ,  $\sigma^2 = 1/2 \sigma_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta}$ , а обозначения те же, что и в задаче 5.18.

**Задача 14.11.** В некотором пространстве-времени сплошная среда движется вдоль геодезических с нулевыми значениями первой и второй вязкости (определения первой вязкости  $\sigma_{\alpha\beta}$  и второй вязкости  $\phi$  см. в задаче 5.18). Покажите, что данное пространство-время обладает времениподобным вектором Киллинга.

**Задача 14.12.** Наблюдатель, помещенный в замкнутый ящик (не обязательно находящийся в свободном падении), измеряет пространственные координаты и промежутки времени внутри своего ящика с помощью масштабных линеек и часов. Покажите, что уравнение движения пробной частицы, справедливое с точностью до первого порядка по ее измеренной скорости  $v \ll 1$  и координате  $x^j$ , имеет вид

$$dv^j/dt = 2(\vec{v} \times \vec{\omega})^j - [(\vec{x} \times \vec{\omega}) \times \vec{\omega}]^j + (\vec{x} \times d\vec{\omega}/dt)^j - a^j(1 + \vec{a} \cdot \vec{x}) - R^j{}_{0k0} x^k,$$

где  $\vec{\omega}$  — угловая скорость ящика,  $\vec{a}$  — его ускорение и  $R^j{}_{0k0}$  — тензор Римана в начале координат.

**Задача 14.13.** Пусть тензор энергии-импульса безмассового скалярного поля записан в виде

$$T_{\mu\nu} = (4\pi)^{-1} \left( \Phi_{;\mu} \Phi_{;\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \Phi_{;\alpha} \Phi_{;\alpha} \right).$$

Из уравнения  $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$  выведите уравнение движения для этого скалярного поля.

**Задача 14.14.** Пусть в плоском пространстве-времени уравнение скалярного поля имеет вид

$$\Phi_{;v}{}^{;v} = \rho_s,$$

где  $\rho_s$  — плотность «скалярного заряда». Отсюда можно заключить, что в искривленном пространстве-времени это уравнение должно быть заменено на

$$\Phi_{;v}{}^{;v} = \rho_s. \tag{1}$$

Возможно, однако, обобщенное выражение иного вида:

$$\Phi_{;v};^v - \frac{1}{6} R\Phi = \rho_s, \quad (2)$$

где  $R$  — скаляр Риччи. [Уравнение (2) «конформно-инвариантно», а уравнение (1) — нет.] Противоречит ли, вообще говоря, уравнение (2) сильному принципу эквивалентности? Выясните, каким образом наличие  $R$ -члена влияет на величину силы взаимодействия ( $\sim \nabla\Phi$ ) между двумя частицами, несущими «скалярный заряд», если предположить, что кривизна  $R = 1/a^2$  очень медленно изменяется на расстояниях порядка лабораторных масштабов. Какова была бы величина этих аномальных сил, обусловленных  $R$ -членом, по сравнению с обычными скалярными силами, если бы измерения проводились в обычном лабораторном эксперименте?

**Задача 14.15.** Покажите, что из уравнений Максвелла

$$F^{\mu\nu};_{;\nu} = 4\pi J^\mu$$

вытекает

$$J^\mu;_{;\mu} = 0.$$

**Задача 14.16.** Обобщение уравнений Максвелла на искривленное пространство-время с помощью правила «запятая переходит в точку с запятой» (или принципа эквивалентности) не является вполне однозначным. Покажите, что применение этого правила к векторному потенциалу  $A^\mu$  может привести к двум различным видам релятивистского уравнения.

**Задача 14.17.** Оцените относительную погрешность, привносимую в уравнения Максвелла (применяемые к какому-то земному процессу с характерной частотой  $\nu$  и размерами  $l$ ) за счет того, что нам неизвестно, какого вида члены связи с кривизной могут в них содержаться.

**Задача 14.18.** Покажите, что, за исключением случая  $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ , однородные уравнения Максвелла  $F^{\beta\nu};_{;\nu} = 0$  вытекают из требования  $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$ , где  $\mathbf{T}$  — тензор энергии-импульса электромагнитного поля, и из того факта, что  $F^{\mu\nu}$  выводится из выражения для векторного потенциала.

**Задача 14.19.** Покажите, что гамильтониан, из которого получаются уравнения движения пробной частицы с зарядом  $e$ , имеет вид

$$H = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\pi_\mu - eA_\mu) (\pi_\nu - eA_\nu),$$

где  $\pi_\mu$  — канонический импульс. (Канонический импульс  $\pi^\mu$  не



совпадает с 4-импульсом частицы  $p^\mu$ , за исключением случаев, когда 4-потенциал  $A^\mu$  равен нулю.)

**Задача 14.20.** Предположим, что  $\xi$  — вектор Киллинга для некоторого решения уравнений Эйнштейна — Максвелла. Выпишите интеграл движения для заряженных пробных частиц. (Допустим, что  $\mathcal{L}_\xi A = 0$ , где  $A$  — 4-потенциал.)

**Задача 14.21.** Покажите, что уравнения Максвелла инвариантны по отношению к «конформному преобразованию»:

$$g_{\alpha\beta} \rightarrow \tilde{g}_{\alpha\beta} = f g_{\alpha\beta},$$

$$F_{\alpha\beta} \rightarrow \tilde{F}_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta},$$

$$J_\mu \rightarrow \tilde{J}_\mu = f^{-2} J_\mu,$$

где  $f$  — произвольная функция координат.

## ГЛАВА 15

### ГЕОМЕТРИЯ ШВАРЦШИЛЬДА

Геометрией Шварцшильда называется сферически-симметричное статическое решение уравнений поля Эйнштейна в пустоте ( $T^{\mu\nu} = 0$ ). В «координатах кривизны» (таких, что  $2\pi r$  есть собственная длина периметра 2-мерных «сфер») метрика Шварцшильда имеет вид

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2).$$

Иногда угловой элемент записывают сокращенно:

$$d\Omega^2 \equiv d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2.$$

Постоянная  $M$  есть масса источника поля. Если метрика создается сферической звездой, то метрика Шварцшильда справедлива вне звезды, а на ее поверхности гладко сшивается с внутренней метрикой звезды.

---

**Задача 15.1.** Докажите, что квадрат полного момента количества движения

$$L^2 = p_\vartheta^2 + \sin^{-2}\vartheta p_\varphi^2$$

есть интеграл движения вдоль любой геодезической в метрике Шварцшильда.

**Задача 15.2.**

а) Докажите, что в геометрии Шварцшильда все орбиты являются плоскими.

б) Докажите, что все такие орбиты являются *устойчиво* плоскими.

**Задача 15.3.** Частица падает по радиусу на центр метрики Шварцшильда. Чему равна ее направленная к центру координатная скорость ( $dr/dt$ ), измеряемая по собственному времени на бесконечности, при некотором значении радиуса  $r$  (в координатах кривизны)? Чему равна *локально* измеряемая скорость по отношению к неподвижному наблюдателю в точке с тем же значением радиуса?

**Задача 15.4.** Выведите уравнения движения (уравнения, связывающие  $t$ ,  $r$  и  $\tau$ ) для частицы, падающей по радиусу в геометрии Шварцшильда. Рассмотрите три случая: 1) частица высвобождается из состояния покоя при  $r=R$ ; 2) частица высвобождается из состояния покоя на бесконечности; 3) частица испускается из бесконечности на центр со скоростью  $v_\infty$ .

**Задача 15.5.** Выведите описывающую траекторию ( $r$  как функцию  $\varphi$ ) дифференциальное уравнение первого порядка для экваториальных орбит в геометрии Шварцшильда.

**Задача 15.6.** Покажите, что траектории световых лучей в метрике Шварцшильда подчиняются уравнению

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 3u^2,$$

где  $u \equiv M/r$ , а  $r$  — радиальная координата Шварцшильда. Обозначьте «прицельный параметр» — минимальное значение  $r$  вдоль траектории — через  $b$ . Каково отклонение фотона, пролетающего мимо сферического гравитирующего тела, в случае  $M/b \ll 1$ ? Выведите формулу для угла отклонения в первом исчезающем порядке по  $(M/b)$ .

**Задача 15.7.**

а) Для почти-ньютоновской планетной орбиты (т. е. при  $M/r \ll 1$ ) вычислите в низшем порядке по  $M/r$  предсказываемое общей теорией относительности смещение периастрия за время одного полного обращения по орбите.

б) Предположим, что центральная звезда несколько сплюснута или вытянута, так что классический ньютоновский потенциал имеет вид

$$\Phi(r) = -M/r - AM/r^3,$$

где  $A$  зависит от величины сплюснутости или вытянутости. Рассчитайте смещение периастрия за время одного обращения по орбите в низшем порядке по  $A/r^2$ . (Вычисления являются чисто ньютоновскими.)

в) Предположим, что сплюснутость Солнца столь велика, что скорость смещения перигелия, обусловленная сплюснутостью, и соответствующая скорость смещения за счет эффектов общей теории относительности одинаковы по величине для орбиты Меркурия. Вычислите скорость смещения перигелия (в дуговых секундах за столетие) за счет каждого из этих эффектов для четырех ближайших к Солнцу планет. (*Примечание.* Для упрощения вычислений всюду в задаче предположите, что орбиты являются почти круговыми — другими словами, что их эксцентриситет пренебрежимо мал.)

**Задача 15.8.** Космический корабль, обращающийся вокруг звезды массой  $M$  по круговой орбите с длиной окружности  $2\pi r$ , производит выстрел из лазерной пушки (частота покоя  $\nu_0$ ). Пушка ориентирована в плоскости орбиты и направлена под углом  $\alpha$  (в системе отсчета корабля) к тангенциальному направлению движения наружу от орбиты. Какова частота лазера, измеряемая наблюдателем, покоящимся на бесконечности?

**Задача 15.9.** Пробная частица с релятивистской скоростью  $v$  пролетает мимо тела массы  $M$ , причем прицельный параметр  $b$  столь велик, что отклонение  $\phi_{\text{грав}}$  мало. Вычислите  $\phi_{\text{грав}}$ . Пусть теперь в плоском пространстве пробная частица с зарядом  $e$  пролетает со скоростью  $v$  мимо ядра с зарядом  $Ze$ , причем прицельный параметр столь велик, что отклонение  $\phi_{\text{электромаг}}$  мало. Вычислите  $\phi_{\text{электромаг}}$ . Чем формула для  $\phi_{\text{грав}}$  отличается от формулы для  $\phi_{\text{электромаг}}$ ?

**Задача 15.10.** Радиокомментатор ведет репортаж о своем падении по радиусу в шварцшильдовскую черную дыру. Перед самым пересечением шварцшильдовского радиуса его частота вещания начинает испытывать сильнейшее красное смещение, описываемое временной зависимостью вида  $\exp(-t/\text{const})$ , где  $t$  определяется по собственному времени на бесконечности. Зная значение постоянной в экспоненте, определите массу черной дыры.

**Задача 15.11.** Рассчитайте сечение захвата ультрарелятивистских ( $v \rightarrow c$ ) и медленно движущихся ( $v \ll c$ ) частиц шварцшильдовской черной дырой массы  $M$ .

**Задача 15.12.** Предположим, что некто Джон обращается вокруг нейтронной звезды по круговой орбите со значением радиальной координаты  $r = 4M$ . Его приятель Питер, будучи выстрелен из пушки, находящейся на поверхности нейтронной звезды, в радиальном направлении со скоростью меньше первой космической, встречает по пути Джона, затем достигает максимального удаления и падает обратно, причем ему удается еще раз повидать Джона. Последний к моменту второй встречи успел облететь по своей орбите вокруг нейтронной звезды ровно 10 раз. У Питера и Джона есть одна общая страсть: когда бы они ни встретились, они непременно сверяют часы. В момент их первой встречи на орбите, когда Питер удаляется от звезды, они устанавливают свои часы таким образом, что их показания совпадают. Насколько разойдутся часы, когда Джон и Питер сверят их в следующий раз?

**Задача 15.13.** Найдите преобразование координат от шварцшильдовских, где

$$ds^2 = -e^{2\varphi} dt^2 + e^{2\lambda} dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

к «изотропным координатам», где

$$ds^2 = -e^{2\varphi} dt^2 + e^{2\mu} (dr^2 + r^2 d\Omega^2).$$

Примените результаты к конкретному случаю метрики Шварцшильда в пустоте и постройте график, изображающий зависимость между координатами  $(t, r)$  и  $(t, \bar{r})$ . Справедлива ли для площади поверхности  $\bar{r} = \text{const}$ ,  $t = \text{const}$  формула  $A = 4\pi\bar{r}^2$ ? Постройте «диаграмму погружения» (см. [1], т. 2, стр. 278 и далее) для пространственноподобной гиперповерхности  $t=0$  в случае  $0 < \bar{r} < \infty$ .

**Задача 15.14.**

а) Покажите, что буст в пространственном направлении  $e_{\hat{j}}$ , вообще говоря, оставляет инвариантными те физические компоненты тензора Римана  $R_{\hat{i}\hat{j}\hat{k}\hat{l}}$ , которые «параллельны» бусту. Этот факт аналогичен инвариантности  $E_{\hat{j}}$  и  $B_{\hat{j}}$  для буста в направлении  $e_{\hat{j}}$ .

б) Покажите, что в шварцшильдовской геометрии все физические компоненты тензора Римана инвариантны по отношению к бусту в направлении  $r$ , но все эти физические компоненты не инвариантны по отношению к бусту в направлении  $\vartheta$  или  $\varphi$ .

**Задача 15.15.** Покажите, что пространственноподобное сечение  $v = \text{const}$  ( $|v| > 1$ ) шварцшильдовской геометрии в координатах Крускала  $u, v$  нельзя погрузить в евклидово 3-пространство. Каково общее условие, которому должен удовлетворять наклон  $dv/du$  пространственноподобного сечения в шварцшильдовской геометрии, чтобы оно могло быть погружено в евклидово 3-пространство?

**Задача 15.16.** Докажите, что метрика

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{4}{9} \left[ \frac{9M}{2(r-t)} \right]^{2/3} dr^2 + \left[ \frac{9M}{2} (r-t)^2 \right]^{2/3} d\Omega^2,$$

о которой можно думать, что она нестационарна, так как метрические коэффициенты зависят от  $t$ , на самом деле является статической. Покажите, что в действительности она представляет собой не что иное, как метрику Шварцшильда.

**Задача 15.17.** Для метрики предыдущей задачи (15.16) покажите, что множество наблюдателей, неподвижных в данной

системе координат, соответствует наблюдателям, каждый из которых находится в состоянии свободного падения и обладает нулевой энергией (другими словами, все они падают из бесконечности с нулевой начальной скоростью).

**Задача 15.18.** Рассмотрим сферически-симметричную аккрецию на шварцшильдовскую черную дыру массы  $M$  идеально адиабатического газа с уравнением состояния  $p = Kn^\gamma$ , где постоянная  $\gamma$  удовлетворяет соотношению  $4/3 \leq \gamma \leq 5/3$ . На бесконечном удалении от черной дыры в радиальном направлении скорость звука в газе равна  $a_\infty$ . При каком значении радиуса направленный внутрь поток станет сверхзвуковым? (Дайте ответ с точностью лишь до главного члена разложения по  $a_\infty/c$ .)

**Задача 15.19.** Скалярное поле  $\Phi$  удовлетворяет уравнению  $\square \Phi = 0$ . Покажите, что в шварцшильдовской геометрии  $\Phi$  можно разложить по сферическим гармоникам:

$$\Phi = r^{-1} \psi(r, t) Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi),$$

где  $Y_{\ell m}$  — сферическая гармоника, а  $\psi$  удовлетворяет уравнению

$$\psi_{,tt} - (1 - 2M/r) [(1 - 2M/r) \psi_{,r}]_{,r} + V_\ell(r) \psi = 0,$$

здесь

$$V_\ell(r) \equiv (1 - 2M/r) \left[ \frac{2M}{r^3} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right].$$

**Задача 15.20.** Покажите, что метрика Шварцшильда является также решением уравнений поля теории тяготения Бранса — Дикке (уравнения поля теории Бранса — Дикке приведены в книге [2] стр. 174).

## ГЛАВА 16

### СФЕРИЧЕСКАЯ СИММЕТРИЯ И РЕЛЯТИВИСТСКИЕ МОДЕЛИ СТРОЕНИЯ ЗВЕЗД

Геометрия, порождаемая невращающейся звездой, состоящей из идеальной жидкости, является сферически-симметричной. В пространстве вне звезды она представляет собой шварцшильдовскую геометрию, даже если звезда не является статической: например, испытывает радиальные пульсации или коллапсирует. Для статической звезды внутреннюю метрику можно записать в виде

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + (1 - 2m/r)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

где

$$m = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho dr'.$$

Градиент давления внутри звезды дается уравнением гидростатического равновесия Оппенгеймера — Волкова:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(\rho + p)(m + 4\pi r^3 p)}{r(r - 2m)}.$$

Здесь  $p$  и  $\rho$  — соответственно давление и плотность массы-энергии вещества, удовлетворяющие уравнению состояния

$$p = p(n, T),$$

$$\rho = \rho(n, T).$$

Если внутри звезды значение энтропии на один барион  $s$  постоянно, то  $p$  зависит только от  $\rho$ :  $p = p(\rho)$ . Метрическая функция  $\Phi$  определяется эйнштейновскими уравнениями поля:

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{m + 4\pi r^3 p}{r(r - 2m)} \text{ и } e^{2\Phi} = 1 - 2M/R \text{ при } r = R,$$

где  $R$  — радиус звезды, а  $M = m(R)$  — ее полная масса (та самая масса, которая входит в выражение для внешней шварцшильдовской метрики).

Равновесные модели звезд могут быть неустойчивы по отношению к гравитационному коллапсу; в этом случае необходимо пользоваться динамическими уравнениями, полученными из эйнштейновских уравнений поля и/или из уравнения  $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ .

Стационарно вращающаяся звезда обладает уже не сфери-

ческой, а всего лишь аксиальной, или цилиндрической, симметрией. Уравнения, описывающие строение аксиально-симметричных звезд, довольно сложны; тем не менее некоторые общие закономерности можно в этом случае найти либо из соображений симметрии, либо же в предположении, что звезда вращается *жестким* образом.

**Задача 16.1.** Найдите систему базисных векторов (и соответствующий дуальный базис 1-форм) (см. введение к гл. 8) для ортонормированного репера в сферической геометрии. Считайте, что «ножки» (базисные векторы) репера ориентированы вдоль направлений  $t$ ,  $r$ ,  $\vartheta$  и  $\varphi$  в системе изотропных координат, где метрика имеет вид

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + e^{2\mu} (dr^2 + r^2 d\Omega^2).$$

**Задача 16.2.** Предположим, что наблюдатель, покоящийся в некоторой точке внутри сферической релятивистской звезды, измеряет при помощи обычных лабораторных методов действующую на малый элемент объема  $V$  выталкивающую силу  $F_{\text{выталк}}$ , возникающую за счет радиального градиента давления. Как будет выражаться измеренное им значение  $F_{\text{выталк}}$  через  $\rho$ ,  $p$ ,  $m$ ,  $V$  и  $dp/dr$ ? Если наблюдатель приравняет найденную выталкивающую силу равной и противоположно направленной силе тяготения,  $F_{\text{грав}}$ , то каково будет выражение для  $F_{\text{грав}}$  как функции  $\rho$ ,  $p$ ,  $m$ ,  $V$  и  $r$ ? В чем эти результаты отличаются от соответствующих ньютоновских результатов?

**Задача 16.3.** Докажите знаменитую теорему Биркгофа: сферически-симметричное гравитационное поле в пустоте всегда является статическим и всегда представляет собой некоторое решение типа Шварцшильда.

**Задача 16.4.** Покажите, что пробные частицы, находящиеся внутри самогравитирующей полой сферы, не испытывают воздействия гравитационных сил.

**Задача 16.5.** Покажите, что в теории тяготения Бранса — Дикке (соответствующие уравнения поля приведены в книгах [1], т. 3, стр. 315 или [2], стр. 175) единственным статическим сферически-симметричным решением в пустоте, несингулярным в начале координат, является метрика плоского пространства  $\eta$  и постоянное скалярное поле  $\Phi$ .



**Задача 16.6.** Каким числом алгебраически независимых компонент обладает тензор  $T^{\mu\nu}$ , описывающий некоторую сферически-симметричную конфигурацию?

**Задача 16.7.** Найдите все четыре компоненты уравнения  $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$  для тензора энергии-импульса, описывающего статическую сферически-симметричную звезду, состоящую из идеальной жидкости.

**Задача 16.8.** Политропные звезды [звезды, состоящие из вещества с уравнением состояния  $p = Kr^\gamma$ , где  $\gamma = 1 + \frac{1}{n}$  ( $n$  называется индексом политропы)] в ньютоновской теории неустойчивы, если  $\gamma < \frac{4}{3}$ . Рассмотрите влияние малых релятивистских поправок на этот критерий устойчивости. Покажите, что влияние сводится к расширению области неустойчивости на значения  $\gamma < \frac{4}{3} + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  может зависеть от массы, радиуса и внутреннего строения звезды.

**Задача 16.9.** Найдите выражения для пределов Чандрасекара и Оппенгеймера—Волкова (верхние предельные значения массы соответственно для белых карликов и нейтронных звезд) в виде размерных комбинаций фундаментальных констант и масс нуклона и электрона. Аналогичным образом выразите предельные радиусы, соответствующие этим предельным массам.

**Задача 16.10.** Масса  $m(r)$ , находящаяся в сферической звезде внутри сферы радиуса  $r$ , появляется в члене  $g_{rr}$  в выражении для линейного элемента

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + (1 - 2m(r)/r)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2.$$

Выразите  $m(r)$  не зависящим от координат образом — через площадь поверхности и радиальное расстояние между соседними сферическими поверхностями.

**Задача 16.11.**

а) Как выглядит шварцшильдовская метрика в «излучательных координатах» Эддингтона—Финкельштейна, получающихся из координат кривизны путем преобразования:

$$dt = du + (1 - 2M/r)^{-1} dr.$$

б) Пусть теперь  $M$  — функция координаты с нулевым индексом  $u$ , определенной в п. «а». Покажите, что пространство-время не является пустым, и найдите соответствующий ему тензор  $T^{\alpha\beta}$ . Дайте физическую интерпретацию этой метрики, называемой иногда метрикой Вайдья,

**Задача 16.12.** Решите систему релятивистских уравнений внутреннего строения звезды для случая статической сферически-симметричной звезды с однородным распределением плотности. Покажите, что масса и радиус звезды удовлетворяют соотношению  $R/2M > 9/8$ . Какое минимальное значение  $R/2M$  может быть достигнуто при одновременном выполнении условия энергодоминантности (см. задачу 13.7)?

**Задача 16.13.** Статическая сферически-симметричная звезда состоит из ферми-газа, находящегося при нулевой температуре, причем значения энергии Ферми намного больше массы покоя частиц. Покажите, что уравнения внутреннего строения звезды имеют решение  $m(r) = 3r/14$ . Найдите  $\rho(r)$ ,  $p(r)$  и  $n(r)$ . Покажите также, что, хотя  $n$  становится бесконечным при  $r=0$ , число частиц, находящихся внутри сферы любого радиуса, конечно. Постройте диаграмму погружения для 3-поверхности  $t = \text{const}$ . Сингулярность какого типа имеет место при  $r=0$ ?

**Задача 16.14.** Рассчитайте поверхностные напряжения в статической самогравитирующей оболочке массы  $M$  и радиуса  $R$ . Какова собственная поверхностная плотность массы? Сравните выражения для поверхностных напряжений с ньютоновским пределом, когда  $R \gg M$ .

**Задача 16.15.** Каков наименьший возможный собственный радиус самонесущей сферической оболочки массы  $M$ , если вещество, из которого она состоит, удовлетворяет условию энергодоминантности (заметим, что этому условию удовлетворяют все известные до настоящего времени виды вещества)?

**Задача 16.16.** Чему равно красное смещение, испытываемое на бесконечности излучением, распространяющимся в радиальном направлении от тонкой сферической оболочки, находящейся в статическом равновесии, выраженное через поверхностную плотность  $\Lambda^{\hat{t}\hat{t}}$  и поверхностные напряжения  $\Lambda^{\hat{t}\hat{r}}$  этой оболочки? Каково будет наибольшее возможное красное смещение, если считать, что выполняется условие энергодоминантности?

**Задача 16.17.** Покажите, что для жестко вращающейся самогравитирующей звезды, состоящей из идеальной жидкости,

$$\nabla p = (\rho + p) \nabla \ln u^t,$$

где  $u^t$  — компонента 4-скорости сплошной среды в канонической координатной системе, выбранной таким образом, что существующие в данной метрике векторы Киллинга суть  $\xi_{(t)} = \partial/\partial t$  и  $\xi_{(\varphi)} = \partial/\partial \varphi$ .

**Задача 16.18.** Покажите, что в жестко вращающейся самогравитирующей звезде, состоящей из идеальной жидкости, поверхности постоянных значений  $\rho$  и  $r$  совпадают.

**Задача 16.19.** Покажите, что поверхность жестко вращающейся звезды с точки зрения наблюдателя, находящегося на бесконечности, задается уравнением

$$g_{tt} + 2g_{t\varphi}\Omega + g_{\varphi\varphi}\Omega^2 = \text{const},$$

где  $\Omega$  — угловая скорость вращения.

**Задача 16.20.** Найдите доплеровское уширение спектральной линии излучения от жестко вращающейся звезды, наблюдаемое астрономом, расположенным на бесконечности в направлении оси вращения звезды. (Доплеровское уширение определяется вариацией значений доплеровского смещения

$$z = \frac{v_{\text{изл}}}{v_{\text{наблюд}}} - 1$$

вдоль поверхности звезды.)

**Задача 16.21.** Выведите общерелятивистский критерий конвективной устойчивости статической равновесной конфигурации идеальной жидкости.

**Задача 16.22.** Докажите, что для жестко вращающейся конфигурации условия изэнтропичности и постоянства энергии инжекции  $[(\rho + p)/(nu^0)]$  эквивалентны.

**Задача 16.23.** Рассмотрим стационарную аксиально-симметричную звезду. Соответствующая метрика обладает двумя векторами Киллинга  $\xi_{(t)}$  и  $\xi_{(\varphi)}$ . Покажите, что

$$M = - \int (2T^{\mu}_{\nu} - \delta^{\mu}_{\nu}T) \xi^{\nu}_{(t)} d^3\Sigma_{\mu}$$

есть масса звезды с точки зрения бесконечно удаленного наблюдателя. Здесь  $d^3\Sigma_{\mu}$  — элемент объема звезды в некоторый момент времени  $t$  (временная координата  $t$  выбирается таким образом, что  $\xi_{(t)} = \partial/\partial t$ ). Покажите также, что момент количества движения звезды, измеряемый бесконечно удаленным наблюдателем, можно выразить в виде

$$J = \int T^{\mu}_{\nu} \xi^{\nu}_{(\varphi)} d^3\Sigma_{\mu}.$$

**Задача 16.24.** Покажите, что интегральное выражение для массы  $M$  из предыдущей задачи в случае статической сферической звезды, состоящей из идеальной жидкости, имеет вид

$$M = \int_0^R (\rho + 3p) e^{\Phi + \lambda} 4\pi r^2 dr,$$

где  $\Phi$  и  $\lambda$  — метрические функции в координатах кривизны ( $g_{00} = e^{2\Phi}$ ,  $g_{rr} = e^{2\lambda}$ ). Покажите также, что это выражение эквивалентно выражению, получающемуся из уравнений внутреннего строения звезды:

$$M = \int_0^R \rho 4\pi r^2 dr.$$

**Задача 16.25.** В случае сферической коллапсирующей звезды мы не можем добиться одновременного выполнения трех довольно привлекательных условий: 1) радиальная координата сопутствует некоторому сферическому слою вещества звезды; 2) временная координата является собственным временем для этого вещества; 3) метрический тензор диагонален. Докажите, что метрика может *одновременно* обладать всеми этими тремя свойствами в том и только в том случае, когда давление равно нулю.

**Задача 16.26.** Если  $R$  — сопутствующая координата, то метрику для сферически-симметричной коллапсирующей звезды (см. задачу 16.25) можно записать в виде

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + e^{2\Lambda} dR^2 + r^2(t, R) d\Omega^2,$$

где  $\Phi$  и  $\Lambda$  — функции  $R$  и  $t$ . Если звезда состоит из *идеальной* жидкости, то часто оказывается полезным ввести следующие функции:

$$m \equiv \int_0^R 4\pi r^2 \rho r' dR,$$

$$U \equiv e^{-\Phi} \dot{r},$$

$$\Gamma^2 \equiv e^{-2\Lambda} (r')^2.$$

Штрихи здесь означают частное дифференцирование по  $R$ , а точки — по  $t$ . Функция  $m$  имеет смысл массы, находящейся внутри оболочки радиуса  $R$ , а  $U$  — скорость движения оболочки, измеряемая по собственному времени сопутствующего наблюдателя.

Докажите следующие соотношения:

$$а) \quad \dot{m} = -4\pi r^2 \dot{r}.$$

[*Указание.* Воспользуйтесь первым началом термодинамики (задача 5.19), законом сохранения числа барионов, уравнениями движения и соотношением  $G^t_R = 0$  для соответствующей компоненты тензора Эйнштейна (задача 9.20).]

$$б) \quad \Gamma^2 = 1 + U^2 - 2m/r.$$

[*Указание.* Воспользуйтесь соотношениями  $G^t_t = -8\pi\rho$  и  $G^t_R = 0$  (из задачи 9.20).]

**Задача 16.27.** Для случая коллапсирующей звезды, состоящей из идеальной жидкости, покажите, что как только сферическая массивная оболочка, соответствующая значению сопутствующей радиальной координаты  $R$ , сколлапсирует до такой степени, что начнет выполняться неравенство  $2m(R, t)/r(R, t) > 1$ , то эта оболочка сколлапсирует до  $r=0$  за конечное собственное время.

**Задача 16.28.** Для случая сферически-симметричного коллапса в отсутствие давления покажите, что характер падения на центр некоторой сферической оболочки точно так же зависит от величины массы вещества внутри этой оболочки, как характер радиального падения частицы в шварцшильдовской геометрии зависит от массы центрального источника:

$$d^2r/d\tau^2 = -M/r^2.$$

**Задача 16.29.** Для случая сферически-симметричного коллапса в отсутствие давления (см. задачу 16.26) покажите, что  $m$  и  $\Gamma$  не зависят от времени. Решите получающееся динамическое уравнение

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{2m(R)}{r} = \Gamma^2(R) - 1$$

для трех физически различных случаев:  $\Gamma^2 - 1$  больше, меньше или равно нулю.

**Задача 16.30.** Рассмотрим гравитационный коллапс сферически-симметричной, состоящей из идеальной жидкости звезды с нулевым давлением и равномерно распределенной плотностью (т. е. распределенной равномерно всюду в звезде с точки зрения наблюдателей, сопутствующих движению вещества).

1) Покажите, что внутренняя метрика в звезде представляет собой локально фридмановское решение с  $k = +1$ , если звезда начинает коллапсировать из состояния покоя при некотором конечном значении радиуса, с  $k = 0$ , если звезда коллапсирует из состояния покоя на бесконечности, и с  $k = -1$ , если вещество звезды обладает на бесконечности конечной скоростью.

2) Из теоремы Биркгофа (см. задачу 16.3) следует, что внешняя метрика представляет собой метрику Шварцшильда. Покажите, что каждая точка поверхности звезды движется вдоль радиальной геодезической шварцшильдовской метрики.

3) Покажите, что на поверхности звезды метрики Фридмана и Шварцшильда гладко сшиваются друг с другом. [Указание. Необходимо и достаточно показать, что внутренняя (3-мерная!) геометрия поверхности звезды и внешняя кривизна этой поверхности будут одинаковы при измерении как изнутри, так и извне звезды.]

## ГЛАВА 17

### ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ

Черной дырой Керра — Ньюмана называется физический объект, описывающийся точным решением уравнений поля Эйнштейна и обладающий массой, моментом количества движения и, вообще говоря (но не в астрофизических случаях), зарядом.

Описывающая это решение метрика имеет в «координатах Буайе — Линдквиста» следующий вид:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2Mr - Q^2}{\Sigma} \right) dt^2 - \left( \frac{(2Mr - Q^2) 2a \sin^2 \vartheta}{\Sigma} \right) dt d\varphi + \\ + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\vartheta^2 + \left( r^2 + a^2 + \frac{(2Mr - Q^2) a^2 \sin^2 \vartheta}{\Sigma} \right) \sin^2 \vartheta d\varphi^2,$$

где

$$a^2 + Q^2 \leq M^2,$$

$M$  — масса,  $Q$  — заряд,  $a$  — момент количества движения на единицу массы и

$$\Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2,$$

$$\Sigma \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta.$$

Метрические коэффициенты не зависят от  $t$  и  $\varphi$ , так что  $\xi_{(t)} = \partial/\partial t$  и  $\xi_{(\varphi)} = \partial/\partial \varphi$  суть векторы Киллинг. Одной из характеристик этого решения являются уравнения орбитального движения пробной частицы, непосредственно вытекающие из вида метрики:

$$\Sigma \dot{r} = \pm (V_r)^{1/2},$$

$$\Sigma \dot{\vartheta} = \pm (V_\vartheta)^{1/2},$$

$$\Sigma \dot{\varphi} = - (aE - L_z / \sin^2 \vartheta) + \frac{a}{\Delta} P,$$

$$\Sigma \dot{t} = - a (aE \sin^2 \vartheta - L_z) + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} P.$$

Здесь «точками» обозначены производные по собственному времени или аффинному параметру,

$$P \equiv E (r^2 + a^2) - L_z a - eQr,$$

$$V_r \equiv P^2 - \Delta [\mu^2 r^2 + (L_z - aE)^2 + \mathcal{L}],$$

$$V_\vartheta \equiv \mathcal{L} - \cos^2 \vartheta [a^2 (\mu^2 - E^2) + L_z^2 / \sin^2 \vartheta],$$

$E$  — сохраняющаяся полная энергия;

$L_z$  — сохраняющаяся  $z$ -компонента момента количества движения;

$\mathcal{L}$  — сохраняющаяся величина, связанная с полным моментом количества движения;

$\mu$  — масса покоя частицы;

$e$  — заряд частицы.

Шварцшильдовская черная дыра представляет собой частный случай решения Керра — Ньюмана при  $a = Q = 0$ . Черная дыра Рейсснера — Нордстрема есть частный случай при  $a = 0$ ,  $Q \neq 0$ ; она сферически-симметрична. Керровская черная дыра — это частный случай при  $a \neq 0$ ,  $Q = 0$ . Определяющим свойством черной дыры является наличие *горизонта* — поверхности, сквозь которую вещество может падать на центр, но от которой ни вещество, ни несущие информацию сигналы не могут уйти на бесконечность. Для случая керровской дыры эта поверхность расположена при  $r = r_+$ , являющемся значением большего корня уравнения  $\Delta = 0$ . *Пределом статичности* для вращающейся черной дыры называется поверхность, внутри которой все наблюдатели обязательно увлекутся в орбитальное движение вокруг центра дыры. Для керровского случая предел статичности располагается при  $r = r_0$ , являющемся большим корнем уравнения  $g_{tt} = 0$ . Область, расположенная между горизонтом и пределом статичности, называется эргосферой.

**Задача 17.1.** Покажите, что постоянная  $M$  в метрике Керра есть масса системы, а постоянная  $a$  — момент количества движения на единицу массы.

**Задача 17.2.** Предлагается использовать небольшие ( $\ll M_\oplus$ ) черные дыры для превращения в металлолом пришедших в полную негодность автомобилей. Остовы автомобилей должны спрессовываться до аккуратных круглых шариков в процессе частичного коллапса на черную дыру. Оцените, какова должна быть масса находящейся на околоземной орбите черной дыры, пригодной для такого применения. Сколько остовов в час можно переработать подобным способом?

**Задача 17.3.** Покажите, что после того, как ракетный корабль пересечет гравитационный радиус (горизонт) шварцшильдовской черной дыры, он достигнет точки  $r = 0$  за собственное время  $\tau \leq \pi M$  независимо от величины тяги, которую развивают его двигатели.

**Задача 17.4.** Покажите, что закон Кеплера

$$\Omega^2 = M/r^3$$

остается в точности справедливым для круговых орбит вокруг шварцшильдовской черной дыры, если  $r$  — радиус в координатах кривизны, а  $\Omega$  — угловая частота обращения, измеряемая бесконечно удаленным наблюдателем. Выведите аналогичный закон для экваториальных орбит вокруг керровской черной дыры, обладающей удельным моментом количества движения  $a$ .

**Задача 17.5.** Наблюдатель, находящийся на круговой орбите радиусом  $r$  вокруг заряженной сферической черной дыры (черная дыра Рейсснера — Нордстрема) с массой  $M$  и зарядом  $Q$ , измеряет локальные характеристики электрического и магнитного полей. Каковы их напряженности и ориентации?

**Задача 17.6.** Сопоставляя значения массы, заряда и момента количества движения «классического» электрона, покажите, что он не может быть черной дырой Керра — Ньюмена.

**Задача 17.7.** Для круговых орбит в экваториальной плоскости керровской черной дыры докажите, что ограниченно устойчивой орбите (случай так называемой *краевой* устойчивости) соответствует минимум энергии  $E$  и минимум момента количества движения  $L$ .

**Задача 17.8.** Некоторый (не обязательно свободно падающий) наблюдатель обращается вокруг керровской черной дыры по орбите, лежащей в экваториальной плоскости  $\phi = \pi/2$ .

а) Пусть орбита является круговой  $r = \text{const}$ . Будем называть  $\Omega = d\phi/dt$  «угловой скоростью нашего наблюдателя по отношению к некоторому удаленному покоящемуся наблюдателю». Выразите  $u^0$ ,  $u^\phi$ ,  $u_0$  и  $u_\phi$  через  $\Omega$ ,  $r$ ,  $M$  и  $a$ .

б) Предположим, что эта круговая орбита лежит внутри эргосферы (радиус орбиты расположен вне горизонта при  $r_+$ , но внутри предела статичности при  $r_0$ ). Покажите, что наш наблюдатель не может оставаться в состоянии покоя по отношению к удаленному наблюдателю, или, другими словами, покажите, что угловая скорость  $\Omega$  для нашего наблюдателя обязана быть ненулевой.

в) Если наблюдатель находится в области  $r_- < r < r_+$ , покажите, что он не может оставаться на орбите с постоянным радиусом.

**Задача 17.9.** Покажите, что внутри эргосферы керровской черной дыры (а значит, вне горизонта!) существуют траектории частиц отрицательной энергии. Покажите, что космический корабль



может увеличить свою полную энергию, если во время прохождения по орбите внутри эргосферы с его борта в черную дыру будет выпущен снаряд.

**Задача 17.10.** Покажите, что когда пробная частица достигает горизонта керровской черной дыры ( $r = r_+$ ), ее «угловая скорость по отношению к бесконечно удаленному наблюдателю» равна

$$\Omega \equiv \frac{d\varphi}{dt} = \frac{a}{2Mr_+}.$$

**Задача 17.11.** Докажите, что в геометрии Керра существуют «квазикруговые полярные» орбиты, т. е. орбиты с постоянным значением радиальной координаты, попеременно проходящие над северным и южным полюсами. Каков наименьший возможный полярный радиус такой орбиты?

**Задача 17.12.** Горизонтом Киллинга называется изотропная гиперповерхность (гиперповерхность, нормаль к которой является изотропным вектором), генерируемая вектором Киллинга. Энергоповерхность («предел статичности») определяется как поверхность бесконечного красного смещения по отношению к неподвижным наблюдателям. Покажите, что для статической черной дыры эргоповерхность совпадает с горизонтом Киллинга.

**Задача 17.13.** Покажите, что площадь поверхности горизонта черной дыры Керра — Ньюмана (т. е. площадь поверхности  $r = r_+$ ,  $t = \text{const}$  в координатах Буайе—Линдквиста) равна

$$4\pi \{ [M + (M^2 - Q^2 - a^2)^{1/2}]^2 + a^2 \}.$$

**Задача 17.14.** Исходя из теоремы Хокинга («при соударении двух черных дыр суммарная площадь их поверхности никогда не может уменьшаться»), найдите, чему равна наименьшая масса  $M_2$  шварцшильдовской черной дыры, возникающей в результате столкновения двух керровских черных дыр с равными массами  $M_1$ , но с параметрами момента количества движения, имеющими разные знаки:  $a_1 = -a_2$ . Если предположить, что  $|a| \approx M$ , то какую долю первоначальной массы можно превратить в уходящее излучение? Существуют ли другие процессы соударения незаряженных черных дыр, дающие столь же большой выход энергии?

**Задача 17.15.** Используя теорему о том, что площадь поверхности черной дыры не может уменьшаться (см. задачу 17.14), докажите, что керровская черная дыра усиливает (а вовсе не поглощает) некоторые моды падающего на нее поля излучения.

**Задача 17.16.**

а) Запишите скалярное волновое уравнение  $\square \Phi = 0$  в геометрии Керра в координатах Буайе — Линдквиста.

б) Покажите, что методом разделения переменных это уравнение может быть сведено к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

в) Найдите асимптотический вид  $\Phi$  при  $r \rightarrow \infty$ .

г) Найдите асимптотический вид  $\Phi$  при  $r \rightarrow r_+$ .

д) Какое граничное условие для  $\Phi$  соответствует входящим волнам с точки зрения расположенного на горизонте физического наблюдателя?

е) Покажите, что для волны вида

$$\Phi = \exp(-i\omega t + im\varphi) f(r, \vartheta)$$

энергия выходит из дыры *наружу*, если  $0 < \omega/m < a/(2Mr_+)$ . Сравните с результатами задачи 17.15.

**Задача 17.17.** В черную дыру Рейсснера — Нордстрема с  $Q^2 < M^2$  падают по радиальному направлению заряженные частицы. Покажите, что в дыру никогда нельзя будет ввести заряд, достаточный для того, чтобы начало выполняться соотношение  $Q^2 > M^2$ , соответствующее «голой» сингулярности, а не решению типа черной дыры.

**Задача 17.18.** В геометрии Керра «наблюдателям с нулевым моментом количества движения» соответствует базис 1-форм вида

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}^t &= |g_{tt} - \omega^2 g_{\varphi\varphi}|^{1/2} \tilde{dt}, \\ \tilde{\omega}^{\hat{\varphi}} &= (g_{\varphi\varphi})^{1/2} (\tilde{d\varphi} - \omega \tilde{dt}), \\ \tilde{\omega}^{\hat{r}} &= (\Sigma/\Delta)^{1/2} \tilde{dr}, \\ \tilde{\omega}^{\hat{\vartheta}} &= \Sigma^{1/2} \tilde{d\vartheta},\end{aligned}$$

где  $\omega \equiv -g_{t\varphi}/g_{\varphi\varphi}$ .

а) Покажите, что этот базис 1-форм является ортонормированным.

б) Найдите дуальные базисные векторы.

в) 4-скорость наблюдателя с нулевым моментом количества движения есть  $\mathbf{u} = \mathbf{e}_{\hat{t}}$ ; покажите, что  $\mathbf{u}$  обладает нулевым вращением (см. задачу 5.18).

г) Наблюдатель с нулевым моментом количества движения не является инерциальным наблюдателем; покажите, что его ускорение равно

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2} \nabla \ln |g_{tt} - \omega^2 g_{\varphi\varphi}|.$$

**Задача 17.19.** Вычислите гауссовскую кривизну горизонта керровской черной дыры и покажите, что она становится отри-

цательной при  $a > 3^{1/2}M/2$ . (Это означает, что при  $a > 3^{1/2}M/2$  поверхность горизонта не может быть глобально погружена в евклидово 2-пространство.) С помощью теоремы Гаусса — Бонне проверьте, что топологически поверхность горизонта есть 2-сфера.

**Задача 17.20.** Покажите, что реликтовая (возраста  $\sim 10^{10}$  лет) вращающаяся черная дыра массой  $\lesssim 10^{15}$  г уже должна была потерять большую часть своего момента количества движения за счет спонтанного квантового излучения фотонов или гравитонов. Какая доля момента количества движения вращающейся черной дыры с массой  $1M_{\odot}$  ( $\sim 10^{33}$  г) была бы потеряна за тот же период?

**Задача 17.21.** Рассмотрим вакуумную метрику вида

$$ds^2 = - \frac{\left(1 - \frac{1}{2}m/\rho\right)^2}{\left(1 + \frac{1}{2}m/\rho\right)^2} dt^2 + \frac{\left(1 - \frac{1}{2}m/\rho\right)^2}{\left(1 - \frac{3}{2}m/\rho\right)^2} (d\rho^2 + \rho^2 d\vartheta^2 + \rho^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2);$$

она является частным решением статической сферически-симметричной задачи в теории тяготения Лайтмана — Ли. Описывает ли приведенная выше метрика черную дыру, и если да, то как свойства такой дыры отличаются от свойств аналогичной дыры в общей теории относительности?

## ГЛАВА 18

### ГРАВИТАЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Слабые гравитационные волны описываются линеаризованной теорией (см. гл.13). Основные уравнения для таких волн, распространяющихся в пустоте, имеют вид

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (|h_{\mu\nu}| \ll 1),$$

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h^\alpha{}_\alpha \eta_{\mu\nu},$$

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} \equiv \bar{h}_{\mu\nu;\alpha}{}^\alpha = 0,$$

$$\bar{h}^{\mu\alpha}{}_{;\alpha} = 0 \quad (\text{«лоренцевская калибровка»}),$$

$$h_{\mu 0} = 0, \quad h^\alpha{}_\alpha = 0 \quad (\text{«поперечно-бесследовая калибровка»}).$$

Эффективный тензор энергии-импульса гравитационных волн есть

$$T_{\mu\nu}^{(GW)} = \frac{1}{32\pi} \langle h_{jk,\mu} h^{jk}{}_{,\nu} \rangle,$$

где угловые скобки означают усреднение по нескольким длинам волн, а  $h_{jk}$  записывается в поперечной калибровке со следом, равным нулю (см. [1], гл. 36.7).

Мощность гравитационного излучения  $L_{GW}$ , испускаемого почти-ньютоновским, медленно движущимся ( $v \ll c$ ) гравитирующим источником, равна

$$L_{GW} = \frac{1}{5} \frac{G}{c^3} \langle \ddot{\mathcal{I}}_{jk} \ddot{\mathcal{I}}^{jk} \rangle,$$

где  $\mathcal{I}_{jk}$  — так называемый «тензор приведенного квадрупольного момента» источника, дающийся выражением

$$\mathcal{I}_{jk} \equiv \int \rho \left( x_j x_k - \frac{1}{3} \delta_{jk} r^2 \right) d^3x,$$

а угловые скобки означают усреднение по нескольким характерным периодам источника.

---

**Задача 18.1.** Автомобилист из Массачусетса рассерженно грозит кулаком другому автомобилисту. Какая доля расходуемой им энергии уходит на гравитационное излучение?

**Задача 18.2.** Динамическая система с гравитационной связью (например, двойная звезда) обладает массой  $M$  и размерами  $R$  (рассматривается только порядок величин). Оцените время, необходимое для того, чтобы система испытала ощутимое влияние сил реакции излучения, и сравните полученный характерный масштаб времени с динамическим масштабом времени системы.

**Задача 18.3.** Для электрического диполя и, соответственно, для исходящего от него излучения имеются три независимые ориентации, соответствующие трем направлениям, вдоль которых может быть направлен диполь. Сколько независимых ориентаций существуют для бесследового тензора квадрупольного момента?

**Задача 18.4.** Вычислите мощность гравитационного излучения от тонкого металлического стержня массы  $M$  и длины  $l$ , вращающегося с частотой  $\omega$  вокруг симметрично расположенной относительно его концов перпендикулярной к нему оси. Оцените мощность электромагнитного излучения, которое будет возникать за счет незначительного избытка электронов на концах стержня (электроны отталкиваются к концам центробежной силой). Если принять разумные значения для плотности ( $10 \text{ г/см}^3$ ) и частоты вращения ( $1 \text{ кГц}$ ) стержня, то какое излучение — электромагнитное или гравитационное — будет играть более существенную роль в замедлении вращения стержня?

**Задача 18.5.** Силы реакции излучения, действующие на медленно движущийся (почти-ньютонковский) источник, можно получить, добавляя к ньютоновскому потенциалу потенциал «реакции излучения» вида

$$\Phi^{\text{реакц}} = \frac{1}{5} \ddot{\mathcal{I}}_{jk}^{(5)} x^j x^k.$$

[Ср. статью Берка (Burke W., Journ. Math. Phys., 12, 402 (1971)) или [1], т. 3, стр. 208]. Здесь  $\ddot{\mathcal{I}}_{jk}$  — приведенный квадрупольный момент источника

$$\ddot{\mathcal{I}}_{jk} \equiv \int \rho \left( x_j x_k - \frac{1}{3} \delta_{jk} r^2 \right) d^3x$$

в некоторый данный момент времени. Индекс (5) означает пятую производную по времени. Из этого потенциала выведите выражения для усредненных по времени скоростей потери источником энергии и момента количества движения, записанные через производные от  $\ddot{\mathcal{I}}_{jk}$ .

**Задача 18.6.** Две звезды с массами  $M_1$  и  $M_2$ , разделенные расстоянием  $R$ , обращаются вокруг общего центра масс по нерелятивистской круговой орбите. В результате торможения грави-

тационным излучением  $R$  меняется со временем. Найдите функцию  $R(t)$ .

**Задача 18.7.** Две точечные массы  $m_1$  и  $m_2$  движутся по ньютоновской эллиптической орбите с большой полуосью  $a$  и эксцентриситетом  $e$ . Рассчитайте  $da/dt$  и  $de/dt$ , обусловленные торможением гравитационным излучением. Покажите, что эллиптическая орбита постепенно приближается к круговой.

**Задача 18.8.** Плоская гравитационная волна распространяется в почти пустом пространстве-времени вдоль направления  $x^1$  (другими словами, возмущения метрики  $h_{\alpha\beta}$  суть функции только от  $u = t - x$ ). Найдите в явном виде координатное преобразование, обращающее в нуль все  $h_{\alpha\beta}$ , за исключением  $h_{23} = h_{32}$  и  $h_{22} = -h_{33}$ . Покажите, что те же самые результирующие компоненты можно было бы получить непосредственно, если перейти с помощью проектирования к поперечно-бесследовой калибровке.

**Задача 18.9.** Покажите, что генерируемое аксиально-симметричной системой гравитационное излучение не переносит суммарного момента количества движения. (Не используйте предположения о том, что источники обладают слабыми внутренними гравитационными полями.)

**Задача 18.10.** Определите параметры Стокса для плоской гравитационной волны и покажите, как из трех параметров Стокса можно вычислить степень линейной и круговой поляризации волны, а также ориентацию максимума линейной поляризации.

**Задача 18.11.** Первоначально статический источник приводится в резкое движение, в результате возникает гравитационное излучение. Затем, спустя конечный промежуток времени, источник вновь становится статическим. Удаленный наблюдатель регистрирует гравитационные волны, следя за движением двух свободных частиц, находящихся первоначально в состоянии покоя относительно друг друга. Покажите, что после прохождения гравитационных волн наблюдатель вновь обнаружит частицы в их первоначальных положениях покояющимися относительно друг друга в первом порядке по амплитуде волны.

**Задача 18.12.** Упругий стержень может использоваться для детектирования гравитационных волн не только на низшей нормальной моде его колебаний (частоты  $\omega_0$ ), но также и на гармониках  $\omega_n \equiv n\omega_0$ . Какова чувствительность  $n$ -й моды по отношению

к нулевой, т. е. как зависит от  $n$  отношение максимума квадрата амплитуды смещения к потоку энергии волны? (Предположите, что стержень обладает той же самой постоянной времени механического затухания для всех мод.)

**Задача 18.13.** Слабая плоская гравитационная волна, распространяющаяся в направлении оси  $x$ , падает по нормали на цементную плиту. Цемент поглощает из волны энергию  $E$ . Покажите (например, исходя из уравнений движения  $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ ), что плита должна также поглощать  $x$ -составляющую импульса, равную  $E$ , и найдите соотношение между скоростями поглощения энергии и  $x$ -составляющей импульса.

**Задача 18.14.** В предыдущей задаче было показано, что материальные среды должны поглощать составляющую импульса вдоль направления распространения волны. На первый взгляд это кажется несовместимым с представлением о гравитационных волнах как поперечных волнах! Чтобы исследовать данную проблему, построим идеализированную модель поведения молекул цемента из предыдущей задачи. Предположим, что они приходят в гармоническое движение при отклонении от положения равновесия и что существует некоторая сила затухания, обусловленная внутренним трением в цементе. Предположим также, что гравитационная волна является монохроматической и линейно поляризованной. Используя уравнение расхождения геодезических, найдите среднее по времени значение силы (и, следовательно, скорость поглощения импульса), действующей в направлении распространения волны. Покажите, что найденная скорость поглощения импульса равна той же скорости, с которой молекулы поглощают энергию.

**Задача 18.15.** Слабая плоская гравитационная волна с частотой  $\omega$  и безразмерной амплитудой  $h$  проходит через газ частиц, взаимодействующих по типу «твердых шариков»; газ имеет температуру  $T$ . Средняя длина свободного пробега атомов газа равна  $\ell$ ; газ является достаточно разреженным, так что  $\ell \gg c/\omega$ . Покажите, что за конечный промежуток времени частицы газа будут нагреты до релятивистских температур. Оцените требуемое для этого время. Оцените также расстояние, на котором волна затухает по амплитуде в  $e$  раз.

**Задача 18.16.** Оцените число гравитонов, излучаемых при асимметричном взрыве с энергией  $E$ .

**Задача 18.17.** Сколько примерно тепловых гравитонов излучает 100-ваттная электрическая лампочка за время своего номинального срока службы, равного 1000 часам? Каковы приблизи-

тельно частота волны и число гравитонов, излучаемых лампочкой, когда она падает и разбивается о цементный пол?

**Задача 18.18.** Дайте подробный расчет времени жизни атома водорода в  $3d$ -состоянии по отношению к распаду в  $1s$ -состояние за счет механизма гравитационного излучения.

**Задача 18.19.** Из соображений симметрии очевидно, что поток тепловых гравитонов от сферически-симметричной звезды является изотропным; покажите, что этот факт не противоречит теореме Биркгофа. Какова приблизительно мультипольность  $2^l$  этого потока (для диполя  $l = 1$  и т. д.) для типичной звезды, например, такой, как наше Солнце?

**Задача 18.20.** Рассмотрим следующие «типы гравитационных волн», соответствующие гравитационной волне, распространяющейся в направлении оси  $z$ :

$$\begin{aligned}\Psi_2 &= -\frac{1}{6} R_{z0z0}, & \Psi_4 &= R_{y0y0} - R_{x0x0} + 2iR_{x0y0}, \\ \Psi_3 &= \frac{1}{2} (-R_{x0z0} + iR_{y0z0}), & \bar{\Psi}_4 &= R_{y0y0} - R_{x0x0} - 2iR_{x0y0}, \\ \bar{\Psi}_3 &= \frac{1}{2} (-R_{x0z0} - iR_{y0z0}), & \Phi_{22} &= -(R_{x0x0} + R_{y0y0}).\end{aligned}$$

Какие из этих волн являются поперечными?

*Спин* волны указывает (среди всего прочего) на соотношение между ориентациями различных состояний поляризации. Для скалярной волны (спин 0) параметры волны симметричны относительно направления распространения. Для векторной волны (например, электромагнитной) со спином 1 независимые состояния поляризации повернуты друг относительно друга на  $90^\circ$ ; поворот на  $180^\circ$  возвращает нас к исходному состоянию поляризации, меняя только знак. Вообще говоря, для волны со спином  $s$  поворот на угол  $\pi/s$  возвращает нас к исходному состоянию поляризации. Какие из перечисленных выше волн обладают спином 0? Спином 1? Спином 2? Какие из них допустимы в общей теории относительности?

**Задача 18.21.** Нарисуйте картину силового поля для каждого типа волн из предыдущей задачи.

**Задача 18.22.** Рассмотрим метрику

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - du dv + 2H(x, y, u) du^2.$$

Какой вид должна иметь функция  $H$ , чтобы эта метрика соответствовала сильной плоской гравитационной волне, распространяющейся в пустоте?



## ГЛАВА 19

### КОСМОЛОГИЯ

Если Вселенная однородна и всюду изотропна, то ее геометрия дается метрикой Робертсона — Уокера

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right],$$

где  $k = +1, 0, -1$  для закрытой, пространственноплоской и открытой модели соответственно. Когда для определения временной зависимости функции  $R(t)$  и значения  $k$  используются уравнения Эйнштейна, результирующее пространство-время называется моделью Фридмана (иногда, особенно в случае не равной нулю космологической постоянной, ее называют также моделью Леметра). Две первые производные от  $R(t)$  в современную эпоху (что обозначается индексом 0) параметризуются с помощью постоянной Хаббла

$$H_0 \equiv (dR/dt)/R \quad \text{при } R = R_0$$

и так называемого параметра замедления

$$q_0 \equiv -[(d^2R/dt^2)R]/(dR/dt)^2 \quad \text{при } R = R_0.$$

Вещество в космологии, вообще говоря, находится в состоянии расширения или сжатия, так что свет, достигший некоторого наблюдателя, обычно уже испытал красное или фиолетовое смещение относительно своего источника. Это смещение описывается величиной  $z$ , определяемой формулой

$$1 + z \equiv \frac{v_{\text{изл}}}{v_{\text{набл}}} = \frac{\lambda_{\text{набл}}}{\lambda_{\text{изл}}}.$$

В целом ряде случаев величина  $z$  монотонно меняется с расстоянием от наблюдателя, так что иногда говорят просто об «объекте, находящемся на красном смещении  $z$ ».

Если  $\rho$  и  $p$  суть плотность и давление заполняющей Вселенную «гомогенизированной» материи, обладающей массой-энергией, то случай с  $\rho \gg p$  называют моделью «с преобладанием вещества», а случай  $p \approx \frac{1}{3}\rho$  — моделью «с преобладанием излучения» (или «радиационно-доминированной» моделью).

Из наличия космического фонового микроволнового излучения со спектром, соответствующим излучению абсолютно черного тела при температуре около 3К, следует, если проделать экстраполяцию «назад во времени», что на ранних стадиях развития фридмановской модели существовали чрезвычайно высокие температуры (поэтому такая модель называется иногда «горячей моделью» расширяющейся Вселенной, а фоновое излучение — реликтовым). Не исключено, однако, что высокое значение «энтропии на барион», вытекающее из существования фонового излучения, обусловлено какими-то диссипативными процессами, происходившими в течение эволюции нашей Вселенной.

**Задача 19.1.** Покажите, что уравнения ньютоновской гидродинамики и теории тяготения не допускают существования однородной, изотропной, статической космологической модели (т. е. неизменной во времени Вселенной, однородно заполненной идеальной жидкостью).

**Задача 19.2.** Пространство-время не содержит вещества и является всюду изотропным. Докажите, что оно представляет собой плоское пространство Минковского.

**Задача 19.3.** Некоторый объект испускает чернотельное излучение с температурой  $T$  в собственной покоящейся системе отсчета; мы наблюдаем это излучение при красном смещении  $z$  и в телесном угле  $\Omega$ . Чему равен измеряемый нами поток излучения? Что изменится, если красное смещение не является космологическим, а обусловлено доплеровским движением локального объекта?

**Задача 19.4.** Однородные изотропные пространственные гиперповерхности должны в силу сферической симметрии обладать линейным элементом вида

$$d\sigma^2 = a^2 [f^2(r) dr^2 + r^2 d\Omega^2], \quad a = \text{const.}$$

Покажите, что функция  $f^2(r)$  должна иметь вид  $(1 - kr^2)^{-1}$ , где  $k = 0, \pm 1$ .

**Задача 19.5.** Покажите, что метрику Робертсона — Уокера

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \right]$$

можно также переписать в виде

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) [d\chi^2 + \Sigma^2(\chi) (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)],$$

или

$$ds^2 = R^2(\eta) [-d\eta^2 + d\chi^2 + \Sigma^2(\chi) (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2)],$$

где

$$\Sigma^2(\chi) = \begin{cases} \sin^2\chi & \text{для } k = +1, \\ \chi^2 & \text{для } k = 0, \\ \text{sh}^2\chi & \text{для } k = -1. \end{cases}$$

**Задача 19.6.** Покажите, что пространственноподобные 3-поверхности в закрытой изотропной Вселенной обладают трансляционной симметрией, не оставляющей ни одной неподвижной точки. (Обратите внимание, что для двух измерений это неверно: как бы мы ни «причесывали» 2-сферу, все равно останутся два «хохолка»!)

**Задача 19.7.** В расширяющуюся Вселенную Робертсона — Уокера выстреливается пуля, обладающая скоростью  $V_1$  относительно космологических наблюдателей. Позже, когда Вселенная расширилась в  $(1+z)^{-1}$  раз (эта величина называется масштабным фактором), пуля обладает уже другой скоростью  $V_2$  относительно космологических наблюдателей. Выразите  $V_2$  через  $V_1$  и  $z$ . Покажите, что в пределе  $V_1 \rightarrow c$  получается формула для красного смещения фотонов.

**Задача 19.8.** При помощи некоторого явного координатного преобразования покажите, что метрика Робертсона — Уокера является конформно-плоской. Выразите  $R_{\mu\nu\alpha\beta}$  через  $g_{\mu\nu}$ ,  $\rho$ ,  $p$  и 4-скорость вещества  $u^\mu$ .

**Задача 19.9.** Покажите, что в метрике Робертсона — Уокера расстояние до объекта  $d_A$ , определяемое по его видимому угловому размеру, расстояние  $d_L$ , определяемое по светимости (или фотометрическое расстояние), и расстояние  $d_M$ , определяемое по собственному движению объекта, связаны соотношениями

$$(1+z)^2 d_A = (1+z) d_M = d_L.$$

**Задача 19.10.** Предположим, что астрономам удалось выделить класс объектов с известными значениями абсолютной светимости  $L$ . Предположим далее, что мы измеряем их видимый блеск  $\ell$  (или фотометрическое расстояние до этих объектов  $d_L$ ) и красное смещение  $z$ . Используя выражение для линейного элемента Робертсона — Уокера, выразите  $\ell$  (или  $d_L$ ) как функцию  $L$ ,  $z$ ,  $H_0$  и  $q_0$  для малых значений  $z$ .

**Задача 19.11.** Пусть  $n(t_0)$  — взятая в современную эпоху плотность числа идентичных, принадлежащих к одному (гипоте-

тическому) классу световых или радиоисточников, однородно распределенных во Вселенной.

а) Покажите, что число таких источников с красными смещениями, меньшими  $z$ , определяемое по наблюдениям с Земли в современную эпоху, есть

$$N(z) = \frac{4\pi}{3} \frac{n(t_0)}{H_0^3} z^3 \left( 1 - \frac{3}{2} z (1 + q_0) + \dots \right).$$

В данном случае мы пренебрегаем эволюционными эффектами, т. е. считаем, что число источников в единице сопутствующего объема остается постоянным.

б) Если все источники обладают одной и той же истинной светимостью  $L$ , покажите, что число источников, для которых поток излучения [в эрг/(с·см<sup>2</sup>)] превосходит значение  $S$ , определяемое по наблюдениям с Земли в современную эпоху, равно

$$N(S) = \frac{4\pi}{3} n(t_0) \left( \frac{L}{4\pi S} \right)^{3/2} \left[ 1 - 3H_0 \left( \frac{L}{4\pi S} \right)^{1/2} + \dots \right].$$

**Задача 19.12.** Световой луч распространяется вдоль радиальной линии в метрике Робертсона — Уокера

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right].$$

Как координата  $r$  связана с аффинным параметром  $\lambda$  вдоль траектории луча или, другими словами, чему равно  $dr/d\lambda$ ?

**Задача 19.13.** Исходя из требования, чтобы метрика Робертсона — Уокера удовлетворяла уравнениям поля Эйнштейна, выведите динамические уравнения для космологической модели Фридмана, заполненной идеальной жидкостью:

$$3\ddot{R} + 4\pi G(\rho + 3p)R = 0, \quad (1)$$

$$R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k - 4\pi G(\rho - p)R^2 = 0. \quad (2)$$

**Задача 19.14.** Покажите, что два дифференциальных уравнения второго порядка из задачи 19.13 эквивалентны уравнениям первого порядка:

$$\dot{R}^2 + k = \frac{8\pi G}{3} \rho R^2, \quad (1)$$

$$\frac{d}{dR}(\rho R^3) = -3pR^2. \quad (2)$$

**Задача 19.15.** Для фридмановской космологической модели выведите соотношения

$$\frac{8\pi G\rho}{3} = \frac{k}{R^2} + H^2, \quad (1)$$

$$-8\pi Gp = \frac{k}{R^2} + H^2(1 - 2q). \quad (2)$$

Если в модели преобладает вещество ( $\rho \gg p$ ), покажите, что

$$\frac{k}{R^2} = (2q - 1) H^2, \quad (3)$$

$$\frac{8\pi G\rho}{3} = 2qH^2. \quad (4)$$

Если преобладает излучение ( $p \approx \frac{1}{3}\rho$ ), покажите, что

$$\frac{k}{R^2} = (q - 1) H^2, \quad (5)$$

$$\frac{8\pi G\rho}{3} = qH^2. \quad (6)$$

**Задача 19.16.** Какие уравнения, связывающие  $p$ ,  $\rho$  и  $R(t)$ , являются во фридмановской модели следствиями уравнения сохранения энергии,  $T^{\nu}_{\mu;\nu} = 0$ ?

**Задача 19.17.** Для фридмановской модели с  $k = -1$  и  $p = \rho = 0$  покажите, что линейный элемент имеет вид

$$ds^2 = -dt^2 + t^2 [d\chi^2 + \text{sh}^2 \chi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)].$$

Укажите явный вид координатного преобразования, показывающего, что эта метрика описывает пространство Минковского.

**Задача 19.18.** Решите фридмановское уравнение первого порядка

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{R^2}$$

относительно  $R(t)$ , когда преобладающий вклад в плотность  $\rho$  дает а) вещество и б) излучение. Выразите при этом все параметры современной эпохи через  $H_0$  и  $q_0$ .

**Задача 19.19.** В расширяющуюся фридмановскую Вселенную выстреливается пуля. Покажите, что в случае  $k = -1$  пуля достигает скорости, равной скорости некоторого космологического наблюдателя, но продолжает при этом находиться на постоянном собственном расстоянии от него. Для случая  $k = 0$  покажите, что пуля опять-таки достигает скорости, равной скорости некоторого космологического наблюдателя, но собственное расстояние между пулей и этим наблюдателем при  $t \rightarrow \infty$  становится сколь угодно большим.

**Задача 19.20.** Рассмотрим замкнутую ( $k = 1$ ) фридмановскую Вселенную, в которой излучение является преобладающим лишь на протяжении пренебрежимо малой доли всего времени жизни

Вселенной. Сколько раз фотон может «обежать по кругу» эту Вселенную за время от момента ее «рождения» до «смерти»?

**Задача 19.21.** Пусть идеализированная фридмановская Вселенная ( $k=0$ ), в которой преобладает вещество и которая имеет постоянную Хаббла  $H_0$ , содержит однородно распределенные источники с постоянной светимостью  $L$ . Если локальная пространственная плотность числа таких источников в современную эпоху равна  $n$ , то какова будет яркость  $B$  ночного неба (энергия, приходящая из единичного телесного угла на единицу поверхности приемника в единицу времени)? Если Вселенная является статической и возраст ее бесконечен, то яркость ночного неба должна была бы также быть бесконечной; этот факт носит название парадокса Ольберса.

**Задача 19.22.** Предположим, что в эпоху рекомбинации водорода (которая, как мы будем считать, имела место при красном смещении  $z=1500$ ) параметр замедления  $q=0,5002$ . Чему тогда должен быть равен параметр замедления  $q_0$  в современную эпоху? Повторите вычисления для  $q=0,4998$  при  $z=1500$ . (Рассмотрите Вселенную, в которой преобладает вещество.)

**Задача 19.23.** Замкнутая ( $k=1$ ) фридмановская Вселенная обладает постоянной Хаббла  $H_0$  и параметром замедления  $q_0$ . Будем считать, что в этой Вселенной всегда преобладало вещество.

а) Чему равен полный собственный объем Вселенной в современную эпоху?

б) Чему равен полный собственный объем пространства, которое мы «охватываем взором», глядя на небосвод?

в) Чему равен полный собственный объем пространства, занимаемый в настоящее время веществом, которое мы видим, глядя на небосвод?

**Задача 19.24.** Чему равен видимый угловой размер объекта с собственным диаметром  $l$ , наблюдаемого с красным смещением  $z$  во фридмановской космологической модели с преобладанием вещества, для которой значения постоянной Хаббла и параметра замедления в настоящее время равны  $H_0$  и  $q_0$ ? (Аналогичные результаты для видимых собственных движений и видимого блеска следуют из задачи 19.9.)

**Задача 19.25.** В «горячей» фридмановской модели существуют две независимые друг от друга важные эпохи: когда во Вселенной впервые перестает преобладать излучение и она переходит к стадии преобладания вещества ( $\rho_{\text{вещ}} \approx \rho_{\text{изл}}$ ) и когда протоны и электроны начинают рекомбинировать, образуя водород. Оказы-

вается, что в нашей Вселенной эти две эпохи почти полностью налагаются во времени друг на друга. Исходя из этого факта, получите численное значение сохраняющейся энтропии на барион

$$\sigma \equiv 4aT^3/3n,$$

где  $T$  — температура,  $a$  — коэффициент пропорциональности, различный для разных типов излучения,  $n$  — плотность числа барионов.

**Задача 19.26.** Выразите температуру характеристической рекомбинации водорода (т. е. температуру, при которой в условиях термодинамического равновесия степень ионизации составляет 0,5) через значение сохраняющейся энтропии на барион  $\sigma$  в горячей модели расширяющейся Вселенной. Дайте числовой ответ для  $\sigma = 10^8$  и  $\sigma = 10^9$ .

**Задача 19.27.** В радиационно-доминированной фридмановской космологической модели найдите температуру  $T$  как функцию собственного космологического времени  $t$  для моментов времени, близких к начальной сингулярности. Предположите, что вклад в плотность энергии  $\rho$  дают только фотоны, электроны и позитроны. Как изменится ответ, если включить сюда еще нейтрино и антинейтрино?

**Задача 19.28.** Фридмановская космологическая модель в момент расширения, характеризующийся масштабным фактором  $R_1$ , обладает температурой  $T_1$ . Преобладающий вклад в плотность дают релятивистские электроны, позитроны, мюоны, фотоны и нейтрино, находящиеся в термодинамическом равновесии. Далее, в момент расширения, характеризующийся масштабным фактором  $R_2$ , мюонные пары уже проаннигилировали, но все остальные частицы по-прежнему остаются релятивистскими и находятся в состоянии равновесия. Выразите температуру  $T_2$  через  $T_1$ ,  $R_1$  и  $R_2$ .

**Задача 19.29.** При каком из нижеследующих предположений в горячей модели расширяющейся Вселенной образовалось бы меньше  $\text{He}^4$ , чем это предсказывается «стандартной» моделью? Меньше  $\text{H}^2$  (дейтерия)?

а) Предположим, что плотность числа барионов в теперешней Вселенной больше, чем считается на сегодняшний день.

б) Предположим, что константа слабого взаимодействия фактически меньше, чем принятая на сегодняшний день.

в) Предположим, что в настоящее время в космическом фоне больше нейтрино, чем антинейтрино или фотонов.

г) Предположим, что в настоящее время в космическом фоне больше антинейтрино, чем нейтрино или фотонов.

д) Предположим, что гравитационная постоянная  $G$  меняется в космологических масштабах времени и в прошлом была несколько больше, чем сейчас.

**Задача 19.30.** Предположим, что Вселенная является изотропной, однородной и пустой; тем не менее, при этом существует тензор энергии-импульса, обусловленный «поляризацией вакуума» и имеющий вид

$$8\pi T_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}.$$

(На прежнем языке это значило бы: существует не равная нулю космологическая постоянная  $\Lambda$ .) Найдите космологическое решение с  $k=0$ , а также найдите систему координат, в которой это решение было бы статическим. Такая модель называется Вселенной де Ситтера.

**Задача 19.31.** Вселенная является изотропной, однородной и содержит только не создающую давления пыль; кроме того, ее тензор энергии-импульса, обусловленный поляризацией вакуума, имеет вид

$$T_{\mu\nu} = \rho_0 u_\mu u_\nu - \frac{\Lambda}{8\pi} g_{\mu\nu},$$

где  $u^\mu$  — поле 4-скоростей вещества. Покажите, что для такой метрики существует статическое решение, но оно неустойчиво. Эта космологическая модель называется Вселенной Эйнштейна.

**Задача 19.32.** Чему равен собственный объем Вселенной Эйнштейна из задачи 19.31, выраженный через плотность пыли  $\rho_0$ ?

**Задача 19.33.** Одно время казалось, что наблюдательные данные указывают на необычное скопление значений красного смещения квазаров вблизи  $z=2$ . Одна из попыток объяснить этот факт состояла в предположении, что наша Вселенная представляет собой заполненную пылью космологическую модель с  $k=+1$  и не равной нулю космологической постоянной  $\Lambda$ , причем значение последней лишь чуть-чуть превосходит соответствующее значение для статической модели Эйнштейна (см. задачу 19.31). Покажите, что в этой модели Вселенная будет расширяться с уменьшающейся скоростью до некоторого радиуса  $R_m$ , вблизи которого она будет оставаться в течение длительного времени, продолжая при этом расширяться чрезвычайно медленно, после чего вновь начнет расширяться со скоростью, которая асимптотически стремится к значению  $H = (\Lambda/3)^{1/2}$ .



Предположим, что квазары образуются в эпоху, когда радиус почти постоянен. Какое современное значение плотности  $\rho_{\text{вещ}}$  предсказывает эта модель? (Считайте, что  $H_0 = 10^{-28} \text{ см}^{-1}$ .)

**Задача 19.34.** Каково по порядку величины то влияние, которое оказывает наличие космологической постоянной на небесную механику Солнечной системы, если  $\Lambda \sim 10^{-57} \text{ см}^{-2}$ ?

**Задача 19.35.** Докажите, что для физически реализуемой идеальной жидкости не существует решения уравнений Эйнштейна, которое было бы однородным, всюду изотропным и *статическим*. (До открытия Хаббла Эйнштейн считал этот факт доказательством несостоятельности своей теории и, пытаясь исправить положение, ввел в уравнения член с «космологической постоянной».)

**Задача 19.36.** Докажите, что не существует статических решений уравнений Эйнштейна для жидкости *без давления*. Не используйте предположения об однородности или изотропии. (Трудность этой задачи зависит от определения «статичности». Более легкий случай: пусть термин «статический» понимается в смысле первого определения «статичности» из задачи 10.8, т. е. как «не зависящий от времени и инвариантный относительно обращения времени». Более трудный случай: используйте второе определение из задачи 10.8.)

**Задача 19.37.** Докажите, что для идеальной жидкости не существует статических и однородных решений уравнений Эйнштейна. Не используйте предположения об изотропии. (Здесь, как и в задаче 19.36, существует более легкий и более трудный случай в зависимости от использованного определения «статичности».)

**Задача 19.38.** В космологии обычно используют координаты, сопутствующие галактикам. Пусть  $(\tau, x^i)$  есть такая система координат, и пусть метрика записана в общем виде

$$ds^2 = -d\tau^2 + 2g_{0i}d\tau dx^i + g_{ij}dx^i dx^j,$$

где  $g_{0i}$  и  $g_{ij}$  могут быть функциями от  $\tau$  и  $x^i$ . Покажите, что:

- $\tau$  есть собственное время для некоторой галактики;
- собственные расстояния на гиперповерхности с постоянным  $\tau$  зависят от  $g_{ij}$ ;
- если  $g_{0i}$  и  $g_{ij}$  не зависят от всех  $x^i$ , то Вселенная является однородной, но обратное утверждение несправедливо;
- если  $g_{0i}$  и  $g_{ij}$  не зависят от  $\tau$ , то  $\sigma_{\alpha\beta} = 0$ ,  $\Phi = 0$ , но, вообще говоря,  $\omega_{\alpha\beta} \neq 0$ ;
- если  $g_{0i} = 0$  и  $g_{ij} = f(\tau) \bar{g}_{ij}(x^k)$ , то  $\sigma_{ij} = 0$ ;

е)  $g_{0i,0} = 0$  в том и только в том случае, если галактики движутся по геодезическим;

ж) если  $\omega_{\alpha\beta} \neq 0$ , то *никаким* выбором  $\tau$  и  $x^i$  нельзя всюду обратить в нуль  $g_{0i}$ , а это означает, что из условия  $\omega_{\alpha\beta,0} \neq 0$  следует, что галактики не движутся по геодезическим.

**Задача 19.39.** Расстояние между двумя соседними галактиками есть

$\delta x^\alpha = R n^\alpha$ , где  $\mathbf{n}$  — единичный, чисто пространственный вектор в покоящейся системе отсчета, связанной с одной из галактик. Покажите, что

$$\frac{\dot{R}}{R} = \sigma_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta + \frac{1}{3} \Phi,$$

где  $\sigma$  — тензор сдвига, а  $\Phi$  — скалярное растяжение, и покажите, что усреднение по всем направлениям  $n^\alpha$  дает

$$\left\langle \frac{\dot{R}}{R} \right\rangle = \frac{1}{3} \Phi.$$

**Задача 19.40.** Найдите  $\Phi$ ,  $\omega_{\alpha\beta}$  и  $\sigma_{\alpha\beta}$  для конгруэнции галактических мировых линий в космологической модели Робертсона — Уокера. (Определения см. в задаче 5.18.) Прделайте то же самое для анизотропной метрики

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2a} dx^2 + e^{2b} dy^2 + e^{2c} dz^2,$$

где  $a$ ,  $b$  и  $c$  — функции только от  $t$ , а  $x$ ,  $y$  и  $z$  — координаты, сопутствующие галактикам.

**Задача 19.41.** Рассмотрим однородную, анизотропную космологическую модель с метрикой

$$ds^2 = -dt^2 + g_{ij}(t) dx^i dx^j,$$

где пространственные сечения  $t = \text{const}$  обладают плоской геометрией. Найдите эволюцию  $g_{ij}$ , когда эта модель является «гравитационно-доминированной», т. е. положите в уравнения поля  $T^{\mu\nu}$  равным нулю. Покажите, что в этой модели объем Вселенной уменьшается до нуля линейно по  $t$  при  $t \rightarrow 0$  (в радиационно-доминированной фридмановской модели эта зависимость имеет вид  $t^{3/2}$ , а в модели с преобладанием вещества переходит в  $t^2$ ).

## ГЛАВА 20

### ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО ПРОВЕРКЕ ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ

В настоящей главе рассматриваются основные понятия, относящиеся к экспериментальной проверке теорий тяготения (отклонение света в гравитационном поле, смещение перигелия и т. п.). Эти вопросы затрагиваются также в ряде задач, помещенных в других разделах книги, а именно: 11.9, 11.11, 12.2—12.4, 12.6, 12.7, 13.2—13.4, 14.12, 15.6, 15.7.

---

**Задача 20.1.** Эксперимент по измерению гравитационного искривления светового луча состоит в следующем: откачанная трубка длиной  $l$  помещена горизонтально в однородное гравитационное поле, например в поле Земли на уровне моря, причем  $l \ll r_{\text{Земли}}$ , так что неоднородности поля (приливные силы) пренебрежимо малы. Проходящий через трубку лазерный луч под воздействием однородного гравитационного поля отклоняется от горизонтали. Вычислите угол отклонения луча по отношению к оси трубки; ответ выразите через длину трубки  $l$  и ускорение силы тяжести  $g$ . Обсудите возможность проведения такого эксперимента в земной лаборатории.

**Задача 20.2.** Вычислите гравитационное отклонение светового луча, проходящего вблизи Солнца, используя ньютоновскую теорию тяготения и тот факт, что в локальной системе свободно падающего наблюдателя траектории светового луча представляют собой прямые линии. Так как свет все время находится в слабом гравитационном поле, использование ньютоновского приближения кажется вполне оправданным. Почему же полученный результат не согласуется с общерелятивистским результатом?

**Задача 20.3.** Получите общее выражение для углового отклонения в гравитационном поле Солнца света, приходящего от звезды, которая с точки зрения земного наблюдателя находится на угловом расстоянии от Солнца, равном  $\alpha$ . Расстояние от Земли до Солнца равно  $R$ . Не используйте предположения о малости

угла  $\alpha$ , но покажите, что в пределе малых  $\alpha$  ответ сводится к привычному результату  $\delta\alpha = 4M/b$  (см. задачу 15.6).

**Задача 20.4.** Покажите, что учет момента количества движения  $\vec{J}$  Солнца видоизменяет формулу для отклонения света (задача 20.3). Вместо  $\delta\varphi = 4M/b$  мы будем иметь

$$\delta\varphi = \frac{4M}{b} \left( 1 - \frac{\vec{J} \cdot \vec{n}}{Mb} \right),$$

где  $\vec{n}$  — единичный вектор в направлении момента количества движения фотонов относительно центра Солнца.

**Задача 20.5.** При интерпретации результатов измерений отклонения электромагнитных волн Солнцем необходимо учитывать, что кроме общерелятивистского отклонения существует еще отклонение, зависящее от частоты волн и обусловленное влиянием солнечной короны. Оцените прицельный параметр, для которого общерелятивистский и корональный эффекты дают примерно одинаковый вклад в отклонение электромагнитной волны частоты  $\nu$ . Можно считать, что распределение плотности числа электронов в солнечной короне описывается приближенной формулой

$$\lg \left( \frac{n_e}{1 \text{ см}^{-3}} \right) = 8,4 - 6,5 \lg \left( \frac{r}{R_\odot} \right)$$

для значений  $r \lesssim 4R_\odot$ . Чему численно равно найденное значение прицельного параметра, выраженное в радиусах Солнца, для  $\nu = 1000 \text{ МГц}$ ?

**Задача 20.6.** Угол отклонения света, проходящего вблизи Солнца, дается формулой

$$\delta = 1,75''/b,$$

где  $b$  — прицельный параметр, выраженный в радиусах Солнца. Разработайте конструкцию тонкой линзы (т. е. выведите формулу для ее толщины как функции радиуса), которая моделировала бы подобные фокусирующие свойства. Если в центре линзы поместить «черную маску» диаметром 8 мм, изображающую солнечный диск, то вы сможете моделировать эксперименты по отклонению света Солнцем, держа линзу на расстоянии вытянутой руки. Считайте, что показатель преломления вещества линзы такой же, как у обычного кронгласа, т. е.  $n = 1,52$ .

**Задача 20.7.** Вычислите предсказываемое общей теорией относительности смещение перигелия Меркурия, выразив его через большую полуось  $a$  и эксцентриситет  $e$  орбиты Меркурия и через массу Солнца  $M$ .

**Задача 20.8.** Ньютоновскую теорию тяготения можно модифицировать и сделать ковариантной, если уравнение для силы, действующей на точечную частицу, записать в виде

$$dp^\mu = -\eta^{\mu\nu}\Phi_{,\nu\rho}dx^\rho + p^\alpha\Phi_{,\alpha}dx^\mu,$$

где  $\Phi$  — скалярный потенциал, связанный с тензором энергии-импульса соотношением

$$\Phi^{;\mu}{}_{;\mu} = 4\pi T^\mu{}_\mu.$$

Выясните, согласуется ли эта теория с экспериментом и наблюдениями:

- а) Согласуется ли эта теория с экспериментами Этвеша и Дикке, продемонстрировавшими эквивалентность инертной и пассивной гравитационной массы?
- б) Согласуется ли эта теория с результатами эксперимента Паунда — Ребки по измерению гравитационного красного смещения фотонов у поверхности Земли?
- в) Предсказывает ли эта теория искривление идущего от звезды светового луча вблизи Солнца?

**Задача 20.9.** Некий физик намеревается использовать для проверки специальной и общей теории относительности современные атомные часы, характеризующиеся колоссальной точностью. Он размещает различные часы в разных точках поверхности Земли (которая, как предполагается, вращается жестко) и измеряет скорости их хода по отношению к каким-то стандартным часам. Регистрируемые отклонения от номинальной скорости хода обусловлены как доплеровским сдвигом в результате вращения Земли, так и красным смещением под воздействием гравитационного поля Земли. Вычислите наблюдаемое значение скорости хода часов, помещенных в точку с полярными координатами  $(r, \theta)$ , по отношению к произвольно выбранным эталонным часам. Учтите вращательную деформацию поверхности Земли, предполагая, что Земля представляет собой жестко вращающееся тело, состоящее из идеальной жидкости.

## ГЛАВА 21

### РАЗНОЕ

Задачи, собранные в этой главе, посвящены главным образом вариационным методам, тонким оболочкам вещества и спинорам.

*Задача 21.1.* Покажите, что

$$1) \delta(-g)^{1/2} = \frac{1}{2}(-g)^{1/2} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu},$$

$$2) \delta g^{\mu\nu} = -g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} \delta g_{\rho\sigma}.$$

*Задача 21.2.* Пусть  $L = L(\Phi^A, g_{\mu\nu})$  есть плотность лагранжиана для некоторого поля или распределения вещества. Поле описывается переменными  $\Phi^A$ , где  $A$  соответствует произвольным тензорным индексам. Действие записывается в виде

$$S = \int L(-g)^{1/2} d^4x.$$

Введем функциональную производную  $\delta L/\delta\Phi^A$ , беря вариацию от  $\Phi^A \rightarrow \Phi^A + \delta\Phi^A$  и полагая соответствующее приращение  $S$  равным

$$\delta S = \int \frac{\delta L}{\delta\Phi^A} \delta\Phi^A (-g)^{1/2} d^4x.$$

Покажите, что если  $L$  зависит от  $\Phi^A$  и ее первых частных производных  $\Phi^A_{,a}$ , то уравнение  $\delta L/\delta\Phi^A = 0$  есть обычное уравнение Эйлера — Лагранжа.

*Задача 21.3.* Если  $L$  есть плотность лагранжиана из задачи 21.2, то тензор энергии-импульса можно определить с помощью варьирования  $g_{\mu\nu}$  в выражении для действия  $S$ :

$$\delta S = \int \frac{\delta(L(-g)^{1/2})}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} d^4x \equiv \frac{1}{2} \int T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} (-g)^{1/2} d^4x.$$

Покажите, что уравнение  $T^{\mu\nu}_{; \nu} = 0$  следует из уравнений движения поля и того факта, что действие  $S$  есть скаляр.

**Задача 21.4.** Рассмотрим действие вида

$$S = (16\pi)^{-1} \int (-g)^{1/2} R d^4x + \int L_{\text{вещ}} (-g)^{1/2} d^4x,$$

где  $R$  — скаляр Риччи, а  $L_{\text{вещ}}$  содержит метрические коэффициенты  $g_{\mu\nu}$ , но не содержит символов  $\Gamma$  (другими словами, символы  $\Gamma$  присутствуют только в  $R$ ).

а) Рассматривая  $g_{\mu\nu}$  и  $\Gamma$  как независимые переменные поля (такой подход называется методом Палатини), покажите, что уравнение  $\delta S = 0$  приводит к уравнениям поля Эйнштейна и обычной формуле, выражающей символы  $\Gamma$  через  $g_{\mu\nu}$ . (Мы предполагаем, что  $\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}$ ).

б) Пусть теперь символы  $\Gamma$  суть обычные символы Кристоффеля, использующиеся для определения ковариантных производных. Покажите, что уравнение  $\delta S = 0$  (где теперь уже  $\delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}$  не является независимым от  $\delta g^{\alpha\beta}$ ) приводит к уравнениям поля Эйнштейна.

**Задача 21.5.** Плотность лагранжиана для скалярного поля есть

$$L = -(8\pi)^{-1} (\Phi_{;\alpha}\Phi^{;\alpha} + m^2\Phi^2).$$

Найдите соответствующие уравнения движения и вид тензора энергии-импульса. Проверьте непосредственными вычислениями, что дивергенция этого тензора энергии-импульса равна нулю.

**Задача 21.6.** Плотность лагранжиана электромагнитного поля есть

$$L = -(16\pi)^{-1} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu},$$

где  $F_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu}$ . Покажите, что уравнения Максвелла

$$F^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$$

получаются путем приравнивания нулю вариации  $\int L (-g)^{1/2} d^4x$  относительно  $A_{\mu}$ . Найдите тензор энергии-импульса, исходя из формулы

$$T_{\mu\nu} = -2 \frac{\delta L}{\delta g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} L.$$

Покажите, что эквивалентной плотностью лагранжиана является

$$L = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu} A_{\mu;\nu},$$

где тензор  $F^{\mu\nu}$  антисимметричен, а  $F^{\mu\nu}$  и  $A_{\mu}$  должны варьироваться независимо.

**Задача 21.7.** Лагранжиан в теории гравитации Бранса — Дикке имеет вид

$$L = (\Phi R - \omega \Phi_{,\alpha} \Phi^{,\alpha} \Phi^{-1} + 16\pi L_{\text{вещ}}),$$

где  $\Phi$  — скалярное поле,  $R$  — скаляр кривизны,  $\omega$  — константа связи. Варьируя  $g_{\alpha\beta}$  и  $\Phi$ , получите уравнения поля из уравнения

$$\delta \int L (-g)^{1/2} d^4x = 0.$$

**Задача 21.8.** Поверхностным слоем называется времениподобная 3-поверхность, отделяющая друг от друга две области пространства-времени. В общей теории относительности внутренняя геометрия такой 3-поверхности является вполне определенной, но внешняя кривизна может претерпевать разрыв. Другими словами, вычисляя тензор внешней кривизны  $K$  в 4-геометрии с одной и с другой стороны слоя, мы можем прийти к различным результатам. Поверхностная энергия-импульс  $S^\alpha_\beta$  такого слоя определяется с помощью соотношения

$$S^\alpha_\beta = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} T^\alpha_\beta dn,$$

где  $n$  — собственное расстояние, перпендикулярное к 3-поверхности. Выразите «скачок» тензора  $K$  через  $S^\alpha_\beta$ , воспользовавшись уравнениями для начальных значений.

**Задача 21.9.** Для поверхностного слоя, описываемого гауссовыми нормальными координатами  $n$  и  $x^i$  ( $i=1, 2, 3$ ) (см. решение задачи 21.8), выведите уравнение движения поверхностного слоя

$$S^i_{|i} + [T^i_i] = 0,$$

где квадратные скобки означают «скачок» на поверхности, а вертикальная черточка — ковариантное дифференцирование по отношению к внутренней геометрии 3-поверхности.

**Задача 21.10.** Измерения поверхностной плотности тонкой пылевой оболочки в пустом пространстве, проводимые сопутствующим пыли наблюдателем, дают для поверхностной массовой плотности значение  $\sigma$ . Если 4-скорость пыли есть  $u$ , покажите, что

$$[K_{ij}] = 8\pi\sigma \left( u_i u_j + \frac{1}{2} {}^{(3)}g_{ij} \right),$$

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = -\sigma u^i{}_{|i},$$



$$a^+ - a^- = 4\pi\sigma,$$

$$a^+ + a^- = 0,$$

где  $a^+$  и  $a^-$  — 4-ускорения, измеряемые соответственно снаружи и внутри оболочки.

**Задача 21.11.** Вакуумная метрика вне коллапсирующей сферической пылевой оболочки представляет собой геометрию Шварцшильда

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

а внутри оболочки — плоскую геометрию

$$ds^2 = -dT^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2.$$

Очевидно, что радиальные координаты в обеих этих метриках обладают тем свойством, что  $4\pi r^2$  есть собственная площадь сферических поверхностей  $r = \text{const}$  и  $t$  или  $T = \text{const}$ .

Покажите, что для коллапсирующей сферической пылевой оболочки «масса покоя оболочки»  $\mu \equiv 4\pi R^2(\tau)\sigma$  есть величина постоянная. Здесь  $\sigma$  — поверхностная массовая плотность оболочки, а  $4\pi R^2(\tau)$  — площадь поверхности оболочки как функция ее собственного времени. Выведите уравнение движения оболочки

$$M = \mu \left[ 1 + \left( \frac{dR}{d\tau} \right)^2 \right]^{1/2} - \frac{\mu^2}{2R},$$

а затем, проинтегрировав его, найдите (в неявном виде) функцию  $R(\tau)$  для случая  $dR/d\tau = 0$  при  $R = \infty$ .

**Задача 21.12.** Найдите мгновенную пространственную метрику, соответствующую произвольному распределению  $N$  точечных масс в некоторый момент наступления симметрии (см. [1], т. 1, § 21.10).

**Задача 21.13.** Предположим, что мы отождествляем 4-векторы  $U^\alpha$  с 2-индексными спинорами  $U^{AA'}$  с помощью отображения

$$(U^0, U^1, U^2, U^3) \rightarrow 2^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} U^0 + U^1 & U^2 + iU^3 \\ U^2 - iU^3 & U^0 - U^1 \end{bmatrix}.$$

Что является аналогом метрики Минковского на языке спиноров? Другими словами, требуется найти  $L_{AA'BB'}$ , такое, для которого  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = \eta_{\alpha\beta} U^\alpha V^\beta = L_{AA'BB'} U^{AA'} V^{BB'}$ .

$$\left[ \text{Указание. Воспользуйтесь спинором } (\epsilon_{AB}) = (\epsilon^{AB}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

Что является в спинорном формализме аналогом преобразований Лоренца?

(Примечание. Используемые здесь и в последующих задачах спинорные обозначения можно найти, например, у Пирани (Trautman A., Pirani F. A. E., Bondi H., Lectures on General Relativity, Prentice-Hall, 1965.)

**Задача 21.14.** Покажите, что

$$а) \varepsilon_{A[B^c D]} = 0,$$

$$б) \xi_{AB} = \xi_{(AB)} + \frac{1}{2} \varepsilon_{AB} \xi^C{}_C,$$

где  $\xi_{AB}$  — произвольный 2-спинор. (Примечание. Эта и две следующие задачи были предложены Т. Сейновским.)

**Задача 21.15.** Пусть

$$T_{ab} = T_{AA'BB'}.$$

Покажите, что если тензор  $T_{ab}$  антисимметричен, то дуальный ему тензор в спинорном представлении имеет вид

$$*T_{ab} = \frac{1}{2} i (T_{ABV'A'} - T_{VA A'V'}).$$

**Задача 21.16.** Пусть в спинорном представлении

$$T_{ab} = T_{AA'BB'}.$$

Какой тензор соответствует  $T_{VA'AV'}$ ?

## РЕШЕНИЯ

### ГЛАВА I

**Решение 1.1.**  $\mathbf{u} = (\gamma, \gamma\vec{v})$ , где  $\gamma \equiv (1 - \vec{v}^2)^{-1/2} = u^0 = dt/d\tau$ .  
Следовательно,

а)  $u^0 = (1 - \vec{v}^2)^{-1/2}$ ,

б)  $u^j = (1 - \vec{v}^2)^{-1/2} v^j$ ,

в)  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -1$ , поскольку  $\mathbf{u}$  — 4-скорость, и

$$u^0 = [1 + (u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2]^{1/2} \equiv (1 + u^j u_j)^{1/2},$$

г)  $d/d\tau = (dt/d\tau) d/dt = (1 - v^2)^{-1/2} d/dt$ ,

д)  $v^j = u^j/u^0 = u^j (1 + u^i u_i)^{-1/2}$ ,

е) из п. а следует, что  $|\vec{v}| = [1 - (u^0)^{-2}]^{1/2}$ .

**Решение 1.2.** В первом случае произведение преобразований равно

$$\begin{bmatrix} \gamma_x & \gamma_x v_x & 0 & 0 \\ \gamma_x v_x & \gamma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_y & 0 & \gamma_y v_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma_y v_y & 0 & \gamma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_x \gamma_y & \gamma_x v_x & \gamma_x \gamma_y v_y & 0 \\ \gamma_x \gamma_y v_x & \gamma_x & \gamma_x \gamma_y v_x v_y & 0 \\ \gamma_y v_y & 0 & \gamma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Изменив порядок преобразований, мы получим другое произведение:

$$\begin{bmatrix} \gamma_y & 0 & \gamma_y v_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma_y v_y & 0 & \gamma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_x & \gamma_x v_x & 0 & 0 \\ \gamma_x v_x & \gamma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_x \gamma_y & \gamma_y \gamma_x v_x & \gamma_y v_y & 0 \\ \gamma_x v_x & \gamma_x & 0 & 0 \\ \gamma_x \gamma_y v_y & \gamma_x \gamma_y v_x v_y & \gamma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

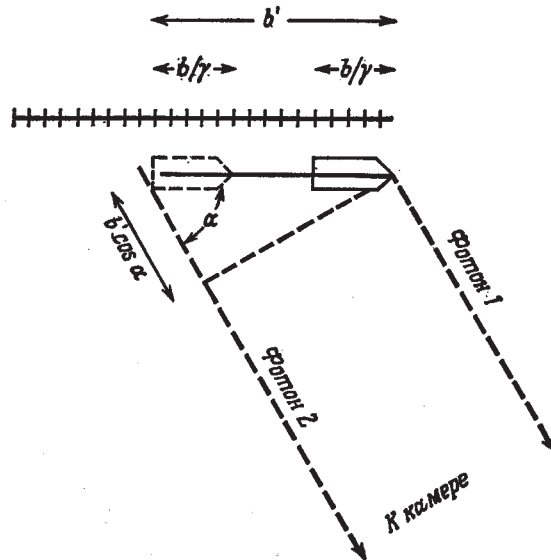
**Решение 1.3.** Пусть  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}_2$  — 4-скорости двух систем отсчета. В системе отсчета 1  $\mathbf{u}_1 = (1, \vec{0})$ ,  $\mathbf{u}_2 = (\gamma, \gamma\vec{v})$ , где  $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$ . Поскольку  $\gamma = -\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2$ , то необходимо лишь вычислить этот скаляр в общей системе отсчета, в которой  $\mathbf{u}_1 = (\gamma_1, \gamma_1\vec{v}_1)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (\gamma_2, \gamma_2\vec{v}_2)$ :

$$\begin{aligned}\gamma &= -\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = \gamma_1\gamma_2 - \gamma_1\gamma_2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = (1 - v^2)^{-1/2}, \\ 1 - v^2 &= (\gamma_1\gamma_2)^{-2} / (1 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)^2, \\ v^2 &= \frac{(1 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)^2 - (1 - v_1^2)(1 - v_2^2)}{(1 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)^2} = \frac{(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 - (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)^2}{(1 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)^2}.\end{aligned}$$

(В правильности полученного результата можно убедиться и прямым путем, произведя весьма громоздкие преобразования Лоренца.)

**Решение 1.4.** Воспользуемся тем, что в одном измерении «параметр быстроты»  $\phi \equiv \text{Arth } v$  аддитивен. Это означает, что  $\text{Arth } v_n = \phi_n = n\phi = n \text{Arth } \beta$ , или

$$\begin{aligned}v_n &= \text{th}(n \text{Arth } \beta) = \\ &= \text{th}\left(\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{\frac{n}{2}}\right) \quad (\text{нетрудно проверить!}) \\ &= \frac{1 - [(1-\beta)/(1+\beta)]^n}{1 + [(1-\beta)/(1+\beta)]^n}.\end{aligned}$$



Фиг. 3.

При  $n \rightarrow \infty$  имеем

$$[(1 - \beta)/(1 + \beta)]^n \rightarrow 0 \text{ и } v_n \rightarrow 1 \text{ (к скорости света).}$$

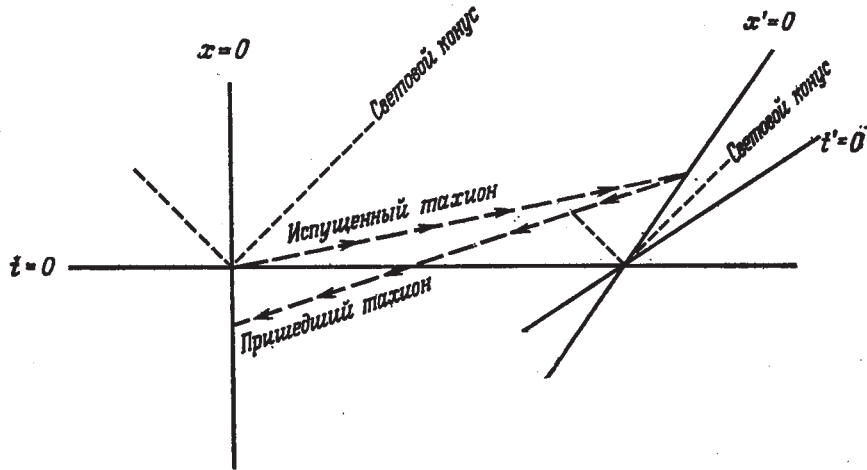
**Решение 1.5.** Традиционный ответ  $b/\gamma$  относится к измерениям, произведенным одновременно в лабораторной системе отсчета, но фотоны в лабораторной системе отсчета *испускаются* не одновременно. Они *приходят* одновременно, в силу чего (см. фиг. 3) фотон 2 должен пройти за дополнительное время путь  $b' \cos \alpha$ , где  $b'$  — кажущаяся длина пули. Из преобразования Лоренца находим

$$b = \Delta x = \gamma (\Delta x' - \beta \Delta t') = \gamma (b' - \beta b' \cos \alpha),$$

откуда

$$b' = b/\gamma (1 - \beta \cos \alpha).$$

**Решение 1.6.** Если оба наблюдателя покоятся относительно одной и той же лоренцевской системы отсчета, то (расстояние) =



Фиг. 4.

= (скорость) × (время) и  $t_{\text{туда и обратно}} = 2L/u$ . Картина несколько усложняется, если один из наблюдателей движется. Координаты движущегося наблюдателя равны

$$t' = \gamma (t - vx),$$

$$x' = \gamma (x - vt),$$

и тахион, испущенный из движущейся системы отсчета по направлению к стационарному наблюдателю, имеет скорость

$$dx'/dt' = -u.$$

Поскольку  $dx' = \gamma(dx - v dt)$ ,  $dt' = \gamma(dt - v dx)$ , то, подставив эти соотношения в  $dx'/dt'$  и разрешив получившееся выражение относительно кажущейся скорости в стационарной системе отсчета, получим

$$-dx/dt = (u - v)/(1 - uv).$$

Наконец, сложим в стационарной системе отсчета время, необходимое тахиону, чтобы пойти «туда» и вернуться «обратно»:  $t_{\text{полн}} = t_{\text{туда}} + t_{\text{обратно}} = L/u + L(1 - uv)/(u - v) = L[1/u + (1 - uv)/(u - v)]$ . Нетрудно подсчитать, что  $t_{\text{полн}} < 0$  при  $u > [1 + (1 - v^2)^{1/2}]/v$ .

Чтобы разобраться в последнем результате, полезно воспользоваться фиг. 4.

**Решение 1.7.** Стержень поворачивается вследствие того, что в направлении оси  $x$  длины отрезков сокращаются, а в направлении оси  $y$  остаются неизменными. Угол, образуемый стержнем с направлением движения в системе отсчета  $S$ , определяется из соотношения  $\text{ctg } \phi = \Delta x/\Delta y$ . Вследствие движения

$$\Delta x = \Delta x' (1 - \beta^2)^{1/2},$$

в то время как  $\Delta y = \Delta y'$ , в силу чего

$$\text{ctg } \phi = (1 - \beta^2)^{1/2} \text{ctg } \phi'.$$

**Решение 1.8.** При движении происходит не только сокращение пространственных, но и растяжение временных интервалов. В системе отсчета  $S$  скорость пули равна

$$v = (\Delta x/\Delta t, \Delta y/\Delta t).$$

Из формул преобразований для  $\Delta x$  и  $\Delta t$  находим

$$v_x = \Delta x/\Delta t = (v_{x'} + \beta)/(1 + \beta v_{x'}),$$

а поскольку  $\Delta y = \Delta y'$ , то

$$v_y = \Delta y/\Delta t = \Delta y' (1 - \beta^2)^{1/2}/(\Delta t' + \beta \Delta x') = v_{y'} (1 - \beta^2)^{1/2}/(1 + \beta v_{x'}).$$

Таким образом, направление движения определяется соотношением

$$\text{tg } \phi = v_y/v_x = v_{y'} (1 - \beta^2)^{1/2}/(v_{x'} + \beta) = \text{tg } \phi' (1 - \beta^2)^{1/2}/(1 + \beta/v_{x'}).$$

Изменение направления движения при переходе от системы отсчета  $S$  к системе отсчета  $S'$  совпадает с точностью до множителя  $(1 - \beta^2)^{1/2}$  с результатом, который мы получили бы, если бы воспользовались преобразованиями Галилея, и соответствует «стягиванию» движения к оси  $x$ . Для фотона  $v_x^2 + v_y^2 = 1$ ,  $v_x = \cos \phi$ , поэтому

$$\cos \phi = \frac{\cos \phi' + \beta}{1 + \beta \cos \phi'}, \quad \text{tg } \phi = \frac{\text{tg } \phi' (1 - \beta^2)^{1/2}}{1 + \beta \sec \phi'}.$$

**Решение 1.9.** Если  $\bar{\vartheta}$  — направление движения фотона от звезды к наблюдателю, то наблюдатель видит звезду под углом  $\vartheta = \pi - \bar{\vartheta}$ . Закон преобразования направлений, по которым движется фотон, выведен в предыдущей задаче. Из него следует, что в рассматриваемом случае

$$\cos \vartheta = \frac{\cos \vartheta' - \beta}{1 - \beta \cos \vartheta'}$$

Но тогда число звезд  $dN$ , наблюдаемых в телесном угле  $d\Omega$ , равно

$$\begin{aligned} dN &= N d\Omega/4\pi = (N/4\pi) 2\pi d(\cos \vartheta) = \\ &= \frac{1}{2} N \frac{d(\cos \vartheta)}{d(\cos \vartheta')} d(\cos \vartheta') = \\ &= \frac{1}{2} N \frac{(1-\beta^2)}{(1-\beta \cos \vartheta')^2} d(\cos \vartheta'). \end{aligned}$$

Поскольку  $dN = 2\pi P(\vartheta', \varphi') d(\cos \vartheta')$ , то в системе отсчета  $S'$  плотность распределения звезд оказывается равной

$$P(\vartheta', \varphi') = \frac{N}{4\pi} \frac{(1-\beta^2)}{(1-\beta \cos \vartheta')^2}$$

*Проверка.* При  $\beta \rightarrow 0$  плотность распределения звезд  $P(\vartheta', \varphi') \rightarrow N/4\pi = P(\vartheta, \varphi)$ ,

$$\int_{\text{По сфере}} P(\vartheta', \varphi') d\Omega = \frac{N(1-\beta^2)}{4\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{2\pi d(\cos \vartheta')}{(1-\beta \cos \vartheta')^2} = N.$$

Нетрудно проверить, что половина всех звезд заключена между  $\vartheta' = 0$  и  $\vartheta'_{1/2} = \arccos \beta < \pi/2$ . Следовательно, в системе отсчета  $S'$  звезды «скапливаются» в направлении движения. При  $\beta \approx 1$  угол  $\vartheta'_{1/2} \approx [2(1-\beta)]^{1/2}$ , и «скопление» становится весьма заметным.

**Решение 1.10.** Длина 4-вектора  $A$  равна  $|A \cdot A|^{1/2}$ , а

$$\begin{aligned} A \cdot A &= (3^{1/2}e_t + 2^{1/2}e_x) \cdot (3^{1/2}e_t + 2^{1/2}e_x) = \\ &= 3e_t \cdot e_t + 2e_x \cdot e_x + 2\sqrt{6}e_t \cdot e_x = \\ &= -3 + 2 + 0 = -1. \end{aligned}$$

Если  $\vartheta$  — угол между векторами  $A$  и  $e_t$ , то

$$\cos \vartheta = \frac{A \cdot e_t}{|A \cdot A|^{1/2} |e_t \cdot e_t|^{1/2}} = -3^{1/4}.$$

Этому соотношению не удовлетворяет вещественный угол  $\vartheta$ .

**Решение 1.11.** Из соображений симметрии ясно, что при следующей встрече Адама и Евы показания их часов будут одинаковыми. В этом нетрудно убедиться, рассматривая интер-

валы собственного времени Адама и Евы в системе координат, связанной с покоящимся инерциальным наблюдателем.

В полярных координатах

$$-d\tau^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2. \quad (1)$$

Координаты мгновенно сопутствующей инерциальной системы, связанной с Адамом,  $\varphi_A = \omega t$  при постоянных  $r$  и  $z$ , координаты Евы  $\varphi_E = -\omega t$  при постоянных  $r$  и  $z$ . Следовательно,

$$d\tau_A^2 = d\tau_E^2 = dt^2 (1 - r^2 \omega^2), \quad (2)$$

и интервалы собственного времени для Адама и Евы совпадают.

Второй метод решения состоит в рассмотрении *неинерциальной* системы координат, связанной с Адамом. Поверхности одновременных событий Адам может строить, продолжая ортогональные его мировой линии гиперповерхности, проведенные через равные интервалы его собственного времени. Пусть  $\tau_E$  — собственное время Евы, соответствующее точкам пересечения ее мировой линии с гиперповерхностями Адама. Адам может вычислить  $\tau_A$  как функцию от  $\tau_E$ . Определим далее 4-вектор  $w$ , соединяющий мировые линии Адама и Евы, который ортогонален 4-скорости Адама.

$$\begin{aligned} t &= \gamma \tau_A, \\ \text{Мировая линия Адама: } x &= \sin \omega t = \sin \omega \gamma \tau_A, \\ y &= \cos \omega t = \cos \omega \gamma \tau_A, \\ z &= 0. \end{aligned} \quad (3a)$$

$$\begin{aligned} t &= \gamma \tau_E, \\ \text{Мировая линия Евы: } x &= -\sin \omega t = -\sin \omega \gamma \tau_E, \\ y &= \cos \omega t = \cos \omega \gamma \tau_E, \\ z &= 0 \end{aligned} \quad (3b)$$

(радиус колец принят равным единице). Зная координаты концов, находим компоненты вектора  $w$ :

$$w \equiv x_A - x_E = [\gamma(\tau_A - \tau_E), \sin \omega \gamma \tau_A + \sin \omega \gamma \tau_E, \cos \omega \gamma \tau_A - \cos \omega \gamma \tau_E, 0],$$

$$u_A = (\gamma, \omega \gamma \cos \omega \gamma \tau_A, -\omega \gamma \sin \omega \gamma \tau_A, 0)$$

и из условия ортогональности  $w \cdot u_A = 0$  получаем

$$\tau_A - \tau_E = \omega \gamma^{-1} \sin [\omega \gamma (\tau_A + \tau_E)]. \quad (4)$$

Уравнение (4) трансцендентно относительно  $\tau_A$  ( $\tau_E$ ). Однако нетрудно видеть, что при

$$\sin 2\omega \gamma \tau_A = \sin 2\omega t = 0, \quad (5)$$

т. е. когда мировые линии Адама и Евы пересекаются,  $\tau_A = \tau_E$ .



**Решение 1.12.** Подставляя  $w \equiv it$ ,  $w' \equiv it'$  в формулы преобразования Лоренца

$$t' = \gamma (t - vx),$$

$$x' = \gamma (x - vt),$$

получаем

$$w' = \gamma (w - ivx),$$

$$x' = \gamma (x + ivw).$$

Чтобы преобразование выглядело как поворот

$$w' = \cos \vartheta w - \sin \vartheta x,$$

$$x' = \cos \vartheta x + \sin \vartheta w,$$

необходимо положить

$$\sin \vartheta = iv\gamma,$$

$$\cos \vartheta = \gamma.$$

Поскольку

$$\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta = \gamma^2 (1 - v^2) = 1,$$

то

$$\vartheta = \arcsin (iv\gamma) = \operatorname{arctg} (iv) = +i \operatorname{Arth} v.$$

**Решение 1.13.** Вдоль кривой

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2 = (r^2 \cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi + r^2 \cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi + \\ + r^2 \sin^2 \vartheta - r^2) d\lambda^2 = r^2 d\lambda^2 (\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta - 1) = 0,$$

поэтому данная кривая изотропна.

Чтобы она была геодезической («прямой»), должно выполняться равенство  $dz/dt = \text{const}$ , а поскольку  $dz/dt = \sin \vartheta$ , то угол  $\vartheta$  должен быть постоянным. Из выражения для  $dy/dt$  или  $dx/dt$  видно, что угол  $\varphi$  также должен быть постоянным. Этим требованиями, предъявляемые к геодезической, исчерпываются; никаких ограничений на функцию  $r(\lambda)$  они не налагают. Но если параметр  $\lambda$  должен быть аффинным (т. е. собственным временем), то производная  $dt/d\lambda$  должна быть постоянной, и, следовательно, функция  $r(\lambda)$  вырождается в постоянную.

**Решение 1.14.** 4-скорости нормированы так, что  $u^\alpha u_\alpha = -1$ , поэтому

$$0 = \frac{d}{d\tau} (u^\alpha u_\alpha) = 2 \frac{du^\alpha}{d\tau} u_\alpha = 2a^\alpha u_\alpha.$$

Это соотношение налагает одно ограничение на компоненты 4-ускорения  $a^\alpha$ . В мгновенно сопутствующей системе координат  $u_\alpha = (-1, \vec{0})$ ; в силу наложенного ограничения  $a^0 = 0$ , а компо-

ненты  $a^j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) произвольны. Ньютоновский акселерометр можно «построить» следующим образом. Попросим наблюдателя выпустить покоящуюся частицу в мгновенно сопутствующей ему системе отсчета и посмотрим, какую скорость  $d\vec{v}$  наблюдатель приобретает относительно нее за короткий промежуток времени  $d\tau$ , после чего вычислим  $\vec{a}_{\text{ньютон}} = d\vec{v}/d\tau$ . Разумеется, в действительности частица *стационарна* в мгновенно сопутствующей инерциальной системе отсчета, а мы получаем ускорение  $du^j = a^j d\tau$  относительно нее. Поскольку

$$u^j = v^j (1 - v^2)^{-1/2},$$

то

$$du^j = (1 - v^2)^{-1/2} dv^j + v^j d(1 - v^2)^{-1/2}.$$

Но  $v = 0$ , так как системы отсчета мгновенно сопутствующие, поэтому  $du^j = dv^j$ , и мы получаем окончательный результат:

$$a_{\text{ньютон}}^j = dv^j/d\tau = du^j/d\tau = a^j.$$

Итак, 3 независимые компоненты 4-ускорения в мгновенно сопутствующей системе отсчета представляют собой не что иное, как 3 ньютоновские ускорения.

**Решение 1.15.** Поскольку  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = 0$ , то в локальной системе покоя наблюдателя

$$\mathbf{a} = (0, a^j),$$

где  $a^j$  —  $j$ -я компонента локально измеренного ускорения. Но тогда квадрат величины ускорения, измеренного в системе покоя наблюдателя, равен

$$a^2 \equiv a^j a_j = (0, a^j) \cdot (0, a_j) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}.$$

**Решение 1.16.** Из задачи 1.8 известно, что поперечная и продольная компоненты 3-скорости преобразуются по формулам

$$u'_\perp = \frac{\gamma^{-1}}{(1 - vu_1)} u_\perp, \quad u'_\parallel = \frac{u_1 - v}{1 - vu_1},$$

а время — по формуле

$$t' = \gamma (t - \vec{v} \cdot \vec{x}).$$

Переходя к дифференциалам, получаем

$$du'_\perp = \frac{\gamma^{-1} du_\perp}{(1 - vu_1)} + \frac{v \gamma^{-1} u_\perp}{(1 - vu_1)^2} du_1 = \frac{\gamma^{-1} [(1 - vu_1) du_\perp + v u_\perp du_1]}{(1 - vu_1)^2},$$

$$du'_\parallel = \frac{du_1}{1 - vu_1} - \frac{v(v - u_1) du_1}{(1 - vu_1)^2} = \frac{\gamma^{-2} du_1}{(1 - vu_1)^2},$$

$$dt' = \gamma(dt - \vec{v} \cdot d\vec{x}) = \gamma dt (1 - \vec{v} \cdot \vec{u}) = \gamma dt (1 - v u_{\parallel}),$$

$$\frac{d\vec{u}'_{\parallel}}{dt'} \equiv \vec{a}'_{\parallel} = \frac{\gamma^{-2}}{(1 - v u_{\parallel})^3} \vec{a}_{\parallel} = \frac{\gamma^{-2}}{(1 - \vec{v} \cdot \vec{u})^3} \vec{a}_{\parallel}. \quad (\text{Ответ})$$

Далее:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}'_{\perp}}{dt'} &\equiv \vec{a}'_{\perp} = \frac{\gamma^{-2}}{(1 - v u_{\parallel})^3} [(1 - v u_{\parallel}) \vec{a}_{\perp} + v \vec{u}_{\perp} a_{\parallel}] = \\ &= \frac{\gamma^{-2}}{(1 - v u_{\parallel})^3} [\vec{a}_{\perp} - v (u_{\parallel} \vec{a}_{\perp} - \vec{u}_{\perp} a_{\parallel})] = \\ &= \frac{\gamma^{-2}}{(1 - \vec{v} \cdot \vec{u})^3} [\vec{a}_{\perp} - \vec{v} \times (\vec{a} \times \vec{u})]. \end{aligned} \quad (\text{Ответ})$$

[В последней строке мы воспользовались тем, что

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{u} &= (\vec{a}_{\perp} + \vec{a}_{\parallel}) \times (\vec{u}_{\perp} + \vec{u}_{\parallel}) = \\ &= \vec{a}_{\perp} \times \vec{u}_{\parallel} + \vec{a}_{\parallel} \times \vec{u}_{\perp}, \end{aligned}$$

и правилом разложения тройного произведения.]

**Решение 1.17.** Если ускорение направлено по оси  $x$ , то координаты  $\bar{y}$  и  $\bar{z}$  можно выбрать, положив  $y = \bar{y}$  и  $z = \bar{z}$ . Заметим, что ускорение постоянно вдоль мировых линий:

$$\begin{aligned} t &= A \operatorname{sh} g\bar{t} + B, \\ x &= A \operatorname{ch} g\bar{t} + C. \end{aligned}$$

[Это утверждение нетрудно проверить. См. также задачу 2.13.] Если  $A$ ,  $B$  и  $C$  — функции только от  $\bar{x}$ , то выписанные выше уравнения мировых линий задают 4-скорость

$$\mathbf{u} = \operatorname{ch} g\bar{t} \mathbf{e}_t + \operatorname{sh} g\bar{t} \mathbf{e}_x,$$

не зависящую от  $\bar{x}$ , и, следовательно, определяют семейство мировых линий, параллельных на гиперплоскости  $\bar{t} = \text{const}$ . Если, кроме того,  $B$  и  $C$  постоянны, то 4-скорость  $\mathbf{u}$  перпендикулярна гиперплоскости  $d\bar{t} = 0$  (т. е. гиперплоскости  $\bar{t} = \text{const}$  являются гиперплоскостями одновременных событий в мгновенно сопутствующей инерциальной системе отсчета). Остается лишь правильно выбрать  $A(\bar{x})$ ,  $B$  и  $C$ :

$$\begin{aligned} t &= (g^{-1} + \bar{x}) \operatorname{sh} g\bar{t}, \\ x &= (g^{-1} + \bar{x}) \operatorname{ch} g\bar{t} - g^{-1}. \end{aligned}$$

Заметим, что для наблюдателя со стационарными координатами элемент собственного времени равен

$$d\tau = (dt^2 - dx^2)^{1/2} = (1 + g\bar{x}) d\bar{t}.$$

Поскольку  $dt$  не зависит только от  $t$ , то часы не останутся синхронизованными. Их можно согласовать лишь на одной гиперплоскости.

**Решение 1.18.** Не ограничивая общности, предположим, что зеркало расположено в плоскости  $xy$ , а фотон движется в плоскости  $yz$ . Если условиться, что «до» и «после» означают до и после отражения, то в лабораторной системе отсчета 4-импульс фотона равен

$$p_{\text{до}} = (E, 0, E \sin \phi, E \cos \phi).$$

Выполнив соответствующее преобразование Лоренца, перейдем в систему отсчета, связанную с зеркалом, в которой

$$p_{\text{до}} = [\gamma E (1 + v \cos \phi), 0, E \sin \phi, \gamma E (v + \cos \phi)].$$

После отражения 4-импульс фотона станет равным

$$p_{\text{после}} = [\gamma E (1 + v \cos \phi), 0, E \sin \phi, -\gamma E (v + \cos \phi)].$$

Производя обратное преобразование Лоренца, вернемся в лабораторную систему отсчета и получим

$$p_{\text{после}} = \{ \gamma^2 E [(1 + v \cos \phi) + v (v + \cos \phi)], 0, E \sin \phi, \gamma^2 E [-v (1 + v \cos \phi) - (v + \cos \phi)] \}.$$

Итак, окончательный результат сводится к следующему:

$$\cos \phi_{\text{после}} = \left| \frac{p^3}{p^0} \right| = + \frac{(1 + v^2) \cos \phi + 2v}{1 + 2v \cos \phi + v^2},$$

$$E_{\text{после}} = p_{\text{после}}^0 = \left( \frac{1 + 2v \cos \phi + v^2}{1 - v^2} \right) E_{\text{до}}.$$

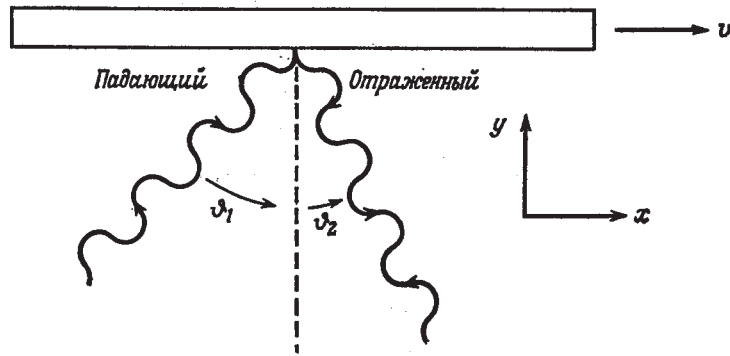
**Решение 1.19.** Пусть  $E$  и  $P$  — энергия и импульс фотона. В системе отсчета, связанной с зеркалом (штрихованная система отсчета),  $E'_{\text{пад}} = E'_{\text{отр}}$ ,  $P'_{x \text{ пад}} = P'_{x \text{ отр}}$ ,  $P'_{y \text{ пад}} = -P'_{y \text{ отр}}$ . Требуется доказать, что в лабораторной системе отсчета  $\phi_1 = \phi_2$  (фиг. 5.) Имеем

$$\frac{\text{tg } \phi_1}{\text{tg } \phi_2} = \frac{(P_x/P_y)_{\text{пад}}}{(P_x/-P_y)_{\text{отр}}} = \frac{P_{x \text{ пад}}}{P_{x \text{ отр}}} \cdot \frac{P'_{y \text{ пад}}}{-P'_{y \text{ отр}}} = \frac{P_{x \text{ пад}}}{P_{x \text{ отр}}}$$

(здесь мы воспользовались тем, что  $P'_y = P_y$ ). Производя затем над компонентой  $P_x$  преобразование Лоренца, получаем

$$\frac{\text{tg } \phi_1}{\text{tg } \phi_2} = \frac{\gamma (P'_x + \beta E')_{\text{пад}}}{\gamma (P'_x + \beta E')_{\text{отр}}} = 1.$$

Следовательно, в лабораторной системе отсчета, так же как и в системе отсчета, связанной с зеркалом, угол падения равен углу отражения.



Фиг. 5.

**Решение 1.20.** В системе покоя наблюдателя

$$\begin{aligned} u^0 &= 1, \quad u^j = 0, \\ p^0 &= -p_0 = E, \\ p^j &= p_j = \vec{p}, \end{aligned}$$

поэтому инвариантные формулы удобнее всего проверять именно в этой системе:

- а)  $E = -p_0 u^0 = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{u},$
- б)  $m^2 = E^2 - |\mathbf{p}|^2 = -p_0 p^0 - p_j p^j = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{p},$
- в)  $|\vec{p}| = (E^2 - m^2)^{\frac{1}{2}} = [(\mathbf{p} \cdot \mathbf{u})^2 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}]^{1/2},$
- г)  $|\vec{v}| = \frac{|\vec{p}|}{E} = \left[ \frac{E^2 - m^2}{E^2} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ 1 + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}}{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{u})^2} \right]^{\frac{1}{2}}.$
- д) в системе покоя
 
$$v^0 = -u^0 - \frac{p^0}{(-E)} = -1 + 1 = 0,$$

$$v^j = -u^j - \frac{p^j}{(-E)} = 0 + \frac{dx^j}{dt}.$$

**Решение 1.21.** Необходимо рассмотреть три 4-вектора, 4-скорость наблюдателя (лаборатории),  $\mathbf{u}_{\text{лаб}} = (1, \vec{0})$ , 4-скорость ядра железа,  $\mathbf{u}_{\text{Fe}} = (\gamma, \gamma \vec{\beta})$ , где  $\gamma = (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{\beta})^{-1/2}$ , и 4-импульс фотона, равный  $\mathbf{p}_\gamma = \text{const} \times (1, -\vec{n})$ , поскольку фотон движется по направлению к наблюдателю. Заметим, что 4-импульс фотона изотропен:  $\mathbf{p}_\gamma \cdot \mathbf{p}_\gamma \sim -1 + (-\vec{n}) \cdot (-\vec{n}) = 0$ . Из решения задачи 1.20 получаем

$$\frac{v_{\text{набл}}}{v_{\text{испуска}}} = \frac{E_{\text{лаб}}}{E_{\text{Fe}}} = \frac{-\mathbf{u}_{\text{лаб}} \cdot \mathbf{p}_\gamma}{-\mathbf{u}_{\text{Fe}} \cdot \mathbf{p}_\gamma} = \frac{1}{\gamma(1 + \vec{\beta} \cdot \vec{n})}. \quad (\text{Ответ})$$

**Решение 1.22.** Из формулы доплеровского смещения (задача 1.21) находим

$$1 = \frac{v_{\text{набл}}}{v} = \frac{(1-v^2)^{1/2}}{1 + \vec{v} \cdot \vec{n}},$$

$$\cos \phi = \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{v} = \frac{(1-v^2)^{1/2} - 1}{v},$$

$$\phi = \arccos \left[ \frac{(1-v^2)^{1/2} - 1}{v} \right].$$

**Решение 1.23.** Произведем произвольный буст в направлении, лежащем в плоскости  $yz$ , после чего у фотона могут быть отличные от нуля не только компонента  $p^x$ , но и компоненты  $p^y$  и  $p^z$ . Чистый поворот снова придает системе координат такое положение, в котором в нуль не обращается лишь компонента  $p^x$ , но ее значение отличается от первоначального. Следовательно, чтобы восстановить первоначальное значение  $p^x$ , необходимо произвести буст вдоль  $p^x$  в сторону либо красного, либо голубого конца спектра. Поскольку  $E^2 - p^2 = 0$ , то  $E$  также приобретает свое первоначальное значение. Нетрудно убедиться в том, что произведение перечисленных выше преобразований не сводится к чистому повороту и, следовательно, в общем случае содержит нескомпенсированный буст. Примером может служить произведение преобразований:

$$\begin{array}{ccc} \text{буст в} & \text{поворот} & \text{буст в} \\ \text{направлении} & \text{в плоскости} & \text{направлении} \\ \text{оси } x & \text{ } xy & \text{оси } y \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma' & \gamma'v' & 0 & 0 \\ \gamma'v' & \gamma' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-v^2)^{1/2} & v & 0 \\ 0 & -v & (1-v^2)^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & 0 & \gamma v & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma v & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} E \\ E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где скорость  $v'$  выбрана так, чтобы она удовлетворяла соотношению

$$\gamma'(1+v') = \frac{1}{\gamma},$$

откуда

$$v' = -v^2/(2-v^2).$$

**Решение 1.24.** Одна инерциальная система отсчета не может двигаться рывками то вперед, то назад относительно другой инерциальной системы отсчета. Кажущийся «парадокс» возникает из молчаливого и ошибочного допущения, что цилиндр остается жестким, когда лягушки ударяют в его днища. Это допущение не может быть верным, поскольку упругие волны, несущие к днищу сигнал о том, что лягушка ударила в другое днище, должны распространяться по стенкам цилиндра со скоростью, меньшей скорости света. В системе отсчета, связанной со свободно падающим цилиндром, днища цилиндра под ударами лягушек прогибаются наружу. Волны напряжения распространяются от одного днища цилиндра к другому и «не подозревают» о существовании друг друга до тех пор, пока не встречаются посередине стенки цилиндра. Затем волны напряжений расходятся, и каждая волна, достигнув противоположное днище цилиндра, уничтожает действие другой волны, возвращая днище к первоначальной форме. Таким образом, цилиндр пульсирует с некоторой основной частотой. Лягушки, ударяясь время от времени о днища цилиндра, каждый раз изменяют амплитуду и фазу пульсации.

С точки зрения наблюдателя, связанной с другой свободно падающей системой отсчета (например, с точки зрения птиц, смотрящих на цилиндр из мгновенно сопутствующей системы отсчета), цилиндр движется со скоростью  $\beta$ , лягушки ударяют в днища цилиндра не одновременно, пульсации днищ не согласуются по фазе, но общая картина не слишком отличается от нарисованной выше. В частности, центр цилиндра (покоящийся в связанной с цилиндром инерциальной системе отсчета) *не* будет двигаться рывками то вперед, то назад ни в какой другой инерциальной системе отсчета. На фиг. 6 и 7 наглядно показано, как выглядят события, о которых говорится в задаче, в двух инерциальных системах отсчета.

**Решение 1.25.** Выведем сначала инфинитезимальные операторы, рассматривая их действие на пространственно-временную функцию  $f(x, y, z, t)$ .

1) Повороты вокруг оси  $z$ :

$$\begin{aligned}x' &\approx x - y\vartheta, \\y' &\approx y + x\vartheta, \\z' &= z, \\t' &= t,\end{aligned}\tag{1}$$

$$f(x', y', z', t') - f(x, y, z, t) = \vartheta [-y\partial_x + x\partial_y]f.\tag{2}$$

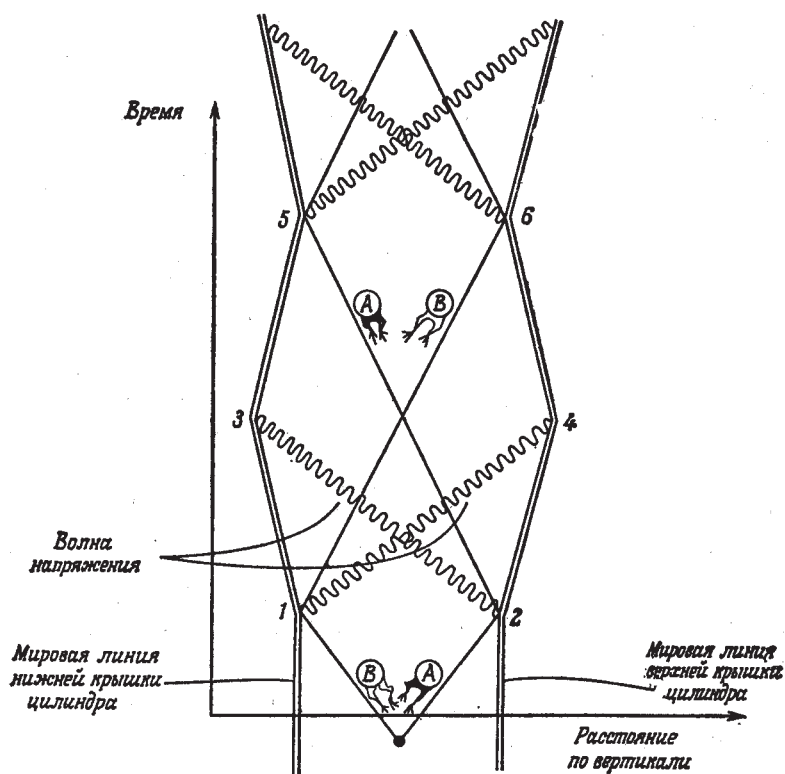
Следовательно, поскольку

$$f(x', y', z', t') \equiv (1 + iJ_z \partial / 2) f(x, y, z, t),$$

то

$$J_z = -2i(x\partial_y - y\partial_x). \quad (3)$$

Операторы  $J_y, J_x$  получаются из соотношения (3) при циклической перестановке индексов.



Фиг. 6.

2) Бусты в направлении оси  $z$ :

$$z' \approx z - vt,$$

$$t' \approx t - vx,$$

$$y' = y,$$

$$z' = z,$$

$$f(x', y', z', t') - f(x, y, z, t) = [-t\partial_z - z\partial_t]vf(x, y, z, t)$$



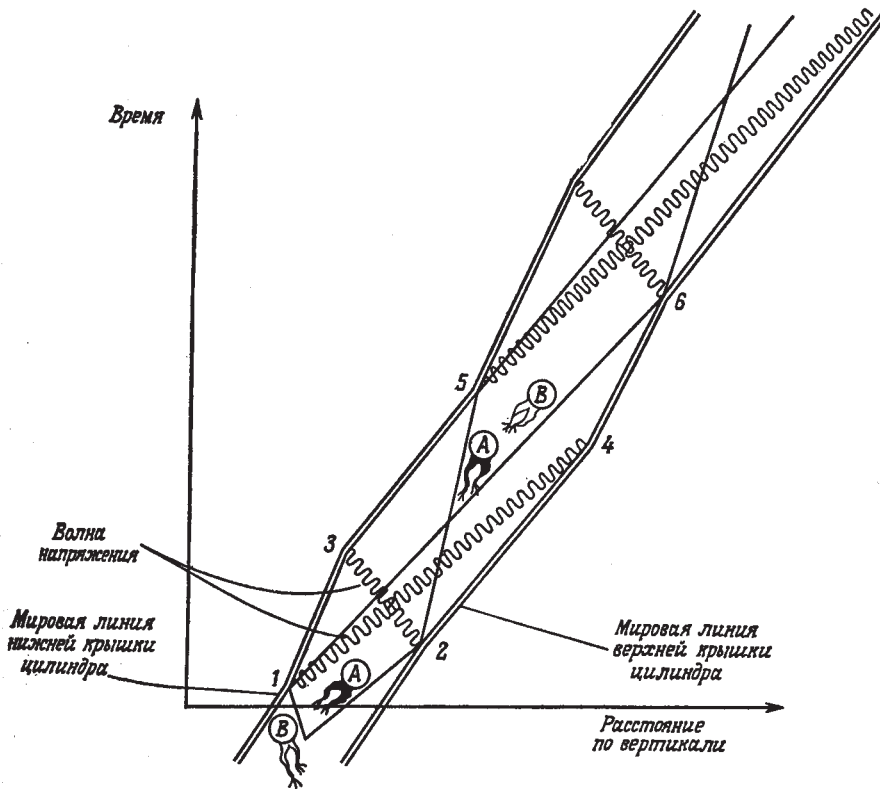
поэтому

$$K_z = 2i \left( t \frac{\partial}{\partial z} + z \frac{\partial}{\partial t} \right) \text{ и т. д.} \quad (4)$$

3) Соотношения (3) и (4) позволяют вычислить обычным способом коммутаторы операторов. Например,

$$\{J_x, J_y\} = -4 [y\partial_z - z\partial_y, z\partial_x - x\partial_z] = 4 (x\partial_y - y\partial_x) = 2i J_z \quad (5)$$

(аналогичным образом можно найти и все остальные коммутаторы).



Фиг. 7.

4) Представление группы Лоренца определяется заданием явного вида матриц, соответствующих генераторам. Споровые матрицы Паули

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ и т. д.}$$

можно сопоставить операторам  $\vec{J}$  и  $\vec{K}$  по следующему правилу:

$$\begin{aligned}\vec{J} &\rightarrow \vec{\sigma}, \\ \vec{K} &\rightarrow i\vec{\sigma}.\end{aligned}$$

Все перестановочные соотношения для  $\vec{J}$  и  $\vec{K}$  при этом не нарушаются, поскольку  $[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z$  и т. д. Матрицы, соответствующие конечным преобразованиям  $L$ , мы найдем, заметив, что, например,  $J_z$  определяется соотношением

$$\left. \frac{dL}{d\theta} \right|_{\theta=0} = \frac{iJ_z}{2},$$

в силу чего

$$L(\theta) = \exp(i\theta J_z/2).$$

Произвольное конечное преобразование  $L$  содержит 6 параметров. В общем случае параметры поворота  $\vec{\theta}^*$  (рассматриваемые как 3-вектор) отличны от физического угла поворота  $\vec{\theta}$ , а параметры буста  $\vec{v}^*$  отличны от физической относительной скорости  $\vec{v}$ . Эти подробности несущественны: группа Лоренца полностью определяется своими генераторами  $\vec{J}$  и  $\vec{K}$ , а ее параметризацию можно варьировать в широких пределах. Бесконечно малое преобразование, соответствующее произвольному конечному преобразованию  $L$ , имеет вид

$$\begin{aligned}\delta L &= i(\theta_x^* J_x + \theta_y^* J_y + \theta_z^* J_z + v_x^* K_x + v_y^* K_y + v_z^* K_z)/2 = \\ &= (i\vec{\theta}^* - \vec{v}^*) \cdot \vec{\sigma}/2.\end{aligned}$$

Положим по определению

$$\begin{aligned}\vec{q} &\equiv (i\vec{\theta}^* - \vec{v}^*)/2, \\ q^2 &\equiv \vec{q} \cdot \vec{q} = \frac{1}{4}(-\theta^{*2} - 2i\vec{\theta}^* \cdot \vec{v}^* + v^{*2}).\end{aligned}$$

(Заметим, что чистые бусты соответствуют вещественным  $\vec{q}$ , а чистые повороты — чисто мнимым  $\vec{q}$ .) Итак, общее конечное преобразование представимо в виде

$$\begin{aligned}L(\vec{\theta}, \vec{v}) &= \exp(\vec{q} \cdot \vec{\sigma}) = \sum_{n=0}^{\infty} (\vec{q} \cdot \vec{\sigma})^n/n! = \\ &= \sum_{n=0, 2, 4, \dots}^{\infty} q^n/n! + \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} (\vec{q} \cdot \vec{\sigma}) q^{n-1}/n! = \\ &= \text{ch } q + (\vec{q} \cdot \vec{\sigma}/q) \text{sh } q.\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались соотношением

$$(\vec{q} \cdot \vec{\sigma}) \cdot (\vec{q} \cdot \vec{\sigma}) = q_i q_j (\sigma_i \sigma_j) = q_i q_j \sigma^{ij} = q^2.$$

**Решение 1.26.** Громоздкое решение задачи состоит в том, чтобы перемножить матрицы  $4 \times 4$ , а произведение разложить на повороты и бусты. Более простое решение получится, если воспользоваться построенным в задаче 1.25 представлением группы Лоренца комплексными матрицами  $2 \times 2$  с определителем, равным 1. Чистому бусту со скоростью  $v_1$  в этом представлении соответствует матрица

$$L(\vec{v}_1) = \exp(-v_1^* \vec{n}_1 \cdot \vec{\sigma} / 2) = \text{ch}(v_1^* / 2) + (\vec{n}_1 \cdot \vec{\sigma}) \text{sh}(v_1^* / 2), \quad (1a)$$

где  $\vec{n}_1$  — единичный вектор, задающий направление буста, а  $v_1^*$  — параметр, характеризующий величину буста. Чистому повороту  $\vec{\phi}$  соответствует матрица

$$L(\vec{\phi}) = \exp(i\phi^* \vec{n} \cdot \vec{\sigma} / 2) = \cos(\phi^* / 2) - i(\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \sin(\phi^* / 2), \quad (1b)$$

где  $\vec{n}$  задает ось вращения, а  $\phi^*$  характеризует величину поворота.

Для чистых бустов, производимых в одном и том же направлении, величина  $v^*$  в действительности является параметром быстроты ( $v^* = \text{Arth } v$ ), поскольку аддитивна. Например,

$$L(v_1) L(v_2) = e^{-v_1^* \sigma_x / 2} e^{-v_2^* \sigma_x / 2} = e^{-(v_1^* + v_2^*) \sigma_x / 2}.$$

Аналогичным образом можно убедиться в том, что для чистых поворотов, производимых в одном и том же направлении, параметр  $\phi^*$  совпадает с абсолютной величиной угла поворота  $\phi$ :  $\phi^* = |\phi|$ .

Пользуясь формулами (1a) и (1b), разрешим соотношение

$$L(\vec{v}_1) L(\vec{v}_2) = L(\vec{\phi} \vec{n}) L(\vec{v}_3) \quad (2)$$

относительно  $\vec{\phi}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{v}_3$ , выразив эти параметры через  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$ . При умножении матриц, стоящих в правой части соотношения (2), удобно воспользоваться тождеством

$$(\vec{A} \cdot \vec{\sigma})(\vec{B} \cdot \vec{\sigma}) = A \cdot B + i(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{\sigma}.$$

Поскольку  $\vec{\sigma}$ -матрицы и единичная матрица  $2 \times 2$  линейно независимы, в соотношении (2) можно приравнять отдельно вещественные и мнимые части коэффициентов при единичной матрице и при  $\sigma$ -матрицах. Проведем это, мы получим 2 скалярных и 2 векторных уравнения:

$$\begin{aligned} \text{ch}\left(\frac{1}{2} v_1^*\right) \text{ch}\left(\frac{1}{2} v_2^*\right) + \text{sh}\left(\frac{1}{2} v_1^*\right) \text{sh}\left(\frac{1}{2} v_2^*\right) (\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2) = \\ = \text{ch}\left(\frac{1}{2} v_3^*\right) \cos\left(\frac{1}{2} \phi^*\right), \end{aligned} \quad (3a)$$

$$\sin\left(\frac{1}{2}\vartheta^*\right) \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}v_3^*\right) (\vec{n} \cdot \vec{n}_3) = 0, \quad (3б)$$

$$\begin{aligned} & \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}v_1^*\right) \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}v_3^*\right) \vec{n}_2 + \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}v_1^*\right) \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}v_3^*\right) \vec{n}_1 = \\ & = \cos\left(\frac{1}{2}\vartheta^*\right) \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}v_3^*\right) \vec{n}_3 + \sin\left(\frac{1}{2}\vartheta^*\right) \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}v_3^*\right) (\vec{n} \times \vec{n}_3), \end{aligned} \quad (3в)$$

$$\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}v_1^*\right) \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}v_3^*\right) (\vec{n}_1 \times \vec{n}_2) = -\sin\left(\frac{1}{2}\vartheta^*\right) \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}v_3^*\right) \vec{n}. \quad (3г)$$

В общем случае уравнению (3б) удовлетворяет

$$\vec{n} \cdot \vec{n}_3 = 0, \quad (4)$$

т. е. результирующий поворот происходит вокруг оси, ортогональной направлению результирующего буста.

Пусть  $\gamma$  — угол между векторами  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_2$ . Умножая скалярно левую и правую часть уравнения (3г) на вектор  $\vec{n}$ , получаем

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\vartheta^*\right) = \frac{-\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}v_3^*\right) \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}v_3^*\right) \sin\gamma}{\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}v_1^*\right) \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}v_3^*\right) + \cos\gamma \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}v_1^*\right) \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}v_3^*\right)}. \quad (5)$$

Заметим, что угол поворота  $\vartheta$  (равный введенному выше параметру  $\vartheta^*$ ) может принимать все значения  $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ , за исключением  $\vartheta = \pi$ , и что при  $n_1 = n_2$  ( $\gamma = 0$ ) угол  $\vartheta = 0$ , и, как и следовало ожидать, нескомпенсированный поворот отсутствует.

**Решение 1.27.** Взглянув на небо (луч зрения следует по изотропным линиям, вдоль которых распространяются фотоны), космонавт совершает произвольное преобразование Лоренца, а затем снова смотрит на небо. В результате возникает *непрерывное* отображение неба на себя, а любое непрерывное отображение 2-сферы на себя имеет по крайней мере одну неподвижную точку.

**Решение 1.28.** Из решения 1.25 следует, что любое однородное собственное преобразование Лоренца соответствует комплексной  $2 \times 2$  матрице  $L$  с определителем, равным 1, или комплексному 3-вектору, который мы обозначим, например,  $\vec{P}$ . Запишем матрицу  $2 \times 2$  в виде

$$L(\vec{P}) = (1 + P^2)^{-1/2} I + \vec{P} \cdot \vec{\sigma},$$

где  $P^2 = \vec{P} \cdot \vec{P}$ , а  $I$  — единичная матрица, которую мы часто не будем выписывать в явном виде. [В решении 1.25 был использован вектор  $\vec{P} = \vec{q} (\operatorname{sh} q) / q$ .] Для чистого буста со скоростью  $v$  производимого в направлении  $\vec{n}$ , вектор  $\vec{P}$  вещественный:  $\vec{P} =$

$= \vec{n} \operatorname{sh}(\psi/2)$ , где  $\psi = \operatorname{th} v$  — быстрота. Для чистого поворота на угол  $\Phi$  вокруг оси  $\vec{n}$  вектор  $\vec{P}$  чисто мнимый:  $\vec{P} = i\vec{n} \sin(\Phi/2)$  и  $P^2 \geq -1$ .

Произведение двух преобразований Лоренца, задаваемых векторами  $\vec{P}$  и  $\vec{Q}$ , имеет вид

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = (1 + P^2)^{1/2} \vec{Q} + (1 + Q^2)^{1/2} \vec{P} + i\vec{P} \times \vec{Q}.$$

Это следует из вида произведения двух матриц, соответствующих данным преобразованиям Лоренца:

$$\begin{aligned} L(\vec{P})L(\vec{Q}) &= [(1 + P^2)^{1/2} + \vec{P} \cdot \vec{\sigma}] [(1 + Q^2)^{1/2} + \vec{Q} \cdot \vec{\sigma}] = \\ &= (1 + P^2)^{1/2} (1 + Q^2)^{1/2} + [(1 + P^2)^{1/2} \vec{Q} + (1 + Q^2)^{1/2} \vec{P}] \cdot \vec{\sigma} + \\ &+ \vec{P} \cdot \vec{Q} + i\vec{P} \times \vec{Q} \cdot \vec{\sigma}. \end{aligned}$$

Схема решения сводится к тому, чтобы сначала найти важную отличительную особенность произведения двух чистых бустов (лемма 1), затем вывести критерий для случая, когда произвольное преобразование Лоренца представимо в виде произведения трех бустов (лемма 2), и, наконец, показать, что этот критерий выполним всегда, за исключением случая «винтового поворота на  $180^\circ$ », разложимого в произведение четырех бустов.

**ЛЕММА 1.** Преобразование Лоренца, задаваемое вектором  $\vec{P}$ , представимо в виде произведения двух чистых бустов  $\vec{C}$  и  $\vec{D}$  в том и только в том случае, если скалярный квадрат  $P^2$  вектора  $\vec{P}$  веществен и положителен.

*Доказательство.* Если  $\vec{P}$  — произведение вещественных неизотропных векторов  $\vec{C}$  и  $\vec{D}$ , то

$$\vec{P} = \vec{C} \cdot \vec{D} = (1 + C^2)^{1/2} \vec{D} + (1 + D^2)^{1/2} \vec{C} + i\vec{C} \times \vec{D}; \quad (1)$$

$$\begin{aligned} P^2 &= (1 + C^2)D^2 + (1 + D^2)C^2 + 2(1 + C^2)^{1/2}(1 + D^2)^{1/2} \vec{C} \cdot \vec{D} - C^2 D^2 \times \\ &+ (\vec{C} \cdot \vec{D})^2 = [(1 + C^2)^{1/2}(1 + D^2)^{1/2} + \vec{C} \cdot \vec{D}]^2 - 1 > \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} &> [(1 + 2CD + C^2 D^2)^{1/2} + \vec{C} \cdot \vec{D}]^2 - 1 \geq (\text{поскольку } C^2 + D^2 > 2CD) \\ &\geq (1 + |\vec{C} \cdot \vec{D}| + \vec{C} \cdot \vec{D})^2 - 1 \geq (\text{поскольку } CD \geq |\vec{C} \cdot \vec{D}|) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Наоборот, если скалярный квадрат  $P^2$  веществен и положителен, то  $P$  можно представить в виде  $\vec{P} = \vec{A} + i\vec{B}$ , где  $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$  и  $A^2 - B^2 > 0$ . Чтобы построить бусты  $\vec{C}$  и  $\vec{D}$ , выберем вектор  $\vec{E}$ ,

ортогональный векторам  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$ , оставив пока неопределенной величину  $E^2$ . Положим

$$\vec{C} = a\vec{A} + \vec{E}, \quad \vec{D} = a\vec{A} - \vec{E}, \quad (3)$$

где  $a$  — нормировочная постоянная, которую требуется определить. Из (3) следует

$$C^2 = D^2 = a^2 A^2 + E^2,$$

а из (1) —

$$\vec{A} = (1 + C^2)^{1/2} \vec{D} + (1 + D^2)^{1/2} \vec{C} = (1 + a^2 A^2 + E^2)^{1/2} 2a\vec{A}$$

и

$$\vec{B} = \vec{C} \times \vec{D} = 2a\vec{E} \times \vec{A}.$$

Это построение продолжается до тех пор, пока не будут достигнуты равенства

$$1 = 2a(1 + a^2 A^2 + E^2)^{1/2}, \quad (4a)$$

$$B^2 = 4a^2 E^2 A^2. \quad (4b)$$

Возводя в квадрат обе части равенства (4a) и разрешая его относительно  $a^2$ , получаем

$$a^2 = \{[(1 + E^2)^2 + A^2]^{1/2} - (1 + E^2)\} / (2A^2). \quad (5a)$$

Соотношение (5a) позволяет преобразовать равенство (4b) к виду

$$B^2 = 2E^2 \{[(1 + E^2)^2 + A^2]^{1/2} - (1 + E^2)\}.$$

Возводя обе части последнего равенства в квадрат и упрощая, приходим к уравнению

$$4(A^2 - B^2)E^4 - 4B^2E^2 - B^4 = 0, \quad (5b)$$

которое всегда имеет положительный корень  $E^2$ , поскольку  $A^2 > B^2$ . После того как величина  $E^2$  найдена, значение параметра  $a$  определяется из соотношения (5a). Лемма 1 полностью доказана.

Попытаемся теперь представить *любое* преобразование Лоренца  $\vec{Q}$  в виде произведения трех бустов. По лемме 1 это возможно в том и только в том случае, если существует буст  $\vec{C}$ , такой, что скалярный квадрат  $P^2$  веществен и положителен, где  $\vec{P} = \vec{Q} \cdot (-\vec{C})$ . Производя преобразования, аналогичные тем, которыми мы воспользовались при выводе соотношения (2), получаем

$$(1 + P^2)^{1/2} = (1 + Q^2)^{1/2} (1 + C^2)^{1/2} - \vec{Q} \cdot \vec{C}. \quad (6)$$

Итак, необходимо найти буст  $\vec{C}$ , такой, чтобы величина  $(1 + P^2)^{1/2}$ , определяемая соотношением (6), была вещественной (вектор  $\vec{Q}$  в общем случае комплексный) и  $(1 + P^2)^{1/2} > 1$ .

Пусть  $\vec{Q} = \vec{A} + i\vec{B}$  ( $\vec{A}$  и  $\vec{B}$  — вещественные векторы) и пусть буст  $\vec{D}$  — некоторая линейная комбинация векторов  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$ .

ЛЕММА 2. Буст  $\vec{C}$ , обладающий требуемыми свойствами, существует в том и только в том случае, если существует буст  $\vec{D}$ , представимый в виде линейной комбинации векторов  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$  и такой, что

$$d \equiv (1 + Q^2)^{1/2} (1 + D^2)^{1/2} - \vec{Q} \cdot \vec{D}, \quad (7)$$

где величина  $d$  вещественна и строго положительна.

*Доказательство.* Пусть  $\vec{F}$  — вектор, ортогональный векторам  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$ ; скалярный квадрат его  $F^2 < 1$  мы определим чуть ниже. Введем новый вектор

$$\vec{C} = (\vec{D} + \vec{F}) / (1 - F^2)^{1/2},$$

такой, что  $1 + C^2 = (1 + D^2) / (1 - F^2)$ . Из соотношения (6) находим

$$(1 + P^2)^{1/2} = [(1 + Q^2)^{1/2} (1 + D^2)^{1/2} - \vec{Q} \cdot \vec{D}] (1 - F^2)^{-1/2} = d (1 - F^2)^{-1/2}.$$

Таким образом, скалярный квадрат  $F^2$  можно выбрать достаточно близким к 1 и тем самым сделать корень  $(1 + P^2)^{1/2}$  вещественным и по абсолютной величине большим 1 в том и только в том случае, если величина  $d$  вещественна и положительна. Лемма 2 доказана.

Рассмотрим теперь 2 случая.

*Случай 1.* Вектор  $\vec{A}$  не параллелен вектору  $\vec{B}$ ,  $A^2 \neq 0$  и  $B^2 \neq 0$ .

В этом случае из соотношения (7) следует

$$(d + \vec{Q} \cdot \vec{D})^2 = (1 + Q^2) (1 + D^2).$$

Подставляя  $\vec{Q} = \vec{A} + i\vec{B}$ , получаем два вещественных уравнения

$$(d + \vec{A} \cdot \vec{D})^2 - (\vec{B} \cdot \vec{D})^2 = (1 + A^2 - B^2) (1 + D^2), \quad (8a)$$

$$(d + \vec{A} \cdot \vec{D}) \vec{B} \cdot \vec{D} = \vec{A} \cdot \vec{B} (1 + D^2). \quad (8b)$$

Решая систему уравнений (8) относительно  $d + \vec{A} \cdot \vec{D}$  и  $\vec{B} \cdot \vec{D}$ , находим

$$(d + \vec{A} \cdot \vec{D})^2 = \frac{1}{2} (1 + D^2) \{ [(1 + A^2 - B^2)^2 + 4(\vec{A} \cdot \vec{B})^2]^{1/2} + (1 + A^2 - B^2) \}, \quad (9a)$$

$$(\vec{B} \cdot \vec{D})^2 = \frac{1}{2} (1 + D^2) \{ [(1 + A^2 - B^2)^2 + 4(\vec{A} \cdot \vec{B})^2]^{1/2} - (1 + A^2 - B^2) \}. \quad (9b)$$

Уравнения (9) не определяют  $\bar{D}$  и  $d$  в явном виде, поскольку их правые части содержат  $D^2$ . Один из возможных способов их решения состоит в том, чтобы положить  $\bar{D} = b\bar{B}$ , где  $b$  — неопределенный коэффициент. При такой подстановке уравнение (9б) преобразуется к виду

$$(2b^2B^4)/(1+b^2B^2) = [(1+A^2-B^2)^2 + 4(\bar{A} \cdot \bar{B})^2]^{1/2} - (1+A^2-B^2). \quad (10)$$

Докажем, что всегда существует вещественное значение  $b$ , удовлетворяющее уравнению (10). Для этого заметим, что правая часть уравнения (10) больше или равна нулю (очевидно) и, кроме того, меньше  $2B^2$ . Последнее утверждение следует из того, что

$$\begin{aligned} 4(\bar{A} \cdot \bar{B})^2 &< 4A^2B^2 = \\ &= (1+A^2+B^2)^2 - (1+A^2-B^2)^2 - 4B^2 < \\ &< (1+A^2+B^2)^2 - (1+A^2-B^2)^2. \end{aligned}$$

Поскольку при  $b^2$ , изменяющемся от 0 до  $\infty$ , левая часть уравнения (10) принимает значения от 0 до  $2B^2$ , то всегда найдется вещественная постоянная  $b$ , при которой выполняется уравнение (10). Итак, это значение  $b$  удовлетворяет уравнению (9б), и, следовательно, уравнение (9а) (при  $\bar{D} = b\bar{B}$  и подходящим образом выбранном знаке  $b$ ) определяет положительное значение  $d$ . Следовательно, преобразование Лоренца  $\bar{Q}$  в рассматриваемом случае представимо в виде произведения 3 бустов.

*Случай 2.* Векторы  $\bar{A}$  и  $\bar{B}$  параллельны (в частности,  $A^2=0$  или  $B^2=0$ ).

В этом случае соотношение (7) становится скалярным, поскольку все векторы коллинеарны:

$$d = (1+Q^2)^{1/2} (1+D^2)^{1/2} - QD. \quad (11)$$

Пусть

$$\psi = \text{Arsh } Q = \alpha + i\beta.$$

Чтобы величина  $\psi$  была однозначной, наложим ограничение  $-\pi/2 < \beta \leq \pi/2$ . Пусть, кроме того,

$$\varphi = \text{Arsh } D \text{ (вещественная величина).}$$

Соотношение (11), записанное в  $\varphi$  и  $\psi$ , преобразуется к виду

$$d = \text{ch}(\psi - \varphi) = \text{ch}(\alpha - \varphi) \cos \beta - i \text{sh}(\alpha - \varphi) \sin \beta.$$

Если  $\beta=0$ , то задача решена ( $\bar{Q}$  — чистый буст). Если же  $\beta \neq 0$ , то, чтобы величина  $d$  была вещественной, необходимо положить  $\varphi = \alpha$  (тем самым зафиксировать значение  $D$ ), т. е.  $d = \cos \beta$ .



При  $\beta \neq \pi/2$  величина  $d$  положительна и  $\bar{Q}$  разлагается в произведение трех бустов. При  $\beta = \pi/2$  величина  $d$  обращается в нуль и преобразование Лоренца  $\bar{Q}$  не представимо в виде произведения трех бустов.

Случай  $\beta = \pi/2$  соответствует  $Q = \text{sh}(\alpha + i\pi/2) = i \text{ch} \alpha$ , поэтому вектор  $Q$  чисто мнимый и  $Q^2 \leq -1$ . В этом случае преобразование Лоренца можно назвать «винтовым поворотом на  $180^\circ$ »: оно представляет собой произведение поворота на  $180^\circ$  и буста с скоростью  $2\alpha$ . (В частности, чистый поворот на  $180^\circ$  неразложим в произведении трех бустов.)

Винтовой поворот на  $180^\circ$  представим в виде произведения четырех бустов, поскольку если  $\bar{C}$  — буст и  $\bar{Q} = i\bar{B}$  с  $B^2 \geq 1$ , то преобразование Лоренца

$$\bar{R} \equiv \bar{Q} \cdot \bar{C} = i(B^2 - 1)^{1/2} \bar{C} + i(1 + C^2)^{1/2} \bar{B} - \bar{B} \times \bar{C}$$

не является винтовым поворотом на  $180^\circ$ , за исключением того случая, когда вектор  $\bar{C}$  параллелен вектору  $\bar{B}$ . Следовательно,  $\bar{R}$  — произведение трех бустов, а  $\bar{Q} = \bar{R} \cdot (-\bar{C})$  — произведение четырех бустов. (Это решение предложено Д. М. Эрдли.)

## ГЛАВА 2

**Решение 2.1.** Из закона сохранения 4-импульса следует, что

$$\mathbf{P}_e + \mathbf{P}_\gamma = \mathbf{P}'_e + \mathbf{P}'_\gamma.$$

(Индекс  $\gamma$  относится к фотону, штрихами отмечены величины после рассеяния.) Поскольку 4-импульс электрона после рассеяния не представляет для нас интереса, воспользуемся общеизвестным приемом и исключим его:

$$(\mathbf{P}_e + \mathbf{P}_\gamma - \mathbf{P}'_\gamma)^2 = \mathbf{P}'_e{}^2 = -m_e^2,$$

или, поскольку  $\mathbf{P}'_\gamma{}^2 = 0$ ,

$$-m_e^2 + 2\mathbf{P}_e \cdot \mathbf{P}_\gamma - 2\mathbf{P}_e \cdot \mathbf{P}'_\gamma - 2\mathbf{P}_\gamma \cdot \mathbf{P}'_\gamma = -m_e^2.$$

В лабораторной системе отсчета

$$\mathbf{P}_e = (m_e, \vec{0}),$$

$$\mathbf{P}_\gamma = (h/\lambda, h/\lambda \vec{e}_i), \quad \vec{e}_i \text{ — единичный 3-вектор в направлении налетающего фотона,}$$

$$\mathbf{P}'_\gamma = (h/\lambda', h/\lambda' \vec{e}_0) \vec{e}_0 \text{ — единичный 3-вектор в направлении испущенного фотона,}$$

поэтому

$$-\frac{m_e h}{\lambda} + \frac{m_e h}{\lambda'} + \frac{h^2}{\lambda \lambda'} - \frac{h^2}{\lambda \lambda'} \cos \theta = 0.$$

Умножая на  $\lambda \lambda'$ , получаем

$$\lambda' - \lambda = (h/m_e) (1 - \cos \theta).$$

**Решение 2.2.**

а) Пусть  $\gamma$  означает фотон, а штрихами отмечены величины после рассеяния. Прежде всего исключим из закона сохранения 4-импульс  $\mathbf{P}'$ :

$$(\mathbf{P}'_\gamma + \mathbf{P}' - \mathbf{P}_\gamma)^2 = \mathbf{P}^2 = -m^2,$$

$$\mathbf{P}_\gamma \cdot \mathbf{P}'_\gamma = \mathbf{P} \cdot (\mathbf{P}_\gamma - \mathbf{P}'_\gamma).$$

Ясно, что максимальная передача энергии происходит при угле рассеяния  $180^\circ$ . При этом угле рассеяния и  $|\vec{P}_\gamma| = E_\gamma$  последнее соотношение преобразуется к виду

$$\begin{aligned} -E_\gamma E'_\gamma + \vec{P}_\gamma \cdot \vec{P}'_\gamma &= -E (E_\gamma - E'_\gamma) + \vec{P} \cdot (\vec{P}_\gamma - \vec{P}'_\gamma), \\ -2E_\gamma E'_\gamma &= -E (E_\gamma - E'_\gamma) + P (-E_\gamma - E'_\gamma), \end{aligned}$$

откуда

$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma(E+P)}{2E_\gamma+E-P} \approx \frac{E}{1+m^2/4EE_\gamma}.$$

Второе выражение для  $E'_\gamma$  мы получим, используя приближенное соотношение

$$P = (E^2 - m^2)^{1/2} \approx E - \frac{1}{2} m^2/E,$$

соответствующее принятому нами предположению о том, что  $E \gg m_e$ .

б) При температуре 3 К энергия фотона имеет порядок  $kT \approx 3 \times 10^{-4}$  эВ. Подставляя в выведенное нами уравнение эту величину, а также  $m_{\text{протон}} = 0,938 \times 10^9$  эВ,  $E = 10^{20}$  эВ, находим  $E'_\gamma \approx 10^{19}$  эВ.

**Решение 2.3.** По закону сохранения 4-импульса должно было бы выполняться равенство

$$\mathbf{p}_\gamma + \mathbf{p}_e = \mathbf{p}'_e, \quad (1)$$

где  $\mathbf{p}_\gamma$  — импульс фотона,  $\mathbf{p}_e$  — импульс электрона до поглощения или после испускания фотона, а  $\mathbf{p}'_e$  — импульс электрона в отсутствие фотона.

Возводя в квадрат правую и левую часть равенства (1), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_\gamma \cdot \mathbf{p}_\gamma + 2\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{p}_\gamma + \mathbf{p}_e \cdot \mathbf{p}_e &= \mathbf{p}'_e \cdot \mathbf{p}'_e, \\ 0 + 2\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{p}_\gamma - m_e^2 &= -m_e^2, \\ \mathbf{p}_e \cdot \mathbf{p}_\gamma &= 0. \end{aligned}$$

Но в системе отсчета, в которой  $\mathbf{p}_e = (m, \vec{0})$  и  $\mathbf{p}_\gamma = (E, \vec{p})$ , последнее соотношение означает, что энергия фотона должна быть равна нулю, т. е. что фотон не существует. Таким образом, изолированный свободный электрон не может ни поглотить, ни испустить фотон.

**Решение 2.4.** Если  $\mathbf{p}$  — 4-импульс составной системы, возникшей при столкновении, и  $\gamma \equiv (1 - v_1^2)^{-1/2}$ , то

$$\mathbf{p} = (m_1\gamma, m_1\gamma\vec{v}_1) + (m_2, \vec{0})$$

и

$$\begin{aligned} m &= (-\mathbf{p} \cdot \mathbf{p})^{1/2} = (m_1^2 + m_2^2 + 2\gamma m_1 m_2)^{1/2}, \\ \vec{v} &= \frac{\vec{p}}{E} = \frac{m_2\gamma\vec{v}_1}{m_1\gamma + m_2} = \frac{\vec{v}_1}{1 + m_2/m_1\gamma}. \end{aligned}$$

**Решение 2.5.** Пусть нейтрон движется вдоль оси  $x$ . В своей системе покоя электрон обладает 4-вектором импульса

$$\mathbf{P}' = (E', P' \cos \phi, P' \sin \phi, 0), \quad E' = m_e (1 - v_e^2)^{-1/2}$$

(не ограничивая общности, мы ориентировали нашу систему координат так, чтобы вектор  $\vec{P}'$  лежал в плоскости  $xy$ ), причем вектор  $\mathbf{P}'$  изотропен. В лабораторной системе отсчета 4-импульс  $\mathbf{P}$  мы получим, подвергнув  $\vec{P}'$  преобразованию Лоренца:

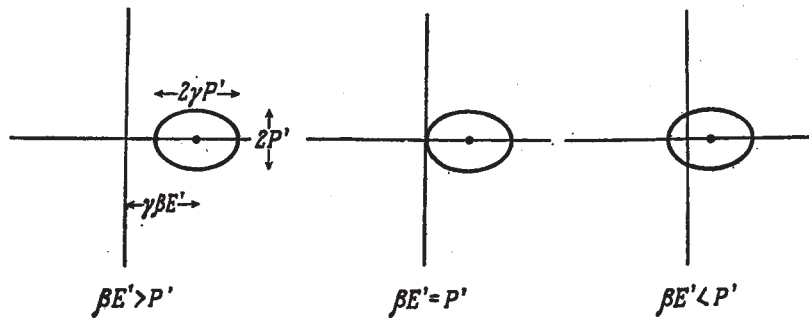
$$P_x = \gamma(P' \cos \phi + \beta E'),$$

$$P_y = P' \sin \phi,$$

или

$$\left( \frac{P_x - \gamma \beta E}{\gamma P'} \right)^2 + \left( \frac{P_y}{P'} \right)^2 = 1.$$

Последнее уравнение означает, что в лабораторной системе отсчета конец вектора импульса в импульсном пространстве лежит на эллипсе с центром в точке  $(\gamma \beta E', 0)$ , большой полуосью  $\gamma P'$  и малой полуосью  $P'$ . При вычерчивании этого эллипса могут представиться следующие три случая:



Фиг. 8.

**Решение 2.6.** Пусть  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{Q}$  — 4-импульсы сталкивающихся протонов и  $W$  — полная энергия в системе центра масс. В этой системе отсчета

$$W^2 = (P^0 + Q^0)^2 = -(\mathbf{P} + \mathbf{Q})^2,$$

но поскольку это выражение для  $W^2$  инвариантно, то его можно вычислять в любой системе отсчета. В эксперименте, проводимом по традиционной схеме, в лабораторной системе отсчета

$$\mathbf{P} = (E, \vec{P}),$$

$$\mathbf{Q} = (m, \vec{0}),$$

поэтому

$$W^2 = (E + m)^2 - p^2 = 2Em + 2m^2 \approx \approx 2Em \text{ при } E \gg m.$$

При  $E = 30$  ГэВ,  $m = 0,94$  ГэВ достижимая энергия составляет  $W \approx 7,5$  ГэВ.

В эксперименте со встречными пучками в лабораторной системе отсчета

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= (E, \vec{P}), \\ \mathbf{Q} &= (E, -\vec{P}), \end{aligned}$$

поэтому  $W^2 = 4E^2$ , т. е.  $W = 2E$ . При  $E = 15$  ГэВ достижимая энергия составляет  $W = 30$  ГэВ. Чтобы достичь  $W = 30$  ГэВ в эксперименте, проводимом по традиционной схеме, потребовалась бы энергия  $E = W^2/2m \approx 480$  ГэВ.

**Решение 2.7.** Пусть индексы 0 и 1 означают первоначально двигающуюся и первоначально стационарную частицу. Приравняв 4-импульсы до и после столкновения, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_1 &= \mathbf{P}_0' + \mathbf{P}_1', \\ (\mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0')^2 &= \mathbf{P}_1'^2, \\ -3m^2 + 2\mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{P}_1 - 2\mathbf{P}_0' \cdot (\mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_1) &= -m^2. \end{aligned}$$

Подставляя в эти соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0 &= (E, \vec{P}), & E &= m + T_0, \\ \mathbf{P}_1 &= (m, \vec{0}), & E' &= m + T', \\ \mathbf{P}_0' &= (E', \vec{P}'), & \vec{P} \cdot \vec{P}' &= PP' \cos \vartheta, \end{aligned}$$

находим

$$-m^2 - Em + E'(E + m) - PP' \cos \vartheta = 0,$$

т. е.

$$(E^2 - m^2)^{1/2} (E'^2 - m^2)^{1/2} \cos \vartheta = (E' - m)(E + m).$$

Возводя в квадрат обе части последнего равенства и разлагая на множители разности квадратов, вычисляем кинетическую энергию рассеянной частицы:

$$(E - m)(E' + m) \cos^2 \vartheta = (E' - m)(E + m),$$

$$T_0(T' + 2m) \cos^2 \vartheta = T'(T_0 + 2m),$$

$$T'(-T_0 \cos^2 \vartheta + T_0 + 2m) = 2mT_0 \cos^2 \vartheta,$$

$$T' = \frac{2mT_0 \cos^2 \vartheta}{2m + T_0 \sin^2 \vartheta}.$$

**Решение 2.8.** Из закона сохранения 4-импульса следует, что

$$\mathbf{P}_\gamma + \mathbf{P}_N = \mathbf{P}_{N'} + \mathbf{P}_\pi \quad (N' - \text{нуклон, возникающий в результате реакции}),$$

$$(\mathbf{P}_\gamma + \mathbf{P}_N)^2 = (\mathbf{P}_{N'} + \mathbf{P}_\pi)^2.$$

В лабораторной системе отсчета (в которой  $E_\gamma \sim 3\text{К} \sim 2,5 \times 10^{-10} \text{ МэВ}$ )

$$\mathbf{P}_\gamma = (E_\gamma, \vec{P}_\gamma), \quad \mathbf{P}_N = (E_N, \vec{P}_N).$$

В системе центра масс при достижении порога реакции

$$\mathbf{P}_{N'} + \mathbf{P}_\pi = (m_N + m_\pi, \vec{0}),$$

в силу чего

$$2\mathbf{P}_\gamma \cdot \mathbf{P}_N - m_N^2 = -(m_N + m_\pi)^2,$$

$$-2E_\gamma E_N + 2\vec{P}_\gamma \cdot \vec{P}_N = -2m_N m_\pi - m_\pi^2.$$

Но  $P_\gamma = E_\gamma$ , поскольку  $m_\gamma = 0$ , и при центральном столкновении  $\vec{P}_\gamma \cdot \vec{P}_N = -P_\gamma P_N$ , поэтому

$$E_N + (E_N^2 - m_N^2)^{1/2} = \frac{2m_N m_\pi + m_\pi^2}{2E_\gamma} =$$

$$= \frac{2 \cdot 940 \cdot 140 + 140^2}{2(2,5 \times 10^{-10})} \text{ МэВ} = 6 \times 10^{14} \text{ МэВ}.$$

Учитывая, что  $E_N \gg m_N$ , слагаемое  $(E_N^2 - m_N^2)^{1/2}$  можно заменить на  $E_N$ . Итак,  $E_N \approx 3 \times 10^{14} \text{ МэВ}$ .

**Решение 2.9.** Прежде всего запишем закон сохранения 4-импульса и исключим из него 4-импульс  $\Lambda$ -гиперона:

$$\mathbf{P}_\pi + \mathbf{P}_n = \mathbf{P}_K + \mathbf{P}_\Lambda,$$

$$\mathbf{P}_\Lambda^2 = -m_\Lambda^2 = (\mathbf{P}_\pi + \mathbf{P}_n - \mathbf{P}_K)^2 = -m_\pi^2 - m_n^2 - m_K^2 +$$

$$+ 2\mathbf{P}_\pi \cdot \mathbf{P}_n - 2\mathbf{P}_n \cdot \mathbf{P}_K - 2\mathbf{P}_\pi \cdot \mathbf{P}_K.$$

В лабораторной системе отсчета

$$\mathbf{P}_\pi = (E_\pi, \vec{P}_\pi),$$

$$\mathbf{P}_n = (m_n, \vec{0}), \quad \mathbf{P}_K = (E_K, \vec{P}_K),$$

поэтому

$$-m_\pi^2 - m_n^2 - m_K^2 - 2m_n E_\pi + 2m_n E_K + 2E_\pi E_K - 2\vec{P}_\pi \cdot \vec{P}_K = -m_\Lambda^2.$$

Полагая  $\vec{P}_\pi \cdot \vec{P}_K = 0$  (рассеяние на  $90^\circ$ ), находим

$$E_\pi = \frac{m_\Lambda^2 - m_\pi^2 - m_n^2 - m_K^2 + 2m_n E_K}{2(m_n - E_K)}.$$

Таким образом, чтобы энергия  $E_\pi$  была минимальна, мы должны (как и следовало ожидать) понизить до минимума  $E_K$ , поэтому разумно положить  $E_K = m_K c^2$ :

$$E_{\pi(\text{пороговая})} = \frac{m_\Lambda^2 - m_\pi^2 - m_n^2 - m_K^2 + 2m_n m_K}{2(m_n - m_K)} = \frac{m_\Lambda^2 - m_\pi^2}{2(m_n - m_K)} - \frac{m_n - m_K}{2} = \frac{1115^2 - 140^2}{2(940 - 494)} - \frac{940 - 494}{2} = 1149 \text{ МэВ.}$$

Следовательно, пороговая кинетическая энергия равна  $1149 - 140 = 1009$  МэВ.

**Решение 2.10.**

а) Из закона сохранения 4-импульса следует, что

$$P_C^2 = -m_C^2 = (P_A - P_B)^2 = -m_A^2 - m_B^2 - 2P_A \cdot P_B. \quad (1)$$

В лабораторной системе отсчета  $P_A = (m_A, \vec{0})$ ,  $P_B = (E_B, \vec{P}_B)$ , поэтому

$$-m_C^2 = -m_A^2 - m_B^2 - 2m_A E_B,$$

откуда

$$E_B = m_A^2 + m_B^2 - m_C^2 / 2m_A.$$

б) Поскольку  $m_A = M$ ,  $m_B = 0$ ,  $m_C = M - \delta$ , то

$$E_B = hv = \frac{M^2 - (M - \delta)^2}{2M} = \delta - \frac{\delta^2}{2M} < \delta.$$

В реальных условиях  $hv \neq \delta$ , поскольку некоторая доля энергии уходит на отдачу атома  $M$ , необходимую для сохранения импульса. В эффекте Мёссбауэра импульс отдачи распределяется между  $\sim 10^{23}$  атомами, поэтому энергия отдачи пренебрежимо мала.

в) В этом случае  $P_A = (E_A, \vec{P}_A)$ ,  $P_B = (E_B, \vec{P}_B)$ , и соотношение (1) преобразуется к виду

$$-m_A^2 - m_B^2 + 2E_A E_B - 2(E_A^2 - m_A^2)^{1/2} (E_B^2 - m_B^2)^{1/2} \cos \vartheta = -m_C^2.$$

**Решение 2.11.**

а) Полный 4-импульс равен  $P_{\text{полн}} = P_1 + P_2 = P_3 + P_4$ . В системе центра масс  $P_{\text{полн}} = (E_{\text{полн}}^{\text{ц.м.}}, \vec{0})$ , поэтому

$$P_{\text{полн}}^2 = -(E_{\text{полн}}^{\text{ц.м.}})^2 = (P_1 + P_2)^2.$$

Скалярный квадрат полного импульса  $(P_1 + P_2)^2$  можно вычислить в лабораторной системе отсчета, где  $P_1 = (E_1, \vec{P}_1)$ ,  $P_2 = (m_2, \vec{0})$ :

$$-(E_{\text{полн}}^{\text{ц.м.}})^2 = P_1^2 + P_2^2 + 2P_1 \cdot P_2 = -m_1^2 - m_2^2 - 2E_1 m_2.$$

б) Вычислим левую часть равенства

$$\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_{\text{полн}} = \mathbf{P}_1 \cdot (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)$$

в системе центра масс, а правую — в лабораторной системе отсчета:

$$\begin{aligned} -E_1^{\text{ц. м.}} \cdot E_{\text{полн}}^{\text{ц. м.}} &= -m_1^2 - E_1 m_2 = \\ &= -m_1^2 - \frac{1}{2} [(E_{\text{полн}}^{\text{ц. м.}})^2 - m_1^2 - m_2^2], \end{aligned} \quad (\text{из п. «а»})$$

откуда

$$E_1^{\text{ц. м.}} = [(E_{\text{полн}}^{\text{ц. м.}})^2 + m_1^2 - m_2^2] / 2E_{\text{полн}}^{\text{ц. м.}}$$

в) Используя предыдущий результат (п. «б»), получаем

$$\begin{aligned} (P_1^{\text{ц. м.}})^2 &= (E_1^{\text{ц. м.}})^2 - m_1^2 = \left( \frac{m_1^2 + E_1 m_2}{E_{\text{полн}}^{\text{ц. м.}}} \right)^2 - m_1^2 = \\ &= \frac{(m_1^2 + E_1 m_2)^2 - m_1^2 (m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 m_2)}{(E_{\text{полн}}^{\text{ц. м.}})^2} = \frac{m_2^2 (E_1^2 - m_1^2)}{(E_{\text{полн}}^{\text{ц. м.}})^2} = \frac{m_2^2 P_1^2}{(E_{\text{полн}}^{\text{ц. м.}})^2} \end{aligned}$$

и, следовательно,  $P_1^{\text{ц. м.}} = m_2 P_1 / E_{\text{полн}}^{\text{ц. м.}}$ .

г) Если  $\mathbf{u}$  — 4-скорость любого наблюдателя, то, как нетрудно проверить, в системе отсчета, связанной с этим наблюдателем (а следовательно, и во всех системах отсчета),

$$\mathbf{P}_{(s)} \equiv \mathbf{P} + (\mathbf{P} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u}$$

— 4-импульс, измеренный наблюдателем. Следовательно,  $\mathbf{u}_{\text{ц. м.}}$  определяется соотношением

$$\mathbf{P}_{\text{полн}} + (\mathbf{P}_{\text{полн}} \cdot \mathbf{u}_{\text{ц. м.}}) \mathbf{u}_{\text{ц. м.}} = 0.$$

Но если 2 наблюдателя обладают 4-скоростями  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}_2$ , то  $\gamma = -\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2$  — фактор преобразования Лоренца между двумя системами отсчета, связанными с наблюдателями. (Доказательство. В системе покоя наблюдателя 1  $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = (1, \vec{0}) \cdot (\gamma, \gamma \vec{v}) = -\gamma$ .) Таким образом, фактор  $\gamma_{\text{ц. м.}} = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_{\text{ц. м.}}$  задает преобразование в систему центра масс. Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\text{полн}} \cdot \mathbf{u} + (\mathbf{P}_{\text{полн}} \cdot \mathbf{u}_{\text{ц. м.}}) \mathbf{u}_{\text{ц. м.}} \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ -E_{\text{полн}} + E_{\text{полн}}^{\text{ц. м.}} \gamma_{\text{ц. м.}} &= 0, \\ \gamma_{\text{ц. м.}} &= E_{\text{полн}} / E_{\text{полн}}^{\text{ц. м.}} \end{aligned}$$

В нашем случае  $E_{\text{полн}} = E_1 + m_2$ , поэтому

$$\gamma_{\text{ц. м.}} = (E_1 + m_2) / E_{\text{полн}}^{\text{ц. м.}}$$

д) Из п. «е» получаем

$$1 - v_{\text{ц. м.}}^2 = [E_{\text{полн}}^{\text{ц. м.}} / (E_1 + m_2)]^2,$$

откуда

$$v_{\text{ц. м.}} = \left[ \frac{E_1^2 - m_1^2}{(E_1 + m_2)^2} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{P_1}{E_1 + m_2}.$$



**Решение 2.12.** Поскольку в системе центра масс столкновение упругое, то  $E_1^{ц.м.} = E_1'^{ц.м.}$ , т. е.

$$P_1 \cdot u_{ц.м.} = P_1' \cdot u_{ц.м.}$$

(Штрихами обозначены величины после столкновения.) Записав это равенство в лабораторной системе отсчета, получим

$$-E_1 + \vec{P}_1 \cdot \vec{v}_{ц.м.} = -E_1' + \vec{P}_1' \cdot \vec{v}_{ц.м.}$$

Но  $\vec{v}_{ц.м.} = \vec{P}_1 / (E_1 + m_2)$ , поэтому

$$-E_1 + \frac{P_1^2}{E_1 + m_2} = -E_1' + \frac{P_1' P_1 \cos \vartheta}{E_1 + m_2},$$

или

$$\cos \vartheta = \frac{E_1' (E_1 + m_2) - E_1 m_2 - m_1^2}{P_1 (E_1^2 - m_1^2)^{1/2}}. \quad (1)$$

(Последнее соотношение можно было бы вывести и не используя систему центра масс.) Минимальное значение  $\cos \vartheta$  (максимальное значение  $\sin \vartheta$ ) можно найти из уравнения  $d \cos \vartheta / dE_1' = 0$ , разрешив его относительно  $E_1'$  и подставив полученное значение в соотношение (1). Но к тому же ответу мы придем быстрее, рассмотрев точки пересечения графика функции  $\cos \vartheta (E_1')$  с прямой  $\cos \vartheta = K$ , определяемые уравнением

$$K^2 P_1^2 (E_1^2 - m_1^2) = E_1^2 (E_1 + m_2)^2 - 2(E_1 + m_2)(E_1 m_2 + m_1^2) E_1' + (E_1 m_2 + m_1^2)^2. \quad (2)$$

При минимальном значении  $\cos \vartheta$  прямая  $\cos \vartheta = K$  касается кривой  $\cos \vartheta (E_1')$  и дискриминант уравнения (2), квадратичного по  $E_1'$ , обращается в нуль:

$$0 = -(E_1 + m_2)^2 K^2 P_1^2 m_1^2 + K^2 P_1^2 (E_1 m_2 + m_1^2)^2 + K^4 P_1^4 m_1^2,$$

или

$$K^2 = \frac{(E_1 + m_2)^2 m_1^2 - (E_1 m_2 + m_1^2)^2}{m_1^2 P_1^2} = \frac{m_1^2 - m_2^2}{m_1^2}$$

и, наконец,

$$\begin{aligned} \cos \vartheta_{\min} &= \frac{(m_1^2 - m_2^2)^{1/2}}{m_1}, \\ \sin \vartheta_{\max} &= m_2 / m_1. \end{aligned}$$

**Решение 2.13.**

а) Предположим, что ракета движется вдоль оси  $x$ . На 4-скорость  $u$  и 4-ускорение  $a$  наложены следующие ограничения:

$$u \cdot u = -1 = -(u^t)^2 + (u^x)^2 \quad (\text{нормировка 4-вектора } u), \quad (1)$$

$$a \cdot u = 0 = -a^t u^t + a^x u^x \quad (\text{ортогональность 4-вектора } a \text{ 4-вектору } u), \quad (2)$$

$$a \cdot a = g^2 = -(a^t)^2 + (a^x)^2 \quad (\text{собственное ускорение равно } g). \quad (3)$$

Из этих соотношений следует

$$a^t = a^x \left( \frac{u^x}{u^t} \right), \quad (a^x)^2 [1 - (u^x/u^t)^2] = g^2,$$

откуда

$$a^x = gu^t, \quad (4)$$

$$a^t = gu^x. \quad (5)$$

Дифференцируя соотношение (4), можно получить дифференциальное уравнение для  $u^x$ :

$$\frac{d^2 u^x}{d\tau^2} = \frac{da^x}{d\tau} = g \frac{du^t}{d\tau} = ga^t = g^2 u^x,$$

имеющее решение

$$u^x = A \operatorname{sh} g\tau + B \operatorname{ch} g\tau.$$

Поскольку при  $\tau = 0$  выбраны начальные условия

$$u^x = 0, \quad du^x/d\tau = g,$$

то 4-вектор  $u$  должен иметь компоненты

$$u^x = dx/d\tau = \operatorname{sh} g\tau, \quad (6)$$

$$u^t = dt/d\tau = \operatorname{ch} g\tau \quad [\text{из соотношения (1)}].$$

Из интегралов этих уравнений (учитывая, что  $x = t = 0$  при  $\tau = 0$ ) находим

$$x = g^{-1} (\operatorname{ch} g\tau - 1), \quad t = g^{-1} (\operatorname{sh} g\tau). \quad (7)$$

В системе единиц с  $c = 1$  в силу числового совпадения ускорение  $g$  ( $= 980$  см/с<sup>2</sup>) оказывается почти в точности равным обратному году (как времени) или обратному световому году (как расстоянию). Таким образом, для интервала времени в 40 лет, измеренных на Земле ( $t = 40$  лет), из соотношений (7) получаем

$$\tau \approx [\operatorname{Arsh} 40] \text{ лет} \approx 4,38 \text{ лет}$$

и

$$x \approx [\operatorname{ch} (\operatorname{Arsh} 40) - 1] \text{ св. лет} \approx 39,01 \text{ св. лет}. \quad (8)$$

Для 40 лет, измеренных в ракете ( $\tau = 40$  лет), из соотношений (7) находим

$$x \approx [\operatorname{ch} 40 - 1] \text{ св. лет} \approx 10^{17} \text{ св. лет}. \quad (9)$$

б) Половина расстояния составляет  $x \approx 15\,000$  св. лет. Для преодоления ее потребуется

$$\tau \approx \operatorname{Arch} (15\,000 + 1) \text{ лет} \approx 10,3 \text{ лет}. \quad (10)$$

Вторая половина пути (торможение) полностью аналогична первой (разгону), поэтому полное время равно 20,6 лет.

в) Пусть  $M$  — (переменная) масса покоя ракеты. Изменение энергии ракеты, равное излученной энергии, составляет

$$d(Mu^0) = -dE_{\text{изл}} \quad (11)$$

Поскольку энергия излучается в виде фотонов, то

$$dE_{\text{изл}} = dP_{\text{изл}}, \quad (12)$$

а в силу сохранения импульса

$$dP_{\text{изл}} = dP, \quad (13)$$

где  $dP$  — изменение импульса ракеты. Объединяя соотношения (11) — (13), получаем

$$\begin{aligned} d(Mu^0) &= -dP = -d(Mu^x), \\ (dM)u^0 + M du^0 &= -(dM)u^x - M du^x, \\ dM/M &= -d(u^0 + u^x)/(u^0 + u^x), \end{aligned}$$

откуда

$$M = M_0/(u^0 + u^x) = M_0 e^{-g\tau} \quad (14)$$

[чтобы получить  $u^0(\tau)$  и  $u^x(\tau)$ , мы воспользовались соотношениями (6)].

Из п. «б» следует, что для половины путешествия  $e^{g\tau} = 30\,000$ . Таким образом,  $M_{1/2} = M_0/30\,000$  и

$$M_{\text{конечн}} = M_0/(30\,000)^2 \approx 10^{-9} M_0.$$

**Решение 2.14.** В циклотроне ускоряющий потенциал с фиксированной частотой приложен к зазору между дуантами. Частота подобрана так, чтобы, когда электрон достигает зазора, потенциал всегда имел нужное направление, т. е. она равна циклотронной частоте  $\omega_0 = eB/mc$ . Существование максимальной энергии, до которой циклотрон может ускорять электроны, обусловлено тем, что в действительности электроны движутся по окружностям с «синхротронной частотой»  $\omega = eB/\gamma mc = \omega_0 m/E$  ( $E$  — энергия электрона) и, когда электрон разгоняется до релятивистских скоростей, происходит расфазировка: между переменной синхротронной и постоянной циклотронной частотой набегают заметная разность фаз. Наконец, наступает такой момент, когда электрон достигает зазора между дуантами с рассогласованием по фазе с ускоряющим потенциалом на  $90^\circ$  и процесс ускорения обрывается. Количественно это явление можно описать следующим образом. Пусть  $\alpha$  — фаза ускоряющего потенциала в момент, когда электрон достигает зазора между дуантами. Проходя зазор, электрон приобретает энергию  $V \cos \alpha$ , где  $V$  — максимальное значение ускоряющего потенциала в электронвольтах. За  $dN$  циклов элек-

трон приобретает энергию, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{d(\text{энергия электрона})}{dN} = \frac{dE}{\omega dt/2\pi} = 2V \cos(\varphi - \omega_0 t)$$

(множитель 2 в правой части связан с тем, что за каждый цикл электрон проходит щель дважды). Фаза  $\varphi$  означает угловое расстояние, пройденное электроном,

$$\varphi = \int \omega dt = \omega_0 \int_0^t (m/E) dt$$

и

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{\omega}{2\pi} 2V \cos \left[ \omega_0 \int_0^t \frac{m}{E} dt - \omega_0 t \right] = \frac{V}{\pi E} \omega_0 m \cos \left[ \omega_0 \int_0^t \left( \frac{m}{E} - 1 \right) dt \right]; \\ \frac{dE^2}{dt} &= a \cos \left[ \omega_0 \int_0^t \left( \frac{m}{E} - 1 \right) dt \right], \end{aligned}$$

где  $a \equiv 2V\omega_0 m/\pi$ . Дифференцируя, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^2(E^2)}{dt^2} &= -a \sin \left[ \omega_0 \int_0^t \left( \frac{m}{E} - 1 \right) dt \right] \omega_0 \left( \frac{m}{E} - 1 \right) = \\ &= \left[ a^2 - \left( \frac{dE^2}{dt} \right)^2 \right]^{1/2} \omega_0 \left( \frac{m}{E} - 1 \right). \end{aligned}$$

Минус перед квадратным корнем выбран потому, что синус заведомо отрицателен.

Найдем первый интеграл этого уравнения. Пусть  $q \equiv dE^2/dt$ . Тогда  $d^2E^2/dt^2 = dq/dE^2$ , и наше дифференциальное уравнение преобразуется к виду

$$-q \frac{dq}{dE^2} = [a^2 - q^2]^{1/2} \omega_0 \left[ 1 - \frac{m}{(E^2)^{1/2}} \right].$$

Новое уравнение можно проинтегрировать с начальным условием  $q = a$  при  $E = m$  (т. е. при  $t = 0$ ):

$$(a^2 - q^2)^{1/2} = \omega_0 (E - m)^2.$$

Энергия электрона возрастает до тех пор, пока  $q$  не обратится в нуль. При  $q = 0$

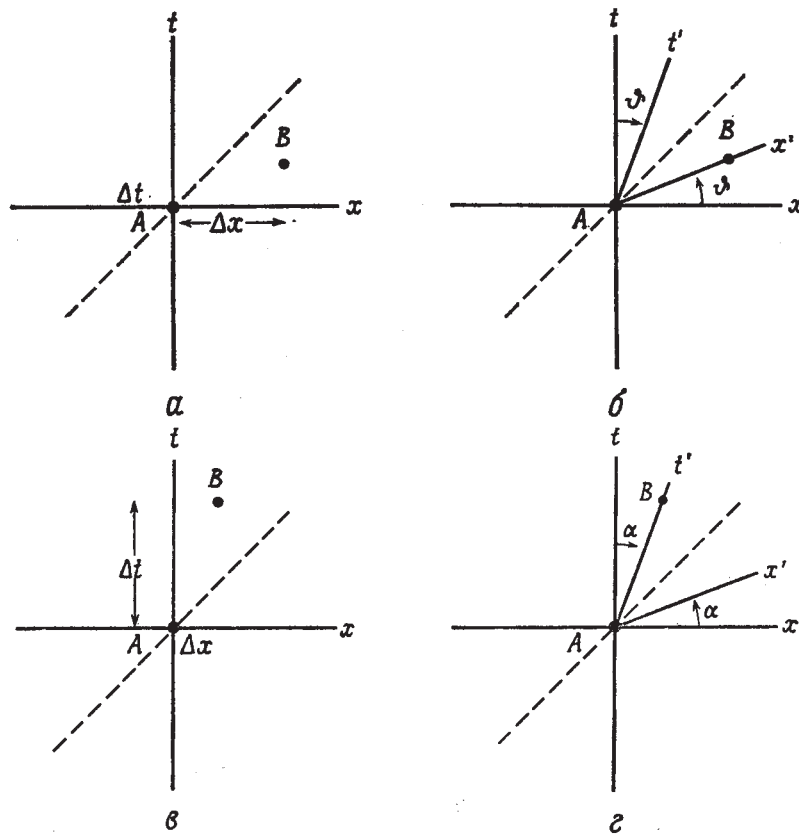
$$E_{\text{макс}} = m + a/\omega_0 = m + (2Vm/\pi)^{1/2}.$$

**Решение 2.15.** Если новое поле  $\mathbf{F}$  не равно тождественно нулю, то при *некоторой* 4-скорости  $\mathbf{u}$  произведение  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}$  должно быть отлично от нуля. Но это противоречит требованию ортогональности 4-скорости и 4-ускорения:  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{2} d(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})/d\tau = 0$ .

### ГЛАВА 3

**Решение 3.1.** Наиболее изящное решение этой задачи мы получим, изобразив двумерное пространство-время.

Прежде всего расположим систему координат так, чтобы оба события оказались на оси  $x$  и первое событие совместилось с точкой  $x = t = 0$ .



Фиг. 9.

На фиг. 9, а события  $A$  и  $B$  разделены пространственноподобным интервалом  $(\Delta x, \Delta t)$ , а мировой линии светового луча соот-

ветствует пунктирная биссектриса. Ясно, что после преобразования Лоренца, переводящего исходную систему координат  $(t, x)$  в систему координат  $(t', x')$  (фиг. 9, б), события  $A$  и  $B$  станут одновременными. (Величина лоренцевского буста  $\beta = \Delta t / \Delta x$ ,  $\text{Arth}(\text{tg } \phi)$ , где  $\phi$  — угол, указанный на фиг. 9, б, — параметр быстроты.) Поскольку ось  $t'$  при помощи преобразования Лоренца нельзя вывести за световой конус (опустить ниже конуса), события  $A$  и  $B$  не могут происходить в одной и той же точке пространства.

На фиг. 9, в события  $A$  и  $B$  разделены времениподобным интервалом. На фиг. 9, г показано, каким преобразованием Лоренца исходную систему координат  $t, x$  можно перевести в систему координат  $t', x'$ , в которой события  $A$  и  $B$  будут происходить в одной и той же точке пространства. Величина буста для этого должна быть равна  $\alpha = \Delta x / \Delta t$ . Поскольку ось  $x'$  невозможно вывести за световой конус (поднять выше конуса), то события  $A$  и  $B$  не могут быть одновременными.

**Решение 3.2.** Линейно-независимы, например, следующие 4 изотропных вектора:

$$e_x + e_t, e_x - e_t, e_x + e_y, e_y + e_t.$$

Предположим, что существуют 4 взаимно ортогональных изотропных вектора  $A, B, C, D$ . Поскольку они линейно-независимы, то любой вектор можно представить в виде их линейной комбинации:

$$V = aA + bB + cC + dD.$$

Но это означает, что длина любого вектора равна нулю, поскольку векторы  $A, B, C, D$  изотропны и по предположению взаимно ортогональны. Следовательно, 4 таких вектора не могут существовать.

**Решение 3.3.** Не ограничивая общности, выберем систему координат так, чтобы изотропный вектор  $V$  можно было представить в виде  $V = e_x + e_t$ . Произвольный вектор  $S$  допускает разложение

$$S = Ae_t + Be_x + Ce_y + De_z.$$

Скалярное произведение векторов  $V$  и  $S$  равно

$$S \cdot V = A(e_t \cdot e_t) + B(e_x \cdot e_x) = B - A,$$

поэтому если вектор  $S$  ортогонален вектору  $V$ , то  $A = B$ . Но  $S$  — пространственноподобный вектор, в силу чего  $A^2 < B^2 + C^2 + D^2$  и  $C^2 + D^2 = 0$ , т. е.  $C = D = 0$ . Итак,

$$S = A(e_x + e_t),$$

а это означает, что вектор  $S$  кратен вектору  $V$ .

**Решение 3.4.** Рассмотрим плоское пространство Минковского. Тогда  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{z}$  — пространственноподобные единичные векторы,  $\hat{t}$  — времениподобный единичный вектор,  $\hat{t} \pm \hat{z}$ ,  $\hat{t} \pm \hat{y}$  — изотропные векторы и т. д. В следующей таблице приведены по порядку примеры пространственноподобной, изотропной и времениподобной суммы.

	Пространственноподобный вектор	Изотропный вектор	Времяподобный вектор
Пространственноподобный вектор	$\hat{x} + \hat{y}$	$\hat{x} + (\hat{x} - \hat{t})$	$\hat{x} + (e\hat{t})$
	$(\hat{x} + e\hat{t}) + (-\hat{x} + e\hat{z})$	$(\hat{x} + \hat{t}) + (-2\hat{x})$	$\hat{x} + \hat{t}$
	$(\hat{x} + e\hat{t}) + (-\hat{x})$	$(-\hat{x}) + (\hat{x} - \hat{t})$	$(e\hat{x}) + \hat{t}$
Изотропный вектор		$(\hat{x} - \hat{t}) + (\hat{x} + \hat{t})$	$(\hat{x} - \hat{t}) + \hat{t}$
		$(\hat{x} + \hat{t}) + (\hat{x} + \hat{t})$	$(\hat{x} - \hat{t}) + 2\hat{t}$
		$(\hat{t} - \hat{x}) + (\hat{t} + \hat{x})$	$(\hat{x} + \hat{t}) + \hat{t}$
Времяподобный вектор	Пространственноподобная сумма		$(\hat{t} + e\hat{x}) + (-\hat{t})$
	Изотропная сумма		$(\hat{t} + e\hat{x}) + (-\hat{t} + e\hat{z})$
	Времяподобная сумма		$\hat{t} + \hat{t}$

Здесь  $e$  означает любую малую постоянную, например равную 0,1. Если времениподобные векторы должны быть «направлены в будущее», т. е. если для времениподобных векторов  $u$  должно выполняться неравенство  $u \cdot \hat{t} < 0$ , то не все комбинации двух векторов оказываются допустимыми. (Мы предоставляем читателю убедиться в этом самостоятельно.)

**Решение 3.5.** Пусть  $k$  — изотропный вектор, в направлении которого распространяется свет. Некий наблюдатель выбирает малый квадратный элемент пучка, стороны которого образуют векторы  $A$  и  $B$  — чисто пространственноподобные в системе отсчета, связанной с этим наблюдателем, и ортогональные пучку ( $A \cdot k = B \cdot k = 0$ ). Кроме того, поскольку  $A$  и  $B$  — стороны квадрата, то  $A \cdot B = 0$  и площадь элемента равна  $|A| \cdot |B|$ .

Другой наблюдатель может безошибочно опознать тот же самый элемент пучка, например, по лучам, образующим углы квадрата, но проводит сечение иначе во времени. В его системе отсчета старые векторы  $A$  и  $B$  не ортогональны его 4-скорости  $u$ , поэтому поперечное сечение пучка не является чисто пространственноподобным. Но при любых постоянных  $\alpha$  и  $\beta$  векторы

$$A' = A + \alpha k, \quad B' = B + \beta k$$

порождают тот же элемент пучка, что и векторы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  (лишь «конец» каждого вектора сдвигается в другую точку вдоль светового луча от прибавления некоторого кратного волнового вектора  $\mathbf{k}$ ). Новый наблюдатель требует, чтобы выполнялись соотношения  $\mathbf{A}' \cdot \mathbf{u} = \mathbf{B}' \cdot \mathbf{u} = 0$ . Этим требованиям всегда можно удовлетворить, выбрав  $\alpha = -\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} / \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}$  и  $\beta = -\mathbf{B} \cdot \mathbf{u} / \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}$  ( $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} \neq 0$ , поскольку  $\mathbf{k}$  — изотропный, а  $\mathbf{u}$  — времениподобный вектор). Заметим, что  $\mathbf{A}' \cdot \mathbf{k} = \mathbf{B}' \cdot \mathbf{k} = \mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}' = 0$  (так как  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 0$ ), поэтому векторы  $\mathbf{A}'$  и  $\mathbf{B}'$ , служащие сторонами сечения, проведенного новым наблюдателем, ортогональны. Площадь нового сечения равна

$$|\mathbf{A}'| |\mathbf{B}'| = (\mathbf{A}' \cdot \mathbf{A}')^{1/2} (\mathbf{B}' \cdot \mathbf{B}')^{1/2} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}|,$$

т. е. совпадает с площадью сечения, проведенного первым наблюдателем.

**Решение 3.6.** Доказать, что сумма  $\sum_{\mu} D^{\mu\mu}$  инвариантна, нетрудно. Пусть  $D^{0x} = 1$ , а все остальные компоненты равны нулю. При бусте в направлении оси  $x$

$$D^{0'0'} = -\beta\gamma, \quad D^{x'x'} = -\beta\gamma,$$

поэтому

$$\sum_{\mu} D^{\mu\mu} = 0, \quad \text{но} \quad \sum_{\mu'} D^{\mu'\mu'} = -2\beta\gamma.$$

Инвариантность суммы  $\sum_{\mu} D_{\mu\mu}$  доказывается аналогично.

Под действием преобразования Лоренца  $\Lambda_{\nu'}^{\mu'}$ , как известно,  $D_{\mu'}^{\nu'} = \Lambda_{\mu}^{\alpha} \Lambda_{\beta}^{\nu'} D_{\alpha}^{\beta}$ , поэтому

$$\sum_{\mu'} D_{\mu'}^{\mu'} = \sum_{\mu'} \Lambda_{\mu}^{\alpha} \Lambda_{\beta}^{\mu'} D_{\beta}^{\alpha} = \delta_{\beta}^{\alpha} D_{\alpha}^{\beta} = \sum_{\mu} D_{\mu}^{\mu},$$

и, следовательно, сумма  $\sum_{\mu} D_{\mu}^{\mu}$  инвариантна.

**Решение 3.7.** Поскольку  $\eta^{\alpha\beta}$  — постоянный тензор, то

$$\begin{aligned} F_{\mu, \beta}^{\alpha} F_{\alpha}^{\beta\gamma} &= (F_{\mu\gamma} \eta^{\gamma\alpha})_{,\beta} (F^{\beta\sigma} \eta_{\sigma\alpha}) = \\ &= F_{\mu\gamma, \beta} F^{\beta\sigma} (\eta^{\gamma\alpha} \eta_{\sigma\alpha}) = F_{\mu\gamma, \beta} F^{\beta\sigma} \delta_{\sigma}^{\gamma} = F_{\mu\gamma, \beta} F^{\beta\gamma} = -F_{\mu\alpha, \beta} F^{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Последнее равенство следует из антисимметрии тензора  $F^{\alpha\beta}$  (немые индексы переобозначены).

**Решение 3.8.** Запишем дифференциалы в новых координатах:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} = \\ &= \eta_{\alpha\beta} (\partial x^{\alpha} / \partial \bar{x}^{\mu}) d\bar{x}^{\mu} (\partial x^{\beta} / \partial \bar{x}^{\nu}) d\bar{x}^{\nu} = \\ &= \left( \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \bar{x}^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \bar{x}^{\nu}} \right) d\bar{x}^{\mu} d\bar{x}^{\nu}. \end{aligned}$$



Если линейный элемент записать в виде  $ds^2 = g_{\mu\nu} d\bar{x}^\mu d\bar{x}^\nu$ , то

$$g_{\mu\nu} \equiv \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu}.$$

Поскольку вектор преобразуется по закону

$$U^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\beta} U^{\bar{\beta}},$$

то

$$\begin{aligned} \mathbf{U} \cdot \mathbf{V} &= U^\sigma V^\lambda \eta_{\sigma\lambda} = \\ &= \left( U^{\bar{\alpha}} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^\alpha} \right) \left( V^{\bar{\beta}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^\beta} \right) \eta_{\sigma\lambda} = U^{\bar{\alpha}} V^{\bar{\beta}} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^\beta} \eta_{\sigma\lambda} = U^{\bar{\alpha}} V^{\bar{\beta}} g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}. \end{aligned}$$

**Решение 3.9.** Под действием преобразования координат  $x^\mu \rightarrow \bar{x}^\mu(x^\nu)$  метрический тензор  $g_{\alpha\beta}$  преобразуется следующим образом:

$$g_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu},$$

и, следовательно, его определитель  $g$  переходит в

$$\bar{g} = \det(g_{\mu\nu}) = \det(g_{\alpha\beta}) \det\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu}\right) \det\left(\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu}\right) = g \left[ \det\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu}\right) \right]^2.$$

Поскольку  $\bar{g} \neq g$ , то  $\bar{g}$  — не скаляр.

**Решение 3.10.** Пусть первой матрице соответствует преобразование координат

$$\bar{x}^\mu = \bar{x}^\mu(x^\nu), \quad (\Lambda_{\bar{\beta}}^\alpha = \partial \bar{x}^\alpha / \partial x^{\bar{\beta}}), \quad (1)$$

а второй — преобразование координат

$$\tilde{x}^\mu = \tilde{x}^\mu(x^\nu), \quad (\tilde{\Lambda}_{\bar{\beta}}^\alpha = \partial \tilde{x}^\alpha / \partial x^{\bar{\beta}}). \quad (2)$$

Составим произведение матриц

$$\Lambda_{\bar{\nu}}^\alpha \tilde{\Lambda}_{\bar{\beta}}^\nu = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^{\bar{\nu}}} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^{\bar{\beta}}}. \quad (3)$$

Правая часть равенства (3) весьма похожа на частную производную от сложной функции. Это наводит на мысль рассмотреть преобразование координат

$$\bar{x}^\mu(x^{\bar{\beta}}) = \bar{x}^\mu[\tilde{x}^\nu(x^{\bar{\beta}})], \quad (4)$$

которому соответствует матрица преобразования

$$\bar{\Lambda}_{\bar{\beta}}^\mu = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^{\bar{\beta}}} = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^{\bar{\beta}}}. \quad (5)$$

Она лишь немногим отличается от произведения матриц (3). Не трудно понять, что в действительности различия между матрицами (3) и (5) несущественны: при вычислении частных производных от сложной функции по ее аргументам безразлично, как обозначены независимые переменные. Таким образом, преобразованию координат (4) соответствует произведение матриц  $\Lambda_{\beta}^{\alpha}$  и  $\bar{\Lambda}_{\beta}^{\alpha}$ .

**Решение 3.11.** Выберем произвольный репер. В нем тензору  $K$  соответствует матрица  $K^{\alpha\beta}$ . Ясно, что  $K^{\alpha\beta}$  можно представить в виде  $A^{\alpha}B^{\beta}$  в том и только в том случае, если все столбцы матрицы попарно пропорциональны.

В тензорных обозначениях к аналогичному выводу приводят следующие рассуждения. Тензор  $K$  представим в виде

$$K = A \otimes B$$

в том и только в том случае, если вектор  $W = K \cdot v$  (т. е.  $W^{\alpha} = K^{\alpha\beta}v_{\beta}$ ) имеет одно и то же направление при любом выборе вектора  $v$ .

*Доказательство.* В некоторой системе отсчета выберем 4 базисных вектора  $e^0, e^1, \dots$  так, чтобы  $e^{\mu} \cdot e_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$ . В силу линейности направление вектора  $W$  не зависит от *выбора* вектора  $v$  в том и только в том случае, если оно не зависит от 4 базисных векторов  $e^{\mu}$ . Но тогда

$$K \cdot e^0 = \lambda_0 W, \quad K \cdot e^1 = \lambda_1 W, \quad \dots,$$

или

$$K^{\alpha 0} = \lambda_0 W^{\alpha}, \quad K^{\alpha 1} = \lambda_1 W^{\alpha}, \quad \dots$$

Таким образом, наш тензорный критерий эквивалентен попарной пропорциональности столбцов.

**Решение 3.12.** Столбцы (и строки) тензорного произведения двух векторов попарно пропорциональны (см. задачу 3.11). В общем случае тензор второго ранга этим свойством не обладает. Если  $e_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) — базисные векторы  $(0, 0, \dots, 1, \dots, 0, 0)$ , где 1 стоит на  $i$ -м месте, то  $n^2$  тензорных произведений  $e_i \otimes e_j$  образуют базис в пространстве тензоров второго ранга, поскольку, какую бы строку и какой бы столбец мы ни выбрали, найдется прямое произведение базисных векторов, у которого на пересечении выбранного столбца и выбранной строки стоит 1, а все остальные компоненты равны 0. Суммируя эти произведения с постоянными коэффициентами, мы получаем любой тензор второго ранга. (Предоставляем читателю самостоятельно доказать, что любой конкретный тензор представим в виде суммы  $n$  тензорных произведений.)

**Решение 3.13.** Геометрический объект  $X^{\mu\nu}$  не может быть тензором. Ковариантный тензор второго ранга является функционалом от двух ковариантных тензоров, т. е. величина  $X^{\mu\nu}V_\mu W_\nu$  для такого тензора была бы скаляром, в то время как для заданного объекта

$$X^{\mu\nu}V_\mu W_\nu = (A \cdot V) W_\nu + (B \cdot W) V_\mu$$

зависит от координат.

Если геометрический объект с двумя индексами в любой системе координат задан соотношением  $X^{\mu\nu} = A^\mu + B^\nu$ , то при переходе от одной системы координат к другой он преобразуется по закону

$$X^{\mu'\nu'} = \Lambda_{\alpha}^{\mu'} A^\alpha + \Lambda_{\beta}^{\nu'} B^\beta.$$

Но такой закон невозможно представить в виде

$$X^{\mu'\nu'} = T_{\alpha\beta}^{\mu'\nu'} X^{\alpha\beta},$$

где  $T$  — некоторое преобразование. Это утверждение следует из того, что в любой заданной системе координат  $A^\mu$  и  $B^\nu$ , выбранные различными способами, порождают один и тот же геометрический объект  $X^{\mu\nu}$ . В частности,  $A^\mu + C$ ,  $B^\nu - C$  в фиксированной системе координат приводят к тому же  $X^{\mu\nu}$ , что и  $A^\mu$ ,  $B^\nu$ , но геометрические объекты  $X^{\mu'\nu'}$ , порождаемые этими двумя выборами векторов, значительно отличаются.

**Решение 3.14.** Необходимо лишь преобразовать исходный тензор и проверить получившийся тензор на антисимметрию:

$$F_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu}^{\alpha} \Lambda_{\nu}^{\beta} F_{\alpha\beta} = -\Lambda_{\mu}^{\alpha} \Lambda_{\nu}^{\beta} F_{\beta\alpha} = -\Lambda_{\mu}^{\beta} \Lambda_{\nu}^{\alpha} F_{\alpha\beta} = -F_{\nu\mu},$$

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} = -g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\beta\alpha} = -g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} F_{\alpha\beta} = -F^{\nu\mu}.$$

Для разнообразия мы воспользуемся при рассмотрении симметричного тензора другими соображениями. Построим вспомогательный тензор

$$\mathcal{A}^{\mu\nu} = S^{\mu\nu} - S^{\nu\mu},$$

где  $S^{\mu\nu}$  — симметричный тензор. Все компоненты  $\mathcal{A}^{\mu\nu}$  равны нулю (по предположению о симметричности тензора  $S^{\mu\nu}$ ), а поскольку  $\mathcal{A}^{\mu\nu}$  — тензор, то они равны нулю во всех системах координат. Следовательно, тензор  $S^{\mu\nu}$  симметричен во всех системах координат.

**Решение 3.15.** В силу симметрий, указанных в условиях задачи,

$$A_{\mu\nu} S^{\mu\nu} = -A_{\nu\mu} S^{\nu\mu},$$

но  $\mu, \nu$  — немые индексы, поэтому, переставив их, мы получим

$$A_{\mu\nu}S^{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}S^{\mu\nu} = -A_{\mu\nu}S^{\mu\nu}.$$

Следовательно,  $A_{\mu\nu}S^{\mu\nu} = 0$ .

Любой тензор  $V_{\mu\nu}$  можно представить в виде суммы симметричной части

$$\tilde{V}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}(V_{\mu\nu} + V_{\nu\mu})$$

и антисимметричной части

$$\tilde{\tilde{V}}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}(V_{\mu\nu} - V_{\nu\mu}),$$

поэтому

$$V^{\mu\nu}A_{\mu\nu} = \tilde{V}^{\mu\nu}A_{\mu\nu} + \tilde{\tilde{V}}^{\mu\nu}A_{\mu\nu} = \tilde{\tilde{V}}^{\mu\nu}A_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(V^{\mu\nu} - V^{\nu\mu})A_{\mu\nu},$$

$$V^{\mu\nu}S_{\mu\nu} = \tilde{V}^{\mu\nu}S_{\mu\nu} + \tilde{\tilde{V}}^{\mu\nu}S_{\mu\nu} = \tilde{V}^{\mu\nu}S_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(V^{\mu\nu} + V^{\nu\mu})S_{\mu\nu}.$$

### Решение 3.16.

а) Если тензор  $r$ -го ранга в  $n$ -мерном пространстве не обладает никакими симметриями, то число его независимых компонент равно  $n^r$ .

б) Пусть тензор симметричен по  $s$  индексам и лишен симметрии по  $r-s$  индексам. Сколькими неэквивалентными способами можно выбрать  $s$  индексов из  $n$  возможных? Ясно, что это число совпадает с числом способов, которыми можно выбрать  $s$  предметов из  $n$  с повторениями, т. е. равно

$$(n+s-1)/(n-1)! s!$$

[См., например, Mathews J., Walker R., *Mathematical Methods of Physics* (W. A. Benjamin, 1965), Sec. 14.3.] Остальные  $r-s$  индексов можно выбрать  $n^{r-s}$  способами, поэтому число независимых компонент равно

$$n^{r-s} (n+s-1)/(n-1)! s!$$

в) Пусть тензор антисимметричен по  $a$  индексам и имеет  $r-a$  других индексов. Выясним прежде всего, сколькими способами можно выбрать  $a$  индексов? Это можно сделать столькими способами, сколькими удастся извлечь  $a$  предметов из  $n$  без повторений, т. е.

$$n!/(n-a)! a!$$

Следовательно, число независимых компонент в этом случае равно

$$n^{r-a} n!/(n-a)! a!$$

Заметим, что при  $a=n$  антисимметричные индексы можно выбрать лишь 1 способом. При  $a > n$  число возможных способов выбора обращается в 0: все компоненты тензора должны быть нулями!

**Решение 3.17.**

$$\begin{aligned}
 \text{а) } V_{[\mu\nu]} &= \frac{1}{2} (V_{\mu\nu} - V_{\nu\mu}), \quad T_{[\mu\nu]} = 0, \\
 F_{[\mu\nu]} &= F_{\mu\nu}, \quad T_{(\mu\nu)} = T_{\mu\nu}, \\
 F_{(\mu\nu)} &= 0, \\
 V_{[\alpha\beta\gamma]} &= \frac{1}{6} [V_{\alpha\beta\gamma} - V_{\alpha\gamma\beta} + V_{\beta\gamma\alpha} - V_{\beta\alpha\gamma} + V_{\gamma\alpha\beta} - V_{\gamma\beta\alpha}], \\
 T_{(\alpha\beta, \gamma)} &= \frac{1}{3} [T_{\alpha\beta, \gamma} + T_{\alpha\gamma, \beta} + T_{\beta\gamma, \alpha}], \\
 F_{[\alpha\beta, \gamma]} &= \frac{1}{3} [F_{\alpha\beta, \gamma} + F_{\gamma\alpha, \beta} + F_{\beta\gamma, \alpha}].
 \end{aligned}$$

б) Если  $A_{\mu\nu\dots\sigma}$  — полностью антисимметричный тензор, т. е. если

$$(-1)^\pi A_{\alpha_{\pi_1} \dots \alpha_{\pi_p}} = A_{\alpha_1 \dots \alpha_p},$$

то

$$A_{[\alpha_1 \dots \alpha_p]} = \frac{1}{p!} \sum (-1)^\pi A_{\alpha_{\pi_1} \dots \alpha_{\pi_p}} = A_{\alpha_1 \dots \alpha_p}.$$

Но тензор

$$A_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \equiv V_{[\alpha_1 \dots \alpha_p]}$$

полностью антисимметричен, поэтому

$$A_{[\alpha_1 \dots \alpha_p]} = V_{[[\alpha_1 \dots \alpha_p]]} = V_{[\alpha_1 \dots \alpha_p]}.$$

Утверждение задачи относительно  $V_{((\alpha_1 \dots \alpha_p))}$  доказывается аналогично.

В силу симметричности по индексам в круглых скобках

$$V_{(\alpha_1 \dots [\alpha_l \alpha_m] \dots \alpha_p)} = V_{(\alpha_1 \dots [\alpha_m \alpha_l] \dots \alpha_p)},$$

а в силу антисимметричности по индексам в квадратных скобках

$$V_{(\alpha_1 \dots [\alpha_l \alpha_m] \dots \alpha_p)} = -V_{(\alpha_1 \dots [\alpha_m \alpha_l] \dots \alpha_p)}.$$

Следовательно,  $V = 0$ .

Антисимметричность по двум индексам нетрудно представить в виде

$$V_{\alpha_1 \dots [\alpha_l \alpha_m] \dots \alpha_p} = \frac{1}{2} [V_{\alpha_1 \dots \alpha_l \alpha_m \dots \alpha_p} - V_{\alpha_1 \dots \alpha_m \alpha_l \dots \alpha_p}],$$

поэтому

$$V_{[\alpha_1 \dots [\alpha_l \alpha_m] \dots \alpha_p]} = \frac{1}{2p!} \sum (-1)^\pi (V_{\alpha_{\pi_1} \dots \alpha_{\pi_m} \alpha_{\pi_l} \dots \alpha_{\pi_p}} - V_{\dots \alpha_{\pi_l} \alpha_{\pi_m} \dots}).$$

Но

$$V_{\alpha_{\pi_1} \dots \alpha_{\pi_l} \alpha_{\pi_m} \dots \alpha_{\pi_p}} = -V_{\alpha_{\pi_1} \dots \alpha_{\pi_m} \alpha_{\pi_l} \dots \alpha_{\pi_p}},$$

в силу чего

$$V_{[\alpha_1 \dots [\alpha_i \alpha_m] \dots \alpha_p]} = V_{[\alpha_1 \dots \alpha_i \alpha_m \dots \alpha_p]}.$$

в) По доказанному в п. «а»

$$F_{\alpha\beta, \nu} + F_{\beta\nu, \alpha} + F_{\nu\alpha, \beta} = 3F_{[\alpha\beta, \nu]}.$$

Но

$$F_{\alpha\beta} = -A_{[\alpha, \beta]},$$

поэтому

$$F_{[\alpha\beta, \nu]} = -A_{[[\alpha, \beta], \nu]},$$

и по доказанному в п. «б»

$$A_{[[\alpha, \beta], \nu]} = A_{[\alpha, \beta, \nu]}.$$

А поскольку

$$A_{\alpha, \beta, \nu} = A_{\alpha, \nu, \beta},$$

то

$$A_{[\alpha, \beta, \nu]} = 0.$$

**Решение 3.18.** Первая часть утверждения задачи доказывается непосредственно:

$$X_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(X_{\alpha\beta} + X_{\beta\alpha}) + \frac{1}{2}(X_{\alpha\beta} - X_{\beta\alpha}) = X_{(\alpha\beta)} + X_{[\alpha\beta]}.$$

Если бы аналогичное соотношение

$$Y_{\alpha\beta\gamma} = Y_{(\alpha\beta\gamma)} + Y_{[\alpha\beta\gamma]} \quad (1)$$

выполнялось для тензора третьего ранга, то

$$\begin{aligned} Y_{\beta\alpha\gamma} &= Y_{(\beta\alpha\gamma)} + Y_{[\beta\alpha\gamma]} = Y_{(\alpha\beta\gamma)} - Y_{[\alpha\beta\gamma]}, \\ Y_{\beta\gamma\alpha} &= Y_{(\gamma\beta\alpha)} - Y_{[\gamma\beta\alpha]} = Y_{(\alpha\beta\gamma)} + Y_{[\alpha\beta\gamma]} = Y_{\alpha\beta\gamma}. \end{aligned} \quad (2)$$

Поскольку в общем случае тензор  $Y_{\alpha\beta\gamma}$  не обладает теми свойствами симметрии, которые следуют из соотношения (2), то разложение (1) неверно.

**Решение 3.19.** Одно решение сводится к доказательству того, что из  $\delta_v^\mu$  и двух векторов можно построить скаляр. Поскольку  $A^v B_\mu \delta_v^\mu = A \cdot B$ , то  $\delta$  — тензор.

Другое решение сводится к проверке трансформационных свойств дельта-символа Кронекера:

$$\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}} \delta_\beta^\alpha = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\nu'}} = \delta_{\nu'}^{\mu'}$$

(последнее равенство следует из того, что матрицы  $\partial x^{\mu'}/\partial x^\alpha$  и  $\partial x^\alpha/\partial x^{\mu'}$  — взаимно-обратны). Таким образом,  $\delta_v^\mu$  преобразуется как тензор.

**Решение 3.20.** Если  $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$  — полностью антисимметричный тензор, то по любой его компоненте (например, по компоненте  $\varepsilon_{0123}$ ), переставляя ее индексы, можно восстановить все остальные компоненты с неповторяющимися индексами. Компоненты полностью антисимметричного тензора с повторяющимися индексами равны нулю. Следовательно, тензор  $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$  однозначно определен, если задана его компонента  $\varepsilon_{0123}$ , а это и означает, что полностью антисимметричный тензор  $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$  единствен с точностью до умножения на постоянную. При обычной, не зависящей от положения индекса нормировке в координатах Минковского

$$\varepsilon_{0123} = -\varepsilon_{1023} = \varepsilon_{1032} = \dots = 1.$$

Переходя к другим координатам  $x^{\mu'}$  ( $x^\alpha$ ), получаем

$$\varepsilon_{\mu'\nu'\lambda'\sigma'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial x^\delta}{\partial x^{\sigma'}} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \det \left[ \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \right] \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}.$$

В новых координатах

$$g_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}} \eta_{\alpha\beta},$$

$$\det(g_{\mu'\nu'}) = \left| \det \left( \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \right) \right|^2 \det(\eta_{\alpha\beta}),$$

поэтому

$$\det(\partial x^\alpha / \partial x^{\alpha'}) = [-\det(g_{\mu'\nu'})]^{1/2}$$

и, наконец,

$$\varepsilon_{\mu'\nu'\lambda'\sigma'} = [-\det(g_{\mu'\nu'})]^{1/2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}.$$

**Решение 3.21.** В ортонормированном репере

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} \eta^{\gamma\sigma} \eta^{\delta\lambda} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\lambda}.$$

В ненулевых компонентах тензора  $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$  должен обращаться в нуль ровно один из индексов  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ . Поскольку  $\eta^{00} = -1$  и  $\eta^{jj} = 1$ , то преобразование отличается от тождественного лишь одним знаком минус и

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

При переходе в другую систему координат это соотношение в силу преобразования, выведенного в решении 3.20 и его очевидного аналога для  $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ , переходит в соотношение

$$[-\det(g_{\mu\nu})]^{-1/2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -[-\det(g_{\mu\nu})]^{1/2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

Таким образом, в системе координат с метрикой  $g_{\mu\nu}$

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \det(g_{\mu\nu}) \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

**Решение 3.22.** Вычислим этот скаляр в локально ортонормированной системе отсчета. Из решения 3.21 известно, что

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma},$$

поэтому

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\sum_{\mu\nu\rho\sigma} |\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}|^2 = -\sum |\varepsilon_{0123}|^2,$$

где суммирование проводится по всем перестановкам индексов 0123. Поскольку существует всего  $4! = 24$  такие перестановки, то  $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -24$ .

**Решение 3.23.** В ортонормированном репере (с  $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ ) должно было бы быть очевидным, что (поскольку  $\varepsilon$  — полностью антисимметричный тензор) операции, производимые в левой части доказываемого тождества, в точности совпадают с операциями, производимыми при вычислении определителя, т. е.

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} A_0^\alpha A_1^\beta A_2^\gamma A_3^\delta = \det \|A_\beta^\alpha\|.$$

Переход от набора индексов (0, 1, 2, 3) к произвольному набору ( $\mu, \nu, \lambda, \sigma$ ) требует введения в правую часть тождества множителя  $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$ , чтобы учесть минусы, возникающие при перестановках строк.

Докажем, что это тождество выполняется в любых (а не только в ортонормированной) системах координат. Для этого необходимо доказать, что оно тензорное или что  $\det \|A_\beta^\alpha\|$  — скаляр:

$$\begin{aligned} \det \|A_{\beta'}^{\alpha'}\| &= \det \left\| A_\beta^\alpha \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \right\| = \\ &= \det \|A_\beta^\alpha\| \det \left\| \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \right\| \det \left\| \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \right\| = \det \|A_\beta^\alpha\|. \end{aligned}$$

[Последнее преобразование следует из того, что  $\partial x^{\alpha'}/\partial x^\alpha$  и  $\partial x^\alpha/\partial x^{\alpha'}$  — взаимно-обратные матрицы.]

**Решение 3.24.** Предположим, что  $\alpha u + \beta v + \gamma w + \delta x = 0$ , причем не все коэффициенты  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  равны нулю. Если  $\alpha \neq 0$ , то, умножив эту линейную комбинацию (в смысле операции  $\wedge$ ) справа на  $v \wedge w \wedge x$ , получим  $u \wedge v \wedge w \wedge x = 0$ . Если  $\alpha = 0$ , то то же самое произведение мы найдем из члена с отличным от нуля коэффициентом, умножив всю линейную комбинацию справа и слева на недостающие векторы. Наоборот, если векторы  $u, v, w, x$  линейно-независимы, то любой вектор представим в виде их линейной комбинации. В частности, так можно представить



4 вектора, образующих ортонормированный базис. Но тогда

$$0 \neq \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = (\alpha_1 \mathbf{u} + \beta_1 \mathbf{v} + \gamma_1 \mathbf{w} + \delta_1 \mathbf{x}) \wedge \\ \wedge (\alpha_2 \mathbf{u} + \dots) \wedge (\alpha_3 \mathbf{u} + \dots) \wedge (\alpha_4 \mathbf{u} + \dots) \sim (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \wedge \mathbf{x}),$$

поскольку члены, содержащие по крайней мере 2 одинаковых базисных вектора, обращаются в нуль. Следовательно,  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \wedge \mathbf{x} \neq 0$ . Поскольку произведение  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \wedge \mathbf{x}$  полностью антисимметрично по всем «индексам» и кратно  $\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$ , то оно может быть только пропорционально тензору  $\varepsilon$  (см. задачи 3.20, 3.21).

**Решение 3.25.**

$$*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}, \quad (1)$$

$$*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\tau} \varepsilon^{\sigma\tau\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = \\ = \frac{1}{2} (\varepsilon_{\mu\nu\lambda\gamma} \eta^{\alpha\lambda} \eta^{\beta\gamma}) F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\gamma} (\eta^{\alpha\lambda} \eta^{\beta\gamma} F_{\alpha\beta}) = \\ = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \quad (2)$$

$$*(*F^{\mu\nu}) = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (*F_{\alpha\beta}) = \frac{1}{4} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta\lambda\sigma} F^{\lambda\sigma}. \quad (3)$$

Но

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta\lambda\sigma} = -2\delta_{\lambda\sigma}^{\mu\nu}$$

(это соотношение служит определением символа  $\delta_{\lambda\sigma}^{\mu\nu}$ ). Необходимо убедиться в том, что  $\delta_{\lambda\sigma}^{\mu\nu}$  обладает следующими свойствами:

$$\delta_{\lambda\sigma}^{\mu\nu} = \begin{cases} +1, & \text{если } \lambda = \mu, \quad \sigma = \nu; \\ -1, & \text{если } \lambda = \nu, \quad \sigma = \mu; \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда

$$\delta_{\lambda\sigma}^{\mu\nu} = \delta_{\lambda}^{\mu} \delta_{\sigma}^{\nu} - \delta_{\sigma}^{\mu} \delta_{\lambda}^{\nu}$$

и

$$*(*F^{\mu\nu}) = -\frac{1}{2} \delta_{\lambda\sigma}^{\mu\nu} F^{\lambda\sigma} = -\frac{1}{2} (F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu}) = -F^{\mu\nu}.$$

**Решение 3.26.** По определению дуального тензора

$$*V^{\alpha\beta\gamma} = V_{\lambda} \varepsilon^{\lambda\alpha\beta\gamma}$$

и

$$*V_{\alpha\beta\gamma} *V^{\alpha\beta\gamma} = V^{\mu} V_{\lambda} \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} \varepsilon^{\lambda\alpha\beta\gamma}.$$

Поскольку индексы  $\mu$  и  $\lambda$  отличны от индексов  $\alpha$ ,  $\beta$  или  $\gamma$ , то

$$\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} \varepsilon^{\lambda\alpha\beta\gamma} = C \delta_{\mu}^{\lambda},$$

где  $C$  — некоторая постоянная. Просуммировав это соотношение по  $\lambda$  и  $\mu$ , используя ответ задачи 3.22 и то, что  $\delta_\mu^\mu = 4$ , мы найдем значение постоянной  $C = -6$ . Окончательно получаем

$$*V_{\alpha\beta\gamma} *V^{\alpha\beta\gamma} = -6\delta_\mu^\lambda V^\mu V_\lambda = -6V^\sigma V_\sigma.$$

**Решение 3.27.** Заметим, что тензор  $\delta_\rho^\mu \dots \lambda_\sigma$  антисимметричен и по верхним, и по нижним индексам. Это утверждение следует из того, что определитель изменяет знак при нечетных перестановках строк или столбцов. Поскольку он антисимметричен по верхним индексам, то среди них не может быть повторяющихся. Если же число верхних индексов более четырех, то среди них непременно найдется по крайней мере один повторяющийся индекс и тензор  $\delta_\rho^\mu \dots \lambda_\sigma$  должен быть тождественно равен нулю.

**Решение 3.28.** Индексы  $\mu, \nu, \kappa, \lambda$  должны принимать различные значения из  $\rho, \sigma$ . При заданных  $\rho, \sigma$  индекс  $\mu$  можно положить равным индексу  $\kappa$  (тогда индекс  $\nu$  совпадает с индексом  $\lambda$ ) или положить  $\mu$  равным  $\lambda$  (тогда  $\nu$  совпадет с  $\kappa$ ). Все остальные комбинации индексов соответствуют нулевым компонентам, поскольку  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  — полностью антисимметричный тензор. Кроме того, в силу той же антисимметрии при  $\mu = \kappa, \nu = \lambda$  возникает минус. Таким образом,

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\lambda\mu\rho\sigma} = C (\delta_\lambda^\mu \delta_\kappa^\nu - \delta_\kappa^\mu \delta_\lambda^\nu) \equiv C \delta_{\lambda\kappa}^{\mu\nu},$$

где  $C$  — некоторая постоянная. Суммируя по  $\mu, \lambda$  и  $\nu, \kappa$ , а также используя результаты, доказанные в решении 3.22, получаем, что  $C = -2$ . Следовательно,

$$\delta_{\lambda\kappa}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\lambda\mu\rho\sigma}.$$

В общем случае

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\tau} \varepsilon_{\mu\rho\sigma} &= -\delta_{\mu\rho\sigma}^{\mu\nu\lambda\tau}, \\ \varepsilon^{\mu\nu\lambda\tau} \varepsilon_{\mu\rho\tau} &= -\delta_{\mu\rho}^{\mu\nu\lambda}. \end{aligned}$$

**Решение 3.29.** Если  $p^{\alpha\beta} = A[\alpha B^\beta]$ , то

$$\det \begin{bmatrix} p^{\alpha\beta} & p^{\alpha\gamma} & p^{\alpha\delta} \\ A^\beta & A^\alpha & A^\delta \\ B^\beta & B^\gamma & B^\delta \end{bmatrix} = 0,$$

поскольку первая строка представляет собой линейную комбинацию двух остальных строк (первая строка  $= -1/2 A^\alpha \times$  третья строка  $+ 1/2 B^\alpha \times$  вторая строка). Раскрывая определитель, получаем соотношение, которое требовалось доказать.

**Решение 3.30.** При каждом значении  $\mu$  существует  $3!$  перестановок индексов  $\alpha, \beta, \gamma \neq \mu$ , которым соответствуют ненулевые компоненты тензора  $\epsilon$ . Якобиан изменяет свой знак так же, как и тензор  $\epsilon$ , поэтому правильный ответ мы получим, взяв по одному элементу, порождающему каждую перестановку, и введя множитель  $3!$  в знаменатель:

$$\begin{aligned} d^3\Sigma_0 &= [\partial(a, b, c)/\partial(a, b, c)] da db dc = da db dc, \\ d^3\Sigma_1 &= -[\partial(\text{const}, b, c)/\partial(a, b, c)] da db dc = 0, \\ d^3\Sigma_2 &= -[\partial(a, \text{const}, c)/\partial(a, b, c)] da db dc = 0, \\ d^3\Sigma_3 &= -[\partial(a, b, \text{const})/\partial(a, b, c)] da db dc = 0. \end{aligned}$$

**Решение 3.31.** Пусть координаты с чертой соответствуют ортонормированному реперу с метрикой  $\eta_{\mu\nu}$ . Тогда  $dV \equiv d^4\bar{x} = \det(\partial\bar{x}/\partial x) d^4x$ , поскольку при переходе от одной системы координат к другой элементарный объем умножается на якобиан. Но

$$-g = -\det(g_{\alpha\beta}) = -\det\left(\frac{\partial x^{\bar{\mu}}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\bar{\nu}}}{\partial x^{\beta}} \eta_{\bar{\mu}\bar{\nu}}\right) = [\det(\partial\bar{x}/\partial x)]^2 (-\det \eta),$$

поэтому

$$(-g)^{1/2} = \det(\partial\bar{x}/\partial x)$$

и, следовательно,

$$dV = (-g)^{1/2} d^4x.$$

**Решение 3.32.** В сопутствующей локально ортогональной системе отсчета  $d^3V = dx dy dz$ . Требуется построить инвариантную величину, связанную с элементарным объемом. Начнем с элементарного объема  $d^4V = (-g)^{1/2} dx dy dz dt$  — скаляра в любой системе отсчета. Умножив его на  $u^0/u^0 = u^0/(dt/ds)$ , получим

$$d^4V = [(-g)^{1/2} u^0 dx dy dz] ds.$$

Поскольку  $d^4V$  и  $ds$  — инвариантны, то член в скобках также должен быть инвариантным. В сопутствующей ортонормированной системе отсчета он сводится к  $dx dy dz$ , поэтому

$$d^3V = (-g)^{1/2} u^0 dx dy dz.$$

**Решение 3.33.** Поскольку контравариантный вектор импульса  $P^\alpha$  преобразуется так же, как контравариантный вектор перемещений  $x^\alpha$ , то 4-мерный элементарный импульс должен иметь такой вид, как инвариантный элемент 4-объема (задача 3.32), поэтому

$$d^4P = (-g)^{1/2} dP^x dP^y dP^z dP^t.$$

Элемент 3-объема мы умножим на  $\delta$ -функцию, сосредоточенную на массовой поверхности, и проинтегрируем по  $P^t$ :

$$\begin{aligned} d^3P &= \int \delta [(-g_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta)^{1/2} - m] (-g)^{1/2} dP^x dP^y dP^z dP^t = \\ &= (-g)^{1/2} dP^x dP^y dP^z \times \left[ -\frac{1}{2} (-g_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta)^{-1/2} \cdot 2g_{t\alpha} P^\alpha \right]^{-1} \end{aligned}$$

(здесь мы воспользовались тождеством

$$\int \delta(f(x)) dx = \frac{1}{|f'(x_1)|},$$

где  $x_1$  — нуль функции  $f$ ). Преобразуя член в скобках, находим

$$d^3P = (-g)^{1/2} dP^x dP^y dP^z \left( \frac{m}{-P^t} \right).$$

Заметим, что в локально ортонормированной системе отсчета, сопутствующей частицам в импульсном пространстве, правая часть, как и следует ожидать, упрощается:

$$d^3P = dP^x dP^y dP^z.$$

Иногда  $d^3P$  перенормируют, вводя множитель  $1/m$ . В таком виде инвариантный элемент объема пригоден и для частиц с нулевой массой покоя.

**Решение 3.34.** Ясно, что число частиц  $N$  инвариантно. Необходимо доказать, что элемент  $dx dy dz dP^x dP^y dP^z$  фазового пространства также инвариантен. Если частицы движутся с 4-скоростью  $u$  относительно системы координат  $xyz$ , связанной с наблюдателем, то по его измерениям (см. задачу 3.32) они занимают инвариантный элемент 3-объема

$$d^3V = (-g)^{1/2} u^0 dx dy dz$$

и инвариантный элемент объема в пространстве 3-импульсов (см. задачу 3.33)

$$d^3P = (-g)^{1/2} dP^x dP^y dP^z \left( \frac{-1}{u_0} \right).$$

Поскольку наблюдатель производит измерения в ортонормированной системе отсчета, то  $-g = 1$ ,  $u^0 = -u_0$  и

$$dx dy dz dP^x dP^y dP^z = d^3V d^3P.$$

Инвариантность правой части очевидна.

**Решение 3.35.**

а) Выберем 4-объем, ограниченный «крышками»  $x_A^0$ ,  $x_B^0 > x_A^0$  и «боковыми» гиперповерхностями, находящимися на бесконечном расстоянии от начала координат. По теореме Гаусса

$$0 = \int J^{\alpha, \alpha} d^4\Omega = \int J^{\alpha, \alpha} dt dx dy dz = \int J^{\alpha} d^3\Sigma_{\alpha}.$$

Потоком через боковые поверхности можно пренебречь, поскольку «стенки» объема движутся к бесконечности. Следовательно,

$$0 = \int_{x_B^0} J^\alpha d^3\Sigma_\alpha + \int_{x_A^0} J^\alpha d^3\Sigma_\alpha = \int_{x_B^0} J^0 dx dy dz - \int_{x_A^0} J^0 dx dy dz.$$

б) Плоскости  $x^0 = \text{const}$  и  $x^{0'} = \text{const}$ , пересекаясь, образуют две 4-мерные области: I и II. Замкнем эти области на бесконечности пространственными гиперповерхностями и рассмотрим заключенные в них пространства. По теореме Гаусса для области I

$$0 = \int_I J^\alpha{}_{,\alpha} d^4\Omega = 0 = \int_{Ix^0} J^0 d^3\Sigma_0 - \int_{Ix^{0'}} J^{0'} d^3\Sigma_0,$$

или

$$\int_{Ix^0} J^0 dx dy dz = \int_{Ix^{0'}} J^{0'} dx' dy' dz'.$$

Аналогичный результат мы получим и для области II. Чтобы доказать утверждение задачи, нам останется лишь сложить правые и левые части соотношений, выведенных для области I и II в отдельности.

## ГЛАВА 4

**Решение 4.1.** Предположим, что проволока совпадает с осью  $z$  цилиндрической системы координат и несет заряд с собственной плотностью  $\rho_0$ . В системе покоя проволоки  $J^0 = \rho_0$  и  $\vec{J} = \vec{0}$ . По теореме Гаусса единственная ненулевая компонента тензора электромагнитного поля равна

$$E^r = \rho_0 A / 2\pi r = F^{0r},$$

где  $A$  — площадь поперечного сечения проволоки. Если проволока движется в положительном направлении оси  $z$  со скоростью  $\beta$  относительно лабораторной системы отсчета, то преобразование Лоренца  $\Lambda^{0'}_0 = \gamma$ ,  $\Lambda^{0'}_z = \beta\gamma$  дает

$$J^{0'} = \gamma\rho_0, \quad J^{z'} = \beta\gamma\rho_0, \\ B^{\hat{\phi}} = F^{z'r'} = \Lambda^{z'}_0 F^{0r} = \beta\gamma\rho_0 A / 2\pi r, \quad E^{r'} = \gamma\rho_0 A / 2\pi r$$

( $B^{\hat{\phi}}$  — «физическая компонента», т. е. компонента, связанная с единичным вектором  $e_\phi$ ). Если на поле, создаваемое проволокой, наложить поле (создаваемое аналогичной проволокой, которая покоится в лабораторной системе отсчета) с плотностью заряда  $-\gamma\rho_0$ , то полная плотность заряда и электрическое поле  $\vec{E}$  взаимно компенсируются. Ток

$$I = \int J^{z'} dx dy = \beta\gamma\rho_0 A$$

создает только магнитное поле

$$B^{\hat{\phi}} = I / 2\pi r.$$

**Решение 4.2.** Инвариантность величин  $B^2 - E^2$  и  $\vec{B} \cdot \vec{E}$  следует из того, что они равны скалярам:

$$B^2 - E^2 = \frac{1}{2} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}, \\ \vec{E} \cdot \vec{B} = \frac{1}{4} * F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = \frac{1}{8} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} = \det (F^{\mu\nu}).$$

Любой инвариант должен сохранять свое значение при поворотах в 3-пространстве. Следовательно, инварианты можно построить лишь из скаляров  $\vec{E} \cdot \vec{B}$ ,  $\vec{E} \cdot \vec{E}$  и  $\vec{B} \cdot \vec{B}$ . Если бы число

независимых инвариантов было равно 3, то, например, величина  $\vec{E} \cdot \vec{B}$  была бы инвариантной. Но это невозможно, поскольку  $B^2$ , вообще говоря, изменяется под действием преобразования Лоренца.

**Решение 4.3.** В любой системе отсчета угол между электрическим вектором и вектором магнитного поля определяется соотношением

$$\cos \varphi_0 = \vec{E} \cdot \vec{B} / |E| |B|.$$

Но скалярное произведение  $\vec{E} \cdot \vec{B}$  инвариантно (см. задачу 4.2), а произведение  $|E| |B|$  неинвариантно. Следовательно, угол  $\varphi_0$  может быть инвариантным в том и только в том случае, если  $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ , т. е. если  $\varphi_0 = \pi/2$ .

**Решение 4.4.** Лоренц-инвариантность величины  $\mathcal{E}^2 - |S|^2$  мы докажем, если нам удастся представить ее в виде функции от инвариантов  $E^2 - B^2$  и  $\vec{E} \cdot \vec{B}$ :

$$\begin{aligned} 64\pi (\mathcal{E}^2 - |S|^2) &= (E^2 + B^2)^2 - 4(\vec{E} \times \vec{B})^2 = \\ &= [E^4 + 2E^2B^2 + B^4] - 4[E^2B^2 - (\vec{E} \cdot \vec{B})^2] = \\ &= E^4 - 2E^2B^2 + B^4 + 4(\vec{E} \cdot \vec{B})^2 = \\ &= (E^2 - B^2)^2 + 4(\vec{E} \cdot \vec{B})^2. \end{aligned}$$

**Решение 4.5.** Пусть  $\vec{v} = \alpha(\vec{E} \times \vec{B})$ . Тогда

$$\begin{aligned} \vec{E}'\gamma^{-1} &= \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = (1 - \alpha B^2)\vec{E} + \alpha(\vec{E} \cdot \vec{B})\vec{B}, \\ \vec{B}'\gamma^{-1} &= \vec{B} - \vec{v} \times \vec{E} = (1 - \alpha E^2)\vec{B} + \alpha(\vec{E} \cdot \vec{B})\vec{E}. \end{aligned}$$

*Случай 1.* Если  $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$  и  $|E| = |B|$ , то преобразование эквивалентно красному смещению плоской волны и векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  невозможно сделать параллельными.

*Случай 2.* Если  $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ , но  $E^2 \neq B^2$ , то, выбрав  $\alpha = 1/\max(E^2, B^2)$ , обратим в нуль либо  $\vec{E}'$ , либо  $\vec{B}'$ . Тогда  $\vec{E}' \times \vec{B}' = 0$ .

*Случай 3.* Если  $\vec{E} \cdot \vec{B} \neq 0$ , то векторы  $\vec{E}'$  и  $\vec{B}'$  можно сделать параллельными, выбрав параметр  $\alpha$  так, чтобы он удовлетворял соотношению

$$\alpha^2 [(\vec{E} \cdot \vec{B})^2 - E^2 B^2] = 1 - \alpha(E^2 + B^2).$$

Тогда

$$\frac{\vec{v}}{1 + v^2} = \frac{\alpha(\vec{E} \times \vec{B})}{1 + \alpha^2 [(\vec{E} \cdot \vec{B})^2]} = \frac{\alpha(E \times B)}{1 + \alpha^2 [E^2 B^2 - (\vec{E} \cdot \vec{B})^2]} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{E^2 + B^2}.$$

**Решение 4.6.** Если  $E^2 - B^2 > 0$ , то, выполнив преобразование Лоренца с  $\vec{v} = \vec{E} \times \vec{B} / E^2$ , получим  $\vec{B}' = \gamma (\vec{B} - \vec{v} \times \vec{E}) = 0$ . При  $E^2 - B^2 < 0$  к аналогичному результату приводит преобразование Лоренца с  $\vec{v} = -\vec{B} \times \vec{E} / B^2$ . Если  $E^2 - B^2 = 0$ , то  $|E| = |B|$  после любого преобразования. Преобразование с  $\vec{v} = \alpha (\vec{E} \times \vec{B})$  (см. задачу 4.5) уменьшает величину векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  на множитель

$$\gamma(1 - \alpha E^2) = \gamma(1 - v) = [(1 - v)/(1 + v)]^{1/2}.$$

В пределе при  $v \rightarrow 1$  величину векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  можно сделать сколь угодно малой.

**Решение 4.7.** При интегрировании выражения для  $J^\mu$  воспользуемся соотношением

$$\int F(\tau) \delta[t - z^0(\tau)] d\tau = \int F(\tau) \delta[t - z^0(\tau)] (d\tau/dt) dt = F(\tau[t]) / u^0$$

и получим

$$J^\mu = \sum_k \frac{u_k^\mu}{u_k^0} e_k \delta^3[\vec{x} - \vec{z}_k(t)].$$

Нетрудно видеть, что выражение для временной и пространственных компонент оказываются правильными.

**Решение 4.8.** Для решения этой задачи полезно ввести трехмерный полностью антисимметричный тензор  $\epsilon_{ijk}$  (с нормировкой  $\epsilon_{123} = 1$ ). Заметим, что

$$F^{ij} = \epsilon^{ijk} B_k, \quad B^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{jk},$$

$$(\vec{U} \times \vec{V})^i = \epsilon^{ijk} U^j V^k.$$

Запишем покомпонентно «электрические» уравнения  $F^{\mu\nu}_{,\nu} = 4\pi J^\mu$ :

$$F^{0\beta}_{,\beta} = F^{0i}_{,i} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi J^0 = 4\pi\rho,$$

$$F^{i\beta}_{,\beta} = F^{ij}_{,j} + F^{i0}_{,0} = \epsilon^{ijk} B_{k,j} - E^i_{,0} = 4\pi J^i.$$

Последнее уравнение совпадает с  $i$ -й компонентой векторного уравнения

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \dot{\vec{E}} = 4\pi \vec{J}.$$

Рассмотрим теперь «магнитные» уравнения. Предположим сначала, что индексы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  соответствуют пространственным компонентам. Пусть  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$ ,  $\gamma = 3$ . Тогда

$$F_{12,3} + F_{31,2} + F_{23,1} = B^3_{,3} + B^2_{,2} + B^1_{,1} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0.$$



Пусть теперь  $\alpha = 0$ , а  $\beta$  и  $\gamma$  соответствуют пространственным компонентам. Тогда

$$\begin{aligned} F_{0i,j} + F_{j0,i} + F_{ij,0} &= E_{i,j} + E_{j,i} + \varepsilon_{ijk} \dot{B}^k = \\ &= \varepsilon_{ijk} (\vec{\nabla} \times \vec{E})^k + \varepsilon_{ijk} \dot{B}^k = 0. \end{aligned}$$

Умножая это уравнение на  $\varepsilon^{ijm}$ , получаем

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0.$$

**Решение 4.9.** В задаче 4.8 было показано, что тензорное уравнение

$$F^{\mu\nu},_{\nu} = 0$$

эквивалентно «электрическим» уравнениям Максвелла (в вакууме). Что касается магнитных уравнений, то

$$\begin{aligned} *F^{\mu\nu},_{\nu} &= \frac{1}{2} (F_{\alpha\beta} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}),_{\nu} = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta, \nu} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} = \\ &= \frac{1}{2} F_{[\alpha\beta, \nu]} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}, \end{aligned}$$

поэтому уравнение

$$*F^{\mu\nu},_{\nu} = 0$$

эквивалентно уравнению

$$F_{\alpha\beta, \nu} + F_{\nu\alpha, \beta} + F_{\beta\nu, \alpha} = 0.$$

**Решение 4.10.** При  $\mu = 0$  уравнение для силы Лоренца принимает вид

$$dP^0/d\tau = eF^{0i}u_i = eE^i\gamma v_i.$$

Поскольку  $d\tau = dt/\gamma$ , то его можно преобразовать следующим образом:

$$dP^0/dt = eE^i v_i.$$

Это уравнение отличается от нерелятивистского уравнения лишь тем, что  $P^0$  — релятивистская масса-энергия.

**Решение 4.11.** Пространственные компоненты уравнения для силы Лоренца имеют вид

$$\frac{dP^i}{d\tau} = \gamma \frac{dP^i}{dt} = qF^{i\mu}u_{\mu} = qF^{i0}u_0 + qF^{ij}u_j = q\gamma E^i + q\gamma \varepsilon^{ijk} B_k v_j,$$

поэтому

$$d\vec{P}/dt = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

**Решение 4.12.** От нуля отличны лишь компоненты  $F^i_j = F^j_i = E$  тензора  $F^{\mu}_{\nu}$ . Начальная 4-скорость  $u^{\alpha}$  частицы обладает компо-

нентами  $(\gamma, \gamma v, 0, 0)$ , где  $\gamma \equiv (1 - v^2)^{-1/2}$ . Из уравнений для силы Лоренца

$$dP^\mu/d\tau = qF^\mu{}_\nu u^\nu$$

при  $\mu=1$  получаем  $dP^x/d\tau=0$  и, следовательно,

$$u^x = \gamma v, \quad \tau = x/\gamma v.$$

Уравнения при  $\mu=0$  и  $\mu=2$

$$\frac{du^t}{d\tau} = \frac{q}{m} E u^y, \quad \frac{du^y}{d\tau} = \frac{q}{m} E u^t$$

можно объединить в одно уравнение

$$\frac{d^2 u^y}{d\tau^2} = \left(\frac{qE}{m}\right)^2 u^y,$$

допускающее решение

$$u^y = \gamma \operatorname{sh} \left[ \left(\frac{qE}{m}\right) \tau \right].$$

(при интегрировании уравнения мы использовали начальные условия, наложенные на компоненты 4-скорости  $u^t$  и  $u^y$ ). Интегрируя  $u^y$  по  $\tau$ , подставляя  $\tau = x/\gamma v$  и используя начальное условие  $y=0$  при  $x=0$ , получаем

$$y = \left(\frac{m}{qE}\right) \gamma \left[ \operatorname{ch} \left(\frac{qE}{m}\right) \frac{x}{v\gamma} - 1 \right].$$

#### Решение 4.13.

а) Из уравнения для силы Лоренца (см. задачу 4.11) следует

$$\omega p = |d\vec{p}/dt| = qvB,$$

поэтому

$$B = \frac{\omega p}{qv} = \frac{m\omega}{q(1-v^2)^{1/2}} = \frac{m\omega}{q(1-\omega^2 R^2)^{1/2}}.$$

б) Компоненты 4-скорости, измеренные в лабораторной системе координат, равны

$$u^0 = (1 - \omega^2 R^2)^{-1/2}, \quad u^x = \omega y (1 - \omega^2 R^2)^{-1/2}, \quad u^y = -\omega x (1 - \omega^2 R^2)^{-1/2}.$$

Компоненты, измеренные движущимся наблюдателем, мы найдем, выполнив преобразование Лоренца:

$$u^{0'} = \gamma (u^0 - \beta u^x) = \gamma (1 - \beta \omega y) (1 - \omega^2 R^2)^{-1/2},$$

где  $\gamma \equiv (1 - \beta^2)^{-1/2}$ .

в) Поскольку компонента  $u^{0'}$  не постоянна, энергия с точки зрения движущегося наблюдателя должна возрастать:

$$\frac{dp^{0'}}{d\tau} = m \frac{du^{0'}}{d\tau} = - \frac{m\beta\omega\gamma u^y}{(1-\omega^2 R^2)^{1/2}}.$$

В своей системе отсчета движущийся наблюдатель измеряет электрическое поле  $\vec{E}$ , равное  $E^{y'} = -\gamma\beta B$ . (В этом нетрудно убедиться, выполнив соответствующее преобразование Лоренца над тензором электромагнитного поля  $F^{\mu\nu}$ .) Следовательно, с точки зрения движущегося наблюдателя энергии частицы (производимая над ней работа) должна изменяться со скоростью

$$\frac{dp^{0'}}{d\tau} = qE^{y'}u^{y'} = - \frac{m\omega\gamma u^{y'}}{(1-\omega^2 R^2)^{1/2}} = - \frac{m\omega\gamma u^y}{(1-\omega^2 R^2)^{1/2}}.$$

Тем самым кажущийся «парадокс» разрешен.

**Решение 4.14.** Из уравнения для силы Лоренца (задача 4.11) получаем

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \left( -q\omega RB + \frac{qQ}{R^2} \right) \vec{e}_r = m \frac{d}{dt} (\gamma \vec{v}).$$

Поскольку над частицей не совершается работа, то величина

$$\gamma = (1 - \omega^2 R^2)^{-1/2}$$

постоянна. Подставляя  $d\vec{v}/dt = -\omega^2 R \vec{e}_r$ , находим

$$q\omega RB - qQ/R^2 = m\omega^2 R / (1 - \omega^2 R^2)^{1/2}$$

и, следовательно,

$$\frac{q}{m} = \frac{\omega^2}{(1 - \omega^2 R^2)^{1/2} (\omega B - Q/R^2)}.$$

**Решение 4.15.** Вид тензора энергии-импульса электромагнитного поля приведен во введении к задачам гл. 4. Взяв его дивергенцию, получим

$$\begin{aligned} 4\pi T^{\mu\nu}_{,\nu} &= F^{\mu\alpha}_{,\nu} F^{\nu}_{\alpha} + F^{\mu\alpha} F^{\nu}_{\alpha,\nu} - \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta,\mu} = \\ &= F^{\mu\alpha} F^{\nu}_{\alpha,\nu} + F_{\nu\alpha} \left( F^{\mu\alpha,\nu} - \frac{1}{2} F^{\nu\alpha,\mu} \right) = \\ &= F^{\mu\alpha} F^{\nu}_{\alpha,\nu} + \frac{1}{2} F_{\nu\alpha} (F^{\alpha\nu,\mu} + F^{\mu\alpha,\nu} + F^{\nu\mu,\alpha}). \end{aligned}$$

Пользуясь уравнениями Максвелла для вакуума, заключаем, что  $F^{\nu}_{\alpha,\nu}$  и члены, стоящие в скобках, обращаются в нуль, поэтому  $T^{\mu\nu}_{,\nu} = 0$ . *Примечание.* Если имеется ток проводимости  $\mathbf{J}$ , то, как нетрудно проверить, ответ задачи переходит в  $T^{\mu\nu}_{,\nu} = -F^{\mu\alpha} J_{\alpha}$ .

**Решение 4.16.** След тензора энергии-импульса  $T^{\mu\nu}$  электромагнитного поля нетрудно вычислить, если сначала  $T^{\mu\nu}$  выразить через компоненты тензора Максвелла:

$$T^{\mu\nu} = (1/4\pi) \left( F^{\mu\alpha} F^{\nu}_{\alpha} - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right).$$

Тогда

$$T^{\mu}_{\mu} = (1/4\pi) \left( F^{\mu\alpha} F_{\mu\alpha} - \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) = 0.$$

**Решение 4.17.** Достаточно доказать, что это соотношение выполняется в какой-нибудь одной системе отсчета.

*Случай 1.*  $E^2 = B^2$ ,  $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ .

Выберем  $\vec{E} = E\vec{e}_x$ ,  $B = E\vec{e}_y$ . Тогда отличными от нуля будут лишь компоненты тензора энергии-импульса  $T^{00} = T^{0z} = T^{zz} = E^2/4\pi$  и, следовательно,  $T^{\mu}_{\alpha} T^{\alpha}_{\nu} = 0$ .

*Случай 2.*  $(E^2 - B^2)^2 + (\vec{E} \cdot \vec{B})^2 \neq 0$ .

В решении 4.5 показано, каким образом векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  можно сделать параллельными. Пусть  $\vec{E} = E\vec{e}_x$ ,  $\vec{B} = B\vec{e}_x$ . Тогда отличными от нуля будут лишь компоненты тензора энергии-импульса

$$\begin{aligned} T^{00} &= -T^{xx} = T^{yy} = T^{zz} = (1/8\pi) (E^2 + B^2), \\ T^{\mu}_{\alpha} T^{\alpha}_{\nu} &= \delta^{\mu}_{\nu} [E^2 + B^2]^2 / (8\pi)^2 = \delta^{\mu}_{\nu} [(E^2 - B^2)^2 + 4E^2 B^2] / (8\pi)^2 = \\ &= \delta^{\mu}_{\nu} [(E^2 - B^2)^2 + (2\vec{E} \cdot \vec{B})^2] / (8\pi)^2. \end{aligned}$$

**Решение 4.18.** Если  $u^{\mu}$  — 4-скорость проводящего элемента, то в системе отсчета, связанной с носителями зарядов, электрическое поле  $\vec{E}$  в проводящем элементе равно  $E^{\mu} = F^{\mu}_{\nu} u^{\nu}$ . Вектор, который в системе покоя носителей заряда равен  $\vec{J}$ , имеет компоненты  $J^{\mu} + u^{\mu} J_{\nu} u^{\nu}$ . Следовательно, закон Ома можно записать в виде

$$J^{\mu} + u^{\mu} J_{\nu} u^{\nu} = \sigma F^{\mu}_{\nu} u^{\nu}.$$

Поскольку это тензорное уравнение, выполняющееся в системе покоя проводящего элемента, оно должно быть справедливо во всех системах отсчета.

**Решение 4.19.** Из задачи 4.7 известно, что для частицы с зарядом  $q$

$$J^{\mu}(x) = q \int \delta^4(x - z[\tau]) u^{\mu} d\tau,$$

поэтому действие можно записать в виде

$$\int L d\tau = q \int u^{\mu} A_{\mu} d\tau - m \int d\tau,$$

а функцию Лагранжа — в виде

$$L = qu^\mu A_\mu - m (-\eta_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta)^{1/2}.$$

Координаты  $z^\lambda$ , задающие положение частицы, зависят от параметра  $\tau$ , и

$$\frac{\partial L}{\partial (dz^\lambda/d\tau)} = \frac{\partial L}{\partial u^\lambda} = qA_\lambda + mu_\lambda.$$

Из уравнений Эйлера — Лагранжа находим

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial u^\lambda} \right) = qA_{\lambda,\mu} \frac{dz^\mu}{d\tau} + m \frac{du_\lambda}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial z^\lambda} L = qu^\mu A_{\mu,\lambda}.$$

Следовательно, уравнения движения можно представить в виде

$$m du_\lambda/d\tau = q (A_{\mu,\lambda} - A_{\lambda,\mu}) u^\mu,$$

или

$$dp_\lambda/d\tau = qF_{\lambda\mu} u^\mu.$$

**Решение 4.20.**

а) Зная, каким образом тензор Максвелла  $F^{\mu\nu}$  выражается через  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  (см. введение в гл. 4), и используя определение дуального тензора  $*F$  (см. задачу 3.25), получаем

$$\begin{aligned} *F^{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\mu\nu} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -B^x & -B^y & -B^z \\ B^x & 0 & E^z & -E^y \\ B^y & -E^z & 0 & E^x \\ B^z & E^y & -E^x & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Следовательно, переход  $F \rightarrow *F$  соответствует замене  $\vec{E} \rightarrow -\vec{B}$  и  $\vec{B} \rightarrow \vec{E}$ .

б) [*Примечание.* Поскольку  $*(F) = -F$ , то оператор  $*$  перехода к дуальному тензору обладает такими же алгебраическими свойствами, как и  $*i$ , поэтому  $e^{*\alpha}F$  можно представить в виде  $F \cos \alpha + *F \sin \alpha$ .] Как показано в задаче 4.9, уравнения Максвелла в отсутствие источников имеют вид

$$*F^{\mu\nu},{}_{,\nu} = 0, \quad F^{\mu\nu},{}_{,\nu} = 0.$$

Ясно, что преобразование  $F \rightarrow *F$  оставляет эти уравнения инвариантными, т. е. если  $F$  — решение уравнений Максвелла, то и  $*F$  — также решение уравнений Максвелла. Так как уравнения линейны, то линейная комбинация, например  $e^{*\alpha}F$ , должна также удовлетворять уравнениям Максвелла.

**Решение 4.21.** Поскольку при преобразовании

$$\vec{E} \rightarrow -\vec{B}, \quad \vec{B} \rightarrow \vec{E}$$

тензор Максвелла  $\mathbf{F}$  переходит в дуальный тензор  $*\mathbf{F}$ , то вектор  $\mathbf{K}$  можно было бы интерпретировать как «ток проводимости магнитного заряда» (взятый со знаком минус). Заметим, что в силу двойственности отношения  $\mathbf{F} \leftrightarrow *\mathbf{F}$  из уравнения  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = -4\pi K^0$  следует существование магнитных монополей.

**Решение 4.22.** В 4-мерном евклидовом пространстве, описываемом декартовыми координатами  $x^i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ), рассмотрим функцию  $G = 1/\sum_i (x^i)^2$ . Дифференцируя ее, можно доказать непосредственно, что

$$\nabla^2 G \equiv \sum_i \partial^2 G / \partial x^i{}^2 = 0$$

всюду, за исключением, быть может, точки  $x^i = 0$ .

Если ввести сферические координаты в 4-мерном пространстве

$$\begin{aligned} x^4 = U \cos V, \quad r = U \sin V \quad (0 \leq U < \infty, 0 \leq V \leq \pi), \\ 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \end{aligned}$$

то  $G = U^{-2}$ . Интеграл  $\int \nabla^2 G d^4x$  нетрудно записать в этих координатах. Если в качестве объема в четырехмерном пространстве выбрать внутренность некоторой гиперсферы  $U \leq U_0$ , то интеграл по объему можно преобразовать в интеграл по 3-мерной гиперсферической поверхности  $U = U_0$ :

$$\int_{U \leq U_0} \nabla^2 G d^4x = \int_0^\pi dV \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \left( \frac{\partial G}{\partial U} \right) V^3 \sin^2 V \sin \vartheta = -4\pi^2.$$

Следовательно,

$$\nabla^2 G = -4\pi^2 \delta(x^1) \delta(x^2) \delta(x^3) \delta(x^4),$$

и  $G$  можно использовать как функцию Грина при решении 4-мерного уравнения Пуассона  $\nabla^2 \Phi = -4\pi f(x^i)$ :

$$\Phi(x^i) = \frac{1}{\pi} \int \frac{f(\xi^i) d^4\xi}{\sum_i (\xi^i - x^i)^2}.$$

Предположим, что функция  $f$  каким-то образом определена при мнимых  $\xi^4$ . Введем новые переменные  $\zeta^4 = i\tilde{x}^4$  и  $\zeta^i = \tilde{x}^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) и определим функцию  $S$  так, чтобы

$$f(\zeta^i) = S(x^i).$$

Уравнение

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi f(x^i)$$

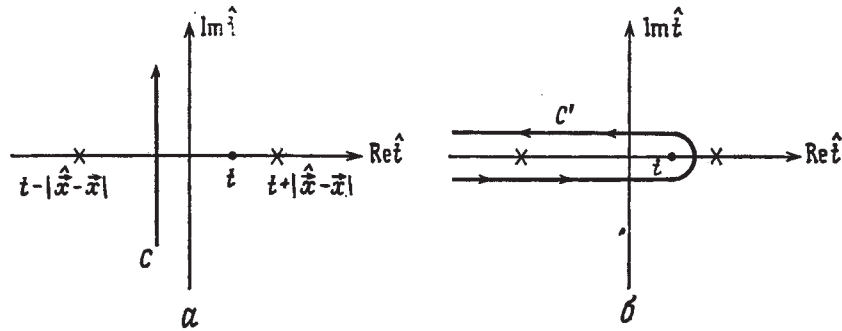
при этом перейдет в уравнение

$$\square \Phi = -4\pi S(x^1, x^2, x^3, t).$$

Решение этого уравнения дается приведенным выше интегралом. Произведя в нем замену переменных, получаем

$$\Phi(\vec{x}, t) = \frac{-i}{\pi} \int \frac{S(\hat{x}, \hat{t}) d^3\hat{x} d\hat{t}}{\eta_{\mu\nu}(\hat{x}^\mu - x^\mu)(\hat{x}^\nu - x^\nu)},$$

где интегрирование по  $t$  производится от  $i\infty$  до  $-i\infty$ . Предположим, что функция источников  $S(\vec{x}, \hat{t})$  в уравнении Даламбера определена и не имеет полюсов на вещественной оси  $\hat{t}$  при  $\hat{t} < t$ . В комплексной плоскости  $\hat{t}$  определим  $S$  при помощи аналитического продолжения. Контур интегрирования  $C$  выберем так, как



Фиг. 10.

показано на фиг. 10, а. Граничные условия определяются тем как должен деформироваться контур  $C$ , чтобы охватить вещественную ось, на которой задано распределение источников  $S(\vec{x}, \hat{t})$ . Полюсы  $1/(\hat{x}^\mu - x^\mu)(\hat{x}^\nu - x^\nu)$  функции  $S$  расположены в точках  $\hat{t} = t \pm |\vec{x} - \vec{x}|$ . Запаздывающие граничные условия соответствуют деформации контура  $C$  в контур  $C'$ , изображенный на фиг. 10, б. В этом нетрудно убедиться, если воспользоваться приведенным выше результатом для решения уравнения

$$\square A_\mu = -4\pi J_\mu.$$

Мы получим следующее выражение:

$$A_\mu(x^\alpha) = \frac{1}{\pi i} \int_{C'} \frac{J_\mu(\hat{x}^\alpha) d^4\hat{x}}{r_\sigma r^\sigma}.$$

Интегрируя по  $dt$ , преобразуем его к известному решению в виде

запаздывающего интеграла

$$\begin{aligned} A_\mu(\vec{x}, t) &= -\frac{1}{\pi i} \int \frac{J_\mu(\vec{x}, \hat{t}) d^3\hat{x} d\hat{t}}{(\hat{t}-t-|\vec{x}-\vec{x}'|)(\hat{t}-t+|\vec{x}-\vec{x}'|)} = \\ &= -\frac{1}{\pi i} \int 2\pi i \left[ \frac{J_\mu(\vec{x}, \hat{t}) d^3\hat{x}}{\hat{t}-t-|\vec{x}-\vec{x}'|} \right]_{\hat{t}=t-|\vec{x}-\vec{x}'|}^{\hat{t}=t+|\vec{x}-\vec{x}'|} = \int \frac{J_\mu(\vec{x}, \hat{t}-|\vec{x}-\vec{x}'|) d^3\hat{x}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\partial(r_\sigma r^\sigma)^{-1} / \partial x^\nu = -2x^\nu (r_\sigma r^\sigma)^{-2},$$

то формальное выражение для тензора электромагнитного поля сводится к следующему:

$$F_{\mu\nu} = 2A_{[\nu, \mu]} = \frac{4}{\pi i} \int \frac{x_{[\nu} J_{\mu]}(\hat{x}^\alpha) d^4\hat{x}}{(r_\sigma r^\sigma)^2}.$$

**Решение 4.23.** Поскольку проводимость бесконечна, то сила Лоренца, действующая на носитель заряда, должна быть равна нулю и  $\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0$ . Из уравнения Максвелла  $\vec{B} = -\vec{\nabla} \times \vec{E}$  получаем

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) = -\vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}. \quad (1)$$

Если перейти в мгновенную систему покоя жидкости с  $\vec{v} = 0$ ,  $t = \tau$  (собственное время), то величина  $\gamma = 1$ , ее первые производные обращаются в нуль,  $\partial/\partial t$  совпадает с  $\partial/\partial \tau$  (т. е. конвективная производная и частная производная равны), и поэтому

$$dB^i/d\tau = -B^i v^i{}_{,j} + B^j v^i{}_{,j} = -B^i w^i{}_{,j} + B^j u^i{}_{,j}.$$

Поскольку  $u^i{}_{,j}$  — проекция тензора  $u^\mu{}_{,\nu}$ , перпендикулярная вектору  $u$ , то  $u_{i,j}$  можно представить в виде

$$u_{i,j} = \omega_{ij} + \sigma_{ij} + \frac{1}{3} g_{ij} \phi.$$

Ясно, что свертка этого трехмерного тензора  $u^i{}_{,i}$  равна  $\phi$ , и, следовательно, производная вектора  $\vec{B}$  по собственному времени имеет вид

$$\begin{aligned} dB^i/d\tau &= -B^i \phi + B_j \left( \omega^{ij} + \sigma^{ij} + \frac{1}{3} g^{ij} \phi \right) = \\ &= -\frac{2}{3} B^i \phi + (\sigma^{ij} + \omega^{ij}) B_j. \end{aligned} \quad (2)$$

В правую часть уравнения (2) можно включить любой аддитивный член, пропорциональный пространственной компоненте 4-скорости (обращающейся в нуль в сопутствующей системе отсчета). Запи-



шем уравнение (2) в виде

$$dB^i/d\tau = -\frac{2}{3}B^i\Phi + (\sigma^{ij} + \omega^{ij})B_j + fu^i, \quad (3)$$

где функция  $f$  пока произвольна. Преобразуем теперь уравнение (2) в тензорное уравнение. Для этого сделаем следующие операции.

а) Разрешим индексам пробегать значения от 0 до 3 вместо прежних значений от 1 до 3.

б) Определим 4-вектор  $B^\alpha$  соотношением  $B^\alpha u_\alpha = 0$ , потребовав, чтобы в сопутствующей системе отсчета пространственная часть  $\mathbf{B}$  совпадала с вектором  $\bar{\mathbf{B}}$ .

в) Заменим обычные производные на ковариантные.

г) Определим функцию  $f$  так, чтобы  $d(\mathbf{B} \cdot \mathbf{u})/d\tau = 0$ , т. е. чтобы нормировка вектора  $\mathbf{B}$  осталась неизменной.

Единственное тензорное уравнение, удовлетворяющее требованиям а–г, имеет вид

$$DB^\alpha/d\tau = u^\alpha a_\beta B^\beta + (\omega^{\alpha\beta} + \sigma^{\alpha\beta})B_\beta - \frac{2}{3}\Phi P^\alpha_\beta B^\beta, \quad (4)$$

где  $\mathbf{a}$  — вектор 4-ускорения, а  $P^\alpha_\beta$  — проекционный оператор, определенный в задаче 5.18. Ясно, что уравнение (4) тензорное и в сопутствующей ортонормированной системе отсчета переходит в уравнения (3) и (1), т. е. верно во всех системах отсчета.

## ГЛАВА 5

### Решение 5.1.

а) В системе покоя частиц единственная ненулевая компонента тензора энергии-импульса равна  $T^{0'0'} = \rho_0$ . Переходя к системе отсчета, движущейся в направлении оси  $x$  со скоростью  $-\beta$ , получаем ненулевые компоненты

$$T^{00} = \rho_0 \gamma^2, \quad T^{0x} = T^{x0} = \rho_0 \gamma^2 \beta, \quad T^{xx} = \rho_0 \beta^2 \gamma^2,$$

где  $\gamma \equiv (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$ . В общем случае, если  $\mathbf{u}$  — 4-скорость частиц, то  $\mathbf{T} = \rho_0 \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$ .

б) Пусть окружность, по которой происходит движение, лежит в плоскости  $xy$ . Рассмотрим сплошную среду с плотностью массы покоя в точке  $x=0, y=a$ , равной  $\rho_0$ , движущуюся со скоростью  $\beta = \omega a$ . В п. «а» мы вычислили компоненты тензора энергии-импульса в точке  $x=0, y=a$  ( $T^{00} = \rho_0 \gamma^2$  и т. д.). Если мы рассмотрим материальное кольцо, то все точки кольца эквивалентны, поэтому в полярных координатах ненулевые компоненты тензора  $T^{\mu\nu}$  имеют вид

$$T^{00} = \rho_0 \gamma^2, \quad T^{0\hat{\phi}} = \rho_0 \gamma^2 \beta = T^{\hat{\phi}0}, \quad T^{\hat{\phi}\hat{\phi}} = \rho_0 \gamma^2 \beta^2.$$

Теперь нам необходимо связать  $\rho_0$  с заданным набором частиц. Если предположить, что число частиц  $N$  достаточно велико, то дискретные частицы можно приближенно считать непрерывно распределенными по кольцу с плотностью  $\rho_0 \sim \delta(r-a) \delta(z)$ . Поскольку полная энергия частиц должна быть равна  $\gamma Nm$ , то

$$T^{00} 2\pi r dr dz = \gamma Nm$$

и

$$\rho_0 = Nm \delta(r-a) \delta(z) / 2\pi a \gamma.$$

Полагая  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$ , запишем полученные результаты в декартовых координатах:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\gamma Nm \delta([x^2 + y^2]^{1/2} - a) \delta(z)}{2\pi a} \begin{bmatrix} 1 - \beta \sin \varphi & \beta \cos \varphi & 0 \\ \beta^2 \sin^2 \varphi & -\beta^2 \sin \varphi \cos \varphi & 0 \\ & \beta^2 \cos^2 \varphi & 0 \\ \text{(симметричные элементы)} & & 0 \end{bmatrix}.$$

в) Если имеется еще одно кольцо, вращающееся в противоположном направлении, то тензор энергии-импульса остается таким же, как в п. «б», а знак  $\beta = \omega a$  изменяется. Сложив оба тензора, мы получим сумму, в которой линейные по  $\beta$  члены взаимно уничтожатся, а члены, квадратичные по  $\beta$ , удвоятся. В полярных координатах ненулевые компоненты тензора энергии-импульса системы двух колец равны

$$T^{00} = T^{\hat{\phi}\hat{\phi}}/\beta^2 = \gamma N m \delta(r-a) \delta(z)/\pi a.$$

**Решение 5.2.** В решении 5.1 было показано, что для частиц с 4-скоростью  $\mathbf{u}$  тензор энергии-импульса пропорционален  $\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$ . Для изотропного множества частиц с  $\mathbf{u} = \gamma(1, v\vec{n})$  тензор энергии-импульса равен

$$\mathbf{T} = \kappa \langle \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \rangle, \quad \kappa - \text{некоторая постоянная,}$$

а усреднение произведено по всем ориентациям вектора  $\vec{n}$ . В силу симметрии внедиагональные компоненты при усреднении обращаются в нуль:

$$\begin{aligned} T^{0i} &= \kappa \gamma^2 v \langle n^i \rangle = 0, \\ T^{ij} &= \kappa \gamma^2 v^2 \langle n^i n^j \rangle = 0, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

Для вычисления диагональных (пространственных) компонент заметим, что

$$\langle n^x n^x \rangle = \langle n^y n^y \rangle = \langle n^z n^z \rangle$$

и что

$$\langle n^x n^x \rangle + \langle n^y n^y \rangle + \langle n^z n^z \rangle = \langle n^2 \rangle = 1,$$

в силу чего

$$\langle n^i n^i \rangle = \frac{1}{3}, \quad T^{ii} = \kappa \gamma^2 v^2 / 3.$$

Поскольку известно, что каждая движущаяся частица обладает энергией  $m\gamma$ , то плотность массы-энергии равна

$$m\gamma N = T^{00} = \kappa \gamma^2 \langle 1 \rangle = \kappa \gamma^2.$$

Таким образом,  $\kappa = mN/\gamma$  и ненулевые компоненты тензора энергии-импульса равны

$$T^{00} = m\gamma N, \quad T^{ij} = (m\gamma N v^2 / 3) \delta^{ij}.$$

Для фотонов  $v \rightarrow c$ ,  $m\gamma \rightarrow h\nu$ . Для холодной пыли  $v = 0$ , поэтому  $T^{00} = mN$  — единственная ненулевая компонента.

**Решение 5.3.** В системе покоя элемента жидкости  $\mathbf{u}^0 = 1$ ,  $\mathbf{u}^i = 0$ , поэтому

$$T^{\mu\nu} = \rho g^{\mu\nu} + (\rho + p) u^\mu u^\nu.$$

Поскольку это тензорное уравнение выполняется в системе покоя элемента жидкости, то оно должно быть верным и в любой другой системе.

**Решение 5.4.** Пространственные координаты мы всегда можем выбрать так, чтобы диагонализировать 3-мерный тензор энергии-импульса  $T^{ij}$ . Из соображений симметрии ясно, что из пространственных направлений выделено лишь то, которое совпадает с направлением вектора  $\vec{B}$ , а выбор двух других ортогональных направлений произволен. Если выбрать  $\vec{B} = B\vec{e}_z$ , то  $T^{xx} = T^{yy}$  и  $T^{xy} = T^{xz} = T^{yz} = 0$ . Поскольку в рассматриваемой задаче поле статично и нет переноса энергии, то  $T^{0i} = 0$ . Плотность энергии магнитного поля  $T^{00} = B^2/8\pi$ .

Теперь нам необходимо вычислить «давления»  $T^{xx}$ ,  $T^{yy}$ ,  $T^{zz}$ . Для этого мы рассмотрим ячейку поля с размерами  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  и представим себе, что она расширяется адиабатически. (При адиабатическом расширении остается постоянным магнитный поток  $B \Delta x \Delta y$ , т. е. число «силовых линий» магнитного поля  $B$  в объеме.) Энергия поля, заключенного в ячейке, равна

$$\mathcal{E} = (B^2/8\pi) \Delta x \Delta y \Delta z = (B \Delta x \Delta y)^2 \Delta z / 8\pi \Delta x \Delta y.$$

Зная энергию, нетрудно найти давления

$$T^{xx} = -\frac{1}{\Delta y \Delta z} \frac{d\mathcal{E}}{d(\Delta x)} = B^2/8\pi = T^{yy},$$

$$T^{zz} = -\frac{1}{\Delta x \Delta y} \frac{d\mathcal{E}}{d(\Delta z)} = -B^2/8\pi.$$

Таким образом, тензор энергии-импульса имеет вид

$$T^{\mu\nu} = \frac{B^2}{8\pi} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}.$$

Чтобы найти тензор энергии-импульса хаотического поля, выберем набор ортогональных осей и усредним поля  $\vec{B}$  по направлениям  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Из доказанного выше ясно, что усреднение даст

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle = \frac{B^2}{8\pi} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{3} & & \\ & & \frac{1}{3} & \\ & & & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

где  $B$  — средняя напряженность поля. Выбрав любые другие ортогональные направления, мы получим тот же результат, потому что блок  $3 \times 3$ , стоящий в левом верхнем углу матрицы  $T^{\mu\nu}$  (единичная матрица  $3 \times 3$ ), инвариантен относительно поворотов. Следовательно, полученный нами результат совпадает с результатом усреднения по *всем* направлениям.

**Решение 5.5.** Поскольку погонная плотность массы стержня равна  $\mu$ , то  $T^{00} = \mu/A$ . В системе покоя стержня поток энергии отсутствует, в силу чего  $T^{0i} = 0$ . Выберем ось  $z$  вдоль оси стержня. Из соображений симметрии (см. задачу 5.4) ясно, что внедиагональные компоненты тензора энергии-импульса  $T^{xy}$ ,  $T^{xz}$ ,  $T^{yz}$  (напряжения) должны быть равны нулю. Поскольку растяжение действует вдоль оси  $z$ , то  $T^{zz} = -F/A$ . В направлениях осей  $x$  и  $y$  напряжения не приложены (поэтому в направлениях этих осей нет переноса импульса) и  $T^{xx} = T^{yy} = 0$ .

**Решение 5.6.** Предположим, что к веревке приложена сила, бесконечно малая по сравнению с усилием разрыва  $F$ . Если  $A$  — площадь поперечного сечения, а ось веревки совпадает с осью  $z$ , то компоненты тензора  $T$  в системе покоя стержня можно взять из задачи 5.5. Наблюдатель, движущийся со скоростью  $\mathbf{u} = (\gamma, \gamma\vec{v})$ , измерит плотность энергии

$$T^{0'0'} = T^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta = (\gamma^2/A) [\mu - Fv_z^2].$$

Ясно, что наибольший шанс получить отрицательную компоненту  $T^{0'0'}$  имеет наблюдатель, движущийся в направлении оси  $z$  со скоростью  $v \rightarrow c$ . Чтобы компонента  $T^{0'0'}$  была положительной, слабое условие энергии требует выполнения неравенства  $F < \mu$ , задающего верхний предел допустимой нагрузки. В физических единицах для хорошего стального троса это соответствует

$$\frac{F}{A} < \frac{\mu}{A} c^2 = \rho c^2 = 7 \times 10^{13} \text{ кГ} - \text{Вт/мм}^2,$$

в то время как реальное усилие разрыва составляет  $\approx 200$  кГ — Вт/мм<sup>2</sup>. Расхождение по порядку величины в  $10^{11.5}$  раз обусловлено тем, что прочность стали определяется в основном энергией молекулярных связей ( $\lesssim 1$  эВ/атом), а не плотностью всей массы, сосредоточенной главным образом в ядрах ( $\sim 5 \times 10^{10}$  эВ).

**Решение 5.7.** Пусть  $S'$  — мгновенная система покоя элемента стержня (фиг. 11). В этой системе покоя отличны от нуля лишь компоненты  $T^{0'0'} = \rho$ ,  $T^{x'x'} = p$ . Переходя при помощи преобразования Лоренца в лабораторную систему отсчета, мы найдем следующие ненулевые компоненты:

$$T^{xx} = p, \quad T^{yy} = \gamma^2 \beta^2 p, \quad T^{00} = \gamma^2 \rho, \quad T^{0y} = \gamma^2 \beta \rho,$$

где  $\beta = \omega r$  и  $\gamma \equiv (1 - \beta^2)^{-1/2}$ . В сферических координатах отличны от нуля компоненты

$$T^{rr} = \rho, \quad T^{\varphi\varphi} = \gamma^2 \beta^2 \rho / r^2, \quad T^{0\varphi} = \gamma^2 \beta \rho / r, \quad T^{00} = \gamma^2 \rho.$$

Чтобы найти  $\rho(r)$ , воспользуемся радиальной компонентой уравнения движения

$$\begin{aligned} 0 &= T^{rv}_{;v} = T^{rr}_{,r} + T^{\varphi\varphi} \Gamma^r_{\varphi\varphi} + T^{rr} [\ln(-g)]^{1/2}_{,r} = \\ &= (T^{rr} r^2)_{,r} / r^2 - r \sin^2 \vartheta T^{\varphi\varphi} \end{aligned}$$

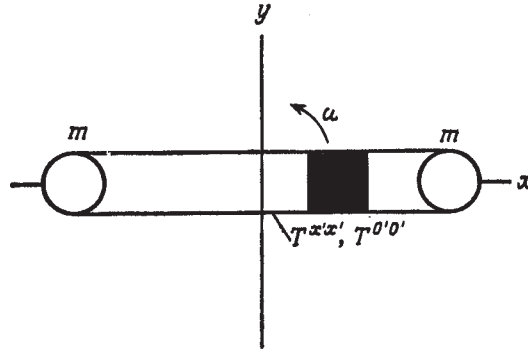
и получим

$$(pr^2)_{,r} = r \sin^2 \vartheta \gamma^2 \beta^2 \rho.$$

Поскольку вся масса сосредоточена в материальных точках, плотность массы можно представить в виде

$$\rho = m \delta(r - a) \delta(\cos \vartheta) [\delta(\varphi - \omega t) + \delta(\varphi - \omega t - \pi)] / r^2.$$

Зная  $\rho$ , можно проинтегрировать уравнение движения с граничным условием  $p = 0$  при  $r > a$  и получить  $\rho$ . После того как это



Фиг. 11.

будет проделано, компоненты тензора энергии-импульса (в лабораторной системе отсчета, описываемой координатами  $t, r, \vartheta, \varphi$ ) окажутся равными

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \frac{m}{1 - \omega^2 a^2} \delta(\cos \vartheta) [\delta(\varphi - \omega t) + \delta(\varphi - \omega t - \pi)] \times \\ &\times \begin{bmatrix} \frac{\delta(r-a)}{a^2} & 0 & 0 & \frac{\omega \delta(r-a)}{a^2} \\ 0 & -\frac{\omega^2 a}{r^2} & 0 & 0 \\ \text{симметричные члены} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\omega^2 \delta(r-a)}{a^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**Решение 5.8.** Электростатическое поле для движущегося конденсатора остается равным  $E$ , поскольку электрическое поле, параллельное направлению движения, не изменяется. Вследствие лоренцевского сокращения зазор между обкладками движущегося конденсатора равен  $d/\gamma$ , где  $\gamma \equiv (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$ . Следовательно, движущийся конденсатор обладает электростатической энергией

$$E^2 Ad/8\pi\gamma < E^2 Ad/8\pi.$$

Давление газа должно быть по абсолютной величине равно (отрицательному) давлению электрического поля  $E$ , т. е.  $p = E^2/8\pi$ . В системе покоя конденсатора ненулевые компоненты тензора энергии-импульса газа равны

$$T^{00} = \rho_0, \quad T^{xx} = T^{yy} = T^{zz} = E^2/8\pi,$$

а полная масса покоя конденсатора —

$$M = E^2 Ad/8\pi + \rho_0 Ad.$$

Если конденсатор движется, то плотность энергии газа мы получим, произведя преобразование Лоренца:

$$T^{0'0'} = \gamma^2 (T^{00} + \beta^2 T^{xx}) = \gamma^2 (\rho_0 + \beta^2 E^2/8\pi).$$

Следовательно, полная энергия движущегося конденсатора равна

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= E^2 Ad/8\pi\gamma + \gamma^2 (\rho_0 + \beta^2 E^2/8\pi) Ad/\gamma = \\ &= (\gamma\rho_0 + \gamma E^2/8\pi [1/\gamma^2 + \beta^2]) Ad = \gamma (\rho_0 + E^2/8\pi) Ad = \gamma M. \end{aligned}$$

**Решение 5.9.** Для простоты воспользуемся координатами Минковского. Для частиц тензор энергии-импульса равен

$$T_{\text{част}}^{\mu\nu}(\mathbf{x}) = \sum_i m_i \int u_i^\mu(\tau_i) u_i^\nu(\tau_i) \delta^4[\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(\tau_i)] d\tau_i$$

и, следовательно,

$$T_{\text{част}, \nu}^{\mu\nu} = \sum_i m_i \int u_i^\mu u_i^\nu (\partial/\partial x^\nu) \delta^4[\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(\tau_i)] d\tau_i.$$

Дельта-функция зависит только от  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_i$ , поэтому производную  $\partial/\partial x^\nu$  можно заменить на  $-\partial/\partial x_i^\nu$ . Поскольку

$$u_i^\nu \partial/\partial x_i^\nu = d/d\tau_i,$$

то

$$\begin{aligned} T_{\text{част}, \nu}^{\mu\nu} &= - \sum_i m_i \int u_i^\mu (d/d\tau_i) \delta^4[\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(\tau_i)] d\tau_i = \\ &= \sum_i m_i \int (du_i^\mu/d\tau_i) \delta^4[\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(\tau_i)] d\tau_i \end{aligned}$$

(последнее равенство получено интегрированием по частям).

Для  $i$ -й частицы

$$m_i du_i^\mu / d\tau_i = q_i F_\nu^\mu(x_i) u_i^\nu.$$

Сопоставляя это уравнение с ответом задачи 4.7, находим

$$\begin{aligned} T_{\text{част}, \nu}^{\mu\nu} &= \sum_i q_i \int F_\nu^\mu u_i^\nu \delta^4[x - x_i(\tau_i)] d\tau_i = \\ &= F_\nu^\mu J^\nu. \end{aligned}$$

Но из задачи 4.15 известно, что

$$T_{\text{электромаг}, \nu}^{\mu\nu} = (4\pi)^{-1} F^{\mu\alpha} F_{\alpha, \nu}^\nu = -F^{\mu\alpha} J_\alpha,$$

поэтому

$$(T_{\text{част}}^{\mu\nu} + T_{\text{электромаг}}^{\mu\nu})_{, \nu} = 0.$$

**Решение 5.10.** Рассмотрим бесконечно малое число фотонов  $dN$  с небольшим разбросом по частоте и положению, движущихся в узком конусе и проходящих за малый интервал времени через элементарную площадку. По определению

$$I_\nu = \frac{d(\text{энергия})}{d(\text{частота}) d(\text{время}) d(\text{телесный угол}) d \left[ \begin{array}{l} \text{площадь} \\ \text{поперечного} \\ \text{сечения} \end{array} \right]}.$$

Не ограничивая общности, будем считать, что узкий конус, ограничивающий телесный угол  $d$  (телесный угол), внутри которого движутся фотоны, вытянут вдоль оси  $z$ . Тогда

$$d(\text{энергия}) = h\nu dN,$$

$$d(\text{телесный угол}) = d\vartheta^x d\vartheta^y = d(p^x/E) d(p^y/E) = dp^x dp^y / h^2 \nu^2,$$

$$d(\text{время}) = dz/c = dz,$$

$$d(\text{площадь поперечного сечения}) = dx dy,$$

$$d(\text{частота}) = d(h\nu)/h = dp^z/h,$$

поэтому

$$I_\nu = \frac{dN h^4 \nu^3}{dx dy dz dp^x dp^y dp^z}.$$

Плотность частиц в фазовом пространстве  $dN/d^3x d^3p$  лоренц-инвариантна (см. задачу 3.34). Следовательно, и величина  $I_\nu/\nu^3$  также лоренц-инвариантна.

**Решение 5.11.** Введем в системе отсчета, связанной со звездой, для описания 3-мерного пространства 3-мерные сферические координаты. Тогда тензор энергии-импульса излучения будет



иметь вид

$$T^{\mu\nu}(r, \vartheta, \varphi) = (L/4\pi r^2) \begin{bmatrix} t & r & \vartheta & \varphi \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Пусть  $\boldsymbol{l}$  — вектор (разумеется, изотропный), ведущий из точки пространства-времени, где был испущен фотон, в точку, где он был воспринят наблюдателем. Если в системе отсчета, связанной со звездой, наблюдатель находится от звезды на расстоянии  $r$ , то  $l^0 = r$ ,  $l^r = r$ ,  $l^\vartheta = l^\varphi = 0$ . В точке пространства-времени, в которой фотон достигает наблюдателя, тензор энергии-импульса можно представить в виде

$$\mathbf{T} = [L/4\pi (\mathbf{u}_{\text{зв}} \cdot \boldsymbol{l})^4] \boldsymbol{l} \otimes \boldsymbol{l},$$

не зависящем от системы отсчета, где  $\mathbf{u}_{\text{зв}}$  — 4-скорость звезды, так что при вычислениях в системе отсчета, связанной со звездой,  $\mathbf{u}_{\text{зв}} \cdot \boldsymbol{l} = -r$ . Зная выражение для тензора энергии-импульса  $\mathbf{T}$ , не зависящее от системы отсчета, нетрудно вычислить поток энергии, приходящий к наблюдателю. Пусть  $\mathbf{n} = (0, \vec{n})$  — пространственноподобный вектор, направленный в системе покоя наблюдателя к видимому положению звезды, так что  $\boldsymbol{l} = (R, -R\vec{n})$ . Поток энергии, измеренный наблюдателем в своей системе покоя, будет равен

$$F_{\text{набл}} = -T^{0i}n_i = \mathbf{u}_{\text{набл}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}.$$

Но в этой системе отсчета

$$\mathbf{u}_{\text{зв}} \cdot \boldsymbol{l} = (\gamma, \gamma\vec{v}) \cdot (R, -R\vec{n}) = -\gamma R (1 + v \cos \vartheta)$$

и, кроме того,

$$\boldsymbol{l} \cdot \mathbf{u}_{\text{набл}} = -R \quad \text{и} \quad \boldsymbol{l} \cdot \mathbf{n} = -R,$$

поэтому

$$F_{\text{набл}} = L/[4\pi\gamma^4 (1 + v \cos \vartheta)^4 R^2].$$

Этот же результат можно получить, используя лоренц-инвариантность величины  $I_\nu/\nu^3$  (см. задачу 5.10).

**Решение 5.12.** Пусть  $\mathbf{u}$  — 4-скорость частицы,  $\boldsymbol{l}$  — изотропный 4-вектор, вдоль которого распространяется излучение. Частица поглощает поток 4-импульса  $-SA(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{l})\boldsymbol{l}$ , т. е. тензор энергии-импульса излучения равен тензору  $\mathbf{T} = S\boldsymbol{l} \otimes \boldsymbol{l}$ , умноженному на эффективное сечение частицы и свернутому с ее 4-скоростью (чтобы получить поток в системе покоя частицы). Минус обусловлен сигнатурой  $-+++$ . Временная компонента потока импульса в системе покоя частицы равна  $SA(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{l})(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{l})$  и совпадает с погло-

щенной энергией, повторно испущенной частицей в виде излучения в своей системе покоя. Таким образом, окончательное изменение 4-импульса равно

$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{mdu}{d\tau} = -SA[(\mathbf{u} \cdot \mathbf{l})\mathbf{l} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{l})^2\mathbf{u}]. \quad (1)$$

Это соотношение можно рассматривать как уравнение движения для  $\mathbf{u}$ .

Чтобы решить уравнение (1), положим  $\mathbf{W} \equiv \mathbf{u} \cdot \mathbf{l}$  и умножим уравнение скалярно на  $\mathbf{l}$ . Тогда

$$dW/d\tau = -(SA/m)W^3$$

и, следовательно,

$$W = [(2SA\tau/m) + K]^{-1/2}, \quad (2)$$

где  $K$  — некоторая постоянная. Будем считать теперь  $\mathbf{W}$  независимой переменной и, произведя в уравнении (1) подстановку  $d\tau = -dWm/SAW^3$ , преобразуем его к виду

$$\frac{d\mathbf{u}}{dW} - \frac{\mathbf{u}}{W} = \frac{1}{W^2}\mathbf{l}. \quad (3)$$

Это уравнение имеет интегрирующий множитель  $1/W$  и легко интегрируется:

$$\frac{d}{dW} \left( \frac{1}{W} \mathbf{u} \right) = \frac{1}{W^3} \mathbf{l}, \quad (4)$$

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{2W} \mathbf{l} + W\mathbf{q}, \quad (5)$$

где  $\mathbf{q}$  — постоянная интегрирования. Из условий  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{l} = W$  и  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -1$  следует, что  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{l} = 1$  и  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = 0$ . Подставляя  $W$  из соотношения (2) в (5) и интегрируя, находим

$$\mathbf{x} = +\frac{1}{6\alpha} (2\alpha\tau + K)^{3/2} \mathbf{l} - \frac{1}{\alpha} (2\alpha\tau + K)^{1/2} \mathbf{q} + \mathbf{x}_0,$$

где  $\alpha = SA/m$ . Если постоянную интегрирования выбрать так, чтобы частица начинала двигаться из начала координат в поле излучения параллельно оси  $x$ , то

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{6\alpha} (2\alpha\tau + 1)^{3/2} + \frac{1}{2\alpha} (2\alpha\tau + 1)^{1/2} - \frac{2}{3\alpha}, \\ x &= \frac{1}{6\alpha} (2\alpha\tau + 1)^{3/2} - \frac{1}{2\alpha} (2\alpha\tau + 1)^{1/2} - \frac{1}{3\alpha}, \\ y &= 0 \\ z &= 0. \end{aligned}$$

(Приведенное решение заимствовано из книги [10], стр. 116—118.)

**Решение 5.13.** Для находящегося на сфере наблюдателя доплеровское смещение спектра излучения абсолютно черного тела будет различным в разных направлениях. Поскольку для интенсивности излучения черного тела справедливо соотношение

$$I_\nu/\nu^3 = \text{const} (e^{h\nu/kT} - 1)^{-1}$$

и величина  $I_\nu/\nu^3$  лоренц-инвариантна, то доплеровское смещение  $\nu_0 \rightarrow \nu$  приведет к изменению эффективной температуры  $T_0 \rightarrow T = T_0(\nu/\nu_0)$ .

Какое доплеровское смещение измеряет сопутствующий наблюдатель, глядящий под углом  $\vartheta$  к направлению движения? Ответ на этот вопрос, приводимый во многих курсах теории относительности, нетрудно вывести из инвариантов. Пусть  $\mathbf{u}$  — 4-скорость сферы,  $\mathbf{u}_0$  — 4-скорость системы покоя излучения и  $\mathbf{p}$  — 4-импульс фотона в системе единиц, в которой  $h=1$ . Тогда

$$\nu = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}, \quad \nu_0 = \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{p} \quad \text{и} \quad (1 - v^2)^{-1/2} \equiv \gamma = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_0.$$

В системе покоя сферы

$$\mathbf{u} = (1, \vec{0}), \quad \mathbf{u}_0 = (\gamma, -\gamma\vec{v}), \quad \mathbf{p} = (\nu, \nu\vec{n}),$$

где  $\vec{n}$  — единичный 3-вектор. Единичный пространственноподобный вектор в направлении  $\vec{v}$  равен

$$\left(0, \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\right) = -\frac{\mathbf{u}_0 + (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u}}{\gamma v}$$

(в этом нетрудно убедиться, подставив компоненты, вычисленные в системе покоя сферы). Аналогичным образом вектор  $(0, \vec{n})$  инвариантно можно записать в виде

$$(0, \vec{n}) = \frac{\mathbf{p} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}) \mathbf{u}}{\nu}$$

поэтому угол испускания фотона в системе отсчета, связанной со сферой, определяется соотношением

$$\cos \vartheta = (0, \vec{n}) \cdot \left(0, \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\right) = \frac{\nu_0 - \gamma \nu}{\gamma \nu v}.$$

Для получения последнего результата мы взяли скалярное произведение 4-векторов, записанных в инвариантной форме, и воспользовались тем, что  $\nu = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}$  и т. д. Разрешив это соотношение относительно  $\nu/\nu_0$ , найдем

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\nu}{\nu_0} = \frac{1}{\gamma (1 + v \cos \vartheta)}.$$

Наконец, равновесную температуру мы получим, усреднив температуру  $T$  по всем направлениям  $\langle T(\vartheta)^4 \rangle^{1/4}$  (поскольку количество энергии, излучаемой в единицу времени, равно в состоянии

равновесия количеству энергии, поглощаемой в единицу времени, то по закону Стефана — Больцмана оно пропорционально  $T^4$ ). Таким образом,

$$\left\langle \frac{T}{T_0} \right\rangle^4 = \frac{1}{2} \int_{\cos \vartheta = -1}^{\cos \vartheta = 1} \frac{d(\cos \vartheta)}{\gamma^4 (1 + v \cos \vartheta)^4} = \frac{1}{\gamma^4} \frac{1}{6v} \left[ \frac{1}{(1-v)^3} - \frac{1}{(1+v)^3} \right]$$

и

$$T_{\text{равновесн}} = \langle T^4 \rangle^{1/4} = (\gamma^2 (1 + v^2/3))^{1/4} T_0.$$

**Решение 5.14.** Пусть  $\langle \Delta E \rangle$  — среднее количество энергии, теряемой фотоном при столкновениях. Из условий задачи известно, что  $E/mc^2 \ll 1$  и  $T/mc^2 \ll 1$  (в системе единиц с  $k=1$ ), поэтому в разложении в двойной ряд

$$\langle \Delta E \rangle = mc^2 [\alpha_1 + \alpha_2 (E/m) + \alpha_3 (T/m) + \alpha_4 (E^2/m^2) + \alpha_5 (ET/m^2) + \alpha_6 (T^2/m^2) + \dots]$$

необходимо удерживать лишь первые не обращающиеся в нуль члены. При  $T=E=0$  ничего не происходит, и поэтому  $\alpha_1=0$ . При  $T=0$ ,  $E \neq 0$  мы имеем обычное комптоновское рассеяние с сечением

$$d\sigma/d\Omega \sim (1 + \cos^2 \vartheta)$$

и переданной энергией

$$\Delta E = (E^2/m) (1 - \cos \vartheta).$$

Поскольку сечение рассеяния симметрично относительно направления вперед и назад, то член с  $\cos \vartheta$  при усреднении по углам выпадает и

$$\langle \Delta E \rangle = (E^2/m), \quad T=0.$$

Следовательно,  $\alpha_2=0$  и  $\alpha_4=1$ . При  $E=0$ ,  $T \neq 0$  фотон обладает нулевой энергией и обращается в вакуум, поэтому  $\alpha_3=\alpha_6=0$ .

Наконец, нам понадобится коэффициент  $\alpha_5$ . Рассмотрим мысленно разреженный поток фотонов (излучение абсолютно черного тела) с температурой, равной температуре газа:

$$d(\text{число фотонов})/dE = \text{const} \times E^2 e^{-E/T}.$$

Подставляя в разложение (1)

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_6 = 0, \quad \alpha_4 = 1$$

и налагая требование теплового равновесия

$$\int_0^{\infty} \langle \Delta E \rangle E^2 e^{-E/T} dE = 0,$$

получаем

$$0 = (3T/m) (4T + \alpha_5 T),$$

или  $\alpha_5 = -4$ , что позволяет записать соотношение (1) в окончательном виде:

$$\langle E \rangle = (E^2 - 4TE)/mc^2 + \dots$$

**Решение 5.15.** Воспользуемся для доказательства уравнениями движения ( $T^{\mu\nu}_{, \nu} = 0$ ) и запишем члены с первыми производными в дивергентном виде, а затем по теореме Гаусса преобразуем дивергенции в интегралы по поверхности, равные нулю вне системы. Обращаясь повторно к уравнениям движения, получаем

$$T^{00}_{,00} = -T^{0k}_{,k0} = -T^{k0}_{,0k} = T^{km}_{,mk}.$$

Умножив затем все члены этих равенств на  $x^i x^j$ , преобразуем их к виду

$$\begin{aligned} (x^i x^j T^{00})_{,00} &= x^i x^j (T^{km})_{,km} = \\ &= (T^{km} x^i x^j)_{,km} - 2(x^i x^j)_{,k} T^{km}_{,m} - T^{km} (x^i x^j)_{,km} = \\ &= (T^{km} x^i x^j)_{,km} - 2(x^j T^{im}_{,m} + x^i T^{jm}_{,m}) - 2T^{ij}. \end{aligned}$$

Члены с первыми производными можно упростить. Например,

$$x^j T^{im}_{,m} = (x^j T^{im})_{,m} - \delta^j_m T^{im}.$$

Произведя такое упрощение, проинтегрировав по всему пространству и отбросив все дивергенции, которые можно преобразовать в обращющиеся в нуль интегралы по поверхности, получим

$$\frac{d^2}{dt^2} \int x^i x^j T^{00} d^3x = \int [0 - 2(-T^{ij} - T^{ij}) - 2T^{ij}] d^3x = 2 \int T^{ij} d^3x.$$

**Решение 5.16.** Пусть  $\mathbf{v}$  — времениподобный собственный вектор:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{v} = \alpha \mathbf{v}.$$

Рассмотрим тензор энергии-импульса, измеренный наблюдателем с 4-скоростью  $\mathbf{u} = \pm \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ . (Знак выберем так, чтобы вектор  $\mathbf{u}$  был обращен в будущее.) В системе покоя наблюдателя  $\mathbf{u} = (1, \vec{0})$ , а вектор потока энергии (взятый со знаком минус) равен

$$-\mathbf{S} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{v}|} \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} = \frac{\alpha}{|\mathbf{v}|} \mathbf{v} = \alpha \mathbf{u} = (\alpha, \vec{0}).$$

Таким образом, пространственная часть потока энергии равна нулю, а  $\alpha$  — измеренная наблюдателем плотность энергии (взятая со знаком минус).

Верно и обратное утверждение: если по измерениям наблюдателя, движущегося с 4-скоростью  $\mathbf{u}$ , пространственная часть потока энергии равна нулю, то  $-\mathbf{S} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} = \alpha \mathbf{u}$  при некотором  $\alpha$  и  $\mathbf{u}$  — времениподобный собственный вектор тензора энергии-импульса  $\mathbf{T}$ .

**Решение 5.17.**

а) Если отбросить члены второго порядка по скорости, то для общего преобразования Лоренца получим

$$\Lambda^{0'}_0 = 1, \quad \Lambda^{0'}_i = v^i, \quad \Lambda^{i'}_j = \delta^{i'}_j.$$

Если  $T^{\mu\nu}$  — компоненты тензора энергии-импульса в системе покоя жидкости, то  $T^{0'i'} = 0$  и

$$\begin{aligned} g^j &\equiv T^{0j} = \Lambda^0_{\mu'} \Lambda^j_{\nu'} T^{\mu\nu} = \Lambda^0_{0'} \Lambda^j_{0'} T^{0'0'} + \Lambda^0_{k'} \Lambda^j_{l'} T^{i'k'} = \\ &= v^j T^{0'0'} + v^k T^{i'k'} = v^k (T^{0'0'} \delta^{jk} + T^{i'k'}). \end{aligned}$$

Для идеальной жидкости  $T^{0'0'} = \rho$  и  $T^{i'k'} = p \delta^{jk}$ , поэтому «инерциальная масса, приходящаяся на единицу объема», равна

$$m^{jk} = \delta^{jk} (\rho + p).$$

б) Поскольку

$$M^{ij} \equiv \delta^{ij} \int T^{00} dx dy dz + \int T^{ij} dx dy dz,$$

то необходимо лишь доказать, что второе слагаемое в правой части равно нулю. Заметим, что 3-дивергенция тензора  $T^{jk}$  обращается в нуль:

$$T^{jk}_{,k} = T^{j\mu}_{, \mu} - T^{j0}_{,0} = 0 - 0$$

и

$$(x^k T^{ji})_{,i} = \delta^k_i T^{ji} + x^k T^{ji}_{,i} = T^{jk}.$$

Из теоремы Гаусса следует

$$\int T^{jk} dx dy dz = \int (x^k T^{ji})_{,i} dx dy dz = \int_S x^k T^{ji} n^i dS,$$

где  $S$  — любая поверхность вне напряженного тела, а  $\vec{n}$  — направление внешней нормали к  $S$ . Поскольку интеграл по поверхности равен нулю, то утверждение задачи доказано.

**Решение 5.18.** Нетрудно видеть, что если воспользоваться определениями 2-формы  $\sigma_{\alpha\beta}$  и тензора  $\omega_{\alpha\beta}$ , то остается лишь проверить уравнение

$$u_{\alpha;\beta} = u_{\alpha;\mu} P^\mu_\beta - a_\alpha u_\beta.$$

Для этого удобнее всего вспомнить определение  $P^\mu_\beta$ . Однако мы изберем другой, более поучительный подход, спроектировав это уравнение на вектор  $\mathbf{u}$  и на ортогональное ему подпространство (при помощи тензора  $\mathbf{P}$ ). Заметим, что

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{P} = 0, \quad \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P}.$$

Проекция на подпространство, ортогональное вектору  $\mathbf{u}$ , и на вектор  $\mathbf{u}$  имеют соответственно следующий вид:

$$u_{\alpha;\beta} P^\beta_\gamma = u_{\alpha;\mu} P^\mu_\beta P^\beta_\gamma - a_\alpha u_\beta P^\beta_\gamma = u_{\alpha;\mu} P^\mu_\gamma - 0$$

и

$$u_{\alpha;\beta}u^\beta = u_{\alpha;\mu}P^\mu{}_\beta u^\beta - a_\alpha u_\beta u^\beta = 0 + a_\alpha.$$

Нетрудно проверить, что оба соотношения правильны. Поскольку проекции уравнения на вектор  $u$  и на ортогональное ему подпространство не приводят к противоречию, то и само уравнение непротиворечиво.

**Решение 5.19.** Если жидкость характеризуется плотностью массы-энергии  $\rho$ , давлением  $P$ , температурой  $T$  и энтропией  $S$ , то закон сохранения массы-энергии в элементе объема жидкости  $V$  можно представить в виде

$$d(\rho V) = -PdV + TdS,$$

где  $S$  — энтропия в объеме  $V$ . Это соотношение отличается от нерелятивистского закона сохранения лишь тем, что плотность энергии мы заменили плотностью массы-энергии, поскольку в специальной теории относительности масса не сохраняется. Число барионов *сохраняется*, и поэтому первое начало термодинамики часто записывают через плотность барионов  $n$  и энтропию  $S$ , приходящуюся на один барион [ $V \equiv$  (число барионов/ $n$ ) исключается]:

$$d(\rho/n) = -Pd(1/n) + Tds,$$

или

$$d\rho = (\rho + P)dn/n + nTds.$$

**Решение 5.20.** Для идеальной жидкости

$$T^{\mu\nu} = (P + \rho)u^\mu u^\nu + Pg^{\mu\nu},$$

поэтому в системе покоя жидкости нулевая компонента уравнения движения имеет вид

$$u_\mu T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = T^{0\nu}{}_{;\nu} = P_{;\nu}g^{0\nu} + Pg^{0\nu}{}_{;\nu} + (P + \rho)_{;\nu}u^\nu u^0 + (P + \rho)[u^\nu{}_{;\nu}u^0 + u^0{}_{;\nu}u^\nu] = 0.$$

Соотношения

$$g^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0, \quad u^0 = 1 \quad \text{и} \quad u^0{}_{;\nu} = u_\alpha u^\alpha{}_{;\nu} = \frac{1}{2}(u_\alpha u^\alpha)_{;\nu} = 0$$

позволяют преобразовать уравнение к виду

$$0 = -\frac{d}{dt}P + \frac{d}{dt}(P + \rho) + (P + \rho)u^\nu{}_{;\nu}.$$

Если  $n$  — плотность барионов в системе покоя жидкости, то вектор потока барионов  $nu$  сохраняется. Следовательно, в системе покоя

$$(nu^\nu)_{;\nu} = 0 = n_{;\nu}u^\nu + nu^\nu{}_{;\nu} = \frac{dn}{dt} + nu^\nu{}_{;\nu}.$$

Если для исключения  $u^{\nu}{}_{;\nu}$  воспользоваться этим соотношением, то уравнение движения запишется в виде

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{(P + \rho)}{n} \frac{dn}{dt}.$$

Сравнив его с первым началом термодинамики (см. задачу 5.19), получим

$$ds/dt = 0.$$

Следовательно, течение жидкости изэнтропическое.

**Решение 5.21.** Из первого начала термодинамики, записанного для идеальной жидкости (см. задачу 5.20) с уравнением состояния  $\rho = \rho(n)$ , следует

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\rho + P}{\rho} \frac{dn}{n},$$

поэтому

$$d \ln \rho / d \ln n = (\rho + P) / \rho.$$

Таким образом,  $\rho > 3P$  в том и только в том случае, если  $d \ln \rho / d \ln n < 4/3$ . Поскольку для идеальной жидкости

$$T^{\mu}{}_{\mu} = (\rho + P) u^{\mu} u_{\mu} + \rho g^{\mu}{}_{\mu} = -(\rho + P) + 4P = 3P - \rho,$$

то утверждение задачи доказано.

**Решение 5.22.** Предположим, что звуковая волна представляет собой (изэнтропическое) возмущение в однородной статической жидкости с параметрами  $\rho_0$ ,  $P_0$  и  $n_0$ . Пусть  $\rho_1$ ,  $P_1$  и  $n_1$  — возмущения, а  $u \approx (1, \vec{v}_1)$  — скорость жидкости в системе покоя невозмущенной жидкости. Члены первого порядка по возмущениям в уравнении  $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$  приводят к соотношениям

$$1) \text{ при } \mu = 0 \quad \nabla \cdot \vec{v}_1 = -\frac{\partial \rho_1}{\partial t} (\rho_0 + P_0)^{-1};$$

$$2) \text{ при } \mu = 1, 2, 3 \quad \partial \vec{v}_1 / \partial t = -\vec{\nabla} P_1 / (\rho_0 + P_0),$$

которые можно объединить в уравнение

$$\partial^2 \rho_1 / \partial t^2 - \nabla^2 P_1 = 0.$$

Поскольку в изэнтропическом потоке  $P_1$  и  $\rho_1$  связаны соотношением

$$P_1 = \partial P / \partial \rho |_{s} \rho_1,$$

то выведенное уравнение переходит в волновое уравнение

$$\nabla^2 \rho_1 - \frac{1}{v_{\text{звук}}^2} \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} = 0$$

с характеристической скоростью  $v_{\text{звук}}$ .



При уравнении состояния  $\rho \approx 3P$

$$v_{\text{звук}}^2 = \partial P / \partial \rho = 1/3,$$

поэтому в сильно релятивистском газе  $v_{\text{звук}} \approx 3^{-1/2}$ .

**Решение 5.23.** Из первого начала термодинамики (см. задачу 5.19) при  $ds=0$  следует

$$dn/d\rho = n/(\rho + P).$$

Пользуясь определением показателя адиабаты  $\Gamma_1$  и выражением для  $v_{\text{звук}}^2$  из задачи 5.21, получаем

$$\frac{v_{\text{звук}}^2}{\Gamma_1} = \frac{dP/d\rho}{(ndP)/(Pdn)} = \frac{P}{n} \frac{dn}{d\rho} = \frac{P}{\rho + P}.$$

**Решение 5.24.** При нулевой температуре все энергетические состояния в ферми-газе вплоть до уровня Ферми  $E = E_F$  заполнены. Поскольку для фермионов существуют два спиновых состояния, то плотность фермионов в фазовом пространстве равна  $2/h^3$  и

$$\begin{aligned} dn/V &= (2/h^3) d^3p, \\ \rho &= \int_0^{P_F} (\rho^2 + m^2)^{1/2} (2/h^3) 4\pi\rho^2 d\rho, \\ P &= \int_0^{P_F} 1/3 \rho^2 (\rho^2 + m^2)^{-1/2} (2/h^3) 4\pi\rho^2 d\rho, \end{aligned}$$

где  $P_F$  — импульс, соответствующий энергии Ферми. Как показано в задаче 5.22,  $v_{\text{звук}}^2 = dP/d\rho$ , откуда

$$v_{\text{звук}}^2 = \frac{dP}{d\rho} = \frac{dP/dP_F}{d\rho/dP_F} = \frac{1}{3} \left( \frac{P_F}{E_F} \right)^2 = \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{m^2}{E_F^2} \right).$$

Заметим, что для сильно релятивистского ферми-газа  $v_{\text{звук}} \rightarrow 3^{-1/2}$ .

**Решение 5.25.** Релятивистское уравнение Бернулли, выражающее сохранение энергии вдоль линий тока идеальной жидкости (задача 14.7), имеет вид

$$(1 - v^2)^{-1/2} = \left( \frac{n}{P + \rho} \right) \times \text{const.}$$

[Уравнение Бернулли следует из уравнений  $T^{0\nu}, \nu = 0, (nu^\mu), \mu = 0$ , и первого начала термодинамики  $d\rho/(P + \rho) = dn/n$ .] Поскольку газ начинает вытекать из баллона с нулевой скоростью, то  $\text{const} = (P_0 + \rho_0)/n_0$ . Верхняя граница для  $n/(P + \rho)$ , задающая верхнюю границу  $v_{\text{макс}}$  для  $v$ , достигается при  $P \rightarrow 0$  (и, следовательно,  $\rho \rightarrow mn$ ), откуда

$$(1 - v_{\text{макс}}^2)^{-1/2} = \frac{1}{m} \left( \frac{P_0 + \rho_0}{n_0} \right).$$

Попытаемся выразить правую часть этого равенства через  $a$  — скорость звука в газе с параметрами  $P_0, \rho_0, n_0$ . Постоянная  $K$  в уравнении состояния  $P = Kn^\gamma$  указывает, какой адиабате соответствует состояние газа. Первое начало термодинамики запишем в виде дифференциального уравнения

$$\frac{dp}{dn} = \frac{Kn^\gamma + p}{n}.$$

Интегрируя его (с граничным условием  $p \rightarrow mn$  при  $n \rightarrow 0$ ), получаем

$$p = mn + \frac{K}{\gamma-1} n^\gamma.$$

Скорость звука  $a$  определяется уравнением

$$a^2 = \frac{dP}{d\rho} = \frac{dP/dn}{d\rho/dn} = \frac{\gamma Kn^{\gamma-1}}{m + \gamma Kn^{\gamma-1}/(\gamma-1)}, \quad (1)$$

а из первого начала термодинамики получаем

$$\frac{P+p}{n} = \frac{d\rho}{dn} = \left(\frac{dP}{dn}\right) \left(\frac{d\rho}{dP}\right) = (\gamma Kn^{\gamma-1}) (1/a^2). \quad (2)$$

Но уравнение (1) содержит ту же самую комбинацию  $\gamma Kn^{\gamma-1}$ . Следовательно, уравнение (1) можно разрешить относительно

$$\gamma Kn^{\gamma-1} = ma^2/[1 - a^2/(\gamma-1)]$$

и получить

$$\frac{1}{m} \left(\frac{P_0 + p_0}{n_0}\right) = \frac{1}{1 - a^2/(\gamma-1)},$$

откуда

$$v_{\text{макс}}^2 = 1 - [1 - a^2/(\gamma-1)]^2.$$

(Заметим, что в пределе сильно релятивистского газа, для которого  $\gamma \rightarrow 4/3$  и  $a^2 \rightarrow 1/3$ ,  $v_{\text{макс}} \rightarrow 1$ .)

**Решение 5.26.** В системе покоя жидкости лишь компоненты тензора энергии-импульса  $T^{0j} = T^{j0} = q^j$  связаны с вектором  $\mathbf{q}$ . Поскольку в системе покоя жидкости  $\mathbf{u} = (1, \vec{0})$ , то соотношение

$$T^{\alpha\beta} = u^\alpha q^\beta + u^\beta q^\alpha$$

выполняется в этой системе отсчета и, следовательно, справедливо в любой другой системе отсчета.

**Решение 5.27.** В системе покоя жидкости

$$S^0 \text{ (плотность энтропии)} = ns,$$

$$S^j \text{ (поток энтропии)} = \text{поток тепла}/T = q^j/T.$$

Поскольку в системе покоя жидкости  $q^0 = 0$ ,  $u^0 = 1$ , то соотно-

шение  $\mathbf{S} = n\mathbf{s}\mathbf{u} + \mathbf{q}/T$  выполняется в этой и, следовательно, в любой другой системе отсчета.

**Решение 5.28.** Тензор энергии-импульса рассматриваемой системы удобно записать в виде

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{\text{жидк}} + \mathbf{T}_{\text{тепл}} = [(P + \rho)\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + P\mathbf{g}] + [\mathbf{q} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{q}].$$

Запишем уравнение, выражающее сохранение энергии вдоль линии тока:

$$0 = (\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{u} = (\nabla \cdot \mathbf{T}_{\text{жидк}}) \cdot \mathbf{u} + (\nabla \cdot \mathbf{T}_{\text{тепл}}) \cdot \mathbf{u}. \quad (1)$$

В результате несложных преобразований (см. решение 5.20) первое слагаемое в правой части приводится к виду

$$-d\rho/d\tau + (dn/d\tau)(P + \rho)/n.$$

Из первого начала термодинамики следует, что это выражение равно  $-nT ds/d\tau$  (см. задачу 5.19). Второе слагаемое равно

$$(\nabla \cdot \mathbf{T}_{\text{тепл}}) \cdot \mathbf{u} = (q^\mu u^\nu + u^\mu q^\nu)_{;\nu} u_\mu.$$

Поскольку  $q^\alpha u_\alpha = 0$  (поток тепла пространственноподобен в сопутствующей системе отсчета) и  $u^\alpha u_\alpha = -1$ , то

$$0 = (q^\mu u_\mu)_{;\nu} = q^\mu_{;\nu} u_\mu + q^\mu u_{\mu;\nu},$$

$$0 = (u^\mu u_\mu)_{;\nu} = 2u^\mu_{;\nu} u_\mu$$

и второе слагаемое сводится к  $-\mathbf{q} \cdot \mathbf{a} - \nabla \cdot \mathbf{q}$ . После всех преобразований уравнение (1) переходит в уравнение

$$0 = -nT ds/d\tau - \mathbf{q} \cdot \mathbf{a} - \nabla \cdot \mathbf{q}.$$

Наконец, обращаясь к определению 4-вектора потока плотности энтропии  $\mathbf{S} = n\mathbf{s}\mathbf{u} + \mathbf{q}/T$ , получаем

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{S} &= s\nabla \cdot (n\mathbf{u}) + n(\nabla s \cdot \mathbf{u}) + \frac{1}{T} \nabla \cdot \mathbf{q} - \frac{\nabla T}{T^2} \cdot \mathbf{q} = \\ &= n \frac{ds}{d\tau} + \frac{1}{T} \nabla \cdot \mathbf{q} - \frac{\nabla T \cdot \mathbf{q}}{T^2} = -\frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}}{T} - \frac{\nabla T}{T^2} \cdot \mathbf{q}. \end{aligned}$$

Второе слагаемое показывает, что, как и в нерелятивистской термодинамике, тепловой поток производит энтропию из-за наличия температурного градиента. Первое слагаемое означает, что поток тепла производит энтропию в направлении 4-вектора ускорения. Этот эффект «красного смещения» возникает по той причине, что в системе, движущейся с ускорением, постоянная температура не характеризует равновесное состояние: частота фотонов, идущих «спереди», по мере продвижения их «назад» претерпевает смещение к голубому концу спектра, тем самым создается нескомпенсированный поток тепла.

**Решение 5.29.** Равновесное состояние достигается, когда прекращается производство энтропии, поэтому соотношение

$$-\mathbf{q} \cdot \mathbf{a} = \frac{\nabla T}{T} \cdot \mathbf{q}$$

должно выполняться для любого потока тепла  $\mathbf{q}$  (см. задачу 5.28). Оно означает, что  $\mathbf{a} = -\nabla \ln T$ . Решение этого уравнения имеет вид

$$\ln T = -\vec{a} \cdot \vec{x} + \text{const},$$

или

$$T = T_0 \exp(-\vec{a} \cdot \vec{x}).$$

**Решение 5.30.** Поскольку

$$T^{\alpha\beta} u_{\alpha} = -\rho u^{\beta},$$

то члены, соответствующие потоку энергии, отсутствуют. Следовательно,  $\mathbf{q} = 0$  и  $\mathbf{S} = n\mathbf{s}u$ . Таким образом, скорость производства энтропии равна

$$S^{\alpha}{}_{;\alpha} = (nu^{\alpha})_{;\alpha} s + n \frac{ds}{d\tau} = n \frac{ds}{d\tau}$$

[второе равенство получено из закона сохранения числа барионов  $\nabla \cdot (n\mathbf{u}) = 0$ ]. Используя первое начало термодинамики

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \frac{\rho + p}{n} \frac{dn}{d\tau} + nT \frac{ds}{d\tau}$$

и закон сохранения барионов

$$(nu^{\alpha})_{;\alpha} = \frac{dn}{d\tau} + n\theta,$$

скорость производства энтропии можно представить в виде

$$S^{\alpha}{}_{;\alpha} = \frac{1}{T} \left[ \frac{d\rho}{d\tau} + \theta(\rho + p) \right].$$

Чтобы выразить правую часть через коэффициенты вязкости, возьмем дивергенцию вектора  $T^{\alpha\beta} u_{\alpha}$ :

$$-(\rho u^{\beta})_{;\beta} = -\frac{d\rho}{d\tau} - \rho\theta = (T^{\alpha\beta} u_{\alpha})_{;\beta} = T^{\alpha\beta} u_{\alpha;\beta}.$$

Величину  $T^{\alpha\beta} u_{\alpha;\beta}$  можно вычислить, используя тензор энергии-импульса для вязкой жидкости и разложение для  $u_{\alpha;\beta}$ , приведенное в задаче 5.18. Член  $T^{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta}$  обращается в нуль вследствие симметрии, а член  $T^{\alpha\beta} a_{\alpha} u_{\beta}$  — вследствие того, что  $T^{\alpha\beta} u_{\beta} \sim u^{\alpha}$ . Остается лишь член

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta} u_{\alpha;\beta} &= [\rho u^{\alpha} u^{\beta} + (p - \zeta\theta) P^{\alpha\beta} - 2\eta\sigma^{\alpha\beta}] \left[ \sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}\theta P_{\alpha\beta} \right] = \\ &= -2\eta\sigma_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta} + \theta(p - \zeta\theta). \end{aligned}$$

[Здесь мы воспользовались легко проверяемыми соотношениями

$$u^\alpha \sigma_{\alpha\beta} = 0, \quad P_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta} = 0, \quad P_{\alpha\beta} P^{\alpha\beta} = 3].$$

Итак,

$$\frac{d\rho}{d\tau} + \vartheta(\rho + p) = 2\eta\sigma_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta} + \zeta\vartheta^2.$$

Подставляя это соотношение в выведенную выше формулу для  $S^\alpha{}_{;\alpha}$ , получаем требуемое выражение.

**Решение 5.31.** Как известно, проектирование  $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta}$  на  $u_\alpha$  приводит к уравнению локального закона сохранения энергии. Чтобы получить уравнение движения жидкости, спроектируем тот же тензор на подпространство, ортогональное вектору  $u_\alpha$ :

$$0 = P^\gamma_\alpha T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = P^\gamma_\alpha (\rho_{;\beta} u^\alpha u^\beta + \rho u^\alpha{}_{;\beta} u^\beta + \rho u^\alpha u^\beta{}_{;\beta} + p_{;\beta} P^{\alpha\beta} + \\ + p P^{\alpha\beta}{}_{;\beta} - 2\eta_{;\beta} \sigma^{\alpha\beta} - 2\eta \sigma^{\alpha\beta}{}_{;\beta} - \zeta_{;\beta} \vartheta P^{\alpha\beta} - \zeta \vartheta_{;\beta} P^{\alpha\beta} - \zeta \vartheta P^{\alpha\beta}{}_{;\beta}).$$

Воспользуемся следующими тождествами:

$$\begin{aligned} P^\gamma_\alpha u^\alpha &= 0, \\ P^\gamma_\alpha u^\alpha{}_{;\beta} &= u^\gamma{}_{;\beta} + u^\gamma u_\alpha u^\alpha{}_{;\beta} = u^\gamma{}_{;\beta}, \\ P^\gamma_\alpha P^{\alpha\beta} &= P^{\gamma\beta}, \\ P^\gamma_\alpha P^{\alpha\beta}{}_{;\beta} &= P^\gamma_\alpha (u^\alpha u^\beta)_{;\beta} = u^\gamma{}_{;\beta} u^\beta, \\ P^\gamma_\alpha \sigma^{\alpha\beta} &= \sigma^{\gamma\beta}, \\ P^\gamma_\alpha \sigma^{\alpha\beta}{}_{;\beta} &= \sigma^{\gamma\beta}{}_{;\beta} + u^\gamma u_\alpha \sigma^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = \sigma^{\gamma\beta}{}_{;\beta} - u^\gamma u_{\alpha;\beta} \sigma^{\alpha\beta} = \\ &= \sigma^{\gamma\beta}{}_{;\beta} - u^\gamma \sigma_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta}{}_{;\beta}; \end{aligned}$$

в результате спроектированные уравнения движения примут вид

$$0 = (\rho + p) u^\gamma{}_{;\beta} u^\beta + p_{;\beta} P^{\alpha\beta} - 2(\eta \sigma^{\gamma\beta} + \zeta \vartheta P^{\gamma\beta})_{;\beta} + \\ + 2\eta u^\gamma \sigma_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta}{}_{;\beta} + \zeta \vartheta^2 u^\gamma. \quad (1)$$

В нерелятивистском пределе

$$u^t \approx 1, \quad u^j \approx v^j, \quad p = \mathcal{O}(v^2), \quad \rho = \mathcal{O}(1).$$

Разлагая  $j$ -ю компоненту уравнения (1) в ряд и сохраняя лишь члены порядка  $\mathcal{O}(v^2)$ , получаем уравнение

$$0 = \rho (v^j{}_{;t} + v^j{}_{;k} v^k) + p_{;j} - \\ - \left[ \eta (v_{j;k} + v_{k;j} - \frac{2}{3} \delta_{jk} v^m{}_{;m}) \right]_{;k} + (\zeta v^m{}_{;m})_{;j}$$

(уравнение Навье—Стокса).

**Решение 5.32.** Для идеального газа Максвелла—Больцмана

$$p = nkT, \quad (1)$$

$$\rho/n = U(T). \quad (2)$$

Уравнение (2) означает, что энергия, приходящаяся на одну частицу, зависит лишь от температуры. Из первого начала релятивистской термодинамики

$$\begin{aligned} Tds &= d(\rho/n) + pd(1/n) = \\ &= \frac{dU}{dT} dT + pd\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned} \quad (3)$$

следует, что

$$c_v = \frac{dU}{dT}. \quad (4)$$

Запишем уравнение (1) в дифференциальной форме:

$$pd\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} dp = kdT, \quad (5)$$

тогда уравнение (3) примет вид

$$Tds = \left(\frac{dU}{dT} + k\right) dT - \frac{1}{n} dp \quad (6)$$

и мы получим

$$c_p = \frac{dU}{dT} + k = c_v + k. \quad (7)$$

Показатель адиабаты  $\Gamma_1$  найдем из уравнения (1):

$$\Gamma_1 = \left. \frac{\partial \ln p}{\partial \ln n} \right|_s = 1 + \frac{n}{T} \left. \frac{dT}{dn} \right|_s. \quad (8)$$

Из уравнения (3) мы заключаем, что при  $s = \text{const}$

$$c_v \frac{dT}{dn} = \frac{p}{n^2} = k \frac{T}{n} = (c_p - c_v) \frac{T}{n}. \quad (9)$$

Наконец, подставляя соотношение (9) в (8), находим

$$\Gamma_1 = 1 + \frac{(c_p - c_v)}{c_v} = \gamma.$$

**Решение 5.33.** Из задачи 5.32 известно, что

$$\gamma = \Gamma_1 = \left. \frac{\partial \ln p}{\partial \ln n} \right|_s,$$

поэтому если  $\gamma = \text{const}$ , то

$$p = Kn^\gamma.$$

Для адиабатического процесса первое начало термодинамики можно записать в виде

$$d\rho = \frac{\rho + p}{n} dn = \left(\frac{\rho}{n} + Kn^{\gamma-1}\right) dn,$$

или

$$\frac{d}{dn} \left(\frac{\rho}{n}\right) = Kn^{\gamma-2}.$$

Этому дифференциальному уравнению удовлетворяет функция

$$\frac{\rho}{n} = \frac{Kn^{\gamma-1}}{\gamma-1} + \text{const.}$$

Но  $\rho/n \rightarrow m$  при  $n \rightarrow 0$ , поэтому

$$\rho = mn + \frac{Kn^{\gamma}}{\gamma-1}.$$

**Решение 5.34.**

а) Скалярные интегралы мы получим, вычислив скалярные произведения различных комбинаций  $u^{\alpha}$  и векторного и тензорного интегралов для  $J^{\mu}$  и  $T^{\mu\nu}$ . Например,

$$n = -J^{\mu}u_{\mu} = \int \mathfrak{N} d^3P = \frac{g}{h^3} \int_0^{\infty} \frac{4\pi P^2 dP}{\exp[(P^2 + m^2)^{1/2}/kT - \vartheta] - \varepsilon},$$

где  $g = 2J + 1$ . Произведя подстановку  $P = m \operatorname{sh} \chi$ , получим

$$n = \frac{4\pi g m^3}{h^3} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh}^2 \chi \operatorname{ch} \chi d\chi}{\exp(\beta \operatorname{ch} \chi - \vartheta) - \varepsilon}, \quad (1)$$

где  $\beta = m/kT$ . Аналогично

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{3} (u_{\mu}u_{\nu} + g_{\mu\nu}) T^{\mu\nu} = \frac{1}{3} \int \mathfrak{N} \frac{P^2}{(P^2 + m^2)^{1/2}} d^3P = \\ &= \frac{4\pi g m^4}{3h^3} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh}^4 \chi d\chi}{\exp(\beta \operatorname{ch} \chi - \vartheta) - \varepsilon} \end{aligned} \quad (2)$$

и, наконец,

$$\begin{aligned} \rho - 3p &= -g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = m^2 \int \mathfrak{N} \frac{d^3P}{(P^2 + m^2)^{1/2}} = \\ &= \frac{4\pi g m^4}{h^3} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh}^2 \chi d\chi}{\exp(\beta \operatorname{ch} \chi - \vartheta) - \varepsilon}. \end{aligned} \quad (3)$$

б) Из соотношения (2) следует

$$dp = \frac{4\pi g m^4}{3h^3} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh}^4 \chi d\chi (\beta \operatorname{ch} \chi dT/T + d\vartheta) \exp(\beta \operatorname{ch} \chi - \vartheta)}{[\exp(\beta \operatorname{ch} \chi - \vartheta) - \varepsilon]^2}.$$

Интегрируя по частям, дифференцируя члены  $\operatorname{sh}^3 \chi \operatorname{ch} \chi$  и  $\operatorname{sh}^3 \chi$ , получаем

$$dp = \frac{4\pi g m^4}{3h^3} \frac{1}{\beta} \int_0^{\infty} \frac{d\chi [(3\operatorname{sh}^2 \chi + 4\operatorname{sh}^4 \chi) \beta dT/T + 3\operatorname{sh}^2 \chi \operatorname{ch} \chi d\vartheta]}{\exp(\beta \operatorname{ch} \chi - \vartheta) - \varepsilon}.$$

Подставляя вместо интегралов в правую часть их выражения (1) — (3), находим

$$dp = (\rho + p) dT/T + nkT d\theta. \quad (4)$$

в) Из определения химического потенциала  $\mu$  следует

$$d\mu = d\rho/n + dp/n - (\rho + p) dn/n^2 - sdT - Tds,$$

но

$$d\rho = (\rho + p) dn/n + nTds,$$

поэтому

$$d\mu = d\rho/n - sdT = dp/n - (\rho + p) dT/(nT) + \mu dT/T.$$

Последнее равенство мы получили, выразив  $s$  через  $\mu$ . Сравнивая найденное соотношение с (4), имеем

$$\mu = kT\theta.$$

г) При  $\varepsilon = 0$

$$\frac{p}{n} = \frac{\frac{m}{3} \int_0^{\infty} \text{sh}^4 \chi e^{-\beta \text{ch} \chi} d\chi}{\int_0^{\infty} \text{sh}^3 \chi \text{ch} \chi e^{-\beta \text{ch} \chi} d\chi},$$

но

$$\int_0^{\infty} \text{sh}^4 \chi \exp(-\beta \text{ch} \chi) d\chi = -\frac{1}{\beta} \text{sh}^3 \chi \exp(-\beta \text{ch} \chi) \Big|_0^{\infty} + \frac{3}{\beta} \int_0^{\infty} \text{sh}^3 \chi \text{ch} \chi \exp(-\beta \text{ch} \chi) d\chi.$$

Первое слагаемое в правой части обращается в нуль, и

$$p = nkT.$$

д) При  $\varepsilon = 0$  интегралы (1) — (3) можно выразить через модифицированные функции Ганкеля, поскольку

$$\begin{aligned} K_n(\beta) &= \frac{\beta^n}{(2n-1)!} \int_0^{\infty} d\chi \text{sh}^{2n} \chi \exp(-\beta \text{ch} \chi) = \\ &= \frac{\beta^{n-1}}{(2n-3)!} \int_0^{\infty} d\chi \text{sh}^{2n-2} \chi \text{ch} \chi e^{-\beta \text{ch} \chi}. \end{aligned}$$

Таким образом, при  $a = 4\pi g m^3 e^{\theta} h^{-3}$

$$\begin{aligned} n &= aK_2(\beta)/\beta, \\ p &= amK_2(\beta)/\beta^3, \\ p - 3\rho &= amK_1(\beta)/\beta^3. \end{aligned}$$



Для  $\rho/n$  точное выражение имеет следующий вид:

$$\rho/n = m [K_1(\beta)/K_2(\beta) + 3/\beta].$$

Заметим, что  $\beta \rightarrow \infty$  при  $kT \ll m$ . В этом пределе

$$K_n(\beta) \rightarrow \left(\frac{\pi}{2\beta}\right)^{1/2} e^{-\beta} \left[1 + \frac{4n^2 - 1}{8\beta} + \dots\right],$$

поэтому

$$\rho/n \rightarrow m \left[ \frac{1 + 3/(8\beta)}{1 + 15/(8\beta)} + \frac{3}{\beta} \right] = m \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{kT}{m} \right).$$

Поскольку  $\beta \rightarrow 0$ ,  $K_1(\beta)/K_2(\beta) \rightarrow 0$  при  $kT \gg m$ , то  $\rho/n \rightarrow 3kT$ . Уф!

**Решение 5.35.** Из задачи 5.32 известно, что

$$\gamma = (c_v + k)/c_v = 1 + \frac{k}{dU/dT},$$

где

$$U(T) = m \{K_1(\beta)/K_2(\beta) + 3/\beta\}, \quad \beta = m/kT$$

(см. задачу 5.34).

Это позволяет нам дать точный ответ на вопрос задачи. Заметим, что при  $kT \ll m$

$$U = m + 3kT/2 \text{ и } \gamma = 5/3,$$

а при  $kT \gg m$

$$U = 3kT \text{ и } \gamma = 4/3.$$

## ГЛАВА 6

### Решение 6.1

а) По аналогии с полярными координатами введем гиперболические координаты

$$\begin{aligned}x &= v \operatorname{ch} u, & x^2 - t^2 &= v^2, \\t &= v \operatorname{sh} u, & x/t &= \operatorname{cth} u.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}dx^2 &= (dv \operatorname{ch} u + duv \operatorname{sh} u)^2, \\dt^2 &= (dv \operatorname{sh} u + duv \operatorname{ch} u)^2, \\dx^2 - dt^2 &= dv^2 - v^2 du^2.\end{aligned}\tag{1}$$

б) Разрешив уравнения (1) относительно  $du$  и  $dv$ , получим

$$\begin{aligned}dv &= dx \operatorname{ch} u - dt \operatorname{sh} u, \\du &= v^{-1} (dt \operatorname{ch} u - dx \operatorname{sh} u),\end{aligned}$$

откуда для частицы с единичной массой

$$P_u = g_{uu} P^u = -v^2 \frac{du}{d\tau} = -v \operatorname{ch} u \frac{dt}{d\tau} + v \operatorname{sh} u \frac{dx}{d\tau} = -x \frac{dt}{d\tau} + t \frac{dx}{d\tau}.$$

Для свободно движущейся частицы  $x = \operatorname{const} + \frac{dx}{dt} t$  и обе производные  $dt/d\tau$ ,  $dx/d\tau$  постоянны, поэтому

$$P_u = \operatorname{const} - t \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau} + t \frac{dx}{d\tau} = \operatorname{const}.$$

Для вычисления  $P_v$  воспользуемся соотношением

$$-m^2 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = g^{vv} (P_v)^2 + g^{uu} (P_u)^2 = (P_v)^2 - (P_u)^2/v^2$$

и получим

$$P_v^2 = P_u^2/v^2 - m^2.$$

Правая часть этого выражения не постоянна, поскольку в общем случае  $v$  изменяется вдоль траектории частицы. Можно показать (см. задачу 7.13 или книгу [1], т. 2, стр. 319), что если какой-нибудь коэффициент метрики не зависит от некоторой координаты (в данном случае от  $u$ ), то соответствующая этой координате компонента ковариантного импульса (в рассматриваемом случае  $P_u$ ) сохраняется.

**Решение 6.2.** Запишем метрику в 4-мерном евклидовом пространстве:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 \quad (1)$$

и уравнение гиперсферы радиуса  $R$ :

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = R^2. \quad (2)$$

По аналогии с 3-мерным случаем введем координаты на гиперсфере:

$$\begin{aligned} x_4 &= R \cos \alpha, \\ x_3 &= R \sin \alpha \cos \vartheta, \\ x_2 &= R \sin \alpha \sin \vartheta \cos \varphi, \\ x_1 &= R \sin \alpha \sin \vartheta \sin \varphi. \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнение (2) выполняется автоматически. Дифференцируя координаты (3) с постоянным радиусом  $R$  и подставляя в (1), получаем метрику гиперсферы.

**Решение 6.3.** а) Введем на поверхности цилиндра (фиг. 12) координаты  $x$  и  $y$ :

$$\begin{aligned} x &= \varphi, \\ y &= a \operatorname{tg} \lambda. \end{aligned}$$

Метрика сферы в этих координатах имеет следующий вид:

$$ds^2 = \frac{a^4 dy^2}{(a^2 + y^2)^2} + \frac{a^4 dx^2}{a^2 + y^2}. \quad (1)$$

Сравнивая с метрикой  $ds^2 = dx^2 + dy^2$ , нетрудно заметить, что наименьшему искажению подвергается окрестность линии  $y=0$ , т. е. полоса вблизи экватора.

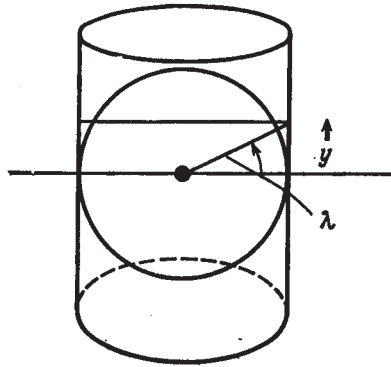
б) При стереографической проекции (фиг. 13) рассмотрение несколько облегчается, если ввести обычный полярный угол  $\vartheta = 90^\circ - \lambda$ . Пусть  $(\vartheta, \varphi)$  — координаты точки на сфере, а  $(\vartheta_0, \varphi_0)$  — сферические координаты спроектированной точки. Ясно, что  $\varphi_0 = \varphi$ . Расстояние от оси до спроектированной точки равно  $\rho = 2a \operatorname{tg}(\vartheta/2)$ , поэтому удобно ввести координаты

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi = 2a \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \cos \varphi, \\ y &= \rho \sin \varphi = 2a \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \sin \varphi. \end{aligned}$$

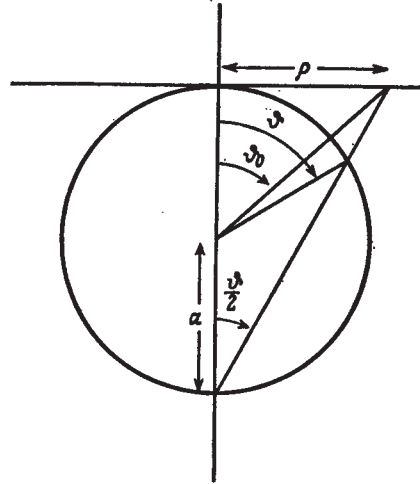
Нетрудно проверить, что

$$ds^2 = a^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) = \cos^4 \left( \frac{\vartheta}{2} \right) (dx^2 + dy^2).$$

Наименьшему искажению подвергается окрестность северного полюса  $\vartheta = 0$ . Описанная нами проекция называется конформной,



Фиг. 12.



Фиг. 13.

поскольку  $(ds^2)_{\text{сфера}} = g(ds^2)_{\text{карта}}$ , где  $g$  — некоторая функция [в рассмотренном случае  $g = \cos^4(\vartheta/2)$ ]. Конформная проекция сохраняет углы (см. задачу 6.7).

#### Решение 6.4.

а) Предположим, что мы передвигаемся по поверхности земного шара вдоль некоторой кривой  $\varphi = \varphi(\vartheta)$ . Стрелка компаса образует  $\alpha$  направлением движения угол  $\psi$ , определяемый соотношением

$$\operatorname{tg} \psi = \sin \vartheta \frac{d\varphi}{d\vartheta}. \quad (1)$$

(Угол  $\psi$  измеряется от оси  $y$  по часовой стрелке.) На карте мы получим

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \left( \psi + \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \psi}. \quad (2)$$

Из соотношений (1) и (2) следует

$$\begin{aligned} \sin \vartheta \frac{d\varphi}{d\vartheta} &= -\frac{dx/d\vartheta}{dy/d\vartheta} = -\frac{\frac{\partial x}{\partial \vartheta} + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{d\vartheta}}{\frac{\partial y}{\partial \vartheta} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{d\vartheta}}, \\ \left( \frac{\partial y}{\partial \vartheta} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{d\vartheta} \right) \frac{d\varphi}{d\vartheta} \sin \vartheta &= -\frac{\partial x}{\partial \vartheta} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{d\vartheta}. \end{aligned} \quad (3)$$

Поскольку соотношение (3) должно выполняться в рассматриваемой точке при любом значении  $d\varphi/d\vartheta$ , то, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях производной  $d\varphi/d\vartheta$  в правой и левой частях, получим

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = 0, \quad y = y(\vartheta), \quad (4)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \vartheta} = 0, \quad x = x(\varphi), \quad (5)$$

$$-\sin \vartheta \frac{\partial y}{\partial \vartheta} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}. \quad (6)$$

Из (4) и (5) следует, что левая часть соотношения (6) зависит только от  $\vartheta$ , в то время как правая зависит только от  $\varphi$ , поэтому каждая часть этого соотношения должна быть постоянной, которую мы полагаем равной 1. Таким образом, в проекции Меркатора отображение осуществляется по формулам

$$x = \varphi, \quad y = - \int \frac{d\vartheta}{\sin \vartheta} = \ln \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2}. \quad (7)$$

б) Выберем для удобства радиус равным 1. Тогда

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2 = \\ &= \sin^2 \vartheta (dx^2 + dy^2) = \\ &= \operatorname{sech}^2 y (dx^2 + dy^2). \end{aligned} \quad (8)$$

в) Дуги больших кругов являются геодезическими на 2-сфере. Уравнения геодезических решить нетрудно, поскольку известны два первых интеграла. Пусть точка сверху означает дифференцирование  $d/ds$ . Тогда соотношение (8) можно записать в виде

$$\operatorname{sech}^2 y (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 1. \quad (9)$$

Поскольку  $x$  — циклическая координата в метрике (8), то  $g_{xx}\dot{x} = \text{const}$  (см. решение 7.13), т. е.

$$(\operatorname{sech}^2 y) \dot{x} = \gamma. \quad (10)$$

Если ни  $\dot{x}$ , ни  $\dot{y}$  не обращаются в нуль, то из уравнений (9) и (10) можно исключить параметр  $s$ :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2} = \frac{\lambda^2 - \operatorname{ch}^2 y}{\operatorname{ch}^2 y}, \quad (11)$$

где  $\lambda = 1/\gamma$ . Уравнение (11) легко интегрируется, если положить  $z = \operatorname{sh} y$ . Решение его имеет вид

$$\operatorname{sh} y = \alpha \sin(x + \beta),$$

где  $\alpha = (\lambda^2 - 1)^{1/2}$ , а  $\beta$  — еще одна постоянная интегрирования.

**Решение 6.5.** Выяснить, трехмерно ли пространство, мы сможем, вычислив 3-объем, натянутый на  $dx dy dz$ :

$$dV = g^{1/2} dx dy dz = \begin{vmatrix} 1 - \left(\frac{3}{13}\right)^2 & -\left(\frac{3}{13}\right)\left(\frac{4}{13}\right) & -\left(\frac{12}{13}\right)\left(\frac{3}{13}\right) \\ -\left(\frac{3}{13}\right)\left(\frac{4}{13}\right) & 1 - \left(\frac{4}{13}\right)^2 & -\left(\frac{4}{13}\right)\left(\frac{12}{13}\right) \\ -\left(\frac{12}{13}\right)\left(\frac{3}{13}\right) & -\left(\frac{4}{13}\right)\left(\frac{12}{13}\right) & 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 \end{vmatrix}^{1/2} dx dy dz = 0.$$

Поскольку объем  $dV$  тождественно равен нулю при любых  $x, y, z$ , то эти координаты всегда линейно-зависимы. Следовательно, рассматриваемое нами пространство либо 2-мерное, либо 1-мерное. Одну координату, например  $z$ , всегда можно отбросить, положив  $z = \text{const}$ . Такая операция допустима, поскольку  $z$  — «циклическая координата», т. е. коэффициенты метрики не зависят от  $z$ . После исключения  $z$  остается метрика

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - \left(\frac{3}{13} dx + \frac{4}{13} dy\right)^2.$$

Она действительно 2-мерная, а не 1-мерная, поскольку

$$g = \det \begin{pmatrix} 1 - \left(\frac{3}{13}\right)^2 & -\left(\frac{3}{13}\right)\left(\frac{4}{13}\right) \\ \left(\frac{3}{13}\right)\left(\frac{4}{13}\right) & 1 - \left(\frac{4}{13}\right)^2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Нетрудно найти преобразование координат (например, ортогонализуя исходную систему по Граму — Шмидту)

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{12}{5} \left( \frac{3}{13} x + \frac{4}{13} y \right), \\ \eta &= \frac{13}{5} \left( -\frac{4}{13} x + \frac{3}{13} y \right), \end{aligned}$$

приводящее к метрике  $ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2$  (простейшего вида). Более искушенный читатель заметит, что исходную метрику можно представить в виде

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - V_\alpha V_\beta,$$

где  $V_\alpha$  — евклидов единичный вектор  $\left(\frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{12}{13}\right)$ . Эта метрика проектирует 3-мерное евклидово пространство на 2-мерное подпространство, ортогональное вектору  $V$ , поэтому существование координат  $\xi$  и  $\eta$ , в которых исходная метрика вырождается в метрику 2-мерного плоского пространства, очевидно.

**Решение 6.6.** Пусть  $A$  — произвольный вектор. Требуется проверить, ортогональна ли его проекция  $P \cdot A$  вектору  $u$ , т. е.

выполняется ли равенство  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = 0$ . Производя несложные преобразования, получаем

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = u^\alpha (g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta) A^\beta = u^\alpha A_\alpha + (u^\alpha u_\alpha) u_\beta A^\beta = u_\alpha A^\alpha - u_\beta A^\beta = 0.$$

Кроме того, нетрудно видеть, что если  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = 0$ , то  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$ , т. е. вектор  $\mathbf{A}$  при проектировании не изменяется. Если  $\mathbf{n}$  — единичный пространственноподобный вектор, то

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} &= n^\alpha (g_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta) A^\beta = \\ &= n^\alpha A_\alpha - (n^\alpha n_\alpha) n_\beta A^\beta = \\ &= n_\alpha A^\alpha - n_\beta A^\beta = 0. \end{aligned}$$

Вектор, ортогональный вектору  $\mathbf{n}$ , также не изменяется при проектировании. Предположим теперь, что  $\mathbf{P}$  — оператор проектирования на подпространство, ортогональное изотропному вектору  $\mathbf{k}$ , т. е. что  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = 0$  для всех  $\mathbf{A}$ . Нетрудно видеть, что  $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} + \text{const} \times \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}$  — оператор, проектирующий на то же самое подпространство ( $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 0$ ), поэтому оператор  $\mathbf{P}$  не единствен. (Множество операторов, проектирующих на подпространство, ортогональное изотропному вектору, непусто. В этом легко убедиться, поскольку для *любого* 4-вектора  $\mathbf{w}$  оператор  $\mathbf{P} = \mathbf{g} - \mathbf{w} \otimes \mathbf{k} / \mathbf{k} \cdot \mathbf{w}$  осуществляет проектирование на ортогональное подпространство. Но если  $\mathbf{w}$  — изотропный вектор, то *симметричные* проекционные операторы не существуют.)

**Решение 6.7.** Пусть  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  — два вектора в метрическом пространстве. Ясно, что угол между  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  должен быть каким-то образом связан со скалярным произведением  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ . Кроме того, угол не должен зависеть от длин векторов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ . Естественнее всего считать мерой угла выражение  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} / (|\mathbf{A}| |\mathbf{B}|)$ . В евклидовом пространстве оно совпадает с  $\cos \phi$ . Под действием преобразования  $g_{\alpha\beta} \rightarrow f(x^\mu) g_{\alpha\beta}$  это выражение переходит в следующее:

$$\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{(|\mathbf{A}| |\mathbf{B}|)} = \frac{g_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta}{(g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu g_{\rho\sigma} B^\rho B^\sigma)^{1/2}} \rightarrow \frac{f(x^\nu) g_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta}{[f(x^\nu) g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu f(x^\nu) g_{\rho\sigma} B^\rho B^\sigma]^{1/2}},$$

но функции  $f$  сокращаются, поэтому новое выражение не отличается от исходного. Изотропные кривые остаются изотропными, поскольку скалярный квадрат касательного вектора, равный нулю до преобразования, после преобразования также равен нулю:

$$0 = \mathbf{l} \cdot \mathbf{l} = g_{\mu\nu} l^\mu l^\nu \rightarrow f(x^\nu) g_{\mu\nu} l^\mu l^\nu = 0.$$

**Решение 6.8.** Относительная скорость  $ds$  между двумя скоростями  $\vec{v}$  и  $\vec{v} + d\vec{v}$  (см. задачу 1.3) определяется соотношением

$$ds^2 = \frac{(dv)^2 - (\vec{v} \times d\vec{v})^2}{(1 - v^2)^2},$$

при этом

$$(\vec{v} \times d\vec{v})^2 = v^2(d\vec{v})^2 - (\vec{v} \cdot d\vec{v})^2.$$

Пусть  $\vartheta$  и  $\varphi$  — полярный и азимутальный углы вектора  $\vec{v}$  (т. е.  $v_z = v \cos \vartheta$ ,  $v_x = v \sin \vartheta \cos \varphi$ ,  $v_y = v \sin \vartheta \sin \varphi$ ). Тогда

$$(d\vec{v})^2 = (dv)^2 + v^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2),$$

$$\vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2} d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = v dv,$$

откуда

$$ds^2 = \frac{dv^2}{(1-v^2)^2} + \frac{v^2}{1-v^2} (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2).$$

Введем «параметр быстроты»  $v = \text{th } \chi$  и запишем метрику в виде

$$ds^2 = d\chi^2 + \text{sh}^2 \chi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2).$$

Заметим, что при малых  $v$  в ньютоновском пределе  $\text{sh } \chi \sim \chi \sim v$  и пространство скоростей, как и следовало ожидать, плоское.

**Решение 6.9.** Если бы вместо  $(\vartheta - \vartheta^3)$  коэффициент при  $d\chi^2$  был равен  $\sin^2 \vartheta$ , то мы получили бы метрику евклидовой 2-сферы. Приведенная в условиях задачи метрика принадлежит «деформированной» аксиально симметричной 2-сфере, возможно, с особенностями при  $\vartheta = 0, \pm 1$ . Поскольку в условии задачи указано значение  $\vartheta = 1/2$ , то область допустимых значений координаты  $\vartheta$  можно расширить до  $0 < \vartheta < 1$ . Значения  $\vartheta = 0$  и  $\vartheta = 1$  требуют более подробного рассмотрения и необходимы для того, чтобы мы могли установить область допустимых значений координаты  $\chi$ . При этих экстремальных значениях  $\vartheta$  метрика периодична по  $\chi$ , поскольку каждый из двух наборов координат ( $\vartheta = 0, \chi$  — любое значение) и ( $\vartheta = 1, \chi$  — любое значение) задает лишь одну точку.

При  $\vartheta \approx 0$  исходная метрика переходит в следующую:

$$ds^2 \approx d\vartheta^2 + \vartheta^2 d\chi^2.$$

Если эта вырожденная метрика периодична по  $\chi$  с периодом  $P$ , то длина окружности надлежащим образом проведенного малого круга радиуса  $\Delta\vartheta$  равна

$$\int (\Delta\vartheta) d\chi = (\Delta\vartheta) P.$$

Чтобы отсекаемая плоскостью круга «шапочка» не содержала конической особенности, длина окружности должна быть равна  $2\pi\Delta\vartheta$ , т. е.  $P = 2\pi$ . Но если перейти к  $\vartheta \approx 1$ , то метрика выродится в метрику

$$ds^2 \approx d\vartheta^2 + (\vartheta - 1)^2 (2)^2 d\chi^2$$



и условие отсутствия конической особенности будет иметь вид

$$\int_0^P 2(\Delta\vartheta) d\chi = 2\pi(\Delta\vartheta);$$

из него следует, что  $P = \pi$ . Таким образом, либо  $P = 2\pi$  и коническая особенность расположена в точке с  $\vartheta = 1$ , либо  $P = \pi$  и коническая особенность расположена в точке  $\vartheta = 0$ . Таким образом, многообразие, локально заданное метрикой

$$ds^2 = d\vartheta^2 + (\vartheta - \vartheta^3) d\chi^2,$$

допускает два различных глобальных расширения. (Эту задачу предложил Джильберт Миллер.)

**Решение 6.10.** Геометрический объект обладает той или иной группой симметрии, если его *вид* не изменяется под действием преобразований группы. Если  $\xi$  — бесконечно малое возмущение, то, как нетрудно показать, под действием бесконечно малого преобразования координат  $x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu$  метрика получит приращение

$$\bar{\delta}g_{\mu\nu} \equiv g'_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu}(x) = -g_{\mu\rho}\xi^\rho{}_{,\nu} - g_{\rho\nu}\xi^\rho{}_{,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}\xi^\rho \quad (1)$$

(см. задачу 13.12). Если метрика сферически симметрична и возмущение вызвано действием группы вращений, то  $\bar{\delta}g_{\mu\nu}$  должно обращаться в нуль. Воспользуемся частной реализацией группы вращений на генераторах

$$\xi^0 = 0, \quad \xi^i = \varepsilon^{ij}x^j, \quad (2)$$

где  $\varepsilon^{ij} = -\varepsilon^{ji}$  — три произвольные бесконечно малые постоянные. Подставляя выражения (2) генераторов  $\xi^\mu$  в (1) и приравнявая  $\bar{\delta}g_{\mu\nu}$  нулю, получаем

а) при  $\mu = \nu = 0$

$$g_{00,i}\varepsilon^{ij}x^j = 0, \quad \text{или} \quad g_{00,i}x^i = g_{00,j}x^j,$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} g_{00} &= g_{00}(x^0, r^2), \\ r^2 &\equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2; \end{aligned} \quad (3a)$$

б) при  $\mu = 0, \nu \neq 0$

$$\begin{aligned} g_{0i}\varepsilon^{ij} + g_{0j,i}\varepsilon^{ik}x^k &= 0, \\ g_{0j} &= \Gamma_1(r^2, x^0)x^j, \end{aligned} \quad (3b)$$

где  $\Gamma_1$  — произвольная функция;

в) при  $\mu \neq 0$ ,  $\nu \neq 0$

$$\begin{aligned} g_{ik}e^{kj} + g_{ij}e^{ii} + g_{ij,l}e^{lk}x^k &= 0, \\ g_{ij} &= \Gamma_2(r^2, x^0)\delta_{ij} + \Gamma_3(r^2, x^0)x^i x^j, \end{aligned} \quad (3в)$$

где  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_3$  — произвольные функции.

Из соотношений (2) нетрудно видеть, что приведенная выше система координат  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  «декартовоподобна». Однако теоретико-групповое определение сферической симметрии не зависит от выбора системы координат, и для того, чтобы найти метрический тензор  $g_{\mu\nu}$  в любой другой системе координат, необходимо лишь подвергнуть метрику, заданную соотношениями (3), обычным преобразованиям.

## ГЛАВА 7

**Решение 7.1.** Пусть заданный базис  $e_\mu$  преобразован так, что  $e_{\mu'} = L^\sigma_{\mu'} e_\sigma$ . Тогда

$$\begin{aligned} \nabla_{e_{\beta'}} e_{\alpha'} &= \Gamma^{\tau'}_{\alpha' \beta'} e_{\tau'} = \nabla_{(L^{\lambda'}_{\beta'} e_{\lambda})} (L^{\mu'}_{\alpha'} e_{\mu}) = L^{\lambda'}_{\beta'} \nabla_{e_{\lambda}} (L^{\mu'}_{\alpha'} e_{\mu}) = \\ &= L^{\lambda'}_{\beta'} (L^{\mu}_{\alpha' \lambda} e_{\mu} + L^{\mu}_{\alpha'} \Gamma^{\tau}_{\mu \lambda} e_{\tau}) = \\ &= L^{\lambda'}_{\beta'} (L^{\mu}_{\alpha' \lambda} L^{\tau'}_{\mu} e_{\tau'} + L^{\mu}_{\lambda'} L^{\tau'}_{\mu} \Gamma^{\gamma}_{\mu \lambda} e_{\tau'}) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\Gamma^{\tau'}_{\alpha' \beta'} = L^{\lambda'}_{\beta'} L^{\mu}_{\alpha'} L^{\tau'}_{\mu} \Gamma^{\gamma}_{\mu \lambda} + L^{\lambda'}_{\beta'} L^{\tau'}_{\mu} L^{\mu}_{\alpha' \lambda}.$$

Если бы коэффициенты связности преобразовывались как тензоры, то второе слагаемое в правой части отсутствовало бы.

**Решение 7.2.**

а) Рассмотрим сначала линию  $\phi = 0$ ,  $r = s$ , где  $s$  — аффинный параметр (длина дуги). Из уравнения геодезической

$$d^2 x^\mu / dr^2 + \Gamma^{\mu}_{rr} = 0$$

получаем

$$\Gamma^r_{rr} = \Gamma^{\phi}_{rr} = 0.$$

Для нерадиальных линий запишем уравнение геодезических, используя  $\phi$  как новый неаффинный параметр:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\phi^2} + \frac{d^2 \phi / ds^2}{(d\phi / ds)^2} \frac{dx^\mu}{d\phi} + \frac{dx^\alpha}{d\phi} \frac{dx^\beta}{d\phi} \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = 0. \quad (1)$$

Уравнение прямой общего положения имеет вид

$$r \cos(\phi - \alpha) = R_0, \quad (2)$$

где  $\alpha$  и  $R_0$  — произвольные постоянные. Из этого уравнения и соотношения  $ds = dr^2 + r^2 d\phi^2$  получаем

$$ds/d\phi = R_0 / \cos^2 \psi,$$

где  $\psi \equiv \phi - \alpha$ , откуда в свою очередь следует

$$\frac{d^2 \phi}{ds^2} / \left( \frac{d\phi}{ds} \right)^2 = -2 \operatorname{tg} \psi.$$

Уравнение геодезических можно записать в виде

$$\frac{d^2x^\mu}{d\vartheta^2} - 2 \operatorname{tg} \psi \frac{dx^\mu}{d\vartheta} + \frac{dx^\alpha}{d\vartheta} \frac{dx^\beta}{d\vartheta} \Gamma^\mu_{\alpha\beta} = 0. \quad (3)$$

Рассмотрим на геодезической точку  $\vartheta = \alpha$  (т. е.  $\psi = 0$ ) и  $r = R_0$ . В этой точке уравнение (3) вырождается в более простое уравнение

$$\frac{d^2x^\mu}{d\vartheta^2} + \Gamma^\mu_{\vartheta\vartheta} = 0,$$

из которого мы находим

$$\Gamma^\vartheta_{\vartheta\vartheta} = 0$$

и [используя уравнение прямой (2)]

$$\Gamma^r_{\vartheta\vartheta} = -r.$$

Поскольку значения  $\alpha$  и  $R_0$  произвольные, полученные выражения для коэффициентов связности остаются справедливыми и в общем случае.

Наконец, рассмотрим произвольную точку на кривой и запишем уравнение геодезической во всей его красе, используя уже известные коэффициенты связности  $\Gamma$ . Компонента  $\mu = r$  этого уравнения позволит нам получить

$$\Gamma^r_{r\vartheta} = 1/r.$$

б) Из уравнения окружности  $r^2 = x^2 + y^2$  и соотношения  $\operatorname{ctg} \vartheta = x/y$  получаем матрицу преобразования

$$L^{\alpha'}_{\mu} = \begin{bmatrix} \mu = x & \mu = y \\ \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\frac{\sin \vartheta}{r} & \frac{\cos \vartheta}{r} \end{bmatrix}$$

и обратную ей матрицу

$$L^{\mu}_{\beta'} = \begin{bmatrix} \beta' = r & \beta' = \vartheta \\ \cos \vartheta & -r \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & r \cos \vartheta \end{bmatrix}.$$

(Первую строку обратной матрицы мы получили, например, взяв дифференциал от  $x = r \cos \vartheta \Rightarrow dx = dr \cos \vartheta - r \sin \vartheta d\vartheta$ .)

Коэффициенты связности  $\Gamma$  (см. задачу 7.1) преобразуются по закону

$$\Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} = L^{\alpha'}_{\rho} L^{\mu}_{\beta'} L^{\nu}_{\gamma'} \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} + L^{\alpha'}_{\mu'} L^{\mu}_{\beta'\gamma'}.$$

Поскольку в декартовых координатах  $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = 0$ , то вклад дает лишь второе слагаемое. Продифференцировав и умножив соответствующие матрицы, мы получим коэффициенты связности в полярных координатах.

в) Воспользуемся тем, что

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} (g_{\mu\beta, \gamma} + g_{\mu\gamma, \beta} - g_{\beta\gamma, \mu}).$$

Для метрики  $ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2$  от нуля отлична лишь производная  $g_{\vartheta\vartheta, r} = 2r$ . Следовательно, коэффициенты связности  $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$  не обращаются в нуль лишь в том случае, если два индекса равны  $\vartheta$ , а один индекс равен  $r$ :

$$\begin{aligned} \Gamma^r_{\vartheta\vartheta} &= g^{rr} \left( -\frac{1}{2} g_{\vartheta\vartheta, r} \right) = -r, \\ \Gamma^{\vartheta}_{r\vartheta} &= g^{\vartheta\vartheta} \left( \frac{1}{2} g_{\vartheta\vartheta, r} \right) = \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

**Решение 7.3.**

а) Уравнение геодезических имеет вид

$$\frac{d^2 r}{ds^2} + \Gamma^r_{\vartheta\vartheta} \left( \frac{d\vartheta}{ds} \right)^2 = 0, \quad \frac{d^2 \vartheta}{ds^2} + 2\Gamma^{\vartheta}_{r\vartheta} \left( \frac{dr}{ds} \right) \left( \frac{d\vartheta}{ds} \right) = 0.$$

Используя результаты, полученные в решении 7.2, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{ds^2} &= r \left( \frac{d\vartheta}{ds} \right)^2, \\ \frac{d^2 \vartheta}{ds^2} + \frac{2}{r} \left( \frac{dr}{ds} \right) \left( \frac{d\vartheta}{ds} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Поскольку из метрики следует, что

$$\left( \frac{dr}{ds} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\vartheta}{ds} \right)^2 = 1,$$

то

$$\begin{aligned} \frac{dR_0}{ds} &= \frac{d}{ds} \left[ r^2 \frac{d\vartheta}{ds} \right] = r^2 \frac{d^2 \vartheta}{ds^2} + 2r \left( \frac{dr}{ds} \right) \left( \frac{d\vartheta}{ds} \right) = \\ &= r^2 \left[ \frac{d^2 \vartheta}{ds^2} + \frac{2}{r} \left( \frac{dr}{ds} \right) \left( \frac{d\vartheta}{ds} \right) \right] = 0, \end{aligned}$$

и, таким образом,

$$R_0 \equiv r^2 \frac{d\vartheta}{ds} = \text{const.}$$

б) Из найденного в п. «а» первого интеграла получаем

$$\left( \frac{dr}{d\vartheta} \frac{d\vartheta}{ds} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\vartheta}{ds} \right)^2 = 1.$$

Подставляя  $d\vartheta/ds = R_0/r^2$  ( $R_0$  — некоторая постоянная), приходим к уравнению

$$\left( \frac{dr}{d\vartheta} \right)^2 + r^2 = r^4/R_0^2.$$

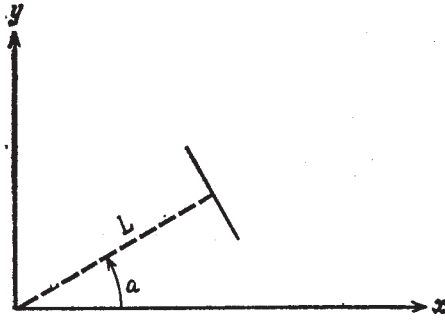
в) Поскольку уравнение прямой (фиг. 14) имеет вид

$$r = L/\cos(\vartheta - \alpha),$$

то

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\phi} &= \frac{\sin(\phi - \alpha)}{\cos^2(\phi - \alpha)} L, \\ \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + r^2 &= L^2 \left[ \frac{\sin^2(\phi - \alpha)}{\cos^4(\phi - \alpha)} + \frac{1}{\cos^2(\phi - \alpha)} \right] = \\ &= \frac{L^2}{\cos^4(\phi - \alpha)} = \frac{r^4}{L^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, все прямые удовлетворяют уравнению геодезических.



Фиг. 14.

**Решение 7.4.** Отличны от нуля лишь производные метрического тензора  $g_{xx, i} = -g_{tt, i} = -2/t^3$ . Следовательно, в нуль не обращаются лишь коэффициенты связности

$$\Gamma_{tii} = 1/t^3, \quad \Gamma_{xxt} = \Gamma_{xtx} = -\Gamma_{txx} = -1/t^3.$$

Чтобы найти геодезические, проще всего воспользоваться их определением как кривых экстремальной длины. Пусть  $x(t)$  — геодезическая. Тогда (точка означает дифференцирование  $d/dt$ )

$$0 = \delta \int (ds^2)^{1/2} = \delta \int (1 - \dot{x}^2)^{1/2} \frac{dt}{t}.$$

Уравнение Эйлера — Лагранжа для отыскания этого экстремума имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\dot{x}}{t(1 - \dot{x}^2)^{1/2}} \right] = 0.$$

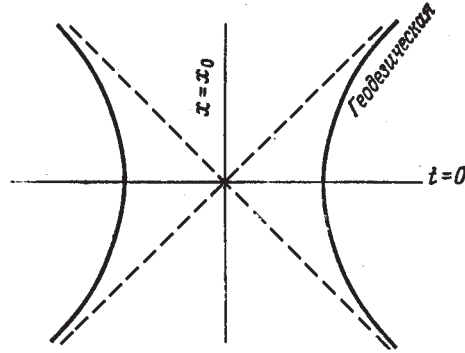
Оно легко решается, если положить  $\text{th} \phi \equiv \dot{x}$ :

$$\frac{\text{sh} \phi}{t} = \text{const},$$

откуда

$$(x - x_0)^2 = t^2 + a^2.$$

Таким образом, геодезическими служат гиперболы, асимптотически стремящиеся к световому конусу (фиг. 15).



Фиг. 15.

**Решение 7.5.** Вычислим  $g_{\alpha\beta;\gamma}$  в координатном репере:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta;\gamma} &= g_{\alpha\beta,\gamma} - g_{\sigma\beta}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\gamma} - g_{\alpha\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma} = \\ &= g_{\alpha\beta,\gamma} - 2\Gamma^{(\beta\alpha)}_{\gamma} = \\ &= g_{\alpha\beta,\gamma} - g_{\alpha\beta,\gamma} = 0. \end{aligned}$$

**Решение 7.6.** В координатном репере

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\nu,\lambda} + g_{\alpha\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\alpha})g^{\mu\alpha}. \quad (1)$$

а) Если метрика диагональна, то индекс  $\alpha$  должен быть равен индексу  $\mu$ . Но поскольку  $\mu \neq \nu \neq \lambda$ , то в (1) все члены в круглых скобках обращаются в нуль.

б) Полагая в (1)  $\nu = \lambda$ , находим

$$\Gamma^{\mu}_{\lambda\lambda} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\lambda,\lambda} + g_{\alpha\lambda,\lambda} - g_{\lambda\lambda,\alpha})g^{\mu\alpha},$$

откуда

$$\Gamma^{\mu}_{\lambda\lambda} = -\frac{1}{2}g_{\lambda\lambda,\alpha}g^{\mu\alpha} = -\frac{1}{2}g_{\lambda\lambda,\alpha}(g_{\mu\alpha})^{-1} = -\frac{1}{2}(g_{\mu\mu})^{-1}g_{\lambda\lambda,\mu}.$$

Здесь мы дважды воспользовались диагональностью метрики [т. е. тем, что  $g^{\mu\alpha} = (g_{\mu\alpha})^{-1}$ ].

$$\begin{aligned} \text{в) } \Gamma^{\mu}_{\mu\lambda} &= \frac{1}{2}(g_{\alpha\mu,\lambda} + g_{\alpha\lambda,\mu} - g_{\mu\lambda,\alpha})(g_{\mu\alpha})^{-1} = \\ &= \frac{1}{2}(g_{\mu\mu})^{-1}(g_{\mu\mu,\lambda}) = \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}(\ln(|g_{\mu\mu}|^{1/2})). \end{aligned}$$

г) Полагая в п. «в»  $\lambda = \mu$ , получаем

$$\Gamma^{\mu}_{\mu\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}(\ln(|g_{\mu\mu}|^{1/2})).$$

**Решение 7.7.**

$$\begin{aligned} \text{а) } g_{\alpha\beta, \gamma} &= \nabla_{\gamma} (\mathbf{e}_{\alpha} \cdot \mathbf{e}_{\beta}) = (\nabla_{\gamma} \mathbf{e}_{\alpha}) \cdot \mathbf{e}_{\beta} + \mathbf{e}_{\alpha} \cdot (\nabla_{\gamma} \mathbf{e}_{\beta}) = \\ &= \Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma} \mathbf{e}_{\mu} \cdot \mathbf{e}_{\beta} + \Gamma^{\mu}_{\beta\gamma} \mathbf{e}_{\mu} \cdot \mathbf{e}_{\alpha} = \\ &= \Gamma_{\beta\alpha\gamma} + \Gamma_{\alpha\beta\gamma}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } g_{\alpha\mu} g^{\mu\beta} &= \delta_{\alpha}^{\beta}, \\ g_{\alpha\mu, \gamma} g^{\mu\beta} + g_{\alpha\mu} g^{\mu\beta, \gamma} &= 0, \\ g_{\alpha\mu} g^{\mu\beta, \gamma} &= -g_{\alpha\mu, \gamma} g^{\mu\beta}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } g^{\alpha\beta, \gamma} &= -g_{\lambda\mu, \gamma} g^{\mu\beta} g^{\lambda\alpha} = -(\Gamma_{\lambda\mu\gamma} + \Gamma_{\mu\lambda\gamma}) g^{\mu\beta} g^{\lambda\alpha} = \\ &= -\Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma} g^{\mu\beta} - \Gamma^{\beta}_{\lambda\gamma} g^{\lambda\alpha}. \end{aligned}$$

(Здесь мы воспользовались результатом, полученным в п. «а».)

г) Для любой матрицы  $\|g_{\alpha\beta}\|$

$$(\ln \det \|g_{\alpha\beta}\|)_{, \alpha} = \text{Sp} \|g_{\alpha\beta}\|^{-1} \|g_{\mu\nu, \alpha}\|,$$

поэтому

$$(\ln g)_{, \alpha} = g^{\mu\nu} g_{\mu\nu, \alpha}$$

и

$$\frac{g_{, \alpha}}{g} = g^{\mu\nu} g_{\mu\nu, \alpha}.$$

Наконец, используя соотношение, доказанное в п. «б», получаем

$$g_{, \alpha} = g g^{\mu\nu} g_{\mu\nu, \alpha} = -g g_{\mu\nu} g^{\mu\nu, \alpha}.$$

д) В координатном репере

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_{\nu\alpha, \beta} + g_{\nu\beta, \alpha} - g_{\alpha\beta, \nu}),$$

а поскольку два последних члена компенсируются, то

$$\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\alpha\nu} g_{\nu\alpha, \beta}.$$

Заменяя сумму в правой части на  $g_{, \beta}/g$  (см. соотношение, выведенное в п. «г»), находим

$$\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g_{, \beta}/g = \frac{1}{2} (\ln |g|)_{, \beta} = (\ln |g|^{1/2})_{, \beta}.$$

е)  $g^{\mu\nu} \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = -g^{\alpha\beta, \gamma} - \Gamma^{\beta}_{\lambda\gamma} g^{\lambda\alpha} =$  (полагая в п. «в»  $\beta = \gamma$  и суммируя)

$$= -g^{\alpha\beta, \beta} - (\ln |g|^{1/2})_{, \lambda} g^{\lambda\alpha} = \text{(по доказанному в п. «д»)}$$

$$= -g^{\alpha\nu, \nu} - (\ln |g|^{1/2})_{, \nu} g^{\alpha\nu} = \text{(заменяя немые индексы)}$$

$$= -g^{\alpha\nu, \nu} - |g|^{1/2, \nu} g^{\alpha\nu} |g|^{-1/2} =$$

$$= -\frac{1}{|g|^{1/2}} (g^{\alpha\nu} |g|^{1/2})_{, \nu}.$$



$$\text{ж) } A^{\alpha}_{;\alpha} = A^{\alpha}_{,\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha} A^{\beta} = A^{\alpha}_{,\alpha} + \frac{1}{|g|^{1/2}} (|g|^{1/2})_{,\beta} A^{\beta} = \quad (\text{по дока-}$$

занному в п. «д»)

$$= \frac{1}{|g|^{1/2}} (|g|^{1/2} A^{\alpha})_{,\alpha}.$$

$$\begin{aligned} \text{з) } A^{\alpha\beta}_{;\beta} &= A^{\alpha\beta}_{,\beta} + \Gamma^{\beta}_{\mu\beta} A^{\alpha\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} A_{\lambda}{}^{\beta} = \\ &= A^{\alpha\beta}_{,\beta} + \frac{1}{|g|^{1/2}} (|g|^{1/2})_{,\mu} A^{\alpha\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu} A_{\lambda}{}^{\mu} = \\ &= \frac{1}{|g|^{1/2}} (|g|^{1/2} A^{\alpha\beta})_{,\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu} A_{\lambda}{}^{\mu}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{и) } A^{\alpha\beta}_{;\beta} &= A^{\alpha\beta}_{,\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} A^{\mu\beta} + \Gamma^{\beta}_{\mu\beta} A^{\alpha\mu} = \\ &= A^{\alpha\beta}_{,\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} A^{\mu\beta} + \frac{1}{|g|^{1/2}} (|g|^{1/2})_{,\mu} A^{\alpha\mu} = \\ &= \frac{1}{|g|^{1/2}} (A^{\alpha\beta} |g|^{1/2})_{,\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} A^{\mu\beta}. \end{aligned}$$

Но в координатном репере  $\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} = \Gamma^{\alpha}_{(\mu\beta)}$ , поэтому если  $A^{\mu\beta} = A^{[\mu\beta]}$ , то последний член обращается в нуль и

$$A^{\alpha\beta}_{;\beta} = \frac{1}{|g|^{1/2}} (|g|^{1/2} A^{\alpha\beta})_{,\beta}.$$

$$\text{к) } \square S = (S_{,\alpha} g^{\alpha\beta})_{;\beta} = \frac{1}{|g|^{1/2}} (|g|^{1/2} S_{,\alpha} g^{\alpha\beta})_{,\beta}.$$

(Здесь мы воспользовались соотношением, доказанным в п. «ж».)

**Решение 7.8.** При преобразовании координат тензор  $A_{\mu\nu}$  переходит в тензор

$$\bar{A}_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \bar{x}^{\bar{\mu}}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \bar{x}^{\bar{\nu}}} A_{\mu\nu},$$

поэтому

$$\bar{A} = \det\left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial \bar{x}^{\bar{\mu}}}\right) \det(A_{\mu\nu}) \det\left(\frac{\partial x^{\nu}}{\partial \bar{x}^{\bar{\nu}}}\right)^T = J^2 A,$$

где  $J = \det(\partial x^{\mu}/\partial \bar{x}^{\bar{\mu}})$  — якобиан преобразования, а верхний индекс  $T$  означает транспонированную матрицу. Мы хотим, чтобы ковариантная производная  $A_{;\alpha}$  преобразовывалась как векторный аналог закона преобразования величины  $A$  (называемой «плотностью веса 2»). Поскольку ковариантная производная  $A_{;\alpha}$  должна быть линейна по  $A$ , то

$$A_{;\alpha} = A_{,\alpha} + K_{\alpha} A,$$

где  $K_{\alpha}$  — неопределенные коэффициенты. Найти их мы можем, потребовав, чтобы определитель метрического тензора  $g$  имел

нулевую ковариантную производную:

$$0 = g_{;\alpha} = g_{,\alpha} + K_{\alpha}g = 2g\Gamma^{\beta}_{\beta\alpha} + K_{\alpha}g$$

(последнее равенство следует из задачи 7.7). Тогда

$$K_{\alpha} = -2\Gamma^{\beta}_{\beta\alpha}.$$

Обобщение для плотностей веса  $W$  (приобретающих под действием преобразования координат множитель  $J^W$ ) можно получить, рассматривая степени определителя  $g$ . Оно имеет вид

$$K_{\alpha} = -W\Gamma^{\beta}_{\beta\alpha}.$$

**Решение 7.9.** Геодезическая с касательным вектором  $u$  пространственноподобна, изотропна или времениподобна в зависимости от того, положителен, равен нулю или отрицателен скалярный квадрат  $u \cdot u$ . Но  $u \cdot u$  сохраняется вдоль геодезической, поскольку уравнение геодезической можно представить в виде  $\nabla_u u = 0$ , и поэтому

$$\nabla_u (u \cdot u) = 2u \cdot \nabla_u u = 0.$$

**Решение 7.10.** Длина дуги равна интегралу

$$\int ds = \int \left( -g_{\alpha\beta} \frac{dx^{\alpha}}{ds} \frac{dx^{\beta}}{ds} \right)^{1/2} ds.$$

Чтобы экстремизировать ее, вычислим вариацию  $\delta \int ds = 0$ . Из уравнений Эйлера — Лагранжа следует

$$\frac{d}{ds} (g_{\alpha\beta} u^{\alpha}) = \frac{1}{2} g_{\alpha\gamma, \beta} u^{\alpha} u^{\gamma} \quad (1)$$

(при выводе уравнения (1) мы использовали соотношение

$$\left( -g_{\alpha\beta} \frac{dx^{\alpha}}{ds} \frac{dx^{\beta}}{ds} \right) = 1$$

и ввели обозначение  $u^{\alpha} \equiv \frac{dx^{\alpha}}{ds}$ ). Поскольку

$$\frac{d}{ds} (g_{\alpha\beta} u^{\alpha}) = g_{\alpha\beta} \frac{du^{\alpha}}{ds} + \frac{dx^{\gamma}}{ds} g_{\alpha\beta, \gamma} u^{\alpha} = g_{\alpha\beta} \frac{du^{\alpha}}{ds} + u^{\gamma} u^{\alpha} g_{\alpha\beta, \gamma},$$

уравнение (1) преобразуется к виду

$$g_{\alpha\beta} \frac{d^2 x^{\alpha}}{ds^2} + u^{\alpha} u^{\gamma} \left( g_{\alpha\beta, \gamma} - \frac{1}{2} g_{\alpha\gamma, \beta} \right) = 0. \quad (2)$$

Пользуясь тем, что

$$u^{\alpha} u^{\gamma} g_{\alpha\beta, \gamma} = u^{\alpha} u^{\gamma} \cdot \frac{1}{2} (g_{\alpha\beta, \gamma} + g_{\gamma\beta, \alpha}),$$

и умножая уравнение (2) на  $g^{\beta\tau}$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^2x^\tau}{ds^2} + \frac{1}{2} g^{\beta\tau} (g_{\alpha\beta, \gamma} + g_{\gamma\beta, \alpha} - g_{\alpha\gamma, \beta}) u^\alpha u^\gamma = \\ = \frac{d^2x^\tau}{ds^2} + \Gamma^\tau_{\alpha\gamma} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

**Решение 7.11.** Определим новую параметризацию кривой функциональным соотношением  $s=f(\lambda)$ . Тогда производные по  $s$  и  $\lambda$  будут связаны между собой следующим образом:

$$\frac{d}{d\lambda} = f' \frac{d}{ds}, \quad \frac{d^2}{d\lambda^2} = f'' \frac{d}{ds} + f'^2 \frac{d^2}{ds^2}, \quad (1)$$

где  $f' \equiv df/d\lambda$ . В новой параметризации уравнение геодезических запишется в виде

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \frac{f''}{f'^2} \frac{dx^\alpha}{ds} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) имело бы «стандартную форму» (а параметр  $s$  был бы аффинным), если бы не второй член в левой части. Следовательно, чтобы параметр  $s$  был аффинным, вторая производная  $f''$  должна быть равна 0, т. е. зависимость между параметрами  $s$  и  $\lambda$  должна быть линейной.

**Решение 7.12.** Компоненты выражения  $\nabla_p p$  можно представить в виде

$$(\nabla_p p)^\beta = m u^\alpha (p^\beta_{, \alpha} + \Gamma^\beta_{\sigma\alpha} p^\sigma) = m \left( \frac{dp^\beta}{d\tau} + u^\alpha p^\sigma \Gamma^\beta_{\sigma\alpha} \right). \quad (1)$$

В плоском пространстве-времени всегда можно найти глобальную систему координат (координаты Минковского), в которой все символы Кристоффеля равны нулю. Пользуясь соотношениями (1), закон сохранения 4-импульса ( $dp/d\tau=0$ ) в этой системе координат можно записать в виде

$$\nabla_p p = 0, \quad (2)$$

но уравнение (2) — тензорное и поэтому должно давать правильное выражение для закона сохранения импульса в любой системе координат. Для частиц с массой вектор импульса пропорционален 4-скорости. Для таких частиц  $p \cdot p = -m^2$ , и поэтому геодезические времениподобны.

**Решение 7.13.** Пусть  $\lambda$  — аффинный параметр, так что  $p^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$ . Тогда для движения частицы по геодезической имеем

$$0 = (\nabla_p p) \cdot e_1 = p_{1; \alpha} p^\alpha = \frac{dp_1}{d\lambda} - p_\sigma \Gamma^\sigma_{\alpha 1} p^\alpha,$$

и поэтому

$$\frac{dp_1}{d\lambda} = \rho^\sigma \rho^\alpha \Gamma_{(\sigma\alpha)1} = \rho^\sigma \rho^\alpha \frac{1}{2} g_{\sigma\alpha,1} = 0.$$

**Решение 7.14.** Примем за исходное уравнение геодезических

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dx^\gamma}{d\lambda} = 0.$$

Переходя от аффинного параметра  $\lambda$  к координатному времени  $t$  и используя соотношение

$$0 = dt^2 + (g_{ij}/g_{00}) dx^i dx^j, \quad (1)$$

получаем уравнение

$$g_{jk} \frac{d^2 x^k}{dt^2} + \Gamma_{jk\ell} \frac{dx^k}{dt} \frac{dx^\ell}{dt} - \Gamma_{j00} \frac{g_{k\ell}}{g_{00}} \frac{dx^k}{dt} \frac{dx^\ell}{dt} + \frac{d^2 t/d\lambda^2}{(dt/d\lambda)^2} g_{jk} \frac{dx^k}{dt} = 0.$$

Комбинируя его с временной частью уравнения геодезических

$$\frac{(d^2 t/d\lambda^2)}{(dt/d\lambda)^2} = -2\Gamma_{0k0} \frac{dx^k/dt}{g_{00}}$$

и выражая коэффициенты связности  $\Gamma$  через компоненты метрического тензора, преобразуем новое уравнение к виду

$$\gamma_{jk} \frac{d^2 x^k}{dt^2} + \frac{1}{2} (\gamma_{jk,\ell} + \gamma_{j\ell,k} - \gamma_{k\ell,j}) \frac{dx^k}{dt} \frac{dx^\ell}{dt} = 0, \quad (2)$$

где  $\gamma_{jk} \equiv -g_{jk}/g_{00}$ . Уравнение (2) представляет собой не что иное, как уравнение геодезических с аффинным параметром  $t$  на 3-мерном многообразии с метрикой  $\gamma_{jk}$ . Из соотношения (1) ясно, что экстремум функционала  $\int dt$  достигается на решениях уравнения (2). Следовательно, принцип Ферма (в обобщенном варианте) выполняется. [См. также Moller C., The Theory of Relativity (Oxford University Press, 2nd ed., 1972), p. 308.]

**Решение 7.15.**

а) Геодезическая — это путь между двумя достаточно близкими точками пространства скоростей с минимальной длиной дуги. Но длина дуги в пространстве скоростей представляет собой не что иное, как абсолютную величину небольшого изменения скорости. Поскольку при работе двигателей, необходимой для изменения скорости, ракета расходует топливо монотонно, то геодезические в пространстве скоростей являются кривыми, вдоль которых расход топлива минимален.

б) Необходимо найти геодезическую в пространстве скоростей, соединяющую точки  $\vec{V}_1$  и  $\vec{V}_2$ . Разумеется, можно было бы написать уравнение геодезических для метрики из задачи 6.8, но

такое решение весьма громоздко. Более простое решение мы получим, если воспользуемся соображениями симметрии и заметим, что геодезическая, проходящая через начало координат в пространстве скоростей, имеет вид  $\vartheta = \varphi = \text{const}$ ,  $\chi = s$  (где  $s$  — аффинный параметр). Чтобы получить геодезическую более общего положения, рассмотрим эту геодезическую из движущейся системы координат. Поскольку  $\chi = \text{Arth } \bar{V}$  — монотонная функция параметра  $\rho = \gamma \bar{V}$  [где  $\gamma \equiv (1 - \bar{V}^2)^{-1/2}$ ], то на геодезической можно ввести неаффинный параметр  $\rho(s)$ . При такой параметризации  $\gamma = (1 + \rho^2)^{1/2}$ , и если мы выберем геодезическую в направлении оси  $x$ , то

$$\mathbf{u} = [(1 + \rho^2)^{1/2}, \rho, 0, 0], \quad -\infty < \rho < +\infty.$$

Буст в направлении оси  $x$  лишь отображает геодезическую на себя, поэтому необходимо только найти преобразование геодезической под действием буста в перпендикулярном направлении, например в направлении оси  $y$ . Под действием буста на величину  $\beta$  в направлении оси  $y$  4-скорость  $\mathbf{u}$  переходит в 4-скорость

$$\mathbf{u}' = [\gamma' (1 + \rho^2)^{1/2}, \rho, (1 + \rho^2)^{1/2} \gamma' \beta, 0], \quad (1)$$

где  $\gamma' = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ .

4-скорость  $\mathbf{u}'$  в уравнении (1) можно выразить через соответствующую 3-скорость

$$\bar{V} / (1 - V^2)^{1/2} = \rho \bar{n} + (1 + \rho^2)^{1/2} \gamma' \beta \bar{m}, \quad (2)$$

где  $\bar{n}$  и  $\bar{m}$  — ортогональные единичные векторы, с которыми можно обращаться как с векторами в обычном координатном пространстве. Разрешив соотношение (2) относительно  $V^2$ , запишем его в виде

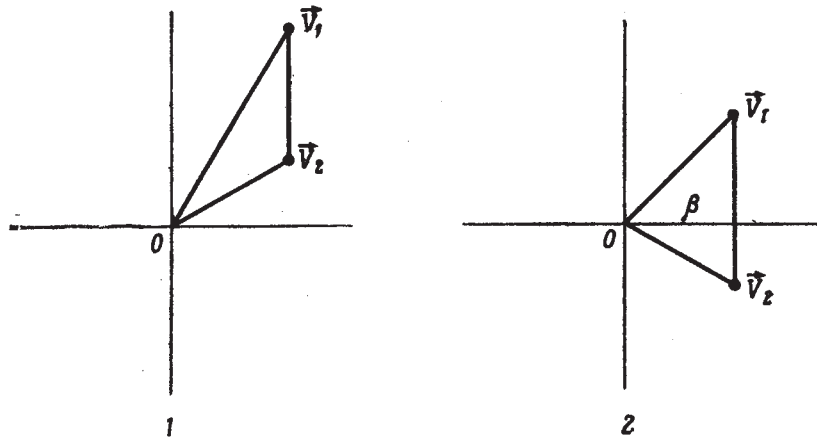
$$\bar{V} = \left[ \frac{1 - \beta^2}{1 + \rho^2} \right]^{1/2} \rho \bar{n} + \beta \bar{m}. \quad (3)$$

Это — уравнение геодезической общего положения в пространстве скоростей. Стоит лишь задать значение  $\beta$  ( $|\beta| < 1$ ) и выбрать два ортогональных единичных вектора  $\bar{m}$  и  $\bar{n}$ , как мы получим геодезическую, параметризованную переменной  $\rho$  ( $-\infty < \rho < +\infty$ ). Из уравнения (3) видно, что геодезическая общего положения в пространстве скоростей представляет собой «прямую» (это отнюдь не свидетельствует о том, что пространство скоростей плоское!).

Могут представиться 2 различных случая (фиг. 16). В случае 1 (либо угол  $OV_1V_2$ , либо угол  $OV_2V_1$  тупой) наименьшее расстояние между геодезической (прямой), проходящей через  $\bar{V}_1$  и  $\bar{V}_2$ , и началом координат  $O$  равно либо  $|\bar{V}_1|$ , либо  $|\bar{V}_2|$ . В случае 2 (оба угла  $OV_1V_2$  и  $OV_2V_1$  острые) наименьшее расстояние между геодезической и началом координат  $O$ , как сле-

дует из элементарных геометрических соображений, равно

$$\beta = \frac{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|}.$$



Фиг. 16.

**Решение 7.16.** Вектор  $A$  подвергается параллельному переносу вдоль координатной линии  $\varphi$  (т. е.  $\vartheta = \text{const}$ ), поэтому

$$0 = A^{\alpha}_{;\varphi} = A^{\alpha}_{,\varphi} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\varphi} A^{\beta}. \quad (1)$$

Поскольку отличны от нуля лишь символы Кристоффеля

$$\Gamma^{\vartheta}_{\varphi\varphi} = -\sin \vartheta \cos \vartheta \quad \text{и} \quad \Gamma^{\varphi}_{\vartheta\varphi} = \text{ctg } \vartheta,$$

то из уравнения (1) получаем

$$A^{\vartheta}_{,\varphi} - \sin \vartheta \cos \vartheta A^{\varphi} = 0, \quad (2)$$

$$A^{\varphi}_{,\varphi} + \text{ctg } \vartheta A^{\vartheta} = 0. \quad (3)$$

В этой задаче координата  $\vartheta$  остается постоянной (равной  $\vartheta_0$ ). Уравнения (2) и (3) легко решаются. Например, дифференцируя уравнение (2) по  $\varphi$ , находим

$$A^{\vartheta}_{,\varphi\varphi} = \sin \vartheta \cos \vartheta A^{\varphi}_{,\varphi} = -\cos^2 \vartheta A^{\vartheta},$$

откуда

$$A^{\vartheta} = \alpha \cos(\varphi \cos \vartheta) + \beta \sin(\varphi \cos \vartheta),$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — постоянные. Из уравнения (2) получаем

$$A^{\varphi} = -\alpha \sin(\varphi \cos \vartheta) / \sin \vartheta + \beta \cos(\varphi \cos \vartheta) / \sin \vartheta.$$

При  $\varphi = 0$  вектор  $A$  совпадает с  $e_{\vartheta}$ , т. е.  $A^{\vartheta} = 1$ ,  $A^{\varphi} = 0$ . Следо-

вательно,  $\alpha = 1, \beta = 0$  и

$$\begin{aligned} A^\vartheta &= \cos(\varphi \cos \vartheta), \\ A^\varphi &= -\sin(\varphi \cos \vartheta) / \sin \vartheta. \end{aligned}$$

При  $\varphi = 2\pi$  (после переноса по окружности) вектор  $\mathbf{A}$  переходит в вектор

$$\mathbf{A} = \cos(2\pi \cos \vartheta) \mathbf{e}_\vartheta - \sin(2\pi \cos \vartheta) / \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi \neq \mathbf{e}_\vartheta,$$

но величина его остается неизменной:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})_{2\pi} &= \cos^2(2\pi \cos \vartheta) \mathbf{e}_\vartheta \cdot \mathbf{e}_\vartheta + \\ &+ \sin^2(2\pi \cos \vartheta) / \sin^2 \vartheta \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi = 1 = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})_0. \end{aligned}$$

**Решение 7.17.**

$$\begin{aligned} 1) \nabla_{\mathbf{u}}(\eta_{\alpha\beta}) &= \nabla_{\mathbf{u}}(\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta) = (\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{e}_\alpha) \cdot \mathbf{e}_\beta + \mathbf{e}_\alpha \cdot (\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{e}_\beta) = \\ &= A_\alpha^\gamma \mathbf{e}_\gamma \cdot \mathbf{e}_\beta + A_\beta^\gamma \mathbf{e}_\gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha = A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha}. \end{aligned}$$

Тензор  $\mathbf{A}$  должен быть антисимметричным.

В этом случае закон переноса удобно записать в виде

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{e}_\alpha = A_\alpha^\beta \mathbf{e}_\beta = (A^{\beta\gamma} \mathbf{e}_\beta \otimes \mathbf{e}_\gamma) \cdot \mathbf{e}_\alpha \equiv -\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e}_\alpha, \quad (1)$$

где  $\Omega^{\beta\gamma} = A^{\beta\gamma} - 4$ -мерный аналог 3-мерной антисимметричной матрицы поворота.

2) Поскольку вектор  $\mathbf{u} = \mathbf{e}_0$  выделен, разложим  $\boldsymbol{\Omega}$  по  $\mathbf{u}$  и ортогонально  $\mathbf{u}$ :

$$\Omega^{\alpha\beta} = v^\alpha u^\beta - u^\alpha v^\beta + \omega^{\alpha\beta}, \quad (2)$$

где  $\omega^{\alpha\beta} = -\omega^{\beta\alpha}$ ,  $\omega^{\alpha\beta} u_\beta = 0$ , а компонента  $v^\alpha$  еще не определена. Не ограничивая общности, можно считать, что  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0$ . Из уравнения (1) получаем

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{u} = -\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u} = -\mathbf{a},$$

где  $\mathbf{a}$  — 4-ускорение наблюдателя. Но из уравнения (2) следует

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{v},$$

поэтому  $\mathbf{v} = \mathbf{a}$  и

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{u} \otimes \mathbf{a} + \boldsymbol{\omega}.$$

3) Тензор  $\omega^{\alpha\beta}$  обладает лишь тремя независимыми компонентами и является пространственным, поскольку  $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{u} = 0$ . Следовательно, тензор  $\omega^{\alpha\beta}$  представляет собой чисто пространственный поворот базисных векторов и обращается в нуль, если пространственные векторы остаются неподвижными.

Часто три независимые компоненты тензора  $\omega^{\alpha\beta}$  объединяют в вектор угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$  ( $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{u} = 0$ ). Вектор  $\boldsymbol{\omega}$  и тензор  $\omega^{\alpha\beta}$  связаны соотношением

$$\omega^{\alpha\beta} = \epsilon^{\alpha\beta\lambda\sigma} u_\lambda \omega_\sigma, \quad \omega^\alpha = -\frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\mu\lambda\sigma} u_\mu \omega_{\lambda\sigma}.$$

Заметим, что для не вращающейся в пространстве системы координат ( $\omega = 0$ ) справедливо соотношение

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{e}_{\alpha} = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{a} - \mathbf{a} \otimes \mathbf{u}) \cdot \mathbf{e}_{\alpha}.$$

Любой вектор  $\mathbf{e}_{\alpha}$ , удовлетворяющий этому соотношению, называется перенесенным по Ферми — Уокера.

**Решение 7.18.** Пусть  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  — два произвольно выбранных вектора. Подвергнем их переносу Ферми — Уокера

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{x} = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{a} - \mathbf{a} \otimes \mathbf{u}) \cdot \mathbf{x},$$

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{y} = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{a} - \mathbf{a} \otimes \mathbf{u}) \cdot \mathbf{y},$$

где  $\mathbf{u}$  — касательный вектор к кривой  $\mathcal{C}$ , а  $\mathbf{a} = \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u}$ . Пользуясь правилом дифференцирования скалярного произведения, вычислим изменение скалярного произведения  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$  вдоль кривой  $\mathcal{C}$ :

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{u}} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) &= (\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot (\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{y}) = \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{y}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{y}) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}) + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{y}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{y}) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, скалярное произведение любых двух векторов инвариантно относительно переноса Ферми — Уокера.

**Решение 7.19.** Дифференциальное уравнение переноса Ферми — Уокера имеет вид

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{x} = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{a} - \mathbf{a} \otimes \mathbf{u}) \cdot \mathbf{x},$$

где  $\mathbf{u}$  — касательный вектор к кривой, а  $\mathbf{a} = \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u} \equiv D\mathbf{u}/d\tau$ . Если кривая геодезическая, то она удовлетворяет уравнению геодезических  $\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u} = 0$ , и поэтому при переносе Ферми — Уокера любой вектор  $\mathbf{x}$  преобразуется по закону

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{x} = 0,$$

т. е. перенос Ферми — Уокера вдоль геодезической совпадает с параллельным переносом.

**Решение 7.20.**

а)  $U_{\alpha; \beta} U^{\beta} U^{\alpha} = U^{\alpha; \beta} U^{\beta} U_{\alpha} = (\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{U}) \cdot \mathbf{U}.$

б)  $V^{\alpha; \beta} U^{\beta} - U^{\alpha; \beta} V^{\beta} = \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{V} - \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{U} \equiv [\mathbf{U}, \mathbf{V}].$

в)  $T_{\alpha\beta; \gamma} V^{\alpha} W^{\beta} U^{\gamma} = \mathbf{V} \cdot (\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{T}) \cdot \mathbf{W}.$

г)  $W^{\alpha; \beta} V_{\beta; \gamma} U^{\gamma} = W^{\alpha; \beta} (V^{\beta; \gamma} U^{\gamma}) = \nabla_{(\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v})} \mathbf{W}.$

д) Объединяя в выражении, приведенном в условиях задачи, два первых члена, получаем

$$(W^{\alpha; \gamma} U^{\gamma})_{; \beta} U^{\beta} - U^{\alpha; \beta} (W^{\beta; \gamma} U^{\gamma}) = \nabla_{\mathbf{u}} (\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{W}) - \nabla_{(\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{w})} \mathbf{U} = [\mathbf{U}, \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{W}].$$



**Решение 7.21.** Траектории световых лучей можно получить из уравнений Максвелла  $F^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$  в пределе геометрической оптики. С помощью тождества из задачи 7.7(1) эти уравнения можно представить в виде

$$[g^{\alpha\tau}g^{\beta\mu}F_{\tau\mu}(-g)^{1/2}]_{;\beta} = 0.$$

Используя пространственно-изотропную диагональную форму метрики и замечая, что  $E_i = F_{0i}$ ,  $B_k = \varepsilon^{kij}F_{ij}$ , преобразуем уравнения к виду

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\varepsilon \vec{E}) &= 0, \\ \nabla \times (\mu^{-1} \vec{B}) &= \partial (\varepsilon \vec{E}) / \partial t, \end{aligned}$$

где  $\varepsilon = \mu = (f/g_{00})^{1/2}$ . Следовательно, свет распространяется так, как если бы среда обладала эффективным показателем преломления

$$n = (\varepsilon\mu)^{-1/2} = (g_{00}/f)^{1/2}.$$

**Решение 7.22.** Для определенности рассмотрим сначала ньютоновский случай. Пусть  $P(\vec{v}, n)$  — вероятность того, что скорость космического корабля после  $n$  импульсных включений двигателей равна  $\vec{v}$ . Выведем для  $P$  дифференциальное уравнение. Для этого заметим, что если после  $n$ -го включения двигателей космический корабль удалось разогнать до скорости  $\vec{v}$ , то после  $(n-1)$ -го включения его скорость должна находиться в пространстве скоростей на расстоянии  $\Delta v$  от скорости  $\vec{v}$ . Из соображений симметрии ясно, что все точки сферы радиуса  $\Delta v$ , описанной вокруг  $\vec{v}$ , должны давать одинаковый вклад в  $P(\vec{v}, n)$ , поэтому  $P(\vec{v}, n)$  можно приравнять изотропно усредненной по сфере вероятности  $P$  после  $(n-1)$ -го включения двигателей:

$$\begin{aligned} P(\vec{v}, n) &= \langle P(\vec{v} + \Delta v, n-1) \rangle_{\text{сфера}} = \\ &= \frac{1}{6} [P(\vec{v} + \Delta v \vec{e}_x, n-1) + P(\vec{v} + \Delta v \vec{e}_y, n-1) + P(\vec{v} + \Delta v \vec{e}_z, n-1) + \\ &+ P(\vec{v} - \Delta v \vec{e}_x, n-1) + P(\vec{v} - \Delta v \vec{e}_y, n-1) + P(\vec{v} - \Delta v \vec{e}_z, n-1)] \approx \\ &\approx P(\vec{v}, n-1) + (\Delta v)^2 \nabla^2 P / 6. \end{aligned} \quad (1)$$

Следовательно,  $P$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{(\Delta v)^2}{6} \nabla^2 P, \quad (2)$$

т. е. обычному уравнению диффузии. Решение этого уравнения с начальным условием  $P(\vec{v}, 0) = \delta^3(\vec{v})$  имеет вид

$$P(\vec{v}, n) = (4\pi)^{-3/2} (n\Delta v^2/6)^{-3/2} \exp\left(\frac{-3v^2}{2n\Delta v^2}\right). \quad (3)$$

Те же самые рассуждения применимы и в случае релятивистской задачи, за исключением того, что сложение скоростей перестает быть линейным: при сложении скоростей приходится обращаться к более сложным релятивистским формулам. Но поскольку  $\Delta v \ll c$ , в системе отсчета, мгновенно сопутствующей космическому кораблю, собственную скорость  $\Delta v$  можно рассматривать как (линейную) аддитивную добавку. Это означает, что в пространстве скоростей локально выполняется уравнение диффузии (2). Необходимо лишь учесть, что глобальная метрика релятивистского пространства скоростей отлична от метрики нерелятивистского пространства скоростей. Для этого оператор  $\nabla^2$  в уравнении (2) следует понимать как лапласиан в искривленном пространстве скоростей с метрикой (см. задачу 6.8):

$$dv_{\text{собств}}^2 = d\psi^2 + \text{sh}^2 \psi (dv_\phi^2 + \text{sin}^2 \phi dv_\theta^2), \quad (4)$$

где  $\psi$  — параметр быстроты, т. е.  $\text{th} \psi \equiv |\bar{v}|$ . Соотношение [см. задачу 7.7(к)]

$$P_{;\alpha;\alpha} = g^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{g^2} g^{\alpha\beta} P_{,\beta} \right)_{,\alpha} \quad (5)$$

и то, что вследствие сферической симметрии

$$\frac{\partial P}{\partial v_\phi} = \frac{\partial P}{\partial v_\theta} = 0,$$

позволяет нам записать уравнение

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{\Delta v^2}{6} \left[ \frac{1}{\text{sh}^2 \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \text{sh}^2 \psi \frac{\partial P}{\partial \psi} \right) \right]. \quad (6)$$

Нетрудно проверить, что его решением служит распределение вероятности

$$P(\bar{v}, n) = (4\pi)^{-1/2} e^{-t} t^{-1/2} \frac{\psi}{\text{sh} \psi} e^{-(\psi^2/4t)}, \quad (7)$$

где  $t \equiv n \Delta v^2/6$ . Оно согласуется с ньютоновским решением (3) при  $t \ll 1$ ,  $\psi \ll 1$  (на отношение  $\psi^2/4t$  никаких ограничений не налагается).

Вероятность того, что значение параметра  $\psi$  заключено между  $\psi$  и  $\psi + d\psi$  [в метрике пространства скоростей (4)], равна  $4\pi \text{sh}^2 \psi P d\psi$ . В пределе при  $t \gg 1$ ,  $\psi \gg 1$  она обладает асимптотикой

$$\frac{dP}{d\psi} \approx (4\pi)^{-1/2} \frac{\psi}{t^{3/4}} e^{-\psi^2/4t - t + \psi} = (4\pi)^{-1/2} \frac{\psi}{t^{3/4}} e^{-t \left(1 - \frac{\psi}{2t}\right)^2}.$$

Существенна лишь экспонента. Из нее следует, что  $\psi$  имеет математическое ожидание  $\langle \psi \rangle \approx 2t$  и дисперсию  $\Delta \psi \sim \sqrt{2t}$ , поэтому  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta \psi / \langle \psi \rangle = 0$ . С увеличением числа включений средняя быстрота  $\langle \psi \rangle$  возрастает линейно, но среднее приращение скорости за одно

включение составляет  $\Delta v^2/3$ . Трезвый астронавт при каждом включении двигателей увеличивает быстроту на  $\Delta v$ , т. е. в  $3c/\Delta v$  раза. Удивительно, что пьяный астронавт все же может разогнать свой корабль до релятивистских скоростей (в ньютоновском случае скорость или быстрота возрастает лишь как  $n^{1/2}$ , а не как  $n$ ). Причина этого кроется в свойствах преобразований Лоренца: если удаляющийся от вас наблюдатель стреляет, целясь наугад, то вам будет казаться, будто некоторым направлениям он отдает предпочтение перед другими (эффект «фары»).

**Решение 7.23.**

а) Если гиперповерхности заданы уравнениями  $f = \text{const}$ , то

$$\mathbf{k} \sim \nabla f, \quad k_\mu = hf_{,\mu}$$

и, следовательно,

$$k_{\mu;\nu} = h_{,\nu} f_{,\mu} + hf_{,\mu;\nu}, \quad (1)$$

$$k_{[\mu;\nu} k_{\lambda]} = h_{, [\nu} f_{,\mu} h f_{,\lambda]} + h^2 f_{, [\mu;\nu} f_{,\lambda]}. \quad (2)$$

Ясно, что первое слагаемое в правой части соотношения (2) равно нулю. Второе слагаемое также равно нулю, поскольку  $f_{,\mu;\nu} = f_{,\nu;\mu}$ . Обратное утверждение (о том, что из условия  $k_{[\mu;\nu} k_{\lambda]} = 0$  следует гиперповерхностная ортогональность векторного поля  $\mathbf{k}$ ) называется теоремой Фробениуса.

б) Из соотношения (1) видно, что дополнительное условие  $k_{[\mu;\nu} = 0$  эквивалентно существованию такой скалярной функции  $f$ , для которой  $\mathbf{k} = \nabla f$ .

**Решение 7.24.** Пусть  $\mathbf{k}$  — вектор, касательный к конгруэнции изотропных кривых. Поскольку вектор  $\mathbf{k}$  гиперповерхностно ортогонален, то

$$k_\alpha = hf_{,\alpha},$$

где  $f$  и  $h$  — некоторые скалярные функции (см. задачу 7.23), а поскольку  $\mathbf{k}$  — изотропный вектор, то

$$f_{,\alpha} f^{,\alpha} = 0.$$

Из этих двух соотношений получаем

$$k_{\alpha;\beta} k^\beta = (h_{,\beta} f_{,\alpha} + hf_{,\alpha;\beta}) h f^{,\beta},$$

$$f_{,\alpha;\beta} f^{,\beta} = f_{,\beta;\alpha} f^{,\beta} = \frac{1}{2} (f_{,\beta} f^{,\beta})_{,\alpha} = 0$$

и, следовательно,

$$k_{\alpha;\beta} k^\beta = (h_{,\beta} f^{,\beta}) k_\alpha.$$

Тем самым уравнение геодезических  $\nabla_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \sim \mathbf{k}$  удовлетворено. Если  $k^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$ , то можно ввести аффинный параметр  $\lambda' = \lambda'(\lambda)$  и

записать это уравнение в обычном виде:

$$\nabla_{\bar{k}} \bar{k} = 0,$$

где  $\bar{k}^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$ .

**Решение 7.25.** Запишем уравнение Эйлера — Лагранжа в общем виде:

$$0 = \frac{d^2F}{dy^2} \frac{dy}{ds} \frac{\partial y}{\partial \dot{x}} + \frac{dF}{dy} \left[ \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial y}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial y}{\partial \dot{x}} \right) \right].$$

Поскольку  $dy/ds = 0$  ( $s$  — аффинный параметр) и  $dF/dy \neq 0$ , то это уравнение совпадает с уравнением Эйлера — Лагранжа для  $\delta \int y ds = 0$ .

## ГЛАВА 8

### Решение 8.1.

а) Ключевые соотношения:

$$\langle \widetilde{dx}^\alpha, \partial/\partial x^\beta \rangle \equiv \widetilde{dx}^\alpha \cdot \partial/\partial x^\beta = \delta^\alpha_\beta, (\partial/\partial x^\alpha) \cdot (\partial/\partial x^\beta) = g_{\alpha\beta} \text{ и } \widetilde{dx}^\alpha \cdot \widetilde{dx}^\beta = g^{\alpha\beta}.$$

Ответы:

$$1, 0, g_{01}, g^{01}, g^{00}.$$

б) Вектор  $g^{1\alpha} \partial/\partial x^\alpha \equiv g^{1\alpha} e_\alpha$  соответствует  $\widetilde{dx}^1$ , поскольку для любого вектора  $v$

$$v \cdot g^{1\alpha} e_\alpha = v^\mu e_\mu \cdot g^{1\alpha} e_\alpha = v^\mu g_{\mu\alpha} g^{1\alpha} = v^\mu \delta_\mu^1 = v^1 = \langle \widetilde{dx}^1, v \rangle.$$

**Решение 8.2.** Нетрудно видеть, что  $f=r$ , т. е.  $\widetilde{df} = \widetilde{dr}$ , поскольку

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{dr}, e_r \rangle &= \langle \widetilde{dr}, e_r \rangle = 1, \\ \langle \widetilde{dr}, e_\theta \rangle &= r^{-1} \langle \widetilde{dr}, e_\theta \rangle = 0. \end{aligned}$$

Пусть существует функция  $g$ , такая, что  $\widetilde{dg} = \widetilde{\omega}^\theta$ . Тогда

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \widetilde{dg}, e_r \rangle = \langle \widetilde{dg}, e_r \rangle = \partial g / \partial r, \\ 1 &= \langle \widetilde{dg}, e_\theta \rangle = r^{-1} \langle \widetilde{dg}, e_\theta \rangle = r^{-1} \partial g / \partial \theta. \end{aligned}$$

Ясно, что условия  $\partial g / \partial r = 0$  и  $\partial g / \partial \theta = r$  несовместимы.

**Решение 8.3.** В декартовом координатном репере это условие сводится к равенству  $\sigma_{i,j} = \sigma_{j,i}$ . Оно эквивалентно не зависящему от выбора базиса требованию обращения в нуль ротора поля  $\sigma$  (векторного эквивалента поля  $\tilde{\sigma}$ ).

**Решение 8.4.** Выберем базис  $\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_N$ . Любую  $p$ -форму можно представить в виде суммы

$$\sum_{i,j} A_{ij} \dots (\tilde{\omega}_i \wedge \tilde{\omega}_j \dots),$$

где в каждом слагаемом член в скобках содержит ровно  $p$  базисных форм. Поскольку внешнее умножение и сложение дифференциальных форм дистрибутивны, то тождество достаточно доказать

для мономиальных  $p$ - и  $q$ -форм и вычислить, например, произведение

$$(\tilde{\omega}_1 \wedge \tilde{\omega}_2 \wedge \dots \wedge \tilde{\omega}_p) \wedge (\tilde{\omega}_1' \wedge \tilde{\omega}_2' \wedge \dots \wedge \tilde{\omega}_q').$$

Поскольку внешнее умножение ассоциативно, то скобки можно опустить. Переставляя последовательно дифференциальную форму  $\tilde{\omega}_1'$  с формой, стоящей слева от нее, переведем  $\tilde{\omega}_1'$  на крайнее слева место. Каждая перестановка приводит к появлению одного знака минус, поэтому после выполнения всех перестановок возникнет множитель  $(-1)^p$ . Затем переведем дифференциальную форму  $\tilde{\omega}_2'$  на второе место слева. Это приведет к появлению еще  $p$  знаков минус. Продолжая переставлять дифференциальные формы  $\tilde{\omega}_i'$ , мы в конце концов дойдем до множителя  $\tilde{\omega}_q'$ . Когда эта форма займет  $q$ -е место слева, знак изменится  $pq$  раз. Тем самым требуемое тождество доказано.

**Решение 8.5.** Эквивалентность обоих определений дифференциала  $p$ -формы мы докажем, если установим, что в произвольном координатном репере компоненты дифференциальной формы  $d\Omega$ , вычисленные на основе обоих определений, совпадают. Запишем каждое из определений при помощи ковариантной производной. Пусть компоненты формы  $\Omega$  равны

$$\Omega_{\alpha\beta\dots\gamma} = \Omega_{[\alpha\beta\dots\gamma]} \quad (p \text{ индексов}).$$

Тогда компоненты дифференциальной формы  $d\Omega$  равны

$$\begin{aligned} \Omega_{[\alpha\beta\dots\gamma;\delta]} = & \Omega_{[\alpha\beta\dots\gamma;\delta]} - \Gamma_{e[\alpha\delta}\Omega_{\beta\dots\gamma]} - \\ & - \Gamma_{e[\beta\delta}\Omega_{\alpha\dots\gamma]} - \dots - \Gamma_{e[\gamma\delta}\Omega_{\alpha\beta\dots e]} = \Omega_{[\alpha\beta\dots\gamma;\delta]}. \end{aligned} \quad (1)$$

(Члены с символами Кристоффеля  $\Gamma$  обращаются в нуль, поскольку в координатном репере  $\Gamma_{\mu[\nu\sigma]} = 0$ .) Обратимся теперь к другому определению:

$$\Omega = \Omega_{\alpha\beta\dots\gamma} \tilde{dx}^\alpha \wedge \tilde{dx}^\beta \wedge \dots \wedge \tilde{dx}^\gamma.$$

По свойству 2 внешнее дифференцирование  $d$  не нарушает соглашения о суммировании по повторяющимся индексам, поэтому

$$\begin{aligned} d\Omega = & (d\Omega_{\alpha\beta\dots\gamma}) \wedge (\tilde{dx}^\alpha \wedge \tilde{dx}^\beta \wedge \dots \wedge \tilde{dx}^\gamma) + \\ & + \Omega_{\alpha\beta\dots\gamma} d(\tilde{dx}^\alpha \wedge \tilde{dx}^\beta \wedge \dots \wedge \tilde{dx}^\gamma) \end{aligned} \quad (2)$$

(мы воспользовались здесь свойством 4 при  $p=0$ , поскольку  $\Omega_{\alpha\beta\dots\gamma}$  представляет собой скалярную функцию (0-форму)). Из свойства 1 известно, что для любой 0-формы  $f$

$$df = f_{,\alpha} \tilde{dx}^\alpha,$$

а из свойства 3 следует

$$\langle df, \partial/\partial x^\beta \rangle = \langle f_{,\alpha} \tilde{dx}^\alpha, \partial/\partial x^\beta \rangle = f_{,\beta},$$

откуда

$$\widetilde{d}\Omega_{\alpha\beta\dots\gamma} = \Omega_{\alpha\beta\dots\gamma,\delta} \widetilde{d}x^\delta.$$

Второе слагаемое в правой части соотношения (2) обращается в нуль: по свойству 4 его можно разложить в сумму членов, каждый из которых содержит  $ddx$ , а по свойству 5  $ddx=0$ . Следовательно, соотношение (2) преобразуется к виду

$$d\Omega = \Omega_{\alpha\beta\dots\gamma,\delta} \widetilde{d}x^\delta \wedge \widetilde{d}x^\alpha \wedge \widetilde{d}x^\beta \wedge \dots \wedge \widetilde{d}x^\gamma.$$

Поскольку  $d\Omega$  есть  $(p+1)$ -форма (свойство 1) и внешнее произведение антисимметрично, то компоненты  $d\Omega$  равны  $\Omega_{[\alpha\beta\dots\gamma,\delta]}$ , т. е. совпадают с компонентами, заданными соотношением (1).

**Решение 8.6.** Пусть

$$g \equiv \left[ x^1 \int_0^1 f(\xi x^1, x^2, \dots, x^n) d\xi \right].$$

Тогда  $\widetilde{\beta} = g \widetilde{d}x^1$  и

$$d\widetilde{\beta} = g_{,i} \widetilde{d}x^i \wedge \widetilde{d}x^1 = g_{,1} \widetilde{d}x^1 \wedge \widetilde{d}x^1 + g_{,2} \widetilde{d}x^2 \wedge \widetilde{d}x^1 + \dots$$

Но

$$g_{,1} = \left[ \int_0^1 f(\xi x^1, x^2, \dots, x^n) d\xi \right] + \left[ x^1 \int_0^1 \xi f'(\xi x^1, x^2, \dots, x^n) d\xi \right],$$

где  $f'$  означает производную по первому аргументу. Второе слагаемое в правой части, интегрируя по частям, можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^1 \xi f'(\xi x^1, x^2, \dots, x^n) d\xi &= \int_0^1 \xi \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi x^1, x^2, \dots, x^n) d\xi = \\ &= \xi f(\xi x^1, x^2, \dots, x^n) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(\xi x^1, x^2, \dots, x^n) d\xi, \end{aligned}$$

поэтому

$$g_{,1} = \xi f(\xi x^1, x^2, \dots, x^n) \Big|_0^1 = f(x^1, x^2, \dots, x^n).$$

Поскольку  $da=0$ , то

$$da = f_{,2} dx^2 \wedge dx^1 \wedge dx^2 + f_{,4} dx^4 \wedge dx^1 \wedge dx^2 + \dots = 0.$$

Это равенство может выполняться лишь в том случае, если  $f_{,2} = f_{,4} = f_{,5} = \dots = f_{,n} = 0$ , поэтому

$$g_{,2} = \left[ x^1 \int_0^1 f_{,2}(\xi x^1, x^2, \dots, x^n) d\xi \right] = 0.$$

Аналогичным образом доказывается цепочка  $g_{,4} = g_{,5} = \dots = g_{,n} = 0$ . Окончательно получаем

$$d\tilde{\beta} = g_{,1} \tilde{dx}^1 \wedge \tilde{dx}^2 = f(x^1, x^2, \dots, x^n) \tilde{dx}^1 \wedge \tilde{dx}^2 = \alpha.$$

**Решение 8.7.** Тензору Максвелла соответствует 2-форма

$$\mathbf{F} = F_{\mu\nu} \tilde{dx}^\mu \wedge \tilde{dx}^\nu,$$

поэтому равенство нулю ее внешнего дифференциала

$$0 = d\mathbf{F} = F_{\mu\nu,\lambda} \tilde{dx}^\lambda \wedge \tilde{dx}^\mu \wedge \tilde{dx}^\nu$$

дает уравнения Максвелла

$$F_{[\mu\nu;\lambda]} = 0.$$

Аналогично из  $d*\mathbf{F} = 0$  получаем

$$*F_{[\lambda\sigma;\nu]} = 0.$$

Последние равенства эквивалентны (см. задачу 3.25) следующим:

$$0 = \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} *F_{\lambda\sigma;\nu} = 2 **F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = -2F^{\mu\nu}{}_{;\nu},$$

и мы приходим к недостающим уравнениям Максвелла

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0.$$

**Решение 8.8.** Построим в произвольной точке 3-поверхности локально ортонормированный базис  $e_i, e_x, e_y, e_z$ . Если 3-поверхность пространственноподобна, то базис можно выбрать так, чтобы вектор  $e_i$  совпадал с единичным вектором нормали к ней. Тогда три ортогональных (и, следовательно, линейно-независимых) вектора ( $e_x, e_y, e_z$ ) будут принадлежать 3-поверхности и, следовательно, будут пространственноподобными. К любому другому ортонормированному базису мы можем перейти, выполнив соответствующее преобразование Лоренца, которое оставляет пространственноподобные векторы пространственноподобными и непространственноподобные векторы — непространственноподобными. Следовательно, если 3-поверхность пространственноподобна, то всегда можно выбрать три принадлежащих ей ортонормированных пространственноподобных вектора.

Если 3-поверхность изотропна, то выберем локально ортонормированный базис так, чтобы сумма  $e_i + e_x$  совпадала с нормалью к 3-поверхности. Изотропный вектор ортогонален самому себе, поэтому 3-поверхности принадлежат три ортогональных вектора: пространственноподобные векторы  $e_y$  и  $e_z$  и изотропный вектор  $e_i + e_x$ . Наконец, если 3-поверхность времениподобна, то выберем вектор  $e_x$  так, чтобы он совпадал с нормалью к поверхности.



сти. Тогда 3-поверхности будут принадлежать времениподобный вектор  $e_7$  и пространственноподобные векторы  $e_8$  и  $e_9$ . Как и в случае пространственноподобной 3-поверхности, полученные результаты останутся в силе, если на рассмотренный базис подействовать произвольным преобразованием Лоренца.

**Решение 8.9.** Запишем элемент объема

$$d^3\Sigma_\mu(a, b, c) = \frac{1}{3!} \varepsilon_{\mu\nu\sigma} \frac{\partial(x^\nu, x^\beta, x^\sigma)}{\partial(a, b, c)} da db dc.$$

Если от параметров  $a, b, c$  перейти к параметрам  $\alpha, \beta, \gamma$ , то

$$da db dc \rightarrow \left| \frac{\partial(a, b, c)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} \right| d\alpha d\beta d\gamma.$$

Если параметры  $(\alpha, \beta, \gamma)$  задают ту же ориентацию, что и параметры  $(a, b, c)$ , то якобиан положителен (по определению одинаковой ориентации), поэтому знак абсолютной величины можно отбросить и записать

$$\begin{aligned} d^3\Sigma_\mu(a, b, c) &\rightarrow \frac{1}{3!} \varepsilon_{\mu\nu\sigma} \frac{\partial(x^\nu, x^\beta, x^\sigma)}{\partial(a, b, c)} \frac{\partial(a, b, c)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} d\alpha d\beta d\gamma = \\ &= \frac{1}{3!} \varepsilon_{\mu\nu\sigma} \frac{\partial(x^\nu, x^\beta, x^\sigma)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} d\alpha d\beta d\gamma = \\ &= d^3\Sigma_\mu(\alpha, \beta, \gamma). \end{aligned}$$

Утверждение задачи доказано.

На языке дифференциальных форм инвариантность интеграла очевидна, поскольку  $d^3\Sigma_\mu$  можно рассматривать как 3-форму:

$$d^3\Sigma_\mu = \frac{1}{3!} \varepsilon_{\mu\nu\sigma} \tilde{d}x^\mu \wedge \tilde{d}x^\nu \wedge \tilde{d}x^\sigma.$$

**Решение 8.10.**

а) Запишем 2-форму  $\vartheta$  и ее дифференциал  $d\vartheta$ :

$$\vartheta = f^k d^2S_k = f^k \frac{1}{2} \varepsilon_{klm} \tilde{d}x^l \wedge \tilde{d}x^m,$$

$$d\vartheta = f^k \frac{1}{2} \varepsilon_{klm} \tilde{d}x^n \wedge \tilde{d}x^l \wedge \tilde{d}x^m + f^k \frac{1}{2} (d\varepsilon_{klm}) \wedge \tilde{d}x^l \wedge \tilde{d}x^m.$$

Пусть по определению  $[klm] = +1$ , если  $klm$  — четная перестановка чисел 1, 2, 3,  $[klm] = -1$ , если  $klm$  — нечетная перестановка чисел 1, 2, 3, и  $[klm] = 0$  во всех остальных случаях. Тогда

$$d\varepsilon_{klm} = d(|g|^{1/2} [klm]) = [klm] \frac{1}{2} g_{,n} \tilde{d}x^n / |g|^{1/2} = \varepsilon_{klm} \frac{1}{2} g_{,n} \tilde{d}x^n / g.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} d\Phi &= \frac{1}{2} \left( f^k{}_{,n} + \frac{1}{2} g_{,n}/g \right) \varepsilon_{klm} \tilde{d}x^n \wedge \tilde{d}x^l \wedge \tilde{d}x^m = \\ &= \frac{1}{2} |g|^{-1/2} (|g|^{1/2} f^k)_{,n} \varepsilon_{klm} \tilde{d}x^n \wedge \tilde{d}x^l \wedge \tilde{d}x^m. \end{aligned}$$

Но в 3-мерном пространстве

$$\tilde{d}x^n \wedge \tilde{d}x^l \wedge \tilde{d}x^m = |g|^{1/2} \varepsilon^{nlm} \tilde{d}x^1 \wedge \tilde{d}x^2 \wedge \tilde{d}x^3 \quad \text{и} \quad \varepsilon_{klm} \varepsilon^{nlm} = 2\delta_{k1}^{\bar{1}}$$

поэтому

$$d\Phi = f^k{}_{,k} |g|^{1/2} \tilde{d}x^1 \wedge \tilde{d}x^2 \wedge \tilde{d}x^3.$$

Следовательно, в обычных векторных обозначениях обобщенную теорему Стокса можно записать в виде

$$\int_V \nabla \cdot \vec{f} dV = \int_{\partial V} \vec{f} \cdot \vec{dS}.$$

$$\text{б) } \Phi = f^\mu d^3 \Sigma_\mu = f^\mu \frac{1}{3!} \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} \tilde{d}x^\alpha \wedge \tilde{d}x^\beta \wedge \tilde{d}x^\gamma;$$

$$\begin{aligned} d\Phi &= \frac{1}{3!} (f^\mu{}_{,\lambda} \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} \tilde{d}x^\lambda + f^\mu d\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}) \wedge \tilde{d}x^\alpha \wedge \tilde{d}x^\beta \wedge \tilde{d}x^\gamma = \\ &= \frac{1}{3!} \left( f^\mu{}_{,\lambda} \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} \tilde{d}x^\lambda + f^\mu \frac{g_{,\lambda}}{g} \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} \tilde{d}x^\lambda \right) \wedge \tilde{d}x^\alpha \wedge \tilde{d}x^\beta \wedge \tilde{d}x^\gamma = \\ &= \frac{1}{3!} |g|^{-1/2} (|g|^{1/2} f^\mu)_{,\lambda} \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} \tilde{d}x^\lambda \wedge \tilde{d}x^\alpha \wedge \tilde{d}x^\beta \wedge \tilde{d}x^\gamma = \\ &= \frac{-1}{3! |g|^{3/2}} (|g|^{1/2} f^\mu)_{,\lambda} \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} \varepsilon^{\lambda\alpha\beta\gamma} |g|^{1/2} \tilde{d}x^0 \wedge \tilde{d}x^1 \wedge \tilde{d}x^2 \wedge \tilde{d}x^3 = \\ &= \frac{1}{3! |g|^{3/2}} (|g|^{1/2} f^\mu)_{,\lambda} \delta_{\mu}^{\lambda} 3! |g|^{1/2} \tilde{d}x^0 \wedge \tilde{d}x^1 \wedge \tilde{d}x^2 \wedge \tilde{d}x^3 = \\ &= f^\mu{}_{,\mu} |g|^{1/2} \tilde{d}x^0 \wedge \tilde{d}x^1 \wedge \tilde{d}x^2 \wedge \tilde{d}x^3. \end{aligned}$$

Таким образом, обобщенную теорему Стокса можно записать в виде

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot f |g|^{1/2} d^4x = \int_{\partial\Omega} f^\mu d^3 \Sigma_\mu.$$

$$\text{в) } \Phi = F^{\mu\nu} d^2 \Sigma_{\mu\nu} = F^{\mu\nu} \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \tilde{d}x^\alpha \wedge \tilde{d}x^\beta,$$

$$\begin{aligned} d\Phi &= \frac{1}{2} d(F^{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}) \wedge \tilde{d}x^\alpha \wedge \tilde{d}x^\beta = \\ &= \frac{1}{2} |g|^{-1/2} (|g|^{1/2} F^{\mu\nu})_{,\lambda} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \tilde{d}x^\lambda \wedge \tilde{d}x^\alpha \wedge \tilde{d}x^\beta, \end{aligned}$$

где дифференциал  $d\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$  выбран так же, как и в п. «б». Но

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \tilde{d}x^\lambda \wedge \tilde{d}x^\alpha \wedge \tilde{d}x^\beta &= \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (1/6) \delta_{\kappa\sigma\tau}^{\lambda\alpha\beta} \tilde{d}x^\kappa \wedge \tilde{d}x^\sigma \wedge \tilde{d}x^\tau = \\ &= -(1/6) \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon^{\lambda\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{\gamma\kappa\sigma\tau} \tilde{d}x^\kappa \wedge \tilde{d}x^\sigma \wedge \tilde{d}x^\tau = \\ &= -\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon^{\lambda\alpha\beta\gamma} d^3 \Sigma_\gamma = 2\delta_{\mu\nu}^{\lambda\gamma} d^3 \Sigma_\gamma, \end{aligned}$$

а из задачи 7.7 (и) известно, что

$$d\Phi = |g|^{-1/2} (|g|^{1/2} F^{\mu\nu})_{,\lambda} \delta^{\nu\lambda}{}_{\mu\nu} d^3\Sigma_\nu = 2F^{\mu\nu}{}_{;\nu} d^3\Sigma_\mu,$$

и, наконец,

$$\int_{\partial\Omega} F^{\mu\nu} d^3\Sigma_{\mu\nu} = 2 \int_{\Omega} F^{\mu\nu}{}_{;\nu} d^3\Sigma_\mu.$$

г) Пусть  $\Phi = A_k dx^k = \vec{A} \cdot \vec{dl}$  и поверхность  $\Omega$  2-мерна. Тогда дифференциал  $d\Phi$  преобразуется к виду

$$\begin{aligned} d\Phi &= A_{k,j} \tilde{dx}^j \wedge \tilde{dx}^k = A_{k,j} \delta_m^{[k} \delta_n^{j]} \tilde{dx}^m \wedge \tilde{dx}^n = \\ &= \frac{1}{2} A_{k,j} \epsilon^{rkj} \epsilon_{rnm} \tilde{dx}^m \wedge \tilde{dx}^n = (\nabla \times \vec{A}) \cdot d^2S_r, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

**Решение 8.11.** Предположим, что такой тензор существует. Чему были бы равны его компоненты в произвольно выбранной точке свободно падающей локально ортонормированной системы координат? В этой системе координат все  $g_{\alpha\beta,\mu}$  равны нулю (поскольку равны нулю все  $\Gamma_{\alpha\beta\mu}$ ) и  $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ . Следовательно, наш гипотетический тензор должен был бы быть некоторой алгебраической комбинацией нулевого тензора  $\eta_{\alpha\beta}$  и, быть может,  $\delta^\alpha_\beta$  и  $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ . Нетрудно убедиться, что единственная нетривиальная комбинация равна  $\eta \otimes \eta \otimes \dots \otimes \eta$  (δ только «переименовывает» индексы, например,  $\delta^\alpha_\beta \eta_{\alpha\gamma} = \eta_{\beta\gamma}$ , а  $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$  либо обращает соответствующий член в нуль в силу своей антисимметричности, либо опускает индексы). Поскольку мы выбрали произвольную точку, то доказанное нами утверждение справедливо во всех точках.

**Решение 8.12.**

а) Воспользуемся общим определением символов Кристоффеля  $\Gamma$ :

$$\Gamma_{\mu\alpha\beta} = e_\mu \cdot \nabla_\beta e_\alpha.$$

В координатном репере

$$\Gamma_{\mu\alpha\beta} - \Gamma_{\mu\beta\alpha} = e_\mu \cdot (\nabla_\beta e_\alpha - \nabla_\alpha e_\beta) = e_\mu \cdot [e_\beta, e_\alpha] = 0,$$

поскольку векторы координатного репера коммутируют.

б) В ортонормированном репере

$$\Gamma_{\mu\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha\mu\beta} = e_\mu \cdot \nabla_\beta e_\alpha + e_\alpha \cdot \nabla_\beta e_\mu = \nabla_\beta (e_\mu \cdot e_\alpha) = \nabla_\beta (\eta_{\mu\alpha}) = 0.$$

**Решение 8.13.**

а) Воспользуемся тем («обычное правило дифференцирования»), что для любого векторного поля  $v$

$$\mathcal{L}_x \langle \tilde{A}, v \rangle = \langle \mathcal{L}_x \tilde{A}, v \rangle + \langle \tilde{A}, \mathcal{L}_x v \rangle. \quad (1)$$

Для компонент 1-формы  $\mathcal{L}_x \tilde{A}$  получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_x \tilde{A})_\alpha &\equiv \mathcal{L}_x A_\alpha = \langle \mathcal{L}_x \tilde{A}, e_\alpha \rangle = \mathcal{L}_x \langle \tilde{A}, e_\alpha \rangle - \langle \tilde{A}, \mathcal{L}_x e_\alpha \rangle = \\ &= A_{\alpha, \beta} x^\beta - \langle \tilde{A}, [x, e_\alpha] \rangle = \\ &= A_{\alpha, \beta} x^\beta - A_\gamma \langle \tilde{\omega}^\gamma, [x^\beta e_\beta, e_\alpha] \rangle = \\ &= A_{\alpha, \beta} x^\beta - A_\gamma \langle \tilde{\omega}^\gamma, (x^\beta c_{\beta\alpha}^\delta e_\delta - x^\beta{}_{,\alpha} e_\beta) \rangle = \\ &= A_{\alpha, \beta} x^\beta + x^\beta{}_{,\alpha} A_\beta - A_\gamma x^\beta c_{\beta\alpha}^\gamma. \end{aligned} \quad (2)$$

В координатном репере последний член обращается в нуль. Соотношение (1) позволяет записать производную Ли иначе:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_x \tilde{A})_\alpha &= \nabla_x \langle \tilde{A}, e_\alpha \rangle - \langle \tilde{A}, (\nabla_x e_\alpha - \nabla_{e_\alpha} x) \rangle = \langle \nabla_x \tilde{A}, e_\alpha \rangle + \langle \tilde{A}, \nabla_{e_\alpha} x \rangle = \\ &= A_{\alpha; \beta} x^\beta + x^\beta{}_{,\alpha} A_\beta. \end{aligned} \quad (3)$$

Коэффициенты связности в действительности не входят в определение производной Ли. Они выпадают, и соотношение (3) переходит в соотношение (2).

б) Для простоты будем производить вычисления в координатном репере:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_x \mathbf{T} &= \mathcal{L}_x (T^\alpha{}_\beta e_\alpha \otimes \tilde{\omega}^\beta) = \\ &= (\mathcal{L}_x T^\alpha{}_\beta) e_\alpha \otimes \tilde{\omega}^\beta + T^\alpha{}_\beta (\mathcal{L}_x e_\alpha) \otimes \tilde{\omega}^\beta + T^\alpha{}_\beta e_\alpha \otimes (\mathcal{L}_x \tilde{\omega}^\beta) = \\ &= T^\alpha{}_{\beta, \gamma} x^\gamma e_\alpha \otimes \tilde{\omega}^\beta - T^\alpha{}_\beta x^\gamma{}_{,\alpha} e_\gamma \otimes \tilde{\omega}^\beta + T^\alpha{}_\beta x^\beta{}_{,\gamma} e_\alpha \otimes \tilde{\omega}^\gamma = \\ &= (T^\alpha{}_{\beta, \gamma} x^\gamma - T^\mu{}_\beta x^\alpha{}_{,\mu} + T^\alpha{}_\mu x^\mu{}_{,\beta}) e_\alpha \otimes \tilde{\omega}^\beta. \end{aligned}$$

Производную Ли тензора  $T^\alpha{}_\beta$  часто записывают в виде

$$\mathcal{L}_x T^\alpha{}_\beta = T^\alpha{}_{\beta, \gamma} x^\gamma - T^\mu{}_\beta x^\alpha{}_{,\mu} + T^\alpha{}_\mu x^\mu{}_{,\beta}.$$

Как и в п. «а», запятые можно заменить точками с запятой.

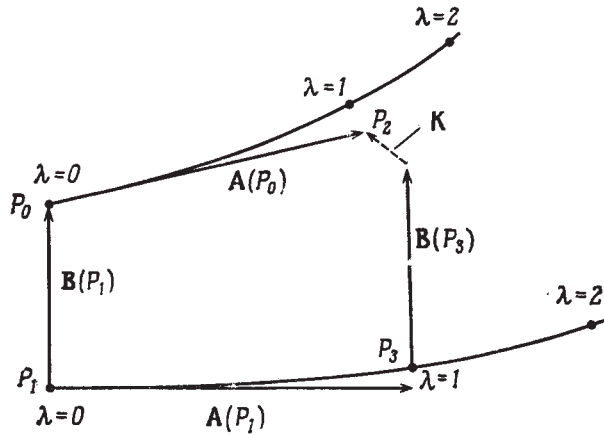
**Решение 8.14.** В точках  $P_0$  и  $P_1$  рассмотрим два касательных вектора  $\mathbf{A}(P_0)$  и  $\mathbf{A}(P_1)$  с началом в точке  $\lambda = 0$  и концом в точке  $\lambda = \Delta\lambda = \mathcal{O}(\varepsilon)$ . [Примечание. На фиг. 17 приращение параметра  $\Delta\lambda$  выбрано равным 1, поэтому векторы  $\mathbf{A}$  достаточно велики и «вектор разности»  $\mathbf{K}$  для наглядности показан преувеличенно большим.] Предположим, что в точке  $P_1$  построен вектор  $\mathbf{B}(P_1)$ , соединяющий точку  $P_1$  с точкой  $P_0$ . Вычислим, сколько «не хватает» векторному полю  $\mathbf{B}$ , чтобы его векторы соединяли точки с равными значениями  $\lambda$  вдоль конгруэнции  $\mathbf{A}$ , т. е. вычислим вектор  $\mathbf{K}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= [\mathbf{B}(P_1) + \mathbf{A}(P_0)] - [\mathbf{A}(P_1) + \mathbf{B}(P_0)] = \\ &= [\mathbf{B}(P_1) - \mathbf{B}(P_0)] - [\mathbf{A}(P_1) - \mathbf{A}(P_0)] = \\ &= A^\tau B^\nu{}_{,\tau} e_\nu + \mathcal{O}(\mathbf{A}^2 \mathbf{B}) - B^\tau A^\nu{}_{,\tau} e_\nu + \mathcal{O}(\mathbf{B}^2 \mathbf{A}) = \\ &= [\mathbf{A}, \mathbf{B}] + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \text{ если } |\mathbf{A}| \sim \mathcal{O}(\varepsilon) \sim |\mathbf{B}|. \end{aligned}$$

Следовательно, в пределе, если векторы  $A$  и  $B$  бесконечно малы, то

$$K = [A, B] = \mathcal{L}_A B.$$

Таким образом, вектор  $K$  обращается в нуль, если  $\mathcal{L}_A B = 0$ , т. е. если вектор  $B$  «перенесен по Ли» вдоль векторного поля  $A$ .



Фиг. 17.

**Решение 8.15.** Свертку можно рассматривать как умножение на *постоянный* тензор  $\delta^\mu_\nu$  (дельта-символ Кронекера). Но производная Ли тензора  $\delta^\mu_\nu$  равна нулю, что нетрудно доказать в координатном репере:

$$\mathcal{L}_x (\delta^\mu_\nu) = \delta^\mu_{\nu, \lambda} x^\lambda + \delta^\mu_\lambda x^\lambda_{, \nu} - \delta^\lambda_\nu x^\mu_{, \lambda} = 0 + x^\mu_{, \nu} - x^\mu_{, \nu} = 0.$$

Следовательно, оператор свертки  $\delta^\mu_\nu$  коммутирует с оператором  $\mathcal{L}_x$ .

**Решение 8.16.** Если операторное тождество выполняется для скалярных функций и для векторных полей, то оно выполняется и для произвольных тензоров, поскольку действие производной Ли на любые тензоры однозначно определяется ее действием на скаляры и векторы (см. задачу 8.13). Если  $f$  — скалярная функция, то

$$\mathcal{L}_u \mathcal{L}_v f - \mathcal{L}_v \mathcal{L}_u f = \mathcal{L}_u \nabla_v f - \mathcal{L}_v \nabla_u f = [u, v] f = \mathcal{L}_{[u, v]} f.$$

Если же  $w$  — векторное поле, то

$$\mathcal{L}_u \mathcal{L}_v w - \mathcal{L}_v \mathcal{L}_u w - \mathcal{L}_{[u, v]} w = [u, [v, w]] - [v, [u, w]] - [[u, v], w] = 0.$$

Равенство нулю последнего выражения (тождество Якоби для коммутаторов) проверяется без труда (например, в этом можно

убедиться, выписав все члены). Таким образом, тождество, приведенное в условии задачи, доказано для скаляров и векторов, а тем самым и для произвольного тензора.

**Решение 8.17.**

1) Рассмотрим сначала скалярное поле:

$$\Phi(P_N) = \Phi(P_0) + [x^\mu(P_N) - x^\mu(P_0)]\Phi_{,\mu}(P_0) + \dots = \Phi(P_0) - \xi^\mu\Phi_{,\mu}.$$

Поскольку  $\Phi$  — скаляр, то  $\bar{\Phi}(P_N) = \Phi(P_N)$  и, следовательно,

$$\mathcal{L}_\xi\Phi = \Phi_{,\mu}\xi^\mu.$$

2) Так как

$$\bar{x}^\mu(P_N) = x^\mu(P_0) = x^\mu(P_N) + \xi^\mu,$$

то для векторных полей

$$\bar{A}_\mu(P_N) = (\partial x^\alpha / \partial \bar{x}^\mu) A_\alpha(P_N) = (\delta^\alpha_\mu - \xi^{\alpha,\mu}) A_\alpha(P_N).$$

Учитывая, что

$$A_\mu(P_N) = A_\mu(P_0) - A_{\mu,\beta}\xi^\beta,$$

получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi A_\mu &= A_\mu(P_0) - \bar{A}_\mu(P_N) = A_\mu(P_0) - (\delta^\alpha_\mu - \xi^{\alpha,\mu})(A_\alpha(P_0) - A_{\alpha,\beta}\xi^\beta) = \\ &= A_{\mu,\beta}\xi^\beta + A_\alpha\xi^{\alpha,\mu}. \end{aligned}$$

3) Аналогичным образом можно рассмотреть и случай, когда геометрический объект обладает свойствами тензора:

$$\begin{aligned} T^\mu_\nu(P_N) &= (\partial \bar{x}^\mu / \partial x^\alpha)(\partial x^\beta / \partial \bar{x}^\nu) T^\alpha_\beta(P_N) = \\ &= (\delta^\mu_\alpha + \xi^{\mu,\alpha})(\delta^\beta_\nu - \xi^{\beta,\nu}) [T^\alpha_\beta(P_0) - T^\alpha_{\beta,\gamma}\xi^\gamma] = \\ &= T^\mu_\nu(P_0) - T^\mu_{\nu,\gamma}\xi^\gamma - T^\mu_{\beta\xi^\beta,\nu} + T^\alpha_{\nu\xi^\mu,\alpha}, \\ \mathcal{L}_\xi T^\mu_\nu &= T^\mu_{\nu,\gamma}\xi^\gamma + T^\mu_{\beta\xi^\beta,\nu} - T^\alpha_{\nu\xi^\mu,\alpha}. \end{aligned}$$

**Решение 8.18.** Для задания параллельного переноса

$$u^\alpha v^\beta;_\alpha = 0$$

необходимо знать лишь коэффициенты аффинной связности  $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ . Чтобы задать перенос Ферми — Уокера

$$\nabla_u v = u(a \cdot v) - a(u \cdot v), \quad a \equiv \nabla_u u,$$

требуется, кроме того, указать метрику (она необходима для скалярного произведения). Чтобы задать перенос Ли

$$\nabla_u v - \nabla_v u = 0,$$

мы должны определить *не только* касательные векторы вдоль кривой, но и векторное поле вне кривой, поскольку нам необходим градиент  $u$  в направлении  $v$ , а вектор  $v$ , вообще говоря, не касателен к кривой, вдоль которой производится перенос. Хотя

в определение переноса Ли входит оператор  $\nabla$ , в действительности оно *не зависит* от коэффициентов аффинной связности, поскольку вследствие антисимметричности тождества  $\nabla_u v - \nabla_v u = 0$  все  $\Gamma$  исчезают. Ясно, что для задания производной Ли метрика не требуется.

**Решение 8.19.** Если вектор  $\vec{u}$  по возвращении в точку  $A$  совпадает с исходным вектором, то его можно продолжить до векторного поля, для которого параллельный перенос из  $A$  в  $B$  совпадает с переносом Ли из  $A$  в  $B$ . Пусть  $\vec{u} = (u^x, u^y, u^z)$ . Рассмотрим тождество

$$\nabla_u v - \nabla_v u = [\vec{u}, \vec{v}] = \mathcal{L}_u v = -\mathcal{L}_v u. \quad (1)$$

Полагая соответствующие члены в (1) равными нулю, т. е.  $\nabla_v u = \mathcal{L}_v u = 0$ , и замечая, что символы Кристоффеля равны нулю, получаем

$$\begin{aligned} \nabla_u v = 0 &= u^i v^k_{,i} = 0, \\ -u^y &= u^x = \alpha u^z z^{\alpha-1} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Следовательно, вектор  $\vec{u}$  может быть ненулевым (и иметь  $u^z \neq 0$ ) лишь в том случае, если

$$\alpha = 0. \quad (3)$$

**Решение 8.20.** Пусть  $u(p)$  — векторное поле, которое требуется найти. Если оно допускает параллельный перенос вдоль самого себя, то  $\nabla_u u = 0$ . Это не что иное, как уравнение геодезических. Следовательно,  $u(p)$  должно быть полем векторов, касательных к конгруэнции геодезических, заполняющей пространство.

Если поле  $u(p)$  допускает перенос Ферми — Уокера, то

$$\nabla_u u = (u \otimes a - a \otimes u) \cdot u, \quad (1)$$

где  $a = \nabla_u u$ . Следовательно,

$$a = u(a \cdot u) - a(u \cdot u). \quad (2)$$

Умножив скалярно правую и левую части равенства (2) на  $u$ , получим

$$a \cdot u = u^2(a \cdot u) - (a \cdot u)u^2 = 0.$$

Подставив в (2)  $a \cdot u = 0$ , найдем, что  $u^2 = -1$  либо  $a = 0$ . Первый случай ( $u^2 = -1$ ) означает, что любое поле подходящим образом нормированных 4-скоростей допускает перенос Ферми — Уокера вдоль себя. Второй случай означает, что векторы, касательные к любой конгруэнции геодезических, также допускают параллельный перенос Ферми — Уокера, даже если они не нормированы на  $-1$ .

Правилу переноса Ли

$$\mathbf{0} = \mathcal{L}_u \mathbf{u} \equiv [\mathbf{u}, \mathbf{u}]$$

удовлетворяет любое векторное поле.

**Решение 8.21.** Рассмотрим 1-форму  $\tilde{U} = U_\alpha \tilde{dx}^\alpha$ . Вычислим сначала  $d\mathcal{L}_x \tilde{U}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_x \tilde{U} &= (x^\alpha U_{\beta, \alpha} + U_\alpha x^\alpha_{, \beta}) \tilde{dx}^\beta, \\ d(\mathcal{L}_x \tilde{U}) &= (x^\alpha U_{\beta, \alpha} + U_\alpha x^\alpha_{, \beta})_{, \gamma} \tilde{dx}^\gamma \wedge \tilde{dx}^\beta. \end{aligned} \quad (1)$$

Затем вычислим  $\mathcal{L}_x(d\tilde{U})$ :

$$\begin{aligned} d\tilde{U} &= U_{\alpha, \gamma} \tilde{dx}^\gamma \wedge \tilde{dx}^\alpha, \\ \mathcal{L}_x(d\tilde{U}) &= \mathcal{L}_x(U_{\alpha, \gamma}) \tilde{dx}^\gamma \wedge \tilde{dx}^\alpha + U_{\alpha, \gamma} \mathcal{L}_x(\tilde{dx}^\gamma) \wedge \tilde{dx}^\alpha + \\ &+ U_{\alpha, \gamma} \tilde{dx}^\gamma \wedge \mathcal{L}_x(\tilde{dx}^\alpha) = \\ &= x^\tau U_{\alpha, \gamma \tau} \tilde{dx}^\gamma \wedge \tilde{dx}^\alpha + U_{\alpha, \gamma} x^{\gamma, \tau} \tilde{dx}^\tau \wedge \tilde{dx}^\alpha + \\ &+ U_{\alpha, \gamma} x^{\alpha, \tau} \tilde{dx}^\gamma \wedge \tilde{dx}^\tau = [(x^\tau U_{\beta, \tau} + U_\alpha x^\alpha_{, \beta})_{, \gamma} - \\ &- U_\alpha x^\alpha_{, \beta \gamma}] \tilde{dx}^\gamma \wedge \tilde{dx}^\beta. \end{aligned} \quad (2)$$

Переход от предпоследней строки к последней достигается простой заменой индексов. В силу симметричности частных производных и антисимметричности внешнего умножения последний член в скобках, стоящих в правой части соотношения (2), обращается в нуль. Сравнивая соотношения (1) и (2), для 1-форм получаем

$$d(\mathcal{L}_x \tilde{U}) = \mathcal{L}_x(d\tilde{U}).$$

Примененный нами метод доказательства допускает непосредственное обобщение на случай  $p$ -форм.

**Решение 8.22.**

1)  $(\nabla S)^{\hat{i}} = \tilde{\omega}^{\hat{i}} \cdot \nabla S = h_i \tilde{dx}^i \cdot \nabla S = h_i \partial S / \partial x^i$ .

2) Общее выражение для ротора должно иметь следующий вид:

$$(\nabla \times \mathbf{V})^i = |g|^{-1/2} \varepsilon^{ijk} V_{k, j} = |g|^{-1/2} \varepsilon^{ijk} V_{k, j},$$

поскольку это соотношение ковариантно и выполняется в локально плоском (декартовом) координатном репере. (Соответствующие свойства полностью антисимметричного тензора  $\varepsilon^{ijk}$  см. в задачах 3.20 и 3.21). В ортонормированном репере

$$(\nabla \times \mathbf{V})^{\hat{i}} = \tilde{\omega}^{\hat{i}} \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) = h_i (\nabla \times \mathbf{V})^i = h_i (h_1 h_2 h_3)^{-1} \varepsilon^{ijk} \partial (h_k V_{\hat{k}}) / \partial x^j.$$

3) Из решения задачи 7.7(ж) получаем

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = |g|^{-1/2} [|g|^{1/2} V^i]_{, i} = (h_1 h_2 h_3)^{-1} [(h_1 h_2 h_3) h_i^{-1} V^{\hat{i}}]_{, i}.$$



4) Из решения задачи 7.7(к) следует, что  $\nabla^2 S$  можно представить в виде

$$\nabla^2 S = |g|^{-1/2} (|g|^{1/2} g^{\alpha\beta} S_{,\beta})_{,\alpha} = (h_1 h_2 h_3)^{-1} [h_1 h_2 h_3 h_i^{-2} S_{,i}]_{,i}.$$

**Решение 8.23.** Воспользуемся результатами, полученными в п. 2 и 3 решения 8.22, и применим их к  $x^1 = r$ ,  $x^2 = \vartheta$ ,  $x^3 = \varphi$  и  $h_1 = 1$ ,  $h_2 = r$ ,  $h_3 = r \sin \vartheta$ . (Для простоты мы будем придерживаться обычных обозначений и опустим знак  $\hat{\phantom{a}}$ , указывающий физические компоненты.) Итак, имеем

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{A} &= (r^2 \sin \vartheta)^{-1} [r^2 \sin \vartheta h_i^{-1} A_i]_{,i} = \\ &= (r^2 \sin \vartheta)^{-1} [(r^2 \sin \vartheta A_r)_{,r} + (r \sin \vartheta A_\vartheta)_{,\vartheta} + r A_{\varphi,\varphi}], \\ (\nabla \times \mathbf{A})^r &= (r \sin \vartheta)^{-1} [(\sin \vartheta A_\varphi)_{,\vartheta} - A_{\vartheta,\varphi}], \\ (\nabla \times \mathbf{A})^\vartheta &= (r \sin \vartheta)^{-1} [A_{r,\varphi} - (r \sin \vartheta A_\varphi)_{,r}], \\ (\nabla \times \mathbf{A})^\varphi &= r^{-1} [(r A_\vartheta)_{,r} - A_{r,\vartheta}]. \end{aligned}$$

**Решение 8.24.** Если воспользоваться дифференциальными формами и внешним дифференцированием, то задача становится тривиальной. Из первого соотношения получаем  $\mathbf{F} = d\vec{A}$ , поэтому  $d\mathbf{F} = dd\vec{A} = 0$  (оператор  $dd$  любую форму переводит в 0). Величины  $F_{[\mu\nu;\lambda]}$  представляют собой не что иное, как компоненты дифференциала  $d\mathbf{F}$ . Тем самым утверждение задачи доказано. Вся «хитрость» состоит в том, что полная антисимметричность, присущая оператору  $d$ , «изгоняет» из задачи коэффициенты аффинной связности. «Покомпонентное» доказательство проводится без особого труда, но более громоздко.

**Решение 8.25.** В произвольной системе координат

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta.$$

Поскольку вдоль любой геодезической  $x^i = \text{const}$ , то вдоль любой геодезической  $ds^2 = g_{00} dt^2$ . Но для геодезических  $ds^2 = -d\tau^2$ , поэтому равенство  $g_{00} = -1$  выполняется всюду. Пусть  $\mathbf{e}_\alpha$  — векторы координатного репера и  $\mathbf{u} = d/d\tau$  — поле векторов, касательных к геодезическим (т. е.  $\mathbf{u} = \mathbf{e}_0$ ). Поскольку вектор  $\mathbf{u}$  ортогонален гиперповерхности  $S_t$ , то при  $\tau = 0$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_i = g_{0i} = 0$$

и

$$d(\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i)/d\tau = \nabla_{\mathbf{u}}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i) = 0 + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{e}_i = \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{e}_i} \mathbf{u}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что кривые геодезические ( $\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u} = 0$ ), а  $\mathbf{e}_i$  и  $\mathbf{u}$  образуют координатный репер ( $[\mathbf{e}_i, \mathbf{u}] = 0$ ). Но скаляр-

ное произведение  $\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{e}_i} \mathbf{u}$  равно нулю, т. е.

$$\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{e}_i} \mathbf{u} = \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{e}_i} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = 0,$$

поэтому всюду  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i = g_{0i} = 0$ .

### Решение 8.26.

а) С точки зрения современной дифференциальной геометрии коэффициенты аффинной связности  $\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$  и  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  позволяют покомпонентно описать действие «механизмов», отображающих два вектора и 1-форму в число, т. е.

$$(\text{число}) = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \sigma_\lambda u^\mu v^\nu \equiv \langle \tilde{\sigma}, \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{u} \rangle,$$

где ковариантная производная взята по той метрике, в которой вычислены коэффициенты аффинной связности  $\Gamma$ . Тензор соответствует «механизму», линейному по всем индексам (т. е. по всем его аргументам). Сами по себе коэффициенты аффинной связности  $\Gamma$  или  $\bar{\Gamma}$  не являются тензорами, поскольку

$$f \langle \tilde{\sigma}, \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{u} \rangle \neq \langle \tilde{\sigma}, \nabla_{\mathbf{v}} (f\mathbf{u}) \rangle = f \langle \tilde{\sigma}, \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{u} \rangle + \langle \tilde{\sigma}, \mathbf{u} \rangle \nabla_{\mathbf{v}} f$$

(для  $\bar{g}$  справедливы аналогичные формулы, в которых операторы  $\nabla$  заменены операторами  $\bar{\nabla}$ ). Однако если из соотношения для  $f$  вычесть соотношение для  $\bar{g}$ , то член  $\langle \tilde{\sigma}, \mathbf{u} \rangle (\nabla_{\mathbf{v}} - \bar{\nabla}_{\mathbf{v}}) f$ , нарушающий линейность, обращается в нуль, поскольку все ковариантные производные, действуя на скалярную функцию, приводят к одному и тому же результату, т. е. их можно рассматривать как производные по направлению. Следовательно,  $S_{\mu\nu}^\lambda$  — тензор.

б) Мы не можем сравнивать уравнения геодезических для  $\bar{g}$  и  $g$  непосредственно, поскольку они содержат различные аффинные параметры  $\tau$  и  $\bar{\tau}$ . Если  $t$  — произвольная функция от  $\tau$ , то в результате замены переменных уравнение геодезических принимает вид

$$\frac{d^2 x^\lambda}{dt^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} - \frac{dx^\lambda}{dt} \frac{d^2 \tau}{dt^2} \frac{dt}{d\tau} = 0.$$

Чтобы исключить  $d\tau/dt$ , умножим это уравнение на  $dx^\alpha/dt$  и, антисимметризовав по  $\alpha$  и  $\lambda$ , получим

$$u^\alpha \frac{du^\lambda}{dt} - u^\lambda \frac{du^\alpha}{dt} + (\Gamma_{\mu\nu}^\lambda u^\alpha - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha u^\lambda) u^\mu u^\nu = 0,$$

где  $u^\alpha \equiv dx^\alpha/dt$ . Если мировые линии  $u^\alpha(t)$  являются геодезическими и для  $g$ , и для  $\bar{g}$ , то это уравнение должно выполняться и при замене  $\Gamma$  на  $\bar{\Gamma}$ . Вычитая из первого уравнения второе, находим

$$(\delta_{\sigma}^{\alpha} S_{\mu\nu}^{\lambda} - \delta_{\sigma}^{\lambda} S_{\mu\nu}^{\alpha}) u^{\sigma} u^{\mu} u^{\nu} = 0,$$

Откуда

$$\delta^{\alpha}_{(\sigma} S^{\lambda}_{\mu)\nu} - \delta^{\lambda}_{(\sigma} S^{\alpha}_{\mu)\nu} = 0.$$

Свернув это тензорное уравнение по  $\alpha$  и  $\nu$ , получим

$$S^{\lambda}_{\alpha\mu} = \delta^{\lambda}_{\sigma} \Phi_{\mu} + \delta^{\lambda}_{\mu} \Phi_{\sigma},$$

$$\Phi_{\alpha} \equiv \frac{1}{5} S^{\mu}_{\alpha\mu}.$$

[См. также *Eisenhart L. P., Riemannian Geometry (Princeton University Press, 1962), Sec. 40.*<sup>1)</sup>

**Решение 8.27.** Вычисление коэффициентов связности в координатном репере приводит к громоздкому решению. Мы воспользуемся методом «1-форм вращения» (подробности см. в разделе 14.5 книги [1]). Выберем ортонормированный репер следующим образом:

$$\tilde{\omega}^{\hat{t}} = e^{\alpha} \tilde{d}t,$$

$$\tilde{\omega}^{\hat{r}} = e^{\beta} \tilde{d}r,$$

$$\tilde{\omega}^{\hat{\theta}} = e^{\gamma} \tilde{d}\theta,$$

$$\tilde{\omega}^{\hat{\varphi}} = e^{\nu} \sin \vartheta \tilde{d}\varphi.$$

Ключевыми формулами служат определение  $\tilde{\omega}^{\hat{\alpha}}_{\hat{\beta}}$ ,

$$d\tilde{\omega}^{\hat{\alpha}} = -\tilde{\omega}^{\hat{\alpha}}_{\hat{\beta}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\beta}},$$

и соотношение, задающее связь дифференциальных форм  $\tilde{\omega}$  с символами Кристоффеля,

$$\Gamma^{\hat{\nu}}_{\hat{\mu} \hat{\lambda}} \tilde{\omega}^{\hat{\lambda}} = \tilde{\omega}^{\hat{\nu}}_{\hat{\mu}}.$$

Запишем эти формулы в заданной метрике. Пусть точка означает  $\partial/\partial t$ , а штрих —  $\partial/\partial r$ :

$$d\tilde{\omega}^{\hat{t}} = e^{\alpha} \alpha' \tilde{d}r \wedge \tilde{d}t = \alpha' e^{-\beta} \tilde{\omega}^{\hat{r}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{t}}, \quad (1)$$

$$d\tilde{\omega}^{\hat{r}} = e^{\beta} \beta' \tilde{d}t \wedge \tilde{d}r = e^{-\alpha} \beta' \tilde{\omega}^{\hat{t}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{r}}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} d\tilde{\omega}^{\hat{\theta}} &= e^{\gamma} \dot{\gamma} \tilde{d}t \wedge \tilde{d}\theta + e^{\nu} \gamma' \tilde{d}r \wedge \tilde{d}\theta = \\ &= e^{-\alpha} \dot{\gamma} \tilde{\omega}^{\hat{t}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\theta}} + e^{-\beta} \gamma' \tilde{\omega}^{\hat{r}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\theta}}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} d\tilde{\omega}^{\hat{\varphi}} &= e^{\nu} \dot{\gamma} \sin \vartheta \tilde{d}t \wedge \tilde{d}\varphi + e^{\nu} \gamma' \sin \vartheta \tilde{d}r \wedge \tilde{d}\varphi + \\ &+ e^{\nu} \cos \vartheta \tilde{d}\theta \wedge \tilde{d}\varphi = e^{-\alpha} \dot{\gamma} \tilde{\omega}^{\hat{t}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\varphi}} + \\ &+ e^{-\beta} \gamma' \tilde{\omega}^{\hat{r}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\varphi}} + \operatorname{ctg} \vartheta e^{-\nu} \tilde{\omega}^{\hat{\theta}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\varphi}}. \end{aligned} \quad (4)$$

<sup>1)</sup> Имеется перевод: *Эйзенхарт Л. П., Риманова геометрия.* — М.: ИЛ, 1948, § 40. — *Прим. перев.*

Но

$$d\tilde{\omega}^{\hat{\alpha}} = -\tilde{\omega}^{\hat{\alpha}}_{\hat{\beta}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\beta}} \quad \text{и} \quad \tilde{\omega}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = -\tilde{\omega}_{\hat{\beta}\hat{\alpha}},$$

где подъем и опускание индексов производится при помощи тензора  $\eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ . При  $\hat{\alpha} = \hat{i}$  получаем

$$d\tilde{\omega}^{\hat{i}} = -\tilde{\omega}^{\hat{i}}_{\hat{r}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{r}} - \tilde{\omega}^{\hat{i}}_{\hat{\phi}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\phi}} - \tilde{\omega}^{\hat{i}}_{\hat{\psi}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\psi}}.$$

Сравнивая это соотношение с соотношением (1), можно высказать предположение о том, что

$$\tilde{\omega}^{\hat{i}}_{\hat{r}} = \tilde{\omega}^{\hat{r}}_{\hat{i}} = \alpha' e^{-\beta} \tilde{\omega}^{\hat{i}} + K_1 \tilde{\omega}^{\hat{r}}, \quad (5)$$

$$\tilde{\omega}^{\hat{i}}_{\hat{\phi}} = \tilde{\omega}^{\hat{\phi}}_{\hat{i}} = K_2 \tilde{\omega}^{\hat{\phi}}, \quad (6)$$

$$\tilde{\omega}^{\hat{i}}_{\hat{\psi}} = \tilde{\omega}^{\hat{\psi}}_{\hat{i}} = K_3 \tilde{\omega}^{\hat{\psi}}, \quad (7)$$

где  $K_1, K_2, K_3$  — функции, которые требуется найти. Аналогичным образом из соотношения (2) следует

$$\tilde{\omega}^{\hat{r}}_{\hat{i}} = e^{-\alpha\dot{\beta}} \tilde{\omega}^{\hat{r}} + K_4 \tilde{\omega}^{\hat{i}}, \quad (8)$$

$$\tilde{\omega}^{\hat{r}}_{\hat{\phi}} = -\tilde{\omega}^{\hat{\phi}}_{\hat{r}} = K_5 \tilde{\omega}^{\hat{\phi}}, \quad (9)$$

$$\tilde{\omega}^{\hat{r}}_{\hat{\psi}} = -\tilde{\omega}^{\hat{\psi}}_{\hat{r}} = K_6 \tilde{\omega}^{\hat{\psi}}. \quad (10)$$

Из соотношения (3) получаем

$$\tilde{\omega}^{\hat{\phi}}_{\hat{i}} = e^{-\alpha\dot{\gamma}} \tilde{\omega}^{\hat{\phi}}, \quad (11)$$

$$\tilde{\omega}^{\hat{\psi}}_{\hat{i}} = e^{-\beta\dot{\gamma}'} \tilde{\omega}^{\hat{\psi}}, \quad (12)$$

$$\tilde{\omega}^{\hat{\phi}}_{\hat{\psi}} = -\tilde{\omega}^{\hat{\psi}}_{\hat{\phi}} = K_7 \tilde{\omega}^{\hat{\phi}}, \quad (13)$$

а из соотношения (4) —

$$\tilde{\omega}^{\hat{\psi}}_{\hat{i}} = e^{-\alpha\dot{\gamma}} \tilde{\omega}^{\hat{\psi}}, \quad (14)$$

$$\tilde{\omega}^{\hat{\phi}}_{\hat{i}} = e^{-\beta\dot{\gamma}'} \tilde{\omega}^{\hat{\phi}}, \quad (15)$$

$$\tilde{\omega}^{\hat{\phi}}_{\hat{\psi}} = \text{ctg } \vartheta e^{-\nu} \tilde{\omega}^{\hat{\phi}}. \quad (16)$$

Сравнивая соотношения (5) — (16), находим

$$\tilde{\omega}^{\hat{i}}_{\hat{r}} = \alpha' e^{-\beta} \tilde{\omega}^{\hat{i}} + \beta e^{-\alpha} \tilde{\omega}^{\hat{r}},$$

$$\tilde{\omega}^{\hat{i}}_{\hat{\phi}} = e^{-\alpha\dot{\gamma}} \tilde{\omega}^{\hat{\phi}},$$

$$\tilde{\omega}^{\hat{i}}_{\hat{\psi}} = e^{-\alpha\dot{\gamma}} \tilde{\omega}^{\hat{\psi}},$$

$$\tilde{\omega}^{\hat{r}}_{\hat{\phi}} = -e^{-\beta\dot{\gamma}'} \tilde{\omega}^{\hat{\phi}},$$

$$\tilde{\omega}^{\hat{r}}_{\hat{\psi}} = -e^{-\beta\dot{\gamma}'} \tilde{\omega}^{\hat{\psi}},$$

$$\tilde{\omega}^{\hat{\phi}}_{\hat{\psi}} = -\text{ctg } \vartheta e^{-\nu} \tilde{\omega}^{\hat{\phi}}.$$

Но

$$\Gamma^{\hat{\nu}}_{\hat{\mu}\hat{\lambda}}\hat{\omega}^{\hat{\lambda}} = \hat{\omega}^{\hat{\nu}}_{\hat{\mu}},$$

поэтому от нуля отличны лишь коэффициенты связности

$$\Gamma^{\hat{t}}_{\hat{r}\hat{t}} = \Gamma^{\hat{r}}_{\hat{t}\hat{t}} = \alpha'e^{-\beta},$$

$$\Gamma^{\hat{t}}_{\hat{r}\hat{r}} = \Gamma^{\hat{r}}_{\hat{t}\hat{r}} = \beta e^{-\alpha},$$

$$\Gamma^{\hat{t}}_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = \Gamma^{\hat{\phi}}_{\hat{t}\hat{\phi}} = \Gamma^{\hat{t}}_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = \Gamma^{\hat{\phi}}_{\hat{t}\hat{\phi}} = \gamma e^{-\alpha},$$

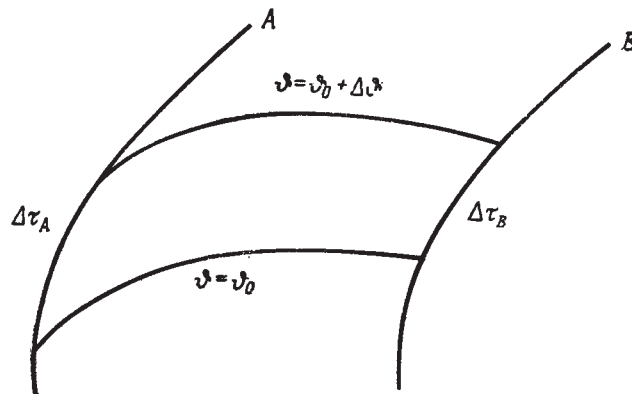
$$\Gamma^{\hat{r}}_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = -\Gamma^{\hat{\phi}}_{\hat{r}\hat{\phi}} = \Gamma^{\hat{r}}_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = -\Gamma^{\hat{\phi}}_{\hat{r}\hat{\phi}} = -\gamma'e^{-\beta},$$

$$\Gamma^{\hat{\phi}}_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = -\Gamma^{\hat{\phi}}_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = -\text{ctg } \vartheta e^{-\gamma}.$$

**Решение 8.28.** Примем за исходное соотношение

$$1 + z = \Delta\tau_A/\Delta\tau_B.$$

Чтобы доказать эквивалентность этого и другого способа измерения красного смещения, напомним, что 4-импульс  $\mathbf{p}$  пропорцио-



Фиг. 18.

нален волновому вектору  $\mathbf{k}$  — градиенту поверхностей постоянной фазы:

$$\mathbf{k} = \nabla\vartheta.$$

Поскольку  $\mathbf{k}$  — изотропный вектор, то

$$0 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \nabla\vartheta = \nabla_{\mathbf{k}}\vartheta,$$

где фаза  $\vartheta$  постоянна вдоль лучей. Рассмотрим два луча, отличающихся по фазе на  $\Delta\vartheta$ . Наблюдатель A (фиг. 18) вычисляет

$\Delta\phi$  следующим образом:

$$\Delta\phi = \phi(\tau + \Delta\tau_A) - \phi(\tau) = (\Delta\tau_A) \nabla_{u_A} \phi = (\Delta\tau_A) u_A \cdot k.$$

Наблюдатель  $B$  вычисляет ту же разность фаз  $\Delta\phi$  иначе:

$$\Delta\phi = (\Delta\tau_B) u_B \cdot k$$

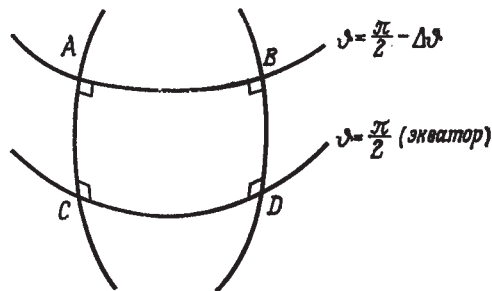
(волновой вектор  $k$  взят в точке  $B$ ). Поскольку наблюдатели  $A$  и  $B$  получают одну и ту же разность фаз  $\Delta\phi$ , то

$$\frac{\Delta\tau_A}{\Delta\tau_B} = \frac{(u \cdot k)_B}{(u \cdot k)_A} = \frac{(u \cdot p)_B}{(u \cdot p)_A}.$$

Тем самым эквивалентность обоих способов измерения красного смещения доказана.

## ГЛАВА 9

**Решение 9.1.** Если координатный «прямоугольник» построен из геодезических, то, проведя геодезическую диагональ, его можно разбить на два геодезических треугольника. Угловой избыток треугольника, образованного дугами больших кругов, равен  $\pi \cdot [\text{площадь}/a^2]$ . Поскольку сумма внутренних углов координатного «прямоугольника» равна сумме внутренних углов двух треугольников, то угловой избыток координатного «прямоугольника» равен  $\pi \cdot [\text{площадь}/a^2]$ .



Фиг. 19.

Координатный «прямоугольник» из параллелей (линий широты) и меридианов (линий долготы) удобнее всего строить вблизи экватора (фиг. 19). Угловой избыток там равен нулю и  $\overline{AC} = \overline{BD}$ , но

$$\overline{CD} - \overline{AB} = a\Delta\varphi - a\Delta\varphi \sin\left(\frac{\pi}{2} - \Delta\vartheta\right) \approx a\Delta\varphi \frac{1}{2}(\Delta\vartheta)^2,$$

поэтому

$$\frac{\overline{CD} - \overline{AB}}{\overline{AC}} \approx \frac{1}{2} \Delta\varphi \Delta\vartheta \approx \frac{1}{2} \frac{\text{площадь}}{a^2}.$$

В обоих примерах отклонение от плоскости измеряется кривизной сферы  $1/a^2$ .

**Решение 9.2.** Антисимметричность тензора Римана  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  по индексам  $(\alpha\beta)$  и  $(\gamma\delta)$  означает, что существует  $M = n(n-1)/2$  способов выбора нетривиальных пар  $(\alpha\beta)$  и аналогично  $M$  способов выбора нетривиальных пар  $(\gamma\delta)$ . Поскольку тензор Римана

симметричен относительно перестановки пар индексов  $(\alpha\beta)$  и  $(\gamma\delta)$ , то с учетом этого набор индексов  $\alpha\beta\gamma\delta$  можно выбрать  $M(M+1)/2$  способами.

Кроме того, тензор Римана обладает циклической симметрией:

$$A_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} = 0.$$

Симметричность тензора Римана относительно перестановок пар индексов гарантирует, что сумма  $A_{\alpha\beta\gamma\delta}$  полностью антисимметрична, поэтому условие  $A_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$  нетривиально только в том случае, если все индексы  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  различны. Число дополнительных условий совпадает с числом сочетаний из  $n$  объектов по 4, т. е.  $= n!/(n-4)!4!$ . (При  $n < 4$ , когда симметричность тензора Римана относительно перестановок пар индексов не налагает дополнительных ограничений, эта формула дает 0 и поэтому остается верной.) Итак, число независимых компонент тензора Римана равно

$$\frac{1}{2} M(M+1) - n!/(n-4)!4! = n^2(n^2-1)/12.$$

**Решение 9.3.** Для решения задачи необходимо каким-нибудь способом канонически упорядочить 21 независимую компоненту тензора Римана и каждому набору из 4 индексов  $I, J, K, L$  присвоить номер  $N \leq 21$ . Именно это и выполняет приводимая ниже программа, которая присваивает очередной компоненте тензора Римана  $R(I, J, K, L)$  вычисленное значение  $R(N)$ , где  $1 \leq N \leq 21$ .

```

READ I, J, K, L
SET SIGN = 1
IF I = J OR K = L SET RIEMANN = 0 AND RETURN
IF I > J EXCHANGE I, J AND SET SIGN = -I
IF K > L EXCHANGE K, L AND SET SIGN = -SIGN
SET NI = (5 * I - I * I) / 2 + J
SET N2 = (5 * K - K * K) / 2 + L
IF NI > N2 EXCHANGE NI, N2
SET N = (13 * NI - NI * NI - I2) / 2 + N2
SET RIEMANN = R(N) * SIGN
RETURN

```

**Решение 9.4.** В 2-мерном пространстве (см. задачу 9.2) существует лишь одна независимая компонента тензора Римана. В качестве нее можно выбрать

$$R_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} = g_{\vartheta\vartheta} R^{\vartheta}_{\varphi\vartheta\varphi} = g_{\vartheta\vartheta} \{ \Gamma^{\vartheta}_{\varphi\varphi, \vartheta} - \Gamma^{\vartheta}_{\vartheta\varphi, \varphi} + \Gamma^{\vartheta}_{\vartheta\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\varphi\varphi} - \Gamma^{\vartheta}_{\varphi\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\vartheta\varphi} \}.$$



Поскольку для заданной метрики  $g_{\vartheta\vartheta} = r^2$ ,  $g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \vartheta$ , то в нуль не обращаются лишь символы Кристоффеля:

$$\Gamma^{\vartheta}_{\varphi\varphi} = -\sin \vartheta \cos \vartheta, \quad \Gamma^{\varphi}_{\vartheta\varphi} = \operatorname{ctg} \vartheta$$

и, следовательно,

$$R_{\vartheta\varphi\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \vartheta = R_{\varphi\vartheta\vartheta\vartheta} = -R_{\vartheta\varphi\vartheta\vartheta} = -R_{\varphi\vartheta\vartheta\vartheta}.$$

**Решение 9.5.** В нуль не обращаются только символы Кристоффеля  $\Gamma^v_{uu} = v$  и  $\Gamma^u_{uv} = \Gamma^u_{vu} = v^{-1}$ , поэтому

$$\begin{aligned} R_{vu\,vi} &= R^v_{\,uvi} = \Gamma^v_{\,ui,\,v} - \Gamma^v_{\,vi,\,u} + \Gamma^v_{\,v\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\,ui} - \Gamma^v_{\,i\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\,uv} = \\ &= 1 - 0 + 0 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Поскольку в 2-мерном пространстве тензор Римана имеет лишь одну независимую компоненту, то  $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$  и пространство-время плоское (в задаче 6.1 это было доказано при помощи преобразования координат).

**Решение 9.6.** Из фиг. 20 видно, что два ортогональных бесконечно малых перемещения имеют величину  $a d\varphi$  и  $(b + a \sin \varphi) d\vartheta$ , поэтому

$$ds^2 = a^2 d\varphi^2 + (b + a \sin \varphi)^2 d\vartheta^2,$$

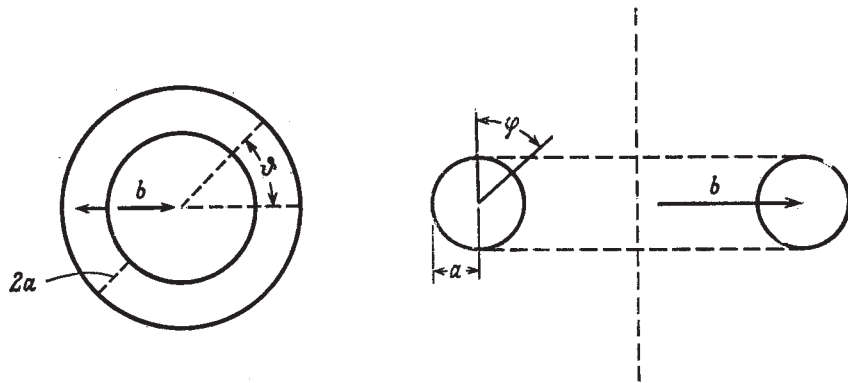
или

$$g_{\vartheta\vartheta} = (b + a \sin \varphi)^2, \quad g_{\varphi\varphi} = a^2, \quad g_{\vartheta\varphi} = g_{\varphi\vartheta} = 0.$$

Не обращающиеся в нуль символы Кристоффеля  $\Gamma$  находим по формулам.

$$\Gamma^{\varphi}_{\vartheta\vartheta} = -a^{-1} (b + a \sin \vartheta) \cos \varphi,$$

$$\Gamma^{\vartheta}_{\vartheta\varphi} = \Gamma^{\vartheta}_{\varphi\vartheta} = a \cos \varphi (b + a \sin \varphi)^{-1}.$$



Фиг. 20.

В 2-мерном пространстве тензор Римана имеет лишь одну независимую компоненту. Выбрав в качестве нее  $R_{\varphi\theta\varphi\theta}$ , по стандартной формуле получим

$$R_{\varphi\theta\varphi\theta} = a \sin \varphi (b + a \sin \varphi).$$

**Решение 9.7.**

а) В 1-мерном пространстве тензор Римана может иметь лишь одну компоненту  $R_{1111}$ . Из симметрий тензора Римана следует, что эта компонента должна быть равна нулю.

б) В 2-мерном пространстве соотношения симметрии между компонентами тензора Римана в любой системе координат можно записать в виде

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = (g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma})f.$$

Но

$$R = R^{\alpha\beta}{}_{\alpha\beta} = (g^{\alpha}{}_{\alpha}g^{\beta}{}_{\beta} - g^{\alpha}{}_{\beta}g^{\beta}{}_{\alpha})f = (4 - 2)f = 2f,$$

поэтому в любой системе координат

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma})R.$$

в) В 3-мерном пространстве тензор Римана имеет шесть независимых компонент. Поскольку шесть независимых компонент тензора Риччи можно представить в виде шести независимых линейных комбинаций компонент тензора Римана, то, обратив эти комбинации, мы выразим независимые компоненты тензора Римана через компоненты тензора Риччи.

Чтобы тензор Римана имел правильные симметрии, должно выполняться соотношение

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} = a(g_{\mu\lambda}R_{\nu\sigma} - g_{\nu\lambda}R_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}R_{\nu\lambda} + g_{\nu\sigma}R_{\mu\lambda}) + b(g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda})R.$$

Коэффициенты  $a$  и  $b$  мы найдем, свернув тензор Римана:

$$R_{\nu\sigma} = a(3R_{\nu\sigma} - R_{\nu\sigma} - R_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}R) + b(3g_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma})R,$$

откуда

$$a = 1, \quad b = -\frac{1}{2}.$$

Для проверки произведем еще одну свертку:

$$R = a(R + 3R) + b \cdot 6R = (4 - 3)R.$$

**Решение 9.8.** Докажем соотношение для тензора произвольного ранга. Выберем локально плоскую систему координат так, чтобы в некоторой точке все символы Кристоффеля (но не их производные!) обращались в нуль. В этой точке

$$R^{\lambda}{}_{\gamma\nu\kappa} = \Gamma^{\lambda}{}_{\gamma\kappa, \nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\kappa, \gamma} = -2\Gamma^{\lambda}{}_{\gamma[\nu, \kappa]}$$

и

$$(T_{\alpha\dots\beta\dots})_{;\nu\kappa} = (T_{\alpha\dots\beta\dots,\nu} + T_{\alpha\dots\sigma\dots}\Gamma_{\sigma\nu}^{\beta} + \dots - T_{\sigma\dots\beta\dots}\Gamma_{\alpha\nu}^{\sigma} - \dots)_{;\kappa} = \\ = T_{\alpha\dots\beta\dots,\nu\kappa} + T_{\alpha\dots\sigma\dots}\Gamma_{\sigma\nu,\kappa}^{\beta} + \dots - T_{\sigma\dots\beta\dots}\Gamma_{\alpha\nu,\kappa}^{\sigma} - \dots$$

Следовательно,

$$2(T_{\alpha\dots\beta\dots})_{;[\nu\kappa]} = -T_{\alpha\dots\sigma\dots}R_{\sigma\nu\kappa}^{\beta} - \dots + T_{\sigma\dots\beta\dots}R_{\alpha\nu\kappa}^{\sigma} + \dots$$

Поскольку это соотношение ковариантно, то оно выполняется в любой системе координат.

**Решение 9.9.** Вторые производные скаляра можно представить в виде

$$S_{;\alpha\beta} = (S_{,\alpha})_{;\beta} = S_{,\alpha\beta} - S_{,\sigma}\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma};$$

это выражение симметрично по  $\alpha$  и  $\beta$ .

Чтобы исследовать третьи производные, воспользуемся (как и в задаче 9.8) локально плоскими координатами. В них

$$S_{;\alpha\beta\gamma} = (S_{,\alpha\beta} - S_{,\sigma}\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma})_{;\gamma} = S_{,\alpha\beta\gamma} - S_{,\sigma}\Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^{\sigma} = S_{;(\alpha\beta)\gamma},$$

Из этого выражения и из задачи 9.8 мы также получаем

$$S_{;\alpha[\beta\gamma]} = \frac{1}{2} S_{;\sigma}R_{\alpha\beta\gamma}^{\sigma}.$$

**Решение 9.10.** образуем тензор

$$C^{\alpha\beta}_{\mu\nu} \equiv A^{\alpha\beta}_{;\mu\nu} - A^{\alpha\beta}_{;\nu\mu}.$$

Пользуясь решением задачи 9.8, запишем его в виде

$$C^{\alpha\beta}_{\mu\nu} = -A^{\sigma\beta}R_{\sigma\mu\nu}^{\alpha} - A^{\alpha\sigma}R_{\sigma\mu\nu}^{\beta},$$

откуда

$$C^{\mu\nu}_{\mu\nu} = -A^{\sigma\nu}R_{\sigma\mu\nu}^{\mu} - A^{\mu\sigma}R_{\sigma\mu\nu}^{\nu} = -A^{\sigma\nu}R_{\sigma\nu} + A^{\mu\sigma}R_{\sigma\mu} = 0.$$

**Решение 9.11.** Выберем в исходной точке  $P$  локально плоские координаты. Тогда в точке  $P$  символы Кристоффеля  $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0$ , но после перемещения на вектор  $u$

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma,\delta}u^{\delta}.$$

Когда мы параллельно переносим вектор  $A$  из точки  $P$  на вектор  $u$  (фиг. 21), то компоненты вектора  $A$  принимают следующие значения:

$$[A \text{ (смещенный на } u)]^{\alpha} = A^{\alpha} + A^{\alpha}_{;\beta}u^{\beta} = \\ = A^{\alpha} + A^{\alpha}_{;\beta}u^{\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}A^{\gamma}u^{\beta} = A^{\alpha}.$$

После параллельного переноса на вектор  $v$  компоненты вектора

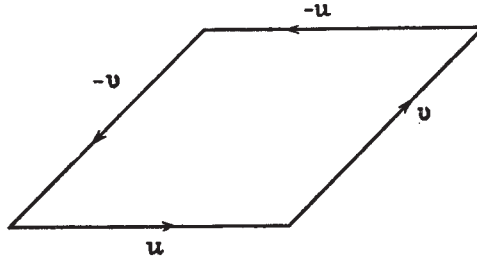
$A$  становятся равными

$$\begin{aligned} [A \text{ (смещенный на } \mathbf{u}, \text{ а затем на } \mathbf{v})]^\alpha &= \\ &= A^\alpha + A^\alpha_{;\beta} v^\beta - \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} A^\gamma v^\beta = \\ &= A^\alpha - \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} A^\gamma v^\beta = A^\alpha - \Gamma^\alpha_{\gamma\beta,\delta} A^\gamma v^\beta u^\delta. \end{aligned}$$

В ту же самую точку мы могли бы прийти, обойдя две другие стороны параллелограмма, при этом

$$\begin{aligned} [A \text{ (смещенный на } -\mathbf{v}, \text{ а затем на } -\mathbf{u})]^\alpha &= \\ &= A^\alpha - \Gamma^\alpha_{\gamma\beta,\delta} A^\gamma u^\beta v^\delta. \end{aligned}$$

Полное приращение вектора  $A$  при обходе по замкнутому контуру



Фиг. 21.

равно разности между первым и вторым выражением:

$$\delta A^\alpha = -\Gamma^\alpha_{\gamma\beta,\delta} A^\gamma v^\beta u^\delta + \Gamma^\alpha_{\gamma\beta,\delta} A^\gamma u^\beta v^\delta = -R^\alpha_{\gamma\delta\beta} A^\gamma v^\beta u^\delta.$$

**Решение 9.12.**

а) Рассмотрим сначала линейность по  $A$ . Ясно, что

$$R(A_1 + A_2, B)C = R(A_1, B)C + R(A_2, B)C.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \nabla_{fA} \nabla_B - \nabla_B \nabla_{fA} - \nabla_{[fA, B]} &= \\ = f \nabla_A \nabla_B - f \nabla_B \nabla_A - (\nabla_B f) \nabla_A - \nabla_{f[A, B]} - A \nabla_B f. \end{aligned} \quad (1)$$

Два «лишних» члена компенсируются, и мы получаем

$$R(fA, B)C = fR(A, B)C. \quad (2)$$

Нетрудно доказать, что оператор  $R(A, B)C$  в точке  $P$  зависит лишь от значения, принимаемого аргументом  $A$  в точке  $P$ , а не от характера изменения  $A$  в окрестности точки  $P$ . Пусть  $f(P) = 0$ . Из соотношения (2) следует, что если в точке  $P$  аргумент  $A$  оператора  $R$  равен нулю, то и сам оператор равен нулю. Пусть  $A_1$  и  $A_2$  — два векторных поля, совпадающих в точке  $P$ , но отличающихся в каких-нибудь других точках. Из соотношения (1) получаем

$$R(A_1, B)C - R(A_2, B)C = R(A_1 - A_2, B)C = 0.$$

Тем самым доказано, что оператор  $\mathbf{R}$  зависит лишь от значения, принимаемого аргументом  $\mathbf{A}$  в точке  $P$  (по симметрии доказательство распространяется и на аргумент  $\mathbf{B}$ ). Зависимость оператора  $\mathbf{R}$  от значения, принимаемого аргументом  $\mathbf{C}$  в точке  $P$ , доказывается аналогично.

б) Поскольку существенны лишь значения, принимаемые аргументами  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$  в точке  $P$ , то все три аргумента можно произвольно выбрать ковариантно постоянными в окрестности точки  $P$ . Тогда

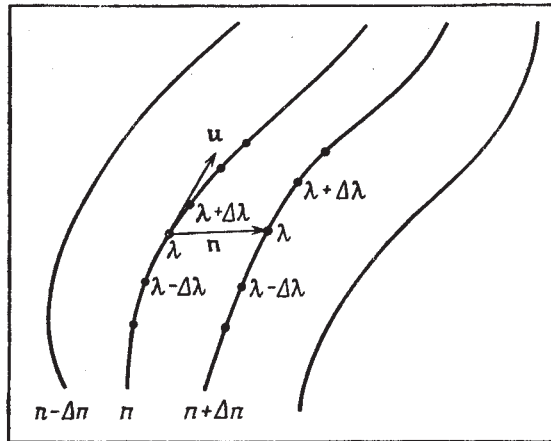
$$\begin{aligned} (\mathbf{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B})\mathbf{C})^\alpha &= (\nabla_{\mathbf{A}}\nabla_{\mathbf{B}}\mathbf{C} - \nabla_{\mathbf{B}}\nabla_{\mathbf{A}}\mathbf{C})^\alpha = \\ &= 2A^{[\sigma} (B^{\lambda]}C^\alpha{}_{;\lambda)}{}_{;\sigma} = 2A^\sigma B^\lambda C^\alpha{}_{;[\lambda;\sigma]}. \end{aligned}$$

По доказанному в решении 9.8 это выражение равно

$$R^\alpha{}_{\mu\lambda\sigma} C^\mu A^\lambda B^\sigma.$$

Тем самым утверждение задачи полностью доказано.

**Решение 9.13.** Пусть  $x^\mu = x^\mu(\lambda, n)$  — семейство геодезических с аффинным параметром  $\lambda$  (фиг. 22). Параметр  $n$  нумерует отдельные геодезические. Вектор, касательный к геодезической, имеет компоненты  $u^\alpha \equiv \partial x^\alpha / \partial \lambda$ , а компоненты бесконечно малого



Фиг. 22.

вектора, соединяющего точки с равными значениями аффинного параметра на соседних кривых, равны

$$n^\alpha = \partial x^\alpha / \partial n.$$

Решение задачи особенно наглядно в абстрактных обозначениях.

Пусть

$$\mathbf{u} = \partial/\partial\lambda, \quad \mathbf{n} = \partial/\partial n.$$

Поскольку частные производные коммутируют, то  $[\mathbf{u}, \mathbf{n}] = 0$ . [В действительности обращение в нуль коммутатора  $[\mathbf{u}, \mathbf{n}]$  служит определением вектора  $\mathbf{n}$ , соединяющего точки бесконечно близких кривых с одинаковыми значениями аффинного параметра (см. задачу 8.14).] Воспользуемся оператором Римана (см. задачу 9.12):

$$\begin{aligned} R(\mathbf{u}, \mathbf{n})\mathbf{u} &\equiv \nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{n}}\mathbf{u} - \nabla_{\mathbf{n}}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} - \nabla_{[\mathbf{u}, \mathbf{n}]}\mathbf{u} = \\ &= \nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{n}}\mathbf{u} = \nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{n} \end{aligned}$$

(последнее равенство следует из того, что коммутатор  $[\mathbf{u}, \mathbf{n}]$  обращается в нуль). Записывая полученный результат покомпонентно [см. задачу 9.12 (б)], находим

$$\frac{D^2 n^\alpha}{d\lambda^2} = (\nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{n})^\alpha = -R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} u^\beta n^\gamma u^\delta.$$

**Решение 9.14.** Удобно перейти от декартовой системы пространственных координат к полярным координатам и записать метрику в виде

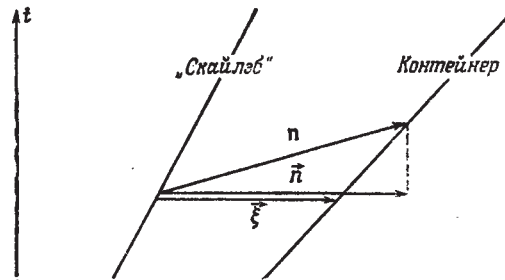
$$ds^2 = -(1 - 2M/r) dt^2 + (1 + 2M/r) (dr^2 + r^2 [d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2]).$$

Для круговой экваториальной орбиты  $u^r = u^\vartheta = 0$ , поэтому

$$Du^r/d\tau = 0 = u^\alpha \Gamma_{\alpha\beta} u^\beta = (u^0)^2 \Gamma_{00} + (u^\varphi)^2 \Gamma_{\varphi\varphi}$$

и

$$(d\varphi/dt)^2 = \omega^2 = -\Gamma_{00}/\Gamma_{\varphi\varphi}.$$



Фиг. 23.

Символы Кристоффеля вычисляются без труда, и мы находим

$$\omega^2 = (2\pi/\text{период})^2 = M/r^3.$$

Нетрудно видеть, что полученный результат совпадает с результатом, вычисленным в ньютоновском случае. В задаче 9.13 было

выведено уравнение движения для вектора  $\vec{n}$ , соединяющего точки на двух соседних геодезических с одинаковым собственным временем. В этой задаче мы рассматриваем вектор  $\vec{\xi}$ , соединяющий точки на двух соседних геодезических с заданным значением координатного времени. Из фиг. 23, однако, ясно, что разность векторов  $\vec{n}$  и  $\vec{\xi}$  пропорциональна относительной скорости контейнера с мусором и «Скайлэба», и, следовательно, в низшем порядке ее можно не принимать во внимание.

Поскольку в системе координат  $t, x, y, z$  все символы Кристоффеля имеют порядок  $M/r^2$ , а  $d/d\tau \sim \omega \sim (M/r)^{1/2} r^{-1}$ , то приближенно можно считать, что

$$\frac{D}{d\tau} = \frac{d}{dt} + \Gamma u \approx \frac{d}{dt}.$$

Кроме того,

$$\frac{d}{d\tau} = u^0 \frac{d}{dt} = \left[ 1 + \mathcal{O}\left(\frac{M}{r}\right) \right] \frac{d}{dt},$$

и поэтому

$$D^2/d\tau^2 \approx d^2/dt^2.$$

В этом приближении уравнение расхождения геодезических имеет вид

$$\frac{d^2 \xi^i}{dt^2} + R^i_{0j0} (u^0)^2 \xi^j = 0, \quad i = x, y, z,$$

а низшие члены компонент тензора Римана равны

$$R^i_{0j0} \approx \Gamma^i_{00,j} - \Gamma^i_{0j,0} = -\frac{1}{2} g_{00,ij} = \frac{M}{r^3} \left( \delta_{ij} - \frac{3x^i x^j}{r^2} \right).$$

Если орбиту «Скайлэба» мы условимся описывать параметрическими уравнениями

$$x = r \cos \omega t, \quad y = r \sin \omega t,$$

то уравнения движения для вектора  $\vec{\xi}$  будут иметь вид

$$\ddot{\xi}^z + \omega^2 \xi^z = 0,$$

$$\ddot{\xi}^x + \omega^2 \xi^x = 3\omega^2 \cos \omega t (\cos \omega t \xi^x + \sin \omega t \xi^y),$$

$$\ddot{\xi}^y + \omega^2 \xi^y = 3\omega^2 \sin \omega t (\cos \omega t \xi^x + \sin \omega t \xi^y).$$

Компонента  $\xi^z$  относительного движения вдоль оси  $z$ , очевидно, пропорциональна  $\sin \omega t$ , если контейнер с мусором был выброшен при  $t=0$ .

Чтобы найти относительное движение в плоскости  $xy$ , введем новые переменные  $\eta^1, \eta^2$ , определяемые соотношениями

$$\xi^x = \eta^1 \cos \omega t + \eta^2 \sin \omega t, \quad \xi^y = \eta^1 \sin \omega t - \eta^2 \cos \omega t.$$

Уравнения движения в новых координатах запишутся в виде

$$\begin{aligned}\ddot{\eta}^2 - 2\omega\dot{\eta}^1 &= 0, \\ \ddot{\eta}^1 + 2\omega\dot{\eta}^2 - 3\omega^2\eta^1 &= 0.\end{aligned}$$

Нетрудно найти четыре линейно-независимых решения этих уравнений:

$$\begin{aligned}[\eta^1, \eta^2] &= \left[1, \frac{3}{2}\omega t\right], \quad [0, 1], \quad [\cos \omega t, 2 \sin \omega t], \\ &[\sin \omega t, -2 \cos \omega t].\end{aligned}$$

Линейная комбинация решений, соответствующая контейнеру с мусором, выкинутому при  $t=0$  (т. е.  $\xi^x = \xi^y = 0$  при  $t=0$ ), имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\xi^x &= A [\cos 2\omega t - 3 + 2 \cos \omega t + 3\omega t \sin \omega t] + B [4 \sin \omega t - \sin 2\omega t], \\ \xi^y &= A [\sin 2\omega t + 2 \sin \omega t - 3\omega t \cos \omega t] + B [\cos 2\omega t + 3 - 4 \cos \omega t].\end{aligned}$$

Постоянные  $A$  и  $B$  зависят от параллельных осям  $x$  и  $y$  компонент скорости, с которой выброшен контейнер. Непериодические члены решения связаны с тем, что периоды движения по орбитам «Скайлэба» и контейнера с мусором незначительно отличаются, поэтому зависимость относительного расстояния от времени содержит вековой член.

**Решение 9.15.** Выберем локально плоские координаты так, чтобы

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = 2\Gamma^\alpha_{\beta[\delta, \gamma]}.$$

В этих координатах

$$R^\alpha_{[\beta\gamma\delta]} = 2\Gamma^\alpha_{[\beta[\delta, \gamma]]} = 2\Gamma^\alpha_{[\beta\delta, \gamma]}.$$

Поскольку символы Кристоффеля симметричны по нижним индексам, то правая часть должна обратиться в нуль, и, опуская первый индекс, получаем

$$R_{\alpha[\beta\gamma\delta]} = 0.$$

Тензор Римана антисимметричен по двум последним индексам, и поэтому это соотношение эквивалентно циклическому тождеству.

Из задачи 9.8 известно, что для любого вектора  $U^\alpha$  справедливо соотношение

$$2U^\alpha_{;[\beta\gamma]} = -U^\sigma R^\alpha_{\sigma\beta\gamma}.$$

Зададим вектор  $U^\alpha$  в некоторой точке и перенесем его параллельно вдоль геодезической во все точки некоторой ее окрестности. Тогда в выбранной точке  $U^\alpha_{; \beta} = 0$  при всех  $\beta$ . Следовательно,

$$2U^\alpha_{;[\beta\gamma]\delta} = -U^\sigma R^\alpha_{\sigma\beta\gamma; \delta}$$



и

$$2U^\alpha_{; [\beta\gamma]\delta} = 2U^\alpha_{; [\beta\gamma\delta]} = -U^\sigma R^\alpha_{\sigma[\beta\gamma;\delta]}.$$

Из той же задачи 9.8 известно, что для тензора  $U^\alpha_{;\beta}$  справедливо соотношение

$$2U^\alpha_{;\beta[\gamma\delta]} = -U^\sigma_{;\beta} R^\alpha_{\sigma\gamma\delta} + U^\alpha_{;\sigma} R^\sigma_{\beta\gamma\delta}.$$

Поскольку в выбранной точке  $U^\alpha_{;\beta} = 0$ , то

$$U^\alpha_{;\beta[\gamma\delta]} = 0$$

и, следовательно,

$$U^\alpha_{;[\beta\gamma\delta]} = 0.$$

Направление вектора  $U^\alpha$  в выбранной точке можно задать произвольно, поэтому

$$R^\alpha_{\sigma[\beta\gamma;\delta]} = 0.$$

Поскольку тензор Римана антисимметричен по двум последним индексам, то это соотношение эквивалентно тождествам Бианки. (Разумеется, тождества Бианки можно вывести более простым, но громоздким способом, дифференцируя и преобразуя формулу, выражающую компоненты тензора Римана через символы Кристоффеля. При таком подходе вычисления удобнее всего проводить в локально плоских координатах.)

**Решение 9.16.** Свертывая тождества Бианки

$$R^\gamma_{\beta\gamma\delta;\epsilon} + R^\alpha_{\beta\epsilon\gamma;\delta} + R^\alpha_{\beta\delta\epsilon;\gamma} = 0$$

сначала по  $\alpha$  и  $\gamma$ , а затем по  $\beta$  и  $\delta$ , получаем

$$R_{\beta\delta;\epsilon} + R_{\beta\epsilon;\delta} + R^\alpha_{\beta\delta\epsilon;\alpha} = 0,$$

$$R_{;\epsilon} - R^\beta_{\epsilon;\beta} - R^\alpha_{;\epsilon} = 0.$$

Следовательно, дивергенция тензора Эйнштейна

$$G^\nu_{;\epsilon} = \left( R^\nu_{\epsilon} - \frac{1}{2} \delta_{\epsilon}^{\nu} R \right)_{;\nu} = R^\nu_{\epsilon;\nu} - \frac{1}{2} R_{;\epsilon}$$

должна обращаться в нуль.

**Решение 9.17.** Выберем векторы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  так, чтобы они были взаимно ортогональными в точке  $P$  и удовлетворяли условиям  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = -1$ ,  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} = 1$ . Поскольку пространство время плоское по Риману, то параллельный перенос по замкнутому контуру не изменяет вектор и в точках, отличных от точки  $P$ , векторы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  можно задать при помощи параллельного переноса. Выполнив эту операцию для вектора  $\mathbf{A}$ , получим

$$\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} = -\Gamma^\nu_{\alpha\beta} A_\nu.$$

откуда

$$\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha},$$

так что компоненты вектора  $\mathbf{A}$  можно выбрать в виде  $A_\alpha = \varphi_{,\alpha}$ . Аналогичные соотношения справедливы и для компонент векторов  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{D}$ . Полученные результаты мы объединим, задав векторы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  в виде

$$\mathbf{A} = \mathbf{W}^{(0)}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{W}^{(1)}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{W}^{(2)}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{W}^{(3)}$$

и определив функции  $\Phi^{(0)}$ ,  $\Phi^{(1)}$ ,  $\Phi^{(2)}$ ,  $\Phi^{(3)}$  следующим образом:

$$\mathbf{W}^{(\mu)} = \nabla \Phi^{(\mu)}.$$

Поскольку скалярное произведение векторов сохраняется при параллельном переносе, то из соотношения

$$\mathbf{W}^{(\mu)} \cdot \mathbf{W}^{(\nu)} = [\mathbf{W}^{(\mu)} \cdot \mathbf{W}^{(\nu)}]_{\rho} = \eta^{\mu\nu}$$

мы заключаем, что

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial \Phi^{(\alpha)}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \Phi^{(\beta)}}{\partial x^\nu} = \eta^{\alpha\beta}.$$

Следовательно, существует преобразование координат

$$\bar{x}^\mu = \Phi^{(\mu)}(x^\mu),$$

переводящее исходную метрику в метрику Минковского.

**Решение 9.18.** Если тензор Вейля равен нулю, то метрику можно представить в конформно-плоском виде

$$ds^2 = e^{2\varphi} ds_0^2 = e^{2\varphi} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

где  $\varphi$  — функция от  $x^\alpha$ . Изотропные геодезические

$$dt = \vec{n} \cdot \vec{dx}, \quad \vec{n} \cdot \vec{n} = 1$$

в метрике  $ds_0^2$  остаются изотропными кривыми в метрике  $ds^2$ . Если удастся доказать, что эти кривые совпадают с геодезическими в метрике  $ds^2$ , то конус изотропных геодезических при переходе от  $ds_0^2$  к  $ds^2$  останется конусом и не будет предпочтительного направления сжатия поперечного сечения.

Докажем, что кривые  $dt = \vec{n} \cdot \vec{dx}$  — геодезические. Для этого необходимо лишь убедиться в том, что для изотропных геодезических

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} = \frac{dp^\alpha}{d\lambda} = 0.$$

Заметим, что символы Кристоффеля равны

$$\Gamma^\alpha_{\gamma\beta} = \eta^{\alpha\mu} [-\varphi_{,\mu} \eta_{\gamma\beta} + \varphi_{,\beta} \eta_{\gamma\mu} + \varphi_{,\gamma} \eta_{\mu\beta}],$$

поэтому

$$\rho^\nu \rho^\beta \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} = 2\rho^\alpha (\nabla \varphi \cdot \rho)$$

и

$$0 = \frac{dp^\alpha}{d\lambda} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} p^\beta p^\gamma = \frac{dp^\alpha}{d\lambda} + 2p^\alpha (\nabla\varphi \cdot p).$$

Следовательно, при надлежаще выбранном масштабе по  $\lambda$  первый член обращается в нуль ( $dp^\alpha/d\lambda = 0$ ) и изотропные прямые в метрике  $ds_0^2$  служат изотропными геодезическими в метрике  $ds^2$ .

Необходимо иметь в виду, что, хотя форма поперечного сечения светового пучка остается неизменной, площадь поперечного сечения, как и все площади, умножается на  $e^{2\varphi}$ . Поскольку функция  $\varphi$ , вообще говоря, анизотропна, то скорость, с которой увеличивается площадь поперечного сечения, зависит от того, в каком направлении распространяется пучок света.

**Решение 9.19.** В конформно-плоском пространстве тензор Вейля равен нулю и компоненты тензора Римана нетрудно вычислить по компонентам тензора Риччи:

$$R_{\mu\nu} = -(\ln |g|^{1/2})_{,\mu\nu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu, \alpha} + (\ln |g|^{1/2})_{,\alpha} \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \Gamma^\beta_{\mu\alpha} \Gamma^\alpha_{\nu\beta}.$$

Для вычисления нам понадобятся следующие выражения:

$$\begin{aligned} \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} &= -\varphi_{,\alpha} \eta_{\gamma\beta} + \varphi_{,\beta} \delta^\alpha_\gamma + \varphi_{,\gamma} \delta^\alpha_\beta, \\ \Gamma^\alpha_{\gamma\beta, \alpha} &= -\nabla^2 \varphi \eta_{\gamma\beta} + 2\varphi_{,\beta\gamma}, \\ \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} \Gamma^\gamma_{\mu\alpha} &= 6\varphi_{,\mu} \varphi_{,\beta} - 2(\nabla\varphi)^2 \eta_{\mu\beta}, \\ -g &= e^{2\varphi}, \quad \ln |g|^{1/2} = 4\varphi, \\ (\ln |g|^{1/2})_{,\alpha} \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} &= -4(\nabla\varphi)^2 \eta_{\gamma\beta} + 8\varphi_{,\beta} \varphi_{,\gamma}, \\ (\ln |g|^{1/2})_{,\gamma\beta} &= 4\varphi_{,\gamma\beta}. \end{aligned}$$

Поднятие и опускание индексов в этих выражениях производилось при помощи тензора  $\eta_{\mu\nu}$ , например,

$$\varphi^{,\alpha} \equiv \eta^{\mu\alpha} \varphi_{,\mu}; \quad \nabla^2 \varphi \equiv \eta^{\mu\alpha} \varphi_{,\mu\alpha}; \quad (\nabla\varphi)^2 \equiv \eta^{\mu\alpha} \varphi_{,\mu} \varphi_{,\alpha}.$$

Тензор Риччи и скалярная кривизна соответственно равны

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= -2\varphi_{,\mu\nu} + 2\varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} - \eta_{\mu\nu} [\nabla^2 \varphi + 2(\nabla\varphi)^2], \\ R &\equiv R^\mu_\mu = e^{-2\varphi} \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = -6e^{-2\varphi} [\nabla^2 \varphi + (\nabla\varphi)^2], \end{aligned}$$

а тензор Римана —

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= C_{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{1}{2} (g_{\alpha\gamma} R_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} R_{\beta\gamma} - g_{\beta\gamma} R_{\alpha\delta} + g_{\beta\delta} R_{\alpha\gamma}) - \\ &= \frac{1}{6} (g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma}) R = \\ &= \frac{1}{2} e^{2\varphi} (\eta_{\alpha\gamma} R_{\beta\delta} - \eta_{\alpha\delta} R_{\beta\gamma} - \eta_{\beta\gamma} R_{\alpha\delta} + \eta_{\beta\delta} R_{\alpha\gamma}) - \\ &= \frac{1}{6} e^{4\varphi} (\eta_{\alpha\gamma} \eta_{\beta\delta} - \eta_{\alpha\delta} \eta_{\beta\gamma}) R = \\ &= e^{2\varphi} [\eta_{\alpha\gamma} (\varphi_{,\beta} \varphi_{,\delta} - \varphi_{,\beta\delta}) - \eta_{\alpha\delta} (\varphi_{,\beta} \varphi_{,\gamma} - \varphi_{,\beta\gamma}) - \\ &= \eta_{\beta\gamma} (\varphi_{,\alpha} \varphi_{,\delta} - \varphi_{,\alpha\delta}) + \eta_{\beta\delta} (\varphi_{,\alpha} \varphi_{,\gamma} - \varphi_{,\alpha\gamma}) + \\ &+ (\nabla\varphi)^2 (-\eta_{\alpha\gamma} \eta_{\beta\delta} + \eta_{\alpha\delta} \eta_{\beta\gamma})]. \end{aligned}$$

**Решение 9.20.** Воспользуемся таким же ортонормированным репером, как в задаче 8.27:

$$\tilde{\omega}^t = e^\alpha \tilde{dt}, \quad \tilde{\omega}^r = e^\beta \tilde{dr}, \quad \tilde{\omega}^\theta = e^\gamma \tilde{d\theta}, \quad \tilde{\omega}^\varphi = e^\gamma \sin \vartheta \tilde{d\varphi}. \quad (1)$$

В задаче 8.27 мы вычислили шесть 1-форм связности  $\tilde{\omega}^{\hat{\mu}}_{\hat{\nu}}$  из соотношений

$$d\tilde{\omega}^{\hat{\mu}} = -\tilde{\omega}^{\hat{\mu}}_{\hat{\nu}} \tilde{\omega}^{\hat{\nu}}, \quad \tilde{\omega}^{\hat{\mu}}_{\hat{\nu}} = -\tilde{\omega}^{\hat{\nu}}_{\hat{\mu}}. \quad (2)$$

Тензор Римана проще всего найти из шести 2-форм кривизны  $\mathcal{R}^{\hat{\mu}}_{\hat{\nu}}$ :

$$\mathcal{R}^{\hat{\mu}}_{\hat{\nu}} = d\tilde{\omega}^{\hat{\mu}}_{\hat{\nu}} + \tilde{\omega}^{\hat{\mu}}_{\hat{\alpha}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\alpha}}_{\hat{\nu}}, \quad (3)$$

$$\mathcal{R}^{\hat{\mu}}_{\hat{\nu}} = \frac{1}{2} R^{\hat{\mu}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \tilde{\omega}^{\hat{\alpha}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\beta}}. \quad (4)$$

Преимущество этого метода состоит в том, что вычисляются лишь ненулевые компоненты тензора Римана. Подставляя в соотношение (3) вычисленные в решении 8.27 1-формы  $\tilde{\omega}$ , находим

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{\hat{t}}_{\hat{r}} &= d(\alpha' e^{(\alpha-\beta)} \tilde{dt} + \beta e^{\beta-\alpha} \tilde{dr}) + \tilde{\omega}^{\hat{t}}_{\hat{\theta}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\theta}}_{\hat{r}} + \tilde{\omega}^{\hat{t}}_{\hat{\varphi}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\varphi}}_{\hat{r}} = \\ &= [\alpha'' + (\alpha')^2 - \alpha'\beta'] e^{\alpha-\beta} \tilde{dt} \wedge \tilde{dr} + (\beta' + \beta^2 - \alpha\beta) e^{\beta-\alpha} \tilde{dt} \wedge \tilde{dr} = \\ &= [e^{-2\alpha} (\beta' + \beta^2 - \alpha\beta) - e^{-2\beta} (\alpha'' + \alpha'^2 - \alpha'\beta')] \tilde{\omega}^{\hat{t}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{r}} \end{aligned} \quad (5)$$

(точка означает  $\partial/\partial t$ , а штрих —  $\partial/\partial r$ ). Член  $d\omega^{\hat{t}}_{\hat{r}}$  вычислен в координатном репере с учетом того, что  $dd=0$ . Остальные 2-формы кривизны имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{\hat{t}}_{\hat{\theta}} &= d(e^{\gamma-\alpha\gamma} \tilde{d\theta}) + \tilde{\omega}^{\hat{t}}_{\hat{r}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{r}}_{\hat{\theta}} + \tilde{\omega}^{\hat{t}}_{\hat{\varphi}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\varphi}}_{\hat{\theta}} = \\ &= [e^{-2\alpha} (\ddot{\gamma} + \dot{\gamma}^2 - \alpha\dot{\gamma}) - e^{-2\beta} \alpha'\gamma'] \tilde{\omega}^{\hat{t}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\theta}} + \\ &+ e^{-(\alpha+\beta)} (\dot{\gamma}\gamma' - \alpha'\dot{\gamma} + \dot{\gamma}' - \gamma'\beta) \tilde{\omega}^{\hat{r}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\theta}}; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{\hat{t}}_{\hat{\varphi}} &= d(e^{\gamma-\alpha\gamma} \sin \vartheta \tilde{d\varphi}) + \tilde{\omega}^{\hat{t}}_{\hat{r}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{r}}_{\hat{\varphi}} + \tilde{\omega}^{\hat{t}}_{\hat{\theta}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\theta}}_{\hat{\varphi}} = \\ &= [e^{-2\alpha} (\ddot{\gamma} + \dot{\gamma}^2 - \alpha\dot{\gamma}) - e^{-2\beta} \alpha'\gamma'] \tilde{\omega}^{\hat{t}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\varphi}} + \\ &+ e^{-(\alpha+\beta)} (\dot{\gamma}\gamma' - \alpha'\dot{\gamma} + \dot{\gamma}' - \gamma'\beta) \tilde{\omega}^{\hat{r}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\varphi}}; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{\hat{r}}_{\hat{\theta}} &= -d(e^{\gamma-\beta\gamma'} \tilde{d\theta}) + \tilde{\omega}^{\hat{r}}_{\hat{t}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{t}}_{\hat{\theta}} + \tilde{\omega}^{\hat{r}}_{\hat{\varphi}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\varphi}}_{\hat{\theta}} = \\ &= [e^{-2\beta} (\gamma'' + \gamma'^2 - \beta'\gamma') - e^{-2\alpha} \beta\dot{\gamma}] \tilde{\omega}^{\hat{r}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\theta}} + \\ &+ e^{-(\alpha+\beta)} (\dot{\gamma}\gamma' - \alpha'\dot{\gamma} + \dot{\gamma}' - \gamma'\beta) \tilde{\omega}^{\hat{t}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\theta}}; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{\hat{r}}_{\hat{\varphi}} &= -d(e^{\gamma-\beta\gamma'} \sin \vartheta \tilde{d\varphi}) + \tilde{\omega}^{\hat{r}}_{\hat{t}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{t}}_{\hat{\varphi}} + \tilde{\omega}^{\hat{r}}_{\hat{\theta}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\theta}}_{\hat{\varphi}} = \\ &= [e^{-2\beta} (\gamma'' + \gamma'^2 - \beta'\gamma') - e^{-2\alpha} \beta\dot{\gamma}] \tilde{\omega}^{\hat{r}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\varphi}} + \\ &+ e^{-(\alpha+\beta)} (\dot{\gamma}\gamma' - \alpha'\dot{\gamma} + \dot{\gamma}' - \gamma'\beta) \tilde{\omega}^{\hat{t}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\varphi}}; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{\hat{\theta}}_{\hat{\varphi}} &= -d(\cos \vartheta \tilde{d\varphi}) + \tilde{\omega}^{\hat{\theta}}_{\hat{r}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{r}}_{\hat{\varphi}} + \tilde{\omega}^{\hat{\theta}}_{\hat{t}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{t}}_{\hat{\varphi}} = \\ &= (e^{-2\gamma} + e^{-2\alpha\dot{\gamma}^2} - e^{-2\beta}\gamma'^2) \tilde{\omega}^{\hat{\theta}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\varphi}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Ненулевые компоненты тензора Римана мы найдем из соотношения (4):

$$\begin{aligned}
 R^{\hat{r}\hat{r}}_{\hat{r}\hat{r}} &= A, \\
 R^{\hat{t}\hat{\phi}}_{\hat{t}\hat{\phi}} &= R^{\hat{t}\hat{\phi}}_{\hat{t}\hat{\phi}} = B, \\
 R^{\hat{t}\hat{\phi}}_{\hat{r}\hat{\phi}} &= R^{\hat{t}\hat{\phi}}_{\hat{r}\hat{\phi}} = -R^{\hat{r}\hat{\phi}}_{\hat{t}\hat{\phi}} = -R^{\hat{r}\hat{\phi}}_{\hat{t}\hat{\phi}} = C, \\
 R^{\hat{\phi}\hat{\phi}}_{\hat{\phi}\hat{\phi}} &= D, \\
 R^{\hat{r}\hat{\phi}}_{\hat{r}\hat{\phi}} &= R^{\hat{r}\hat{\phi}}_{\hat{r}\hat{\phi}} = E,
 \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned}
 A &= e^{-2\alpha} (\ddot{\beta} + \dot{\beta}^2 - \dot{\alpha}\dot{\beta}) - e^{-2\beta} (\alpha'' + \alpha'^2 - \alpha'\beta'), \\
 B &= e^{-2\alpha} (\ddot{\gamma} + \dot{\gamma}^2 - \dot{\alpha}\dot{\gamma}) - e^{-2\beta} \alpha'\gamma', \\
 C &= e^{-(\alpha+\beta)} (\dot{\gamma}' + \dot{\gamma}\gamma' - \alpha'\dot{\gamma} - \dot{\beta}\gamma'), \\
 D &= e^{-2\gamma} + e^{-2\alpha}\dot{\gamma}^2 - e^{-2\beta}\gamma'^2, \\
 E &= e^{-2\alpha}\dot{\beta}\dot{\gamma} - e^{-2\beta} (\gamma'' + \gamma'^2 - \beta'\gamma').
 \end{aligned} \tag{12}$$

Тензор Риччи мы получим, свернув тензор Римана:

$$R^{\hat{\alpha}}_{\hat{\beta}} = R^{\hat{\gamma}}_{\hat{\delta}} \hat{\alpha}^{\hat{\gamma}} \hat{\beta}^{\hat{\delta}}.$$

Компоненты тензора Риччи равны

$$\begin{aligned}
 R^{\hat{t}}_{\hat{t}} &= A + 2B, \\
 R^{\hat{r}}_{\hat{r}} &= 2C, \\
 R^{\hat{r}}_{\hat{r}} &= A + 2E, \\
 R^{\hat{\phi}}_{\hat{\phi}} &= R^{\hat{\phi}}_{\hat{\phi}} = B + D + E, \\
 R^{\hat{t}}_{\hat{\phi}} &= R^{\hat{t}}_{\hat{\phi}} = R^{\hat{r}}_{\hat{\phi}} = R^{\hat{r}}_{\hat{\phi}} = R^{\hat{\phi}}_{\hat{\phi}} = 0.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Зная их, находим скалярную кривизну

$$R = R^{\hat{\alpha}}_{\hat{\alpha}} = 2A + 4B + 2D + 4E. \tag{14}$$

Тензор Эйнштейна определяется соотношением

$$G^{\hat{\alpha}}_{\hat{\beta}} = R^{\hat{\alpha}}_{\hat{\beta}} - \frac{1}{2} \delta^{\hat{\alpha}}_{\hat{\beta}} R.$$

Его компоненты равны

$$\begin{aligned}
 G^{\hat{t}}_{\hat{t}} &= -(D + 2E), \\
 G^{\hat{r}}_{\hat{r}} &= 2C, \\
 G^{\hat{r}}_{\hat{r}} &= -(D + 2B), \\
 G^{\hat{\phi}}_{\hat{\phi}} &= G^{\hat{\phi}}_{\hat{\phi}} = -(A + B + E), \\
 G^{\hat{t}}_{\hat{\phi}} &= G^{\hat{t}}_{\hat{\phi}} = G^{\hat{r}}_{\hat{\phi}} = G^{\hat{r}}_{\hat{\phi}} = G^{\hat{\phi}}_{\hat{\phi}} = 0.
 \end{aligned} \tag{15}$$

**Решение 9.21.** Выберем ортонормированный базис  $e_{\hat{\alpha}}$  и построим репер из комплексных изотропных векторов, ориентированный так, чтобы волновой вектор  $\nabla u \equiv k$  был одним из его базисных векторов:

$$\begin{aligned} k &= (2)^{-\frac{1}{2}}(e_{\hat{t}} + e_{\hat{z}}), \\ l &= (2)^{-\frac{1}{2}}(e_{\hat{t}} - e_{\hat{z}}), \\ m &= (2)^{-\frac{1}{2}}(e_{\hat{x}} + ie_{\hat{y}}), \\ \bar{m} &= (2)^{-\frac{1}{2}}(e_{\hat{x}} - ie_{\hat{y}}), \end{aligned} \quad (1)$$

затем рассмотрим компоненты тензора Римана в этом репере, например  $R_{lm\bar{m}l} = R_{\alpha\beta\gamma\delta}l^{\alpha}m^{\beta}\bar{m}^{\gamma}l^{\delta}$  и т. д. Поскольку тензор Римана зависит только от запаздывающего времени и в соотношениях (1) от нуля отличны лишь скалярные произведения базисных векторов

$$-k \cdot l = m \cdot \bar{m} = 1, \quad (2)$$

то

$$R_{abcd, p} = 0, \quad (3)$$

где индексы  $(a, b, c, d)$  пробегает значения  $(k, l, m, n)$ , а индексы  $(p, q, r, \dots)$  — значения  $(k, m, \bar{m})$ . Рассмотрим для тензора Римана часть тождеств Бианки

$$R_{ab[pq, l]} = 0, \quad (4)$$

где индекс  $l$  соответствует вектору  $l$  в соотношении (1). Пользуясь соотношением (3), из соотношения (4) получаем

$$R_{abpq, l} = 0, \quad (5)$$

а объединяя соотношения (3) и (5), с точностью до тривиальной «неволнообразной» постоянной находим

$$R_{abpq} = R_{pqab} = 0. \quad (6)$$

Следовательно, все отличные от нуля компоненты тензора Римана должны иметь вид  $R_{plql}$ . Учитывая симметрии тензора Римана, нетрудно понять, что число независимых компонент равно лишь шести. Эти шесть компонент соответствуют числу степеней свободы наиболее общей гравитационной волны в метрической теории гравитации. В эйнштейновской теории гравитационная волна обладает лишь двумя степенями свободы.

**Решение 9.22.** В локально лоренцевской системе отсчета ускорение любой частицы связано с  $F^{\mu\nu}$  уравнением для силы Лоренца:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = \frac{e}{m} F^\alpha{}_\beta u^\beta.$$

Шесть компонент  $F^\alpha{}_\beta$  удобно представлять себе как векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ . В сопутствующей системе отсчета частица имеет нулевую скорость и не «ощущает» действия магнитного поля. Измеряя три компоненты ускорения частицы, находим вектор  $\vec{E}$ . Измеряя в той же системе отсчета ускорение другой частицы, мы можем определить лишь две компоненты вектора  $\vec{B}$ , поскольку его компонента, параллельная направлению движения, не создает ускорения. Следовательно, для измерения всех компонент  $F^\alpha{}_\beta$  необходимы по крайней мере три частицы.

Предоставляем читателю самостоятельно ответить на вопрос задачи о тензоре Римана, пользуясь уравнением расхождения геодезических:

$$\frac{D^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = -R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} u^\beta \xi^\gamma u^\delta.$$

**Решение 9.23.** Выберем систему координат, связанную с поверхностью. Пусть на поверхности координаты  $x^1, x^2$  изменяются, а координаты  $x^3, x^4$  постоянны. Из компонент векторов **A** и **B** контравариантны лишь компоненты 1 и 2. Следовательно, для нас представляют интерес только компоненты тензора Римана с индексами 1 и 2, но среди них существует лишь одна независимая компонента:  $R_{1212}$ . Отличные от нуля компоненты тензора Римана этого типа связаны между собой соотношениями симметрии, которые можно представить в виде

$$R_{ijkl} \sim (g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}), \quad i, j, k, l = 1, 2.$$

Отсюда непосредственно следует, что в выбранной нами системе координат скалярная кривизна  $K$  не зависит от векторов **A** и **B**, а поскольку  $K$  не зависит и от координат, то тем самым утверждение задачи доказано во всей общности.

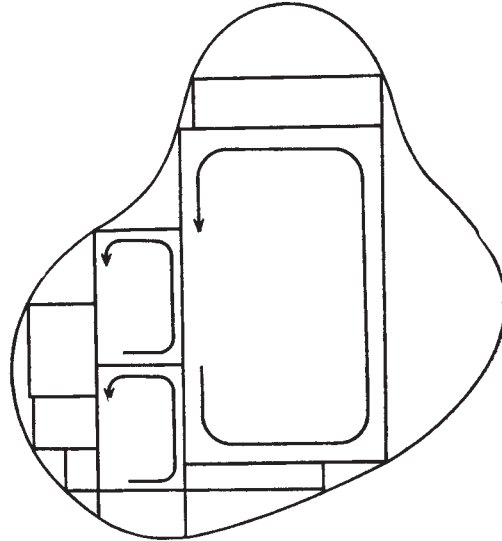
**Решение 9.24.** Разделим внутренность контура (фиг. 24) на бесконечно малые прямоугольники и рассмотрим, как изменяется угол между векторами **A** и **B** при параллельном переносе их по контуру одного такого прямоугольника. Пусть **u** и **v** — стороны прямоугольника. Как показано в решениях 9.23 и 9.11, при параллельном переносе по контуру такого прямоугольника вектор **A** получает приращение:

$$\delta^\alpha A_\alpha = -R_{\alpha\beta\mu\nu} A^\beta u^\mu v^\nu = K (g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}) A^\beta u^\mu v^\nu.$$

Заметим, что

$$A^\alpha \delta A_\alpha = \frac{1}{2} \delta (A \cdot A) = 0,$$

поэтому длина вектора  $A$  остается неизменной. Изменение угла  $\vartheta$



Фиг. 24.

между векторами  $A$  и  $B$  можно вычислить из соотношений

$$B^\alpha \delta A_\alpha = \delta (A^\alpha B_\alpha) = |A| |B| \delta (\cos \vartheta) = -|A| |B| \sin \vartheta \delta \vartheta$$

и

$$B^\alpha \delta A_\alpha = K [(B \cdot u)(A \cdot v) - (B \cdot v)(A \cdot u)].$$

Выбрав на поверхности локально плоскую систему координат с  $u \sim e_1$ ,  $v \sim e_2$ , получим

$$\begin{aligned} |A| |B| \sin \vartheta \delta \vartheta &= K (B^1 A^2 - B^2 A^1) uv = \\ &= K |A \times B| uv = K \sin \vartheta |A| |B|. \end{aligned}$$

(Площадь участка 2-мерной поверхности, заключенного внутри контура).

Итак, при параллельном переносе по контуру бесконечно малого прямоугольника

$$|\delta \vartheta| = K \delta \Sigma.$$

Если рассмотреть контур более общего вида, то приращение вектора  $A$  при параллельном переносе вдоль контура будет равно



приращению вектора  $\mathbf{A}$  при переносе по всем прямоугольникам, на которые разбит этот контур, а площадь заключенной внутри него поверхности равна сумме площадей прямоугольников. Следовательно,

$$|\Delta\theta| = K \Delta\Sigma.$$

**Решение 9.25.** Пусть

$$W_{\alpha\gamma\beta\delta} \equiv K(g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}) - R_{\alpha\gamma\beta\delta}. \quad (1)$$

Заметим, что  $W_{\alpha\gamma\beta\delta}$  обладает теми же симметриями, как и  $R_{\alpha\gamma\beta\delta}$ . Если в заданной точке риманова кривизна  $K$  не зависит от векторов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ , то по определению  $K$  (задача 9.23) при *любых*  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$

$$W_{\alpha\gamma\beta\delta}A^\alpha A^\beta B^\gamma B^\delta = 0, \quad (2)$$

и, следовательно,

$$W_{\alpha\gamma\beta\delta} + W_{\beta\delta\alpha\gamma} + W_{\alpha\delta\beta\gamma} + W_{\beta\gamma\alpha\delta} = 0. \quad (3)$$

Симметрии  $W_{\alpha\gamma\beta\delta}$  позволяют записать соотношение (3) в виде

$$W_{\alpha\gamma\beta\delta} = W_{\alpha\delta\gamma\beta}. \quad (4)$$

При циклической перестановке индексов  $(\gamma\beta\delta)$  получаем еще одно соотношение:

$$W_{\alpha\delta\gamma\beta} = W_{\alpha\beta\delta\gamma}. \quad (5)$$

Подставляя соотношения (4) и (5) в циклическое тождество

$$W_{\alpha\gamma\beta\delta} + W_{\alpha\delta\gamma\beta} + W_{\alpha\beta\delta\gamma} = 0, \quad (6)$$

находим

$$W_{\alpha\gamma\beta\delta} = 0,$$

что и требовалось доказать.

**Решение 9.26.** Поскольку метрика всегда ковариантно постоянна, то

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta;\lambda} = K_{,\lambda}(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}).$$

Подставляя это выражение в тождества Бианки:

$$0 = R_{\alpha\beta\gamma\delta;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\gamma;\delta} + R_{\alpha\beta\delta\lambda;\gamma}$$

и свертывая по  $\alpha$ ,  $\gamma$  и  $\beta$ ,  $\delta$ , получаем

$$K_{,\lambda} = 0,$$

т. е. кривизна  $K$  постоянная.

**Решение 9.27.** Свертывая тензор Римана, находим

$$R_{\mu\kappa} = 3Kg_{\mu\kappa},$$

$$R = 12K.$$

По определению тензор Вейля равен

$$C_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\lambda\mu\nu\kappa} - \frac{1}{2} (g_{\lambda\nu}R_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R_{\lambda\kappa} + g_{\mu\kappa}R_{\lambda\nu}) + \\ + \frac{1}{6} (g_{\lambda\nu}g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}g_{\mu\nu})R,$$

поэтому

$$C_{\lambda\mu\nu\kappa} = K (g_{\lambda\nu}g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}g_{\mu\nu}) - \frac{1}{2} \cdot 3K (2g_{\lambda\nu}g_{\mu\kappa} - 2g_{\lambda\kappa}g_{\mu\nu}) + \\ + \frac{1}{6} \cdot 12K (g_{\lambda\nu}g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}g_{\mu\nu}) = 0.$$

**Решение 9.28.** Поскольку  $u \cdot n = 0$ , то

$$u^\alpha (n^\beta u_\beta)_{;\alpha} = 0 = n^\beta_{;\alpha} u^\alpha u_\beta + n^\beta u_{\beta;\alpha} u^\alpha = \\ = -K_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta + 2n \cdot \xi.$$

**Решение 9.29.** Метрика имеет вид

$$ds^2 = -d\tau^2 + g_{ij} dx^i dx^j,$$

где

$$g_{ij} = a^2(\tau) \gamma_{ij}(x^k).$$

Нормальный вектор к поверхностям  $\tau = \text{const}$  есть  $n = \partial/\partial\tau$ . Следовательно,

$$K_{ij} = -e_j \cdot \nabla_i n = n \cdot \nabla_i e_j = \Gamma_{nji} = -\frac{1}{2} g_{ij, \tau} = \frac{-a, \tau}{a} g_{ij}.$$

**Решение 9.30.** По определению производной Ли (задача 8.13) имеем

$$\mathcal{L}_n P_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta; \gamma} n^\gamma + P_{\gamma\beta} n^\gamma_{;\alpha} + P_{\alpha\gamma} n^\gamma_{;\beta} = \\ = (g_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta)_{;\gamma} n^\gamma + (g_{\gamma\beta} - n_\gamma n_\beta) n^\gamma_{;\alpha} + (g_{\alpha\gamma} - n_\alpha n_\gamma) n^\gamma_{;\beta} = \\ = -(n_\alpha n_\beta)_{;\gamma} n^\gamma + n_{\beta;\alpha} + n_{\alpha;\beta}, \quad (1)$$

где, производя преобразования, мы воспользовались тем, что

$$n_\gamma n^\gamma_{;\alpha} = \frac{1}{2} (n_\gamma n^\gamma)_{;\alpha} = 0.$$

Если  $e_i$  — три базисных вектора, принадлежащих гиперповерхности, то с учетом симметричности тензора  $K_{ij}$  получаем

$$K_{ij} = -e_j \cdot \nabla_i n = -n_{i;j} = -\frac{1}{2} (n_{i;j} + n_{j;i}). \quad (2)$$

Переходя к общей системе координат (в которой базисные векторы  $e_i$  и  $e_j$  не принадлежат гиперповерхности), соотношение (2) можно преобразовать к виду

$$K_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} (n_{\gamma;\delta} + n_{\delta;\gamma}) P^\gamma_\alpha P^\delta_\beta, \quad (3)$$

т. е. записать как проекцию на гиперповерхность симметризованной ковариантной производной вектора  $\mathbf{n}$ . Используя явный вид проекционных тензоров  $P^\alpha_\alpha$  в соотношении (3) и сравнивая полученное выражение с соотношением (1), находим

$$K_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \mathcal{L}_n P_{\alpha\beta}.$$

**Решение 9.31.** Пусть  $x^3=0$  — уравнение поверхности, где  $x^1, x^2, x^3$  — введенные на ней гауссовы нормальные координаты (см. задачу 8.25). Тогда площадь поверхности равна

$$A = \int g^{1/2} dx^1 dx^2,$$

где  $g$  — определитель 2-мерной метрики  $g_{ij}$  на поверхности. Про-варьируем площадь, сместив элементы поверхности на  $\delta x^3$  по нормали  $\mathbf{n} = \partial/\partial x^3$ :

$$\delta A = \int \delta g^{1/2} dx^1 dx^2.$$

В задаче 21.1 будет доказано, что

$$\delta g^{1/2} = \frac{1}{2} g^{1/2} g^{ij} \delta g_{ij} = \frac{1}{2} g^{1/2} g^{ij} g_{ij,3} \delta x^3.$$

Поскольку мы ввели гауссовы нормальные координаты, то

$$K_{ij} = -\frac{1}{2} g_{ij,3},$$

$$\delta A = -\int g^{ij} K_{ij} g^{1/2} dx^1 dx^2 dx^3.$$

Площадь  $A$  минимальна, поэтому  $\delta A = 0$  при всех  $\delta x^3$  и должно выполняться равенство

$$K = g^{ij} K_{ij} = 0.$$

**Решение 9.32.** Пусть  $\mathbf{e}_i$  — координатный репер на гиперповерхности  $\Sigma$ . Уравнения Гаусса — Кодацци представляют собой тензорные уравнения и выполняются независимо от того, какой репер был использован при их выводе. Векторы  $\mathbf{e}_i$  вместе с вектором  $\mathbf{n}$  образуют базис в пространстве-времени, поэтому

$${}^{(4)}\nabla_i \mathbf{e}_j = \alpha_{ij} \mathbf{n} + \beta^k_{ij} \mathbf{e}_k. \quad (1)$$

Коэффициенты в уравнении (1) можно найти, умножая его скалярно на  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{e}_k$  ( $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i = 0$ ):

$$\alpha_{ij} = \mathbf{n} \cdot {}^{(4)}\nabla_i \mathbf{e}_j = {}^{(4)}\nabla_i (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_j) - \mathbf{e}_j \cdot {}^{(4)}\nabla_i \mathbf{n} = 0 + K_{ij},$$

$$\beta_{kij} = \mathbf{e}_k \cdot {}^{(4)}\nabla_i \mathbf{e}_j = {}^{(4)}\Gamma_{kji} = {}^{(3)}\Gamma_{kji}.$$

Последнее равенство следует из того, что символ Кристоффеля можно вычислить непосредственно по  ${}^{(3)}g_{ij}$ . С этими коэффициен-

тами уравнение (1) переходит в уравнение Гаусса — Вейнгартена:

$${}^{(4)}\nabla_i \mathbf{e}_j = \varepsilon K_{ij} \mathbf{n} + {}^{(3)}\Gamma_{ij}^k \mathbf{e}_k. \quad (2)$$

Тензор Римана можно вычислить по производным от символов Кристоффеля  $\Gamma$ ; используя оператор кривизны (см. задачу 9.12), можно несколько сократить выкладки:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{R}(\mathbf{e}_\gamma, \mathbf{e}_\delta) \mathbf{e}_\beta, \quad (3)$$

где

$$\mathbf{R}(\mathbf{e}_\gamma, \mathbf{e}_\delta) = [\nabla_\gamma, \nabla_\delta] - \nabla_{[\mathbf{e}_\gamma, \mathbf{e}_\delta]}. \quad (4)$$

Запишем уравнение (4) для векторов  $\mathbf{e}_j$  и  $\mathbf{e}_k$ . Последний член в правой части обратится в нуль, поскольку в координатном репере  $[\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k] = 0$ , и

$$\begin{aligned} {}^{(4)}\nabla_j {}^{(4)}\nabla_k \mathbf{e}_i &= {}^{(4)}\nabla_j (\varepsilon K_{ik} \mathbf{n} + {}^{(3)}\Gamma_{ik}^m \mathbf{e}_m) = \\ &= \varepsilon K_{ik,j} \mathbf{n} - \varepsilon K_{ik} K_j^m \mathbf{e}_m + {}^{(3)}\Gamma_{ik,j}^m \mathbf{e}_m + \\ &+ {}^{(3)}\Gamma_{ik}^m (\varepsilon K_{jm} \mathbf{n} + {}^{(3)}\Gamma_{mj}^n \mathbf{e}_n). \end{aligned} \quad (5)$$

Переставим индексы  $j$  и  $k$  в уравнении (5) и вычтем новое уравнение из старого. Мы получим

$$\mathbf{R}(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_i = \varepsilon (K_{ik|j} - K_{ij|k}) \mathbf{n} + \mathbf{e}_m [\varepsilon (K_{ij} K_k^m - K_{ik} K_j^m) + {}^{(3)}R_{ij}^m]. \quad (6)$$

Умножая уравнение (6) на  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{e}_n$ , получаем уравнения Гаусса — Кодаци.

Компоненты тензора Римана с двумя индексами  $\mathbf{n}$  можно найти из  $\mathbf{R}(\mathbf{e}_k, \mathbf{n}) \mathbf{n}$ . Поскольку вектор  $\mathbf{n}$  входит в число базисных векторов координатного репера, то  $[\mathbf{n}, \mathbf{e}_k] = 0$ ; следовательно, последний член в правой части уравнения (4) обращается в нуль и

$$\mathbf{R}(\mathbf{e}_k, \mathbf{n}) \mathbf{n} = {}^{(4)}\nabla_k' {}^{(4)}\nabla_n \mathbf{n} - {}^{(4)}\nabla_n {}^{(4)}\nabla_k \mathbf{n}.$$

Но  ${}^{(4)}\nabla_n \mathbf{n} = 0$ , ибо  $\mathbf{n}$  — вектор, касательный к геодезической (гауссовы нормальные координаты), в силу чего

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{R}(\mathbf{e}_k, \mathbf{n}) \mathbf{n} = \mathbf{e}_i \cdot {}^{(4)}\nabla_n (K_k^m \mathbf{e}_m) = K_{ki,n} - K_k^m \mathbf{e}_m \cdot \nabla_n \mathbf{e}_i.$$

Так как  $[\mathbf{e}_i, \mathbf{n}] = 0$ , то

$${}^{(4)}\nabla_n \mathbf{e}_i = {}^{(4)}\nabla_i \mathbf{n} = -K_i^j \mathbf{e}_j,$$

откуда

$$R_{inkn} = \varepsilon R_{ink}^n = K_{ki,n} + K_i^j K_{jk}.$$

**Решение 9.33.** Компоненты тензора Римана были вычислены в задаче 9.32. Свертывая, получаем

$$\begin{aligned} {}^{(4)}R^i_j &= g^{ik} ({}^{(4)}R_{knj}^n + {}^{(4)}R_{kmj}^m) = \\ &= {}^{(3)}R^i_j + \varepsilon (g^{ik} K_{kj,n} + 2K_m^i K^m_j - K^i_j K), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $K \equiv K^i_i$ . Но  $g^{ik}_{,n} = -g^{im}g^{ks}g_{ms,n}$  (см., например, задачу 21.1), и в гауссовых нормальных координатах  $-g_{ms,n} = 2K_{ms}$ , поэтому

$$g^{ik}_{,n} = 2g^{im}g^{ks}K_{ms} = 2K^{ik}.$$

Уравнение (1) теперь можно представить в виде

$$\begin{aligned} {}^{(4)}R^i_j &= {}^{(3)}R^i_j + \varepsilon (g^{ik}K_{kj,n} + g^{ik}_{,n}K_{kj} - K^i_j K) = \\ &= {}^{(3)}R^i_j + \varepsilon (K^i_{j,n} - K^i_j K). \end{aligned} \quad (2)$$

Для других компонент тензора Риччи получаем

$${}^{(4)}R^n_j = \varepsilon {}^{(4)}R^n_{\alpha j} = -{}^{(4)}R^n_{i j} = \varepsilon (K_{i j} - K^i_{j i}), \quad (3)$$

$${}^{(4)}R^n_n = \varepsilon {}^{(4)}R^i_{n i} = \varepsilon g^{ij} (K_{ij,n} + K_{im}K^m_j) = \varepsilon (K_{,n} - K_{im}K^{im}). \quad (4)$$

Таким образом, скаляр Риччи равен

$${}^{(4)}R = {}^{(4)}R^n_n + {}^{(4)}R^i_i = {}^{(3)}R + \varepsilon (2K_{,n} - K_{im}K^{im} - K^2), \quad (5)$$

а компоненты тензора Эйнштейна —

$$G^n_n = {}^{(4)}R^n_n - \frac{1}{2} {}^{(4)}R = -\frac{1}{2} {}^{(3)}R + \frac{1}{2} \varepsilon (K^2 - K_{im}K^{im}), \quad (6)$$

$${}^{(4)}G^n_j = {}^{(4)}R^n_j = \varepsilon (K_{i j} - K^i_{j i}), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} {}^{(4)}G^i_j &= {}^{(4)}R^i_j - \frac{1}{2} \delta^i_j {}^{(4)}R = \\ &= {}^{(3)}G^i_j + \varepsilon \left[ K^i_{j,n} - K^i_j K - \frac{1}{2} \delta^i_j (2K_{,n} - K_{im}K^{im} - K^2) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Приравнивая выражения (6) и (7) соответствующим компонентам тензора энергии-импульса, получаем «уравнения с начальными значениями» для гравитационного поля.

### Решение 9.34.

1) Поскольку на сферической поверхности не существует выделенного направления, то в ортонормированном репере тензор внешней кривизны  $K_{ij} \sim \delta_{ij}$ . Таким образом, любой вектор является его собственным вектором. Из определения тензора  $K$  как скорости изменения вектора нормали  $\mathbf{n}$  следует, что собственное значение равно  $-1/(\text{радиус сферы}) = -1/a$ .

Подкрепим эти интуитивные соображения вычислениями. Для удобства перейдем к обычным сферическим координатам  $r, \vartheta, \varphi$ . Для сферы они совпадают с гауссовыми нормальными координатами и

$$ds^2 = {}^{(2)}g_{ik} dx^i dx^k = r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2).$$

Поскольку

$$K_{ij} = -\frac{1}{2} g_{ij,n} = -\frac{1}{2} g_{ij,r},$$

то

$$\begin{aligned} K_{\hat{\phi}\hat{\phi}} &= \frac{1}{g_{\phi\phi}} K_{\phi\phi} = \frac{1}{r^2} \left( -\frac{1}{2} r^2 \right)_{,r} = -\frac{1}{a}, \\ K_{\hat{\phi}\hat{\phi}} &= \frac{1}{g_{\phi\phi}} K_{\phi\phi} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \left( -\frac{1}{2} r^2 \sin^2 \phi \right)_{,r} = -\frac{1}{a}. \end{aligned} \quad (1)$$

2) И на этот раз можно воспользоваться интуитивными соображениями. «Выделены» 2 направления: осевое и по окружности цилиндра. По определению тензора  $K$  кривизны (скорости изменения вектора нормали  $\mathbf{n}$ ) по этим направлениям должны быть равны 0 и  $-1/a$ .

Проведем теперь строгий вывод тех же результатов. Цилиндрические координаты совпадают с гауссовыми нормальными координатами, и 2-геометрия определяется метрикой

$$ds^2 = r^2 d\phi^2 + dz^2.$$

Ортонормированные компоненты тензора  $K$  запишем в виде

$$\begin{aligned} K_{\hat{\phi}\hat{\phi}} &= \frac{1}{g_{\phi\phi}} \left( -\frac{1}{2} g_{\phi\phi,r} \right) = -\frac{1}{a}, \\ K_{\hat{z}\hat{z}} &= \frac{1}{g_{zz}} \left( -\frac{1}{2} g_{zz,r} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Таким образом, вычисления подтверждают правильность решения, найденного из интуитивных соображений.

3) В декартовых координатах

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (3)$$

а поверхность задана уравнением

$$f(x, y, z) = 0, \quad (4)$$

где

$$f = -\frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) + z. \quad (5)$$

Единичный вектор нормали  $\mathbf{n}$  определяется формулой

$$\mathbf{n} = \nabla f / |\nabla f| = \frac{1}{N} [-(ax + by)\mathbf{e}_x - (bx + cy)\mathbf{e}_y + (\mathbf{e}_z)], \quad (6)$$

где

$$N \equiv [(ax + by)^2 + (bx + cy)^2 + 1]^{\frac{1}{2}}. \quad (7)$$

Заметим, что поскольку в начале координат  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$ , то векторы  $\mathbf{e}_x$  и  $\mathbf{e}_y$  можно выбрать в качестве базисных векторов, принадлежащих поверхности (в начале координат). Тогда

$$K_{ij} = -\mathbf{e}_j \cdot \nabla_i \mathbf{n} = -n_{j,i} = -n_{i,j},$$

поскольку в метрике (3) коэффициенты аффинной связности обращаются в нуль. Учитывая, что в начале координат  $N_{,x} = N_{,y} = 0$ , получаем

$$K_{ij} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$0 = \det (K_{ij} - Kg_{ij}) = \begin{vmatrix} a-K & b \\ b & c-K \end{vmatrix}, \quad (8)$$

где  $g_{ij}$  мы найдем, рассматривая сужение метрики (3) на поверхности (5). Поскольку в начале координат  $dz = 0$ , то в этой же точке  $g_{ij} = \delta_{ij}$ . Главные кривизны, найденные из уравнения (8), оказываются равными

$$K_{\pm} = \frac{c+a}{2} \pm \frac{c-a}{2} \left[ 1 + \frac{4b^2}{(c-a)^2} \right]^{1/2}. \quad (9)$$

Им соответствуют собственные векторы

$$\begin{bmatrix} a-K_{\pm} & b \\ b & c-K_{\pm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{\pm}^x \\ V_{\pm}^y \end{bmatrix} = 0. \quad (10)$$

Решая уравнения, находим

$$\begin{aligned} V_{\pm} &= (e_x + \alpha_{\pm} e_y) / \beta_{\pm}, \\ \alpha_{\pm} &\equiv \gamma [1 \pm (1 + \gamma^2)^{1/2}], \\ \beta_{\pm} &\equiv (1 + \alpha_{\pm}^2)^{1/2}, \\ \gamma &\equiv (a-c)/2b. \end{aligned}$$

**Решение 9.35.** Из уравнения Гаусса — Кодацци (задача 9.32) получаем

$${}^{(3)}R^m{}_{ijk} = {}^{(2)}R^m{}_{ijk} + \varepsilon (K_{ij}K_k{}^m - K_{ik}K_j{}^m).$$

Свертывая по  $m, j$  и по  $i, k$  и подставляя  ${}^{(3)}R^m{}_{ijk} = 0$  (3-пространство плоское), находим скалярную кривизну

$${}^{(2)}R = -\varepsilon (K_i{}^j K_j{}^i - K_i{}^i K_j{}^j). \quad (1)$$

В произвольной точке  $P$  на  $\Sigma$  выберем оси координат так, чтобы они совпадали с главными направлениями кривизны, и условимся считать координатой  $x^i$  расстояние от точки  $P$ , измеряемое вдоль  $i$ -й оси. Тогда в точке  $P$  (начале координат)  ${}^{(2)}g_{ij} = \delta_{ij}$  и тензор кривизны  $K_{ij}$  диагональный, причем на его главной диа-

гонали стоят главные кривизны. Следовательно,

$${}^{(2)}R = -\varepsilon \left[ \frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} - \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)^2 \right] = \frac{2}{\rho_1 \rho_2},$$

где мы положили  $\varepsilon = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = +1$ .

Для 3-мерной гиперповерхности  $\Sigma$  в плоском 4-пространстве из уравнения (1) получаем

$$\begin{aligned} {}^{(3)}R &= -\varepsilon \left[ \frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} + \frac{1}{\rho_3^2} - \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3} \right)^2 \right] = \\ &= \varepsilon \left( \frac{2}{\rho_1 \rho_2} + \frac{2}{\rho_2 \rho_3} + \frac{2}{\rho_1 \rho_3} \right). \end{aligned}$$



## ГЛАВА 10

**Решение 10.1.** На 2-сфере задана метрика

$$ds^2 = d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2,$$

от нуля отличны лишь коэффициенты аффинной связности

$$\Gamma^{\varphi}_{\vartheta\varphi} = \Gamma^{\varphi}_{\varphi\vartheta} = \operatorname{ctg} \vartheta, \quad \Gamma^{\vartheta}_{\varphi\varphi} = -\sin \vartheta \cos \vartheta.$$

Из уравнений Киллинга

$$\xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} = \xi_{\alpha,\beta} + \xi_{\beta,\alpha} - 2\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\xi_{\mu} = 0$$

получаем

$$\text{при } \alpha = \beta = \varphi \quad \xi_{\varphi,\varphi} = -\xi_{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta; \quad (1)$$

$$\text{при } \alpha = \beta = \vartheta \quad \xi_{\vartheta,\vartheta} = 0, \text{ следовательно, } \xi_{\vartheta} = f(\varphi); \quad (2)$$

$$\text{при } \alpha = \vartheta, \beta = \varphi \quad \xi_{\vartheta,\varphi} + \xi_{\varphi,\vartheta} = 2 \operatorname{ctg} \vartheta \xi_{\varphi}. \quad (3)$$

Подставляя (2) в (1), находим

$$\xi_{\varphi,\varphi} = -f(\varphi) \sin \vartheta \cos \vartheta,$$

откуда

$$\xi_{\varphi} = -F(\varphi) \sin \vartheta \cos \vartheta + g(\vartheta), \quad (4)$$

где  $F(\varphi) \equiv \int f d\varphi$ . Подставляя затем (4) и (2) в соотношение (3), преобразуем его к виду

$$\frac{df}{d\varphi} + \frac{dg}{d\vartheta} - F(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) = 2 \operatorname{ctg} \vartheta g - 2 \cos^2 \vartheta F,$$

или

$$\frac{df}{d\varphi} + F(\varphi) = -\left(\frac{dg}{d\vartheta} - 2 \operatorname{ctg} \vartheta g(\vartheta)\right).$$

Поскольку левая часть зависит только от  $\varphi$ , а правая — только от  $\vartheta$ , каждая часть должна быть постоянной:

$$\frac{df}{d\varphi} + \int f d\varphi = b, \quad (5)$$

$$\frac{dg}{d\vartheta} - 2 \operatorname{ctg} \vartheta g = -b. \quad (6)$$

Уравнение (6) имеет интегрирующий множитель

$$\exp[-2 \int \operatorname{ctg} \vartheta d\vartheta] = \sin^{-2} \vartheta,$$

поэтому его можно представить в виде

$$\frac{d}{d\vartheta} \left( \frac{g}{\sin^2 \vartheta} \right) = \frac{-b}{\sin^2 \vartheta},$$

откуда

$$g(\vartheta) = (b \operatorname{ctg} \vartheta + c) \sin^2 \vartheta. \quad (7)$$

Уравнение (5) легко решается после однократного дифференцирования:

$$\frac{d^2 f}{d\varphi^2} + f = 0,$$

$$f = d \cos \varphi + e \sin \varphi,$$

$$F = d \sin \varphi - e \cos \varphi.$$

[Постоянная интегрирования включена в  $g(\vartheta)$ .] Подстановка решений в (5), т. е.

$$-d \sin \varphi + e \cos \varphi + d \sin \varphi - e \cos \varphi = b,$$

показывает, что  $b = 0$ . Но тогда из уравнений (2) и (7) получаем

$$\xi_{\vartheta} = d \cos \varphi + e \sin \varphi = \xi^{\vartheta},$$

$$\xi_{\varphi} = c \sin^2 \vartheta - \sin \vartheta \cos \vartheta (d \sin \varphi - e \cos \varphi) = \sin^2 \vartheta \xi^{\varphi}.$$

Запишем, таким образом, вектор Киллинга наиболее общего вида:

$$\xi = (d \cos \varphi + e \sin \varphi) \frac{\partial}{\partial \vartheta} + [c - \operatorname{ctg} \vartheta (d \sin \varphi - e \cos \varphi)] \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Заметим, что он является линейной комбинацией трех векторов Киллинга:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ & - \left( \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \operatorname{ctg} \vartheta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \\ & \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \operatorname{ctg} \vartheta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}, \end{aligned}$$

представляющих собой не что иное, как генераторы группы вращений — обычные операторы моментов количества движения  $L_z$ ,  $L_x$  и  $L_y$ .

**Решение 10.2.** Утверждение задачи можно доказать непосредственно, если воспользоваться покомпонентной записью уравнений. Другой подход состоит в том, чтобы свернуть  $\mathcal{L}_{\xi} g$  слева и справа с двумя произвольными векторными полями  $A$  и  $B$ :

$$\begin{aligned} 0 &= A \cdot \mathcal{L}_{\xi} g \cdot B = \mathcal{L}_{\xi} (A \cdot B) - B \cdot \mathcal{L}_{\xi} A - A \cdot \mathcal{L}_{\xi} B = \\ &= \nabla_{\xi} (A \cdot B) - B \cdot (\nabla_{\xi} A - \nabla_A \xi) - A \cdot (\nabla_{\xi} B - \nabla_B \xi) = \\ &= B \cdot \nabla_A \xi + A \cdot \nabla_B \xi = 2A^{\alpha} B^{\beta} \xi_{(\alpha; \beta)}. \end{aligned}$$

Поскольку векторные поля  $A$  и  $B$  выбраны произвольно, величины  $\xi_{(\alpha;\beta)}$  должны обратиться в нуль. Геометрический смысл этого утверждения станет ясен, если вспомнить, что производная Ли любой геометрической величины  $\varphi_A$  представляет собой *функциональное* изменение этой величины,

$$\delta\varphi_A \equiv \varphi_A^{\text{новая}}(x^\alpha) - \varphi_A^{\text{старая}}(x^\alpha),$$

под действием смещения координат на  $\xi$ , эквивалентное изменению  $\varphi_A$  при перемещении на  $\xi$  по многообразию. Следовательно, если мы хотим, чтобы производная Ли метрического тензора  $g$  вдоль  $\xi$  обратилась в нуль, то геометрия многообразия не должна изменяться при движении в направлении, задаваемом вектором  $\xi$ , т. е. вектор  $\xi$  должен указывать направление симметрии пространства-времени.

**Решение 10.3.**

а) Воспользуемся отношением эквивалентности, доказанным в задаче 10.2. Если  $u$  и  $v$  — векторы Киллинга, то  $\mathcal{L}_u g = \mathcal{L}_v g = 0$  и, используя полученное в задаче 8.16 соотношение для  $\mathcal{L}_{[u,v]}$ , находим

$$\mathcal{L}_{[u,v]} g = (\mathcal{L}_u \mathcal{L}_v - \mathcal{L}_v \mathcal{L}_u) g = 0.$$

Следовательно,  $[u, v]$  — вектор Киллинга.

б) Если  $a$  и  $b$  — постоянные, то

$$(au_\alpha + bv_\alpha)_{;\beta} = au_{\alpha;\beta} + bv_{\alpha;\beta}.$$

Следовательно, если векторы  $u$  и  $v$  удовлетворяют уравнению Киллинга, то их линейная комбинация  $au + bv$  также удовлетворяет этому уравнению.

**Решение 10.4.** Тремя векторами Киллинга, описывающими вращения, служат операторы момента количества движения  $J_z = x\partial_y - y\partial_x$  и т. д. (см. задачу 10.1). В точке  $(x_0, y_0, z_0)$

$$J_z = (-y_0, x_0, 0),$$

$$J_y = (z_0, 0, -x_0),$$

$$J_x = (0, -z_0, y_0),$$

поэтому  $J_y = -(z_0/y_0) J_z - (x_0/y_0) J_x$  и линейные комбинации трех векторов в точке порождают лишь 2-мерное пространство.

Предположим, что при некоторых постоянных  $a$  и  $b$  соотношение

$$aJ_x + bJ_y + J_z = 0$$

выполняется во всех точках. Тогда

$$a[J_x, J_y] + b[J_y, J_x] + [J_z, J_y] = 0,$$

откуда  $J_z \sim J_x$ , что, очевидно, невозможно. Следовательно, на всей сфере линейная оболочка векторов  $J_x, J_y, J_z$  представляет собой 3-мерное пространство. Кажущееся противоречие объясняется тем, что 2-сферы 2-мерны, но *ориентации* 2-сфер 3-мерны (чтобы задать ориентацию 2-сферы, необходимо указать, например, 3 угла Эйлера).

**Решение 10.5.** Как показано в задаче 10.3, коммутатор двух векторных полей Киллинга является векторным полем Киллинга. По предположению любой вектор Киллинга можно представить в виде суммы (с постоянными коэффициентами) векторов  $\xi_{(t)}$  и  $\xi_{(\varphi)}$ :

$$[\xi_{(\varphi)}, \xi_{(t)}] = a\xi_{(\varphi)} + b\xi_{(t)}.$$

На бесконечности  $\xi_{(\varphi)} \rightarrow \partial/\partial\varphi$  и  $\xi_{(t)} \rightarrow \partial/\partial t$ , поэтому коммутатор  $[\xi_{(\varphi)}, \xi_{(t)}] \rightarrow 0$ . Это означает, что постоянные  $a$  и  $b$  должны быть равны нулю, т. е. что коммутатор векторов Киллинга  $\xi_{(\varphi)}$  и  $\xi_{(t)}$  тождественно равен нулю. (Картер [Carter B., Comm. Math. Phys., 17, 233, (1970)] доказал, что  $[\xi_{(\varphi)}, \xi_{(t)}] = 0$  при весьма общих условиях, даже когда существуют другие векторы Киллинга.)

**Решение 10.6.** Коммутируя вторые производные любого вектора, получаем

$$\xi_{\mu;\nu\lambda} - \xi_{\mu;\lambda\nu} = R_{\mu\sigma\lambda\nu}\xi^\sigma.$$

Воспользуемся уравнением Киллинга

$$\xi_{\mu;\nu} = -\xi_{\nu;\mu}$$

и свернем это тензорное соотношение по  $\mu$  и  $\lambda$ :

$$\xi^{\nu;\lambda} + R^{\nu\sigma}\xi^\sigma = -(\xi^\mu;\mu)^{\nu}.$$

Правая часть обращается в нуль, поскольку в силу уравнения Киллинга  $\xi^\mu;\mu = 0$ , а левая часть совпадает с левой частью уравнения, приведенного в условиях задачи. Вариационный принцип выписывается без труда, если заметить, что тензор  $\xi_{\mu;\nu}$  антисимметричен, так же как и тензор электромагнитного поля  $F_{\mu\nu}$ . Известно, что если  $F_{\mu\nu}$  представить в виде

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$$

и проварьировать  $A_\mu$ , то функция Лагранжа  $1/4 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$  породит член  $F^{\mu\nu};\nu$ . Следовательно, плотность лагранжиана можно взять равной

$$\mathcal{L} = \xi_{\mu;\nu}\xi^{\mu;\nu} - \frac{1}{2} R_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu,$$

и вариационный принцип

$$\delta \int \mathcal{L} |g|^{1/2} d^4x = 0$$

даст правильное уравнение. В этом нетрудно убедиться, если записать уравнения Эйлера—Лагранжа для найденного лагранжиана.

**Решение 10.7.** По определению  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  для любого вектора  $\xi$  выполняется соотношение

$$\xi_{\sigma;\rho\mu} - \xi_{\sigma;\mu\rho} = R^{\lambda}_{\sigma\rho\mu}\xi_{\lambda}. \quad (1)$$

Добавив к нему еще два соотношения, получающиеся при перестановках индексов, и воспользовавшись циклическим тождеством для тензора Римана

$$R^{\lambda}_{\sigma\rho\mu} + R^{\lambda}_{\mu\sigma\rho} + R^{\lambda}_{\rho\mu\sigma} = 0,$$

найдем тождество

$$0 = \xi_{\sigma;\rho\mu} - \xi_{\sigma;\mu\rho} + \xi_{\mu;\sigma\rho} - \xi_{\mu;\rho\sigma} + \xi_{\rho;\mu\sigma} - \xi_{\rho;\sigma\mu}. \quad (2)$$

Для вектора Киллинга оно упрощается и принимает следующий вид:

$$0 = \xi_{\sigma;\rho\mu} - \xi_{\sigma;\mu\rho} - \xi_{\mu;\rho\sigma}. \quad (3)$$

Подставляя (3) в (1), получаем

$$\xi_{\mu;\rho\sigma} = R^{\lambda}_{\sigma\rho\mu}\xi_{\lambda}. \quad (4)$$

**Решение 10.8.** Прежде всего докажем, что «стационарность» эквивалентна существованию временной координаты, для которой  $g_{\alpha\beta,t} = 0$ . Выберем временную координату так, чтобы  $\xi = \partial/\partial t$ . Тогда (см. задачи 10.2, 8.3)  $\mathcal{L}_{\xi}g = 0$ , или

$$g_{\alpha\beta,\gamma}\xi^{\gamma} + g_{\alpha\gamma}\xi^{\gamma}_{,\beta} + g_{\beta\gamma}\xi^{\gamma}_{,\alpha} = 0.$$

Поскольку  $\xi^{\gamma} = (1, 0, 0, 0)$ , то отсюда следует, что  $g_{\alpha\beta,t} = 0$ .

Инвариантность относительно обращения времени (определение 1) означает, что метрика  $g_{\alpha\beta}$  не зависит от  $t$  и

$$g_{tt} = 0.$$

Эквивалентность обоих определений будет доказана, если мы установим, что равенство  $g_{tt} = 0$  эквивалентно гиперповерхностной ортогональности вектора  $\xi = \partial/\partial t$ .

Если  $g_{tt} = 0$ , то при  $\alpha \neq t$

$$\xi_{\alpha} = g_{\alpha\beta}\xi^{\beta} = g_{\alpha t} = 0$$

и, следовательно,  $\xi_{\alpha} \sim t_{,\alpha}$ , т. е. вектор  $\xi$  ортогонален поверхностям  $t = \text{const}$ .

Если вектор  $\xi$  гиперповерхностно ортогонален (см. задачу 7.23), то

$$\xi_{[\alpha;\beta}\xi_{\gamma]} = 0.$$

Пользуясь уравнением Киллинга

$$\xi_{(\alpha; \beta)} = 0,$$

преобразуем это соотношение к виду

$$\xi_{\alpha; \beta} \xi_{\gamma} + \xi_{\gamma; \alpha} \xi_{\beta} + \xi_{\beta; \gamma} \xi_{\alpha} = 0.$$

Свертывая с  $\xi^{\alpha}$  и используя уравнение Киллинга для преобразования первого и третьего членов, получаем

$$\frac{1}{2} (\xi_{\alpha; \beta} - \xi_{\beta; \alpha}) \xi^2 + \frac{1}{2} \xi^2_{, \alpha} \xi_{\beta} - \frac{1}{2} \xi^2_{, \beta} \xi_{\alpha} = 0,$$

$$\xi^2 \equiv \xi \cdot \xi,$$

т. е.

$$(\xi^2_{, \alpha} - \xi_{\beta; \alpha} \xi^2) - (\xi^2_{, \beta} - \xi_{\alpha; \beta} \xi^2) = 0.$$

Следовательно,  $\xi^2_{, \alpha}$  — градиент, и при некоторой функции  $h$

$$\xi_{\alpha} = \xi^2 h_{, \alpha}.$$

Поскольку  $\xi^2 = g_{tt}$  и  $\xi_{\alpha} = g_{\alpha t}$ , то  $g_{\alpha t} = g_{tt} h_{, \alpha}$ . Полагая  $\alpha = t$ , получаем  $h_{, t} = 1$ , или  $h = t + f(x^i)$ . Выбирая новую временную координату  $t' = t + f(x^i)$ , находим

$$g_{t' t'} = g_{tt} h_{, t} = g_{tt}, \quad t' = 0$$

и

$$\xi^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}} \xi^{\beta} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial t} = (1, 0, 0, 0).$$

Таким образом,  $g_{\alpha\beta}$  по-прежнему не зависит от  $t'$ .

**Решение 10.9.** Выберем систему координат, в которой метрика совпадает с метрикой пространства Минковского  $\eta_{\mu\nu}$  (все символы Кристоффеля равны нулю). В этой метрике уравнение Киллинга для вектора Киллинга  $\xi$  имеет вид

$$2\xi_{(\mu; \nu)} = \xi_{\mu, \nu} + \xi_{\nu, \mu} = 0. \quad (1)$$

Перечислим линейно-независимые решения уравнения (1) и приведем их классификацию:

1) Векторы Киллинга, порождающие трансляции:

$$\xi_i^{\mu} = a_i^{\mu}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (2)$$

где  $a_i$  — постоянные векторы.

2) Векторы Киллинга, порождающие повороты:

$$\xi_k^0 = 0, \quad \xi_k^i = \varepsilon^{ikm} x_m, \quad k = 1, 2, 3. \quad (3)$$

Проверка:

$$\xi_{k(\mu; \nu)} = \xi_{k(i; j)} = x_{m, (j^e i) km} = \delta_{m(j^e i) km} = -\varepsilon_{k(ij)} = 0.$$

3) Векторы Киллинга, порождающие бусты:

$$\xi_\mu^k = \delta_\mu^{[0} x^{k]}, \quad k = 1, 3. \quad (4)$$

Проверка:

$$\xi^k_{(\mu, \nu)} = \frac{1}{2} [\delta_\mu^{[0} \delta_\nu^{k]} + \delta_\nu^{[0} \delta_\mu^{k]}] = 0.$$

Соотношения (2)–(4) задают 10 векторов Киллинга в системе координат, в которой  $g_{\mu\nu} = (-1, 1, 1, 1)$ . В любой другой системе координат компоненты  $\xi_i^\mu$  для  $i = 1, 2, \dots, 10$  можно найти, преобразуя их как векторы.

*Решение 10.10.* Изменение скалярного произведения  $\mathbf{u} \cdot \xi$  вдоль геодезической определяется выражением

$$\nabla_{\mathbf{u}} (\mathbf{u} \cdot \xi) = (\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u}) \cdot \xi + \mathbf{u} \cdot (\nabla_{\mathbf{u}} \xi).$$

Но  $\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u} = 0$ , поскольку  $\mathbf{u}$  — вектор, касательный к геодезической, а  $\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{u}} \xi = 0$ , так как  $\xi$  — вектор Киллинга. В покомпонентной записи получаем

$$\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{u}} \xi = u^\alpha u^\beta \xi_{\alpha; \beta} = u^\alpha u^\beta \xi_{(\alpha; \beta)} = 0.$$

Следовательно, вдоль геодезической  $\mathbf{u} \cdot \xi = \text{const}$ .

*Решение 10.11.* Дивергенция вектора  $\mathbf{J}$  равна

$$J^\mu_{; \mu} = (T^{\mu\nu} \xi_\nu)_{; \mu} = T^{\mu\nu}_{; \mu} \xi_\nu + T^{\mu\nu} \xi_{\nu; \mu} = 0 + T^{\mu\nu} \xi_{(\nu; \mu)} = 0.$$

Если  $\xi = \partial/\partial t$ , то на бесконечности, где  $g_{00} = -1$ ,  $J^\mu = T^\mu_0 = -T^{\mu 0}$ . Следовательно, для стационарного наблюдателя  $\mathbf{J}$  совпадает с вектором потока энергии, но имеет знак минус.

*Решение 10.12.* Согласно задаче 10.11, подынтегральное выражение  $J^\alpha \equiv T^\alpha_{\beta} \xi^\beta$  представляет собой сохраняющуюся величину:  $J^\alpha_{; \alpha} = 0$ . Этот результат следует из тождества

$$J^\alpha_{; \alpha} = (|g|^{1/2} J^\alpha)_{; \alpha} |g|^{-1/2}$$

и теоремы Гаусса:

$$\begin{aligned} 0 &= \int J^\alpha_{; \alpha} |g|^{1/2} d^4x = \int (|g|^{1/2} J^\alpha)_{; \alpha} d^4x = \oint J^\alpha d^3 \Sigma_\alpha = \\ &= \int_{F_2} J^\alpha d^3 \Sigma_\alpha - \int_{F_1} J^\alpha d^3 \Sigma_\alpha. \end{aligned}$$

Мы предполагаем, что на бесконечности  $\mathbf{J}$  стремится к нулю достаточно быстро и влиянием краев гиперповерхности можно пренебречь. Следовательно, интеграл, приведенный в условиях задачи, не зависит от выбора пространственноподобной поверхности  $F$ .

**Решение 10.13.** Из задачи 10.11 известно, что для любого вектора Киллинга  $\xi$  вектор  $J^\mu \equiv T^{\mu\nu}\xi_\nu$  сохраняется, т. е.

$$J^\mu{}_{;\mu} = |g|^{-1/2} (|g|^{1/2} J^\alpha)_{;\alpha} = 0. \quad (1)$$

Из задачи 10.9 мы знаем, что в плоском пространстве-времени существуют 10 линейно-независимых векторов Киллинга  $\xi_{(i)}^\mu$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$ . Им соответствуют 10 сохраняющихся векторов:

$$J_{(i)}^\mu \equiv T^{\mu\nu}\xi_{(i)\nu}. \quad (2)$$

Соотношения (1) и (2) позволяют построить 10 глобально сохраняющихся величин:

$$Q_{(i)} \equiv \int |g|^{1/2} J_{(i)}^0 d^3x, \quad i = 1, 2, \dots, 10, \quad (3)$$

поскольку

$$\begin{aligned} \frac{dQ_{(i)}}{dt} &= \int (|g|^{1/2} J_{(i)}^0)_{;0} d^3x = - \int (|g|^{1/2} J_{(i)}^k)_{;k} d^3x = \\ &= - \int |g|^{1/2} J_{(i)}^k d^2 \Sigma_k. \end{aligned}$$

Последнее выражение имеет простой физический смысл: это поток вектора  $J_{(i)}$  через (2-мерную) поверхность, ограничивающую объем, по которому производится интегрирование. Если тензор энергии-импульса  $T$  на больших расстояниях спадает достаточно быстро и объем, по которому производится интегрирование, бесконечен, то поток обращается в нуль и  $dQ_{(i)}/dt = 0$ . [Другое доказательство использует решение 10.12.]

Векторы Киллинга, порождающие трансляции, приводят к четырем величинам  $Q$ , соответствующим сохранению энергии и импульса. Векторы Киллинга, порождающие повороты, позволяют составить три величины  $Q$ , соответствующие сохранению момента количества движения. Физический смысл трех величин  $Q$ , к которым приводят векторы Киллинга, порождающие бусты, станет ясен, если их записать (например, в плоских декартовых координатах с  $\xi_\nu = [x, -t, 0, 0]$ ) следующим образом:

$$\begin{aligned} Q &= \int T^{0\nu}\xi_\nu dx dy dz = \\ &= \int x T^{00} dx dy dz - t \int T^{0x} dx dy dz = \\ &= x_{\text{ц.м.}} M_{\text{ц.м.}} - t P_{x_{\text{ц.м.}}} = M_{\text{ц.м.}} (x_{\text{ц.м.}} - v_{\text{ц.м.}} t). \end{aligned}$$

Это не что иное, как компоненты сохраняющегося «первоначального равномерного движения» центра масс (ц. м.) системы. (По определению

$$x_{\text{ц.м.}} = \int x T^{00} dx dy dz / \int T^{00} dx dy dz.)$$

**Решение 10.14.** Компоненты 4-скорости  $u$  равны

$$u_\alpha = \xi_\alpha / (-\xi_\nu \xi^\nu)^{1/2}$$



(знак минус выбран для того, чтобы член в скобках был положительным), поэтому

$$a_\alpha = u_{\alpha; \beta} u^\beta = \left[ \frac{\xi_{\alpha; \beta}}{(-\xi_\gamma \xi^\gamma)^{1/2}} + \frac{\xi_\alpha \xi_{\gamma; \beta} \xi^\gamma}{(-\xi_\tau \xi^\tau)^{3/2}} \right] \frac{\xi^\beta}{(-\xi_\mu \xi^\mu)^{1/2}}.$$

Второй член в квадратных скобках обращается в нуль, так как

$$\xi_{\gamma; \beta} \xi^\gamma \xi^\beta = \xi_{(\gamma; \beta)} \xi^\gamma \xi^\beta = 0.$$

Поскольку  $\xi_{\alpha; \beta} = -\xi_{\beta; \alpha}$ , то первый член дает

$$a_\alpha = \frac{\xi_{\beta; \alpha} \xi^\beta}{+\xi_\gamma \xi^\gamma} = \frac{1}{2} \frac{(\xi_\beta \xi^\beta)_{; \alpha}}{(\xi_\gamma \xi^\gamma)} = \frac{1}{2} [\ln(-\xi_\beta \xi^\beta)]_{; \alpha}.$$

**Решение 10.15.** Рассмотрим частицу с массой покоя  $\mu$  и сохраняющейся энергией  $E = -\mathbf{p} \cdot \xi$ , где  $\mathbf{p}$  — 4-импульс, а  $\xi$  — времениподобный вектор Киллинга. Для траекторий, проходящих через заданную точку пространства-времени, допустимы не все значения  $E/\mu$ . Например, если радиус стремится к бесконечности, то должно выполняться неравенство  $E/\mu \geq 1$ . Чтобы найти верхнюю и нижнюю грани значений  $E/\mu$  для произвольной точки, построим в этой точке ортонормированный репер. Пусть 4-скорость частицы  $\mathbf{u}$  обладает компонентами  $(\gamma, \gamma \vec{v})$ , где  $\vec{v}$  — 3-вектор и  $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$ , а времениподобный вектор Киллинга  $\xi$  — компонентами  $(\xi_0, \vec{\xi})$ , где  $\vec{\xi}$  — 3-вектор. Отношение энергии частицы к ее массе покоя определяется выражением

$$\frac{E}{\mu} = -\mathbf{u} \cdot \xi_{(t)} = \gamma (\xi_0 - \vec{v} \cdot \vec{\xi}), \quad (1)$$

где точка означает скалярное произведение в локально евклидовом 3-пространстве. Необходимым (но не достаточным) условием экстремума (задающим верхнюю и нижнюю грани допустимых значений  $E/\mu$ ) служит соотношение

$$\vec{v} \cdot \vec{\xi} = \pm v \xi, \quad (2)$$

где  $v \equiv |\vec{v}|$ ,  $\xi \equiv |\vec{\xi}|$ . Необходимо различать 2 случая.

Если  $\xi$  — пространственноподобный вектор (например, в эргосфере черной дыры Керра), то  $\xi_0 < \xi$ . В этом случае, как следует из соотношения (1), допустимы любые значения  $E/\mu$ , т. е.  $-\infty < E/\mu < +\infty$ . Эти неравенства дают ответ на вопрос задачи для областей, в которых  $\xi$  — пространственноподобный вектор. Бесконечные пределы соответствуют  $v \rightarrow 1$  с двумя знаками, приведенными в соотношении (2).

Если же  $\xi$  — времениподобный вектор (например, при радиусе, стремящемся к бесконечности), так что  $\xi_0 > \xi$ , то правая часть соотношения (1) всегда положительна и существует конечная нижняя грань значений, принимаемых отношением  $E/\mu$ . Подставляя

в (1) соотношение (2) с верхним знаком, получаем

$$(\xi^2 + E^2/\mu^2)v^2 - 2\xi\xi_0v + (\xi_0^2 - E^2/\mu^2) = 0.$$

Экстремум отношения  $E/\mu$  мы находим, полагая равным нулю дискриминант этого уравнения, квадратичного по  $v$ :

$$0 = (E/\mu)^2 [(E/\mu)^2 - \xi^2 + \xi_0^2].$$

Корень  $E/\mu = 0$  ложный. Отбрасывая его, получаем нижнюю грань отношения  $E/\mu$ :

$$(E/\mu)^2 = \xi_0^2 - \xi^2 = -\xi \cdot \xi.$$

Итак, область допустимых значений  $E/\mu$  в произвольно выбранной точке для времениподобных векторов  $\xi$  зависит от нормы вектора Киллинга в этой точке:

$$(-\xi \cdot \xi)^{\frac{1}{2}} \leq E/\mu < +\infty.$$

**Решение 10.16.** Для пробного электромагнитного поля необходимо лишь проверить, что в заданной исходной метрике выполняются уравнения Максвелла. Если векторный потенциал  $A^\mu$  — вектор Киллинга, то

$$A^\mu{}_{;\mu} = 0,$$

т. е. соблюдено условие Лоренца, и, пользуясь результатом, доказанным в задаче 10.6, и тем, что в пустом пространстве  $R^\mu{}_\nu = 0$ , можно записать волновое уравнение

$$A^\mu{}_{;\nu} - R^\mu{}_\nu A^\nu = 0.$$

Если в пространстве Минковского введены сферические координаты и  $A \sim \partial/\partial\varphi$ , т. е. отлична от нуля лишь компонента векторного потенциала  $A^\varphi = \text{const}$ , то  $A^{\hat{\varphi}} \sim r \sin\vartheta$ , или в обычных 3-мерных обозначениях

$$\vec{A} = a \sin\vartheta \vec{e}_\varphi \quad (a - \text{постоянная}).$$

Следовательно,

$$\vec{E} = 0 \text{ и } \vec{B} = \nabla \times \vec{A} = 2a(\cos\vartheta \vec{e}_r - \sin\vartheta \vec{e}_\vartheta) = 2a\vec{e}_z.$$

Это означает, что существует однородное магнитное поле, параллельное оси  $z$ . (Эту задачу предложил Роберт М. Вальд.)

## ГЛАВА II

### Решение II.1.

$$1) \frac{d\mathbf{J}}{d\tau} = \frac{d(\Delta\mathbf{x})}{d\tau} \otimes \mathbf{p} + \Delta\mathbf{x} \otimes \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} - \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \otimes \Delta\mathbf{x} - \mathbf{p} \otimes \frac{d(\Delta\mathbf{x})}{d\tau} = \\ = \mathbf{u} \otimes \mathbf{p} - \mathbf{p} \otimes \mathbf{u} = \frac{1}{m} \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} - \mathbf{p} \otimes \frac{1}{m} \mathbf{p} = 0.$$

2) Рассмотрим моменты времени непосредственно до столкновения и сразу же после столкновения. Поскольку все частицы при столкновении находятся в одной и той же точке, то

$$\Delta\mathbf{x}_{(k)}|_{\text{до}} = \Delta\mathbf{x}_{(k)}|_{\text{после}} = \Delta\mathbf{x}$$

(где  $\Delta\mathbf{x}$  — смещение в точку столкновения) и, следовательно,

$$\sum_{(k)} \mathbf{J}_{(k)}|_{\text{после}} = \Delta\mathbf{x} \otimes \sum_{(k)} \mathbf{p}_{(k)}|_{\text{после}} - \left( \sum_{(k)} \mathbf{p}_{(k)}|_{\text{после}} \right) \otimes \Delta\mathbf{x} = \\ = \Delta\mathbf{x} \otimes \sum_{(k)} \mathbf{p}_{(k)}|_{\text{до}} - \left( \sum_{(k)} \mathbf{p}_{(k)}|_{\text{до}} \right) \otimes \Delta\mathbf{x} = \sum_{(k)} \mathbf{J}_{(k)}|_{\text{до}},$$

поскольку полный импульс  $\sum_{(k)} \mathbf{p}_{(k)}$  при столкновении сохраняется.

### Решение II.2.

а) «Плотность момента количества движения»  $J^{\alpha\beta\gamma}$ , определяемая соотношением

$$J^{\alpha\beta\gamma} = 2x^{[\alpha}T^{\beta]\gamma} = x^{\alpha}T^{\beta\gamma} - x^{\beta}T^{\alpha\gamma},$$

удовлетворяет уравнению

$$J^{\alpha\beta\gamma}_{,\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma}T^{\beta\gamma} + x^{\alpha}T^{\beta\gamma}_{,\gamma} - \delta^{\beta}_{\gamma}T^{\alpha\gamma} - x^{\beta}T^{\alpha\gamma}_{,\gamma} = T^{\beta\alpha} - T^{\alpha\beta} = 0.$$

Следовательно, по теореме Гаусса

$$J^{\alpha\beta} \equiv \int J^{\alpha\beta\gamma} d^3 \Sigma_{\gamma}$$

— сохраняющаяся величина.

$$б) J^{\alpha\beta}(x^{\sigma} + a^{\sigma}) = \int (a^{\alpha}T^{\beta\gamma} - a^{\beta}T^{\alpha\gamma}) d^3 \Sigma_{\gamma} + J^{\alpha\beta}(x^{\sigma}).$$

Таким образом, величина  $J^{\alpha\beta}$  не инвариантна относительно трансляций (моменты количества движения относительно разных точек различны).

в) Рассмотрим производную спина по времени:

$$\frac{dS_\alpha}{dt} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \left( \frac{dJ^{\beta\gamma}}{dt} u^\delta + J^{\beta\gamma} \frac{du^\delta}{dt} \right).$$

По доказанному в п. «а» первый член в правой части обращается в нуль. Второй член также равен нулю, поскольку на систему не действуют никакие силы ( $du^\delta/dt = 0$ ). Следовательно,  $dS_\alpha/dt = 0$ .

г) По доказанному в п. «б»

$$J^{\alpha\beta} (x^\sigma + a^\sigma) = a^\alpha P^\beta - a^\beta P^\alpha + J^{\alpha\beta} (x^\sigma),$$

поэтому

$$S_\alpha (x^\sigma + a^\sigma) = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} (a^\alpha P^\beta - a^\beta P^\alpha) P^\delta / |P| + S_\alpha (x^\sigma).$$

Поскольку первый член в правой части обращается в нуль ( $\varepsilon$  — полностью антисимметричный тензор, а  $P^\mu$  входит квадратично), то  $S_\alpha (x^\sigma + a^\sigma) = S_\alpha (x^\sigma)$ .

**Решение 11.3.** Из определения внутреннего спина  $S_\alpha$ , пользуясь полной антисимметричностью тензора  $\varepsilon$  и симметричностью произведений  $u^\delta u^\alpha$ , получаем

$$u^\alpha S_\alpha = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} J^{\beta\gamma} u^\delta u^\alpha = 0.$$

**Решение 11.4.** Рассмотрим наблюдателя в локальной инерциальной системе отсчета, сопутствующей центру масс гироскопа. Поскольку к гироскопу не приложены никакие моменты, то с точки зрения этого наблюдателя ось спина не прецессирует и поэтому  $d\vec{S}/dt = 0$ . Но в той же системе отсчета 4-скорость гироскопа равна  $\mathbf{u} = (1, \vec{0})$ , поэтому условие равенства нулю суммарного момента, приложенного к гироскопу, можно записать в виде

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{S} = g \mathbf{u},$$

где  $g$  — некоторый постоянный коэффициент пропорциональности. Величину  $g$  мы найдем из соотношения ортогональности  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{u} = 0$ :

$$0 = \nabla_{\mathbf{u}} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{u}) = (\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{S}) \cdot \mathbf{u} + \mathbf{S} \cdot (\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u}) = g \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{a} = -g + \mathbf{S} \cdot \mathbf{a}.$$

Следовательно,

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{S} = (\mathbf{S} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{u}.$$

Это соотношение представляет собой не что иное, как перенос Ферми — Уокера:

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{S} = (\mathbf{S} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{u} - (\mathbf{S} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{a}$$

при  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{u} = 0$ .

**Решение II.5.**

а) При вычислении момента количества движения относительно центра масс в системе центра масс следует иметь в виду, что

$$\int x^i T^{00} d^3x = 0,$$

т. е. начало координат совмещено с центром масс, и

$$\int T^{i0} d^3x = 0,$$

т. е. суммарный момент количества движения относительно центра масс равен нулю. Таким образом,

$$J^{i0} = \int d^3x (x^i T^{00} - t T^{i0}) = 0,$$

или в обозначениях, не зависящих от выбора системы отсчета,

$$J^{\alpha\beta} u_\beta = 0.$$

б) По определению 4-вектора спина  $S_\delta$  имеем

$$- \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} S_\gamma u_\delta = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\gamma\mu\nu\sigma} J^{\mu\nu} u^\sigma u_\delta.$$

Суммируя по  $\gamma$  (см. задачи 3.27, 3.28), получаем

$$- \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu\sigma}^{\alpha\beta\delta} J^{\mu\nu} u^\sigma u_\delta = - J^{\alpha\beta} u^\delta u_\delta = J^{\alpha\beta} \equiv S^{\alpha\beta}.$$

[В сумме сохраняются лишь члены  $J^{\alpha\beta}$ . По доказанному в п. а  $\mathbf{J}$  не содержит индекс  $\delta$ , поскольку умножается на  $u_\delta$ .]

**Решение II.6.** Вычислим сначала полный момент количества движения. Выберем систему центра масс и примем за начало отсчета  $O$  столкновение тел  $A$  и  $B$ . Относительно события  $O$  тела  $A$  и  $B$  обладают лишь внутренним моментом количества движения (см. задачу II.5), поэтому

$$J_{A+B}^{\alpha, \beta}(O) = S_A^{\alpha\beta} + S_B^{\alpha\beta} = - \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \left( S_{A A}^\mu u_\nu + S_{B B}^\mu u_\nu \right).$$

По закону сохранения момента количества движения выражение, стоящее в правой части, равно  $J_C^{\alpha\beta}(O)$ . Подставляя его в соотношение для вектора спина, получаем

$$\begin{aligned} S_C^\sigma &= - \frac{1}{2} \varepsilon_{\sigma\alpha\beta\lambda} J_C^{\alpha\beta} u^\lambda = \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_{\sigma\alpha\beta\lambda} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \left( S_{A A}^\mu u_\nu + S_{B B}^\mu u_\nu \right) u^\lambda. \end{aligned}$$

Как доказано в задаче 3.28 (см. также задачу 3.27),

$$\varepsilon_{\sigma\alpha\beta\lambda} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} = - 2 \delta_{\sigma\lambda}^{\mu\nu}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} S_C^\sigma &= -\delta_{\sigma\lambda}^{\mu\nu} (S_{A A}^\mu u_\nu + S_{B B}^\mu u_\nu) u^\lambda = \\ &= -S_{A A}^\sigma (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - S_{B B}^\sigma (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) + u_\sigma (S_{A A}^\sigma \cdot \mathbf{u}) + u_\sigma (S_{B B}^\sigma \cdot \mathbf{u}). \end{aligned}$$

Подставляя  $(\mathbf{P} + \mathbf{P})/|\mathbf{P} + \mathbf{P}|$  вместо  $\mathbf{u}$ , получаем выражение для  $S_C^\sigma$ , которое требовалось найти.

**Решение 11.7.** Уравнение томасовой прецессии (см. задачу 11.4) имеет вид

$$\frac{d\mathbf{S}}{d\tau} = \mathbf{u} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{S}).$$

В лабораторной системе отсчета мировая линия частицы описывается уравнениями

$$\begin{aligned} x &= r \cos \omega t, \\ y &= r \sin \omega t \end{aligned}$$

( $\omega$  и  $r$  — постоянные). Следовательно,

$$u^0 = \gamma, \quad u^x = \gamma \frac{dx}{dt} = -\omega r \gamma \sin \omega t, \quad u^y = \gamma \omega r \cos \omega t, \quad u^z = 0,$$

где  $\gamma \equiv (1 - r^2 \omega^2)^{-1/2}$ . Но  $\mathbf{a} = d\mathbf{u}/d\tau$ , поэтому

$$a^0 = 0 (\gamma = \text{const}), \quad a^x = \gamma \frac{du^x}{d\tau}, \quad a^y = -\gamma^2 \omega^2 r \sin \omega t, \quad a^z = 0$$

и

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{a} = S^x a^x + S^y a^y = -\omega^2 r \gamma^2 \cos \omega t S^x - \omega^2 r \gamma^2 \sin \omega t S^y.$$

Таким образом,

$$\frac{dS^0}{d\tau} = \gamma \frac{dS^0}{dt} = u^0 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{S}) = \gamma (\mathbf{a} \cdot \mathbf{S}), \quad (1)$$

$$\frac{dS^x}{d\tau} = \gamma \frac{dS^x}{dt} = u^x (\mathbf{a} \cdot \mathbf{S}) = -\omega r \gamma \sin \omega t (\mathbf{a} \cdot \mathbf{S}), \quad (2)$$

$$\frac{dS^y}{d\tau} = \gamma \frac{dS^y}{dt} = u^y (\mathbf{a} \cdot \mathbf{S}) = \omega r \gamma \cos \omega t (\mathbf{a} \cdot \mathbf{S}), \quad (3)$$

$$\frac{dS^z}{d\tau} = 0. \quad (4)$$

Введем радиальную и тангенциальную компоненту вектора спина:

$$S^x = S^r \cos \omega t - S^\phi \sin \omega t,$$

$$S^y = S^r \sin \omega t + S^\phi \cos \omega t.$$

Из уравнений (2) и (3) получаем

$$\frac{dS^r}{dt} = \omega S^\theta, \quad (5)$$

$$\frac{dS^\theta}{dt} = -\omega\gamma^2 S^r. \quad (6)$$

Уравнения (5) и (6) можно записать в виде одного уравнения второго порядка и, решив его, найти  $S^r$ :

$$\frac{d^2 S^r}{dt^2} = -\omega^2 \gamma^2 S^r \Rightarrow S^r = A \cos(\omega\gamma t + \alpha), \quad (7)$$

где  $A, \alpha$  — постоянные. Тангенциальную компоненту спина получим из уравнения (5):

$$S^\theta = -\gamma A \sin(\omega\gamma t + \alpha). \quad (8)$$

Компоненты вектора спина  $\mathbf{S}$  в декартовых координатах определим из уравнений (4), (7) и (8):

$$S^x = A [\cos \omega t \cos(\omega\gamma t + \alpha) + \gamma \sin \omega t \sin(\omega\gamma t + \alpha)], \quad (9a)$$

$$S^y = A [\sin \omega t \cos(\omega\gamma t + \alpha) - \gamma \cos \omega t \sin(\omega\gamma t + \alpha)], \quad (9b)$$

$$S^z = \text{const.}$$

Запишем начальные условия

$$S^x = \hbar (2)^{-1/2}, \quad S^y = 0, \quad S^z = \frac{1}{2} \hbar. \quad (9в)$$

(Мы не рассматриваем здесь квантовомеханический смысл спина электрона, но тем не менее считаем желательным, чтобы выполнялось соотношение  $S^2 = 3\hbar^2/4$ .) Из этих условий следует, что  $\alpha = 0$ ,  $A = \hbar (2)^{-1/2}$ , и соотношения (9) можно представить в виде

$$S^x + iS^y = 2^{-1/2} \hbar [e^{-i(\gamma-1)\omega t} + i(1-\gamma) \sin(\omega\gamma t) e^{i\omega t}]. \quad (10)$$

Первый член в правой части соотношений (10) и (9в) указывает на прецессию вокруг оси  $z$  с угловой скоростью

$$\omega_{\text{Томас}} = (\gamma - 1) \omega \approx \frac{1}{2} v^2 \omega, \quad (11)$$

в то время как второй член в правой части соотношения (10) для электрона в атоме мал ( $1 - \gamma \approx -\frac{1}{2} v^2$ ).

**Решение II.8.** Воспользуемся для вычислений локально лоренцевской системой отсчета, сопутствующей центру масс тела. Рассматривая центр масс как исходную точку в уравнении расхождения геодезических, запишем относительное ускорение элемента

массы в положении  $x^{\hat{j}}$ :

$$\frac{d^2 x^{\hat{j}}}{dt^2} = -R^{\hat{j}}_{\hat{0}\hat{k}\hat{0}} x^{\hat{k}}. \quad (1)$$

Тогда  $i$ -я компонента момента, приходящегося на единицу объема, равна  $-\varepsilon_{\hat{i}\hat{j}\hat{k}} x^{\hat{i}} \rho R^{\hat{j}}_{\hat{0}\hat{k}\hat{0}} x^{\hat{k}}$ , где  $\rho$  — плотность массы в точке пространства  $x^{\hat{j}}$ . Полный момент, представляющий собой не что иное, как производную по времени от внутреннего момента количества движения, имеет вид

$$\frac{dS_{\hat{i}}}{dt} = -\varepsilon_{\hat{i}\hat{j}\hat{k}} R^{\hat{j}}_{\hat{0}\hat{k}\hat{0}} \int \rho x^{\hat{i}} x^{\hat{k}} d^3x, \quad (2)$$

если считать, что тензор Римана  $R^{\hat{j}}_{\hat{0}\hat{k}\hat{0}}$  приближенно постоянен в пределах тела. Вследствие симметрии произведения  $\varepsilon_{\hat{i}\hat{j}\hat{k}} R^{\hat{j}}_{\hat{0}\hat{k}\hat{0}}$  уравнение (2) эквивалентно уравнению

$$\frac{dS_{\hat{i}}}{dt} = -\varepsilon_{\hat{i}\hat{j}\hat{k}} t_{\hat{j}\hat{k}} R^{\hat{j}}_{\hat{0}\hat{k}\hat{0}}, \quad (3)$$

где

$$t_{\hat{j}\hat{k}} \equiv \int \rho \left( x^{\hat{j}} x^{\hat{k}} - \frac{1}{3} r^2 \delta^{\hat{j}\hat{k}} \right) d^3x.$$

Если тензор квадрупольного момента  $t^{\alpha\beta}$  определить так, чтобы  $t^{\alpha\beta} u_{\beta} = 0$ , т. е. чтобы в локально сопутствующей системе отсчета он имел лишь пространственные компоненты, то инвариантная тензорная запись уравнения (3) будет иметь вид

$$\frac{DS^{\alpha}}{d\tau} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\mu} u_{\mu} u^{\sigma} u^{\lambda} t_{\beta\gamma} R^{\eta}_{\sigma\alpha\lambda}. \quad (4)$$

Заметим, что в случае сферического тела или тела достаточно малых размеров, когда приближенно выполняется равенство

$$(\text{Тензор Римана}) \times (\text{Размеры тела})^2 \approx 0,$$

уравнение (4) вырождается в уравнение

$$DS^{\alpha}/d\tau = 0.$$

(См. задачу 11.4 при  $\mathbf{a} = 0$ .)

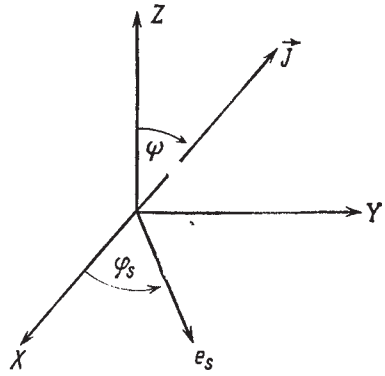
**Решение 11.9.** Воспользуемся двумя системами координат. Пусть  $XYZ$  — пространственные координаты локально лоренцевской системы с пространственным началом, совмещенным с центром масс Земли. Плоскость эклиптики совпадает с плоскостью  $XY$ . Условимся предполагать, что с точки зрения земного наблюдателя Солнце и Луна движутся в этой плоскости по круговым орбитам. Пусть  $xuz$  — пространственные координаты аналогичной



лоренцевской системы отсчета, но с осью  $z$ , параллельной моменту количества движения  $J$  Земли. Выберем ось  $x$  параллельно оси  $X$ . Базисные векторы двух систем координат связаны между собой соотношениями (фиг. 25)

$$\begin{aligned}\vec{e}_x &= \vec{e}_X, \\ \vec{e}_y &= \cos \psi \vec{e}_Y - \sin \psi \vec{e}_Z, \\ \vec{e}_z &= \sin \psi \vec{e}_Y + \cos \psi \vec{e}_Z.\end{aligned}$$

Здесь  $\psi \approx 23\frac{1}{2}^\circ$  — угол между  $\vec{J}$  и осью  $Z$ , который остается постоянным, если пренебречь небольшой нутацией. Вектор  $\vec{J}$  прецессирует вокруг оси  $Z$  с периодом  $T$ , который требуется определить.



Фиг. 25.

Пусть  $\vec{e}_\odot$  — единичный вектор, направленный на Солнце. Если в системе координат  $xyz$  Солнце имеет сферические координаты  $(r_\odot, \vartheta, \varphi_\odot)$ , а в системе  $XYZ$  — сферические координаты  $(r_\odot, \pi/2, \varphi_\odot)$ , то

$$\begin{aligned}\cos \vartheta &= \vec{e}_z \cdot \vec{e}_\odot = \\ &= (\sin \psi \vec{e}_Y + \cos \psi \vec{e}_Z) \cdot (\cos \varphi_\odot \vec{e}_X + \sin \varphi_\odot \vec{e}_Y) = \\ &= \sin \psi \sin \varphi_\odot\end{aligned}$$

и аналогично

$$\begin{aligned}\sin \vartheta \sin \varphi &= \vec{e}_y \cdot \vec{e}_\odot = \cos \psi \sin \varphi_\odot, \\ \sin \vartheta \cos \varphi &= \vec{e}_x \cdot \vec{e}_\odot = \cos \varphi_\odot.\end{aligned}$$

Из задачи 11.8 известно, что движение вектора собственного момента количества движения Земли  $\vec{J}$  во внешнем гравитационном поле описывается уравнением

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{N},$$

где компоненты момента  $\bar{N}$  равны

$$N_i = -\varepsilon_{ijk} t_{jm} R_{k0i0},$$

а тензор приведенного квадрупольного момента определяется выражением

$$t_{jm} = \int \rho \left( x^j x^m - \frac{1}{3} r^2 \delta^{jm} \right) d^3x.$$

Предположим, что Земля имеет сфероидальную форму с моментом инерции  $C$  относительно оси вращения и моментом инерции  $A$  относительно экваториальной оси. Тогда в координатах  $x y z$  имеем

$$C = \int \rho (x^2 + y^2) d^3x,$$

$$A = \int \rho (x^2 + z^2) d^3x = \int \rho (y^2 + z^2) d^3x.$$

Из компонент тензора  $t_{jm}$  от нуля отличны лишь

$$t_{zz} = -\frac{2}{3} (C - A),$$

$$t_{xx} = t_{yy} = \frac{1}{2} (C - A),$$

в силу чего

$$N_x = -(C - A) R_{z0y0},$$

$$N_y = (C - A) R_{z0x0},$$

$$N_z = 0.$$

В слабом поле (в пределе медленных движений)

$$R_{z0i0} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x^i},$$

где  $\Phi$  — ньютоновский гравитационный потенциал:

$$\Phi = \Phi_{\text{Солнце}} + \Phi_{\text{Луна}}.$$

Поскольку

$$\Phi_{\text{Солнце}}(x, y, z) = \frac{M_{\odot}}{[(x - x_{\odot})^2 + (y - y_{\odot})^2 + (z - z_{\odot})^2]^{1/2}},$$

то

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x} \right|_0 = -\frac{3M_{\odot} \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi}{r_{\odot}^3},$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y} \right|_0 = -\frac{3M_{\odot} \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi}{r_{\odot}^3}.$$

Следовательно,  $\bar{N}_{\text{Солнце}}$  имеет в системе  $x y z$  компоненты

$$\bar{N}_{\text{Солнце}} = 3a(C - A) \sin \vartheta \cos \vartheta (\sin \varphi, -\cos \varphi, 0) =$$

$$= 3a(C - A) \sin \psi \sin \varphi_{\odot} (\cos \psi \sin \varphi_{\odot}, -\cos \varphi_{\odot}, 0),$$

где  $a \equiv M_{\odot}/r_{\odot}^3$ . Учитывая, что угловая скорость обращения Солнца вокруг Земли во много раз превышает угловую скорость прецессии, которую требуется найти,  $\vec{N}_{\text{Солнце}}$  можно усреднить по орбите Солнца. При усреднении член  $\sin^2 \varphi_{\odot}$  дает  $1/2$ , а  $\sin \varphi_{\odot} \cos \varphi_{\odot}$  переходит в 0. Следовательно, из компонент момента  $\vec{N}_{\text{Солнце}}$  от нуля отлична лишь компонента

$$N_X^{\text{Солнце}} = N_X^{\text{Солнце}} = \frac{3}{2} a (C - A) \sin \psi \cos \psi.$$

Аналогичное выражение получается и для усредненного момента, создаваемого Луной (необходимо лишь вместо  $a$  взять  $b \equiv M_{\text{Д}}/r_{\text{Д}}^3$ ). Следовательно, при  $t=0$  в направлении оси  $X$  существует момент величиной

$$N = \frac{3}{2} (a + b) (C - A) \sin \psi \cos \psi.$$

Это означает, что за бесконечно малый промежуток времени  $dt$  вектор  $\vec{J}$  получает приращение  $dJ = Ndt$  в перпендикулярном направлении и, таким образом, поворачивается вокруг оси  $Z$  на угол

$$d\chi = \frac{dJ}{J \sin \psi} = \frac{Ndt}{J \sin \psi}.$$

Период прецессии — это промежуток времени, за который угол  $\chi$  изменяется на  $2\pi$ :

$$T = \frac{2\pi J \sin \psi}{N}.$$

Пусть  $J = C\omega$ , где  $\omega$  — угловая скорость вращения Земли вокруг собственной оси. Тогда

$$T = \frac{4\pi}{3} \frac{C}{C - A} \frac{1}{\cos \psi} \frac{\omega}{a + b}.$$

Подставляя численные значения

$$\begin{aligned} C/(C - A) &= 305,3, \\ \psi &= 23,45^\circ, \\ \omega &= 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}, \\ M_{\odot} &= 1,989 \cdot 10^{33} \text{ г}, \\ r_{\odot} &= 1,496 \cdot 10^{13} \text{ см}, \\ M_{\text{Д}} &= 7,349 \cdot 10^{25} \text{ г}, \\ r_{\text{Д}} &= 3,844 \cdot 10^{10} \text{ см}, \end{aligned}$$

находим

$$T = 25\,600 \text{ лет.}$$

Согласие с данными наблюдений лучше 1%. Некоторую ошибку в вычисления мы внесли, предположив, что для земного наблюдателя Солнце и Луна движутся по круговым орбитам. Кроме того, орбита Луны несколько отклоняется от плоскости эклиптики.

**Решение 11.10.**

1) Наблюдатели обладают 4-скоростями  $\mathbf{u} = \xi / |\xi|$ , где  $|\xi| = (-\xi \cdot \xi)^{1/2}$ . Следовательно, если учесть, что  $[\xi, \xi] = 0$ , то

$$\mathcal{L}_\xi \mathbf{e}_0 = \mathcal{L}_\xi \mathbf{u} = [\xi, \mathbf{u}] = [\nabla_\xi (-\xi \cdot \xi)^{-1/2}] \xi.$$

Но поскольку  $\xi$  удовлетворяет уравнению Киллинга  $\xi_{(\alpha; \beta)} = 0$ , то

$$\nabla_\xi (\xi \cdot \xi) = (\xi^\alpha \xi_\alpha)_{; \beta} \xi^\beta = 2\xi_\alpha \xi^\alpha \xi^\beta = 0.$$

Таким образом,

$$\mathcal{L}_\xi \mathbf{e}_0 = 0.$$

Кроме того,

$$\mathcal{L}_\xi \mathbf{e}_j = 0,$$

так как векторы  $\mathbf{e}_j$  соединяют точки с равными значениями  $t$  на мировой линии любого наблюдателя (см. задачу 8.14).

$$\begin{aligned} 2) \mathcal{L}_\xi \mathbf{Q} &= \mathcal{L}_\xi (Q^{\hat{\alpha}} \dots \hat{\beta} \mathbf{e}_{\hat{\alpha}} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{\hat{\beta}}) = \\ &= (\mathcal{L}_\xi Q^{\hat{\alpha}} \dots \hat{\beta}) \mathbf{e}_{\hat{\alpha}} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{\hat{\beta}} + Q^{\hat{\alpha}} \dots \hat{\beta} (\mathcal{L}_\xi \mathbf{e}_{\hat{\alpha}}) \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{\hat{\beta}} + \dots \\ &\dots + Q^{\hat{\alpha}} \dots \hat{\beta} \mathbf{e}_{\hat{\alpha}} \otimes \dots \otimes (\mathcal{L}_\xi \mathbf{e}_{\hat{\beta}}). \end{aligned}$$

По доказанному в п. 1 в нуль не обращается только первый член в правой части, поэтому

$$(\mathcal{L}_\xi \mathbf{Q})^{\hat{\alpha}} \dots \hat{\beta} = \mathcal{L}_\xi (Q^{\hat{\alpha}} \dots \hat{\beta}) = \nabla_\xi Q^{\hat{\alpha}} \dots \hat{\beta} = \frac{d}{dt} Q^{\hat{\alpha}} \dots \hat{\beta}$$

(напомним, что  $Q^{\hat{\alpha}} \dots \hat{\beta}$  — лишь скалярная функция). В единицах собственного времени скорость изменения тензорной величины  $\mathbf{Q}$  равна

$$\frac{d}{dt} Q^{\hat{\alpha}} \dots \hat{\beta} = \nabla_{\mathbf{u}} Q^{\hat{\alpha}} \dots \hat{\beta} = \frac{1}{|\xi|} \nabla_\xi Q^{\hat{\alpha}} \dots \hat{\beta} = \frac{1}{|\xi|} \frac{d}{dt} Q^{\hat{\alpha}} \dots \hat{\beta}.$$

3) В локальной системе покоя наблюдателя уравнение прецессии имеет вид

$$\frac{dS^{\hat{i}}}{dt} = \varepsilon_{\hat{j} \hat{k} \hat{l}} \omega^{\hat{k}} S^{\hat{l}},$$

где  $\mathbf{S}$  — вектор спина гироскопа. Но  $\varepsilon_{\hat{j} \hat{k} \hat{l}} = \varepsilon_{\hat{0} \hat{j} \hat{k} \hat{l}} = u^{\hat{\alpha}} \varepsilon_{\hat{\alpha} \hat{j} \hat{k} \hat{l}}$ , поэтому 4-мерный вариант уравнения прецессии можно записать следующим образом:

$$\frac{dS^{\hat{\beta}}}{dt} = u_{\hat{\alpha}} \varepsilon^{\hat{\alpha} \hat{\beta} \hat{\gamma} \hat{\delta}} \omega_{\hat{\gamma}} S_{\hat{\delta}},$$

или, что то же,

$$\frac{dS^{\hat{\beta}}}{dt} = \xi_{\hat{\alpha}} \varepsilon^{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}} \omega_{\hat{\gamma}} S_{\hat{\delta}}. \quad (1)$$

Мы хотим вывести уравнение вида (1) и определить  $\omega$ . Известно (см. задачу 11.4), что  $S$  допускает перенос Ферми — Уокера, т. е.

$$\nabla_u S = (S \cdot a) u \quad (2)$$

и

$$S \cdot u = 0. \quad (3)$$

Уравнение (2) преобразуется к виду

$$\nabla_{\xi} S = (S \cdot \nabla_{\xi} \xi) \xi / |\xi|^2, \quad (4)$$

а из уравнения (3) следует

$$S \cdot \xi = 0. \quad (5)$$

Из (2) получаем

$$\frac{dS}{dt} = \mathcal{L}_{\xi} S = \nabla_{\xi} S - \nabla_S \xi. \quad (6)$$

Поскольку вектор  $\xi$  выступает как (ненормированная) 4-скорость, то  $\nabla_{\xi}$  удобно разложить так же, как  $\nabla_u$  (см. задачу 5.18). Так как  $\xi$  — вектор Киллинга, то величина  $\nabla_{\xi}$  антисимметрична, и поэтому ее можно представить в виде

$$\nabla_{\xi} = \omega + A \otimes \xi - \xi \otimes A, \quad (7)$$

где  $\omega$  — антисимметричная величина, причем  $\omega \cdot \xi = 0$ . Так как

$$(\nabla_{\xi}) \cdot \xi = \nabla_{\xi} \xi = -\xi \cdot (\nabla \xi),$$

то

$$A = (\nabla_{\xi} \xi) (\xi \cdot \xi)^{-1}.$$

Итак, из уравнений (6) и (4) находим

$$\frac{dS}{dt} = - (S \cdot \nabla_{\xi} \xi) \xi (\xi \cdot \xi)^{-1} + S \cdot \nabla \xi = S \cdot \omega \quad (8)$$

[в первом равенстве мы воспользовались тем, что  $\nabla_S \xi = (\nabla \xi) \cdot S = -S \cdot \nabla \xi$ ]. Теперь  $\omega$  необходимо выразить через некоторый вектор так же, как это сделано в уравнении (1). Чтобы проследить, как изменяется при свертке по тем или иным индексам первоначальный набор индексов, вычисления удобнее вести покомпонентно. Уравнение (7) в подробной записи принимает вид

$$\xi_{\alpha; \beta} = \omega_{\alpha\beta} + A_{\alpha} \xi_{\beta} - \xi_{\alpha} A_{\beta},$$

что позволяет нам построить вектор, не зависящий от  $A$ :

$$B^{\lambda} \equiv \varepsilon^{\lambda\alpha\beta\gamma} \xi_{\alpha; \beta} \xi_{\gamma} = \varepsilon^{\lambda\alpha\beta\gamma} \omega_{\alpha\beta} \xi_{\gamma}. \quad (9)$$

Выразим  $\omega_{\alpha\beta}$  через  $\mathbf{B}$ :

$$\begin{aligned} \epsilon_{\lambda\rho\sigma\kappa} B^\lambda &= -\omega_{\alpha\beta} \xi_\gamma \delta_{\rho\sigma\kappa}^{\alpha\beta\gamma}, \\ \epsilon_{\lambda\rho\sigma\kappa} B^\lambda \xi^\kappa &= -\omega_{\alpha\beta} \xi_\gamma \delta_{\rho\sigma\kappa}^{\alpha\beta\gamma} \xi^\kappa. \end{aligned}$$

Поскольку  $\omega_{\alpha\beta} \xi^\beta = 0$ , отличные от нуля члены встречаются лишь при  $\gamma = \kappa$ :

$$\epsilon_{\lambda\rho\sigma\kappa} B^\lambda \xi^\kappa = -2\omega_{\rho\sigma} \xi_\kappa \xi^\kappa.$$

Подставляя в уравнение (8), преобразуем его к виду

$$\frac{dS^{\hat{\beta}}}{dt} = S_{\hat{\alpha}} \omega^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = -\frac{1}{2} S_{\hat{\alpha}} \epsilon^{\hat{\gamma}\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\kappa}} B_{\hat{\gamma}}^{\hat{\alpha}\hat{\kappa}} (\xi_{\hat{\delta}} \xi^{\hat{\delta}})^{-1}.$$

Новое уравнение аналогично уравнению (1) с

$$\omega^{\nu} = \frac{1}{2} B^{\nu} (\xi_{\alpha} \xi^{\alpha})^{-1}.$$

В силу соотношения (9) правая часть этого выражения равна  $\epsilon^{\nu\alpha\beta\sigma} \xi_{\alpha; \beta} \xi_{\sigma} / 2\xi_{\alpha} \xi^{\alpha}$ .

4) Из п. 3 следует, что  $\omega = 0$  в том и только в том случае, если  $\xi_{[\alpha; \beta} \xi_{\sigma]} = 0$ . Но именно это и есть условие гиперповерхностной ортогональности вектора  $\xi$  (задача 7.23), т. е. статичности метрик (см. задачу 10.8).

**Решение II.11.** Уравнение переноса для спина гироскопа имеет вид

$$\frac{dS^{\alpha}}{d\tau} = (\mathbf{S} \cdot \mathbf{a}) u^{\alpha}, \quad S^{\alpha} u_{\alpha} = 0. \quad (1)$$

Локально измеренная производная  $j$ -й компоненты (относительно локально лоренцевской системы отсчета) вектора спина по времени равна

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} S_{\hat{j}} &= \frac{d}{d\tau} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_{\hat{j}}) = \frac{D}{d\tau} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_{\hat{j}}) = \mathbf{S} \cdot \frac{D}{d\tau} \mathbf{e}_{\hat{j}} = \\ &= \mathbf{S} \cdot \Gamma^{\hat{\alpha}}_{\hat{j}\hat{\delta}} \mathbf{e}_{\hat{\alpha}} = \Gamma^{\hat{\alpha}}_{\hat{j}\hat{\delta}} S_{\hat{\alpha}} = \Gamma_{\hat{j}\hat{\delta}}^{\hat{i}} S^{\hat{i}}. \end{aligned} \quad (2)$$

(в этих преобразованиях мы использовали уравнение (1) и определение символов Кристоффеля). Пользуясь тем, что в ортонормированном репере символы Кристоффеля антисимметричны по двум первым индексам, уравнение (2) можно преобразовать к виду

$$\frac{dS^{\hat{j}}}{dt} = \epsilon_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}} \Omega_{\hat{k}} S_{\hat{l}}, \quad (3a)$$

где

$$\Omega_{\hat{k}} \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{\hat{k}\hat{l}\hat{j}} \Gamma^{\hat{l}}_{\hat{j}\hat{\delta}}. \quad (3b)$$

Необходимо вычислить символы Кристоффеля  $\Gamma_{\hat{\gamma}\hat{\delta}}^{\hat{\alpha}}$ . Метрику на поверхности Земли приближенно можно записать в виде

$$ds^2 = -(1 + 2\varphi) dt^2 + (1 - 2\varphi) \delta_{jk} dx^j dx^k - 4h_j dx^j dt, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi &= -M/r = \mathcal{O}(e^2), \\ \vec{h} &= \frac{\vec{J} \times \vec{r}}{r^3} = \mathcal{O}(e^3) \end{aligned} \quad (5)$$

и  $\vec{J}$  — момент количества движения Земли. Мы проводим вычисления в ньютоновском пределе, где скорости по порядку величины равны  $\mathcal{O}(e)$ , и сохраняем члены порядка  $e^3$ . У наблюдателя со стационарными координатами в метрике (4) имеется ортонормированный базис 1-форм:

$$\tilde{\omega}^0 = (1 + \varphi) \tilde{d}t + 2h_j \tilde{d}x^j, \quad \tilde{\omega}^j = (1 - \varphi) \tilde{d}x^j. \quad (6)$$

Векторы дуального базиса, определяемые соотношением

$$\langle \tilde{\omega}^{\tilde{\alpha}}, \mathbf{e}_{\tilde{\beta}} \rangle = \delta^{\tilde{\alpha}}_{\tilde{\beta}},$$

имеют вид

$$\mathbf{e}_{\tilde{0}} = (1 - \varphi) \partial/\partial t, \quad \mathbf{e}_{\tilde{j}} = (1 + \varphi) \frac{\partial}{\partial x^j} - 2h_j \partial/\partial t. \quad (7)$$

Если гироскоп обладает 3-скоростью  $v_j$ , связанной с 4-скоростью соотношениями

$$u^j = v_j u^0, \quad u^0 = 1 - \varphi + \frac{1}{2} v^2 \quad (\text{из } \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -1), \quad (8)$$

то в системе отсчета стационарного наблюдателя

$$v_{\tilde{j}} = \frac{u^{\tilde{j}}}{u^{\tilde{0}}} = \langle \tilde{\omega}^{\tilde{j}}, \mathbf{u} \rangle / \langle \tilde{\omega}^{\tilde{0}}, \mathbf{u} \rangle = (1 - 2\varphi) v_j. \quad (9)$$

Базисные векторы в ортонормированном репере, сопутствующем гироскопу, получаются из базисных векторов (7) под действием преобразования Лоренца — буста  $-v_{\tilde{j}}$ :

$$\mathbf{e}_{\tilde{\alpha}} = \Lambda^{\tilde{\alpha}}_{\tilde{\alpha}} \mathbf{e}_{\tilde{\alpha}},$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda^{\tilde{0}}_{\tilde{0}} &= \gamma \equiv 1 + \frac{1}{2} v^2, \quad \Lambda^{\tilde{0}}_{\tilde{j}} \equiv \gamma v_j = \Lambda^{\tilde{j}}_{\tilde{0}}, \\ \Lambda^{\tilde{j}}_{\tilde{k}} &= \delta^{jk} + (\gamma - 1) v^j v^k / v^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Они оказываются равными

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\tilde{0}} &= \left(1 - \varphi + \frac{1}{2} v^2\right) \partial/\partial t + \left(1 - \varphi + \frac{1}{2} v^2\right) v^k \partial/\partial x^k, \\ \mathbf{e}_{\tilde{j}} &= \left[\left(1 - 3\varphi + \frac{1}{2} v^2\right) v_j - 2h_j\right] \partial/\partial t + \left[\delta_{jk} (1 + \varphi) + \frac{1}{2} v_j v_k\right] \partial/\partial x^k. \end{aligned} \quad (11)$$

Символы Кристоффеля в ортонормированном репере можно найти по формуле

$$\Gamma_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\alpha}} = \frac{1}{2} (c_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\alpha}} + c_{\hat{\mu}\hat{\alpha}\hat{\nu}} - c_{\hat{\nu}\hat{\alpha}\hat{\mu}}), \quad (12)$$

$$c_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\alpha}} = [\mathbf{e}_{\hat{\mu}}, \mathbf{e}_{\hat{\nu}}] \cdot \mathbf{e}_{\hat{\alpha}}.$$

Подставляя базисные векторы (11) и удерживая члены порядка  $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$ , находим

$$[\mathbf{e}_{\hat{\gamma}}, \mathbf{e}_{\hat{\delta}}] = \left( -\varphi_{,j} + \frac{1}{2} v_{,j}^2 - v_{j,t} - \frac{1}{2} v^2 v_{j,t} - v_k v_{j,k} \right) \partial/\partial t +$$

$$+ \left[ v_{k,j} - \varphi_{,j} v_k + \frac{1}{2} v_{,j}^2 v_k + \frac{1}{2} v^2 v_{k,j} + v_j v_{k,t} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} v_j v_m v_{k,m} - \frac{1}{2} (v_j v_k)_{,t} - v_m \varphi_{,m} \delta_{jk} - v_m \frac{1}{2} (v_j v_k)_{,m} \right] \partial/\partial x^k.$$

Поскольку

$$(\partial/\partial x^\alpha) \cdot (\partial/\partial x^\beta) = g_{\alpha\beta},$$

то

$$[\mathbf{e}_{\hat{\gamma}}, \mathbf{e}_{\hat{\delta}}] \cdot \mathbf{e}_{\hat{k}} = \left( 1 - \varphi + \frac{1}{2} v^2 \right) v_{k,j} + v_k v_{j,t} + v_j v_{k,t} + \frac{1}{2} v_j v_m v_{k,m} +$$

$$+ v_m v_k v_{j,m} + \frac{1}{2} v_m v_k v_{m,j} - \frac{1}{2} (v_j v_k)_{,t} - v_m \varphi_{,m} \delta_{jk} - v_m \frac{1}{2} (v_j v_k)_{,m}.$$

Следовательно,

$$[\mathbf{e}_{\hat{\gamma}}, \mathbf{e}_{\hat{\delta}}] \cdot \mathbf{e}_{\hat{k}} - [\mathbf{e}_{\hat{k}}, \mathbf{e}_{\hat{\delta}}] \cdot \mathbf{e}_{\hat{\gamma}} = \left( 1 - \varphi + \frac{1}{2} v^2 \right) (v_{k,j} - v_{j,k}) +$$

$$+ \frac{1}{2} v_m (v_k v_{j,m} - v_j v_{k,m} + v_k v_{m,j} - v_j v_{m,k}) \quad (13)$$

и

$$[\mathbf{e}_{\hat{\gamma}}, \mathbf{e}_{\hat{k}}] = \left[ \left( 1 - 2\varphi + \frac{1}{2} v^2 \right) v_{k,j} + v_j v_{k,t} - 3\varphi_{,j} v_k + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} v_{,j}^2 v_k - 2h_{k,j} + \frac{1}{2} v_j v_m v_{k,m} \right] \partial/\partial t +$$

$$+ \left[ \varphi_{,j} \delta_{km} + \frac{1}{2} (v_k v_m)_{,j} + \frac{1}{2} v_j (v_k v_m)_{,t} \right] \partial/\partial x^m - \{j \leftrightarrow k\},$$

откуда

$$[\mathbf{e}_{\hat{\gamma}}, \mathbf{e}_{\hat{k}}] \cdot \mathbf{e}_{\hat{\delta}} = \left( 1 - \varphi + \frac{1}{2} v^2 \right) (v_{j,k} - v_{k,j}) + 4(\varphi_{,j} v_k - \varphi_{,k} v_j) +$$

$$+ 2(h_{k,j} - h_{j,k}) + v_k v_{j,t} - v_j v_{k,t} +$$

$$+ \frac{1}{2} v_m (v_j v_{m,k} - v_k v_{m,j} + v_k v_{j,m} - v_j v_{k,m}). \quad (14)$$

Таким образом, символы Кристоффеля имеют вид

$$\Gamma_{\hat{\gamma}\hat{k}\hat{\delta}} = \frac{1}{2} ([\mathbf{e}_{\hat{\gamma}}, \mathbf{e}_{\hat{k}}] \cdot \mathbf{e}_{\hat{\delta}} + [\mathbf{e}_{\hat{\gamma}}, \mathbf{e}_{\hat{\delta}}] \cdot \mathbf{e}_{\hat{k}} - [\mathbf{e}_{\hat{k}}, \mathbf{e}_{\hat{\delta}}] \cdot \mathbf{e}_{\hat{\gamma}}) =$$

$$= 2(\varphi_{,j} v_k - \varphi_{,k} v_j) + h_{k,j} - h_{j,k} + \frac{1}{2} \left( v_k \frac{\partial v_j}{\partial t} - v_j \frac{\partial v_k}{\partial t} \right), \quad (15)$$



где

$$\frac{\partial v_j}{\partial \tau} \equiv \frac{\partial v_j}{\partial t} + v_m \frac{\partial v_j}{\partial x^m} = -\varphi_{,j} + a_j. \quad (16)$$

Здесь  $\vec{a}$  означает ускорение, создаваемое неинерциальными силами. Для движения по геодезическим  $\vec{a} = 0$ . Таким образом,

$$\Gamma_{\hat{k}\hat{0}}^{\hat{3}} = \frac{3}{2} (\varphi_{,j} v_k - \varphi_{,k} v_j) + h_{k,j} - h_{j,k} \quad (17)$$

и соотношение (3б) можно представить в виде

$$\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{h} + \frac{3}{2} \vec{\nabla} \varphi \times \vec{v}. \quad (18)$$

Если бы  $\vec{a} \neq 0$ , то в (18) появился бы лишний член  $1/2 \vec{a} \times \vec{v}$ , соответствующий томасовой прецессии.

Член  $3/2 \vec{\nabla} \varphi \times \vec{v}$  называется «геодезической прецессией». Для частицы, движущейся по круговой орбите радиуса  $r$ ,

$$\Omega_{\text{геодезич}} = \frac{3}{2} \frac{M}{r^2} (v_{\hat{\theta}} \mathbf{e}_{\hat{\varphi}} - v_{\hat{\varphi}} \mathbf{e}_{\hat{\theta}}),$$

где

$$v_{\hat{\theta}} = \left(\frac{M}{r}\right)^{1/2} \frac{(\sin^2 \vartheta - \sin^2 \alpha)^{1/2}}{\sin \vartheta},$$

$$v_{\hat{\varphi}} = \left(\frac{M}{r}\right)^{1/2} \frac{\sin \alpha}{\sin \vartheta}$$

— компоненты скорости частицы в сферической системе координат, а  $\alpha$  — угол наклона плоскости орбиты к полярной оси. В рассматриваемом нами порядке теории возмущений по  $\varepsilon$  не имеет значения, какие индексы мы используем: со знаком  $\hat{\phantom{x}}$  или без него. Геодезическая прецессия по порядку величины составляет

$$\Omega_{\text{геодезич}} \sim \frac{3}{2} \left(\frac{M}{R}\right)^{1/2} \frac{M}{R^2} \sim 8'' \text{ в год},$$

где  $R$  — радиус Земли. Член, не зависящий от  $v$ , называется прецессией Лензе — Тирринга:

$$\Omega_{\text{Л-Т}} = \frac{1}{r^3} \left( -\vec{J} + \frac{3(\vec{J} \cdot \vec{r})}{r^2} \vec{r} \right) \sim \frac{J}{R^3} \sim 0,1'' \text{ в год}.$$

Этот член можно было бы также получить из задачи 11.10, поскольку с точностью до  $\varepsilon^3$

$$\Omega^{\hat{i}} \sim \Omega^j \approx \frac{\varepsilon^{j0kl} \xi_0^k \xi_{[l}^j]}{2\xi^v \xi_v}.$$

Поскольку

$$\xi^0 = 1, \quad \xi_0 = -(1 + 2\varphi), \quad \xi_j = -2h_j,$$

то

$$\Omega^{\hat{i}} = \varepsilon_{jkl} h_{l,k}, \quad \vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{h}.$$

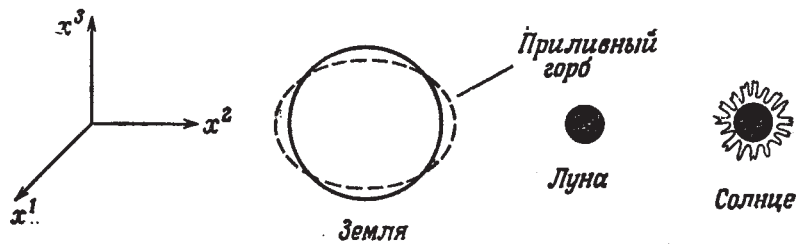
## ГЛАВА 12

**Решение 12.1.** Приравнивая гравитационное ускорение  $Gm/r^2$  центростремительному ускорению  $\omega^2 r$ , мы получаем закон Кеплера:

$$\omega = (Gm/r^3)^{\frac{1}{2}}.$$

Средняя плотность вещества внутри сферы радиуса  $r$  есть  $\bar{\rho} = 3m/4\pi r^3$ , так что  $\omega = (4\pi G\bar{\rho}/3)^{\frac{1}{2}}$ . Этот результат означает, в частности, что песчинка будет обращаться вокруг стального шарика вблизи его поверхности примерно с тем же 90-минутным периодом, что и спутник, запущенный на орбиту близ поверхности Земли.

**Решение 12.2.** Пусть высота прилива равна  $h$ . Желая получить лишь грубую оценку, примем для простоты, что Солнце и Луна расположены в экваториальной плоскости (фиг. 26). Тогда,



Фиг. 26.

если элементарный объем воды в океане на широте экватора находится во время прилива в равновесии, то испытываемое им ускорение земной силы тяжести  $g(r) = -M_{\oplus}/r^2$  на «высоте»  $r = r_{\oplus} + h$  (здесь  $M_{\oplus}$  и  $r_{\oplus}$  — масса и радиус Земли соответственно) уравнивается приливными ускорениями со стороны Солнца и Луны, отнесенными к центру Земли:

$$0 = g(r_{\oplus} + h) + r_{\oplus} R_{3020}^{\text{Солнце}} + r_{\oplus} R_{3020}^{\text{Луна}}. \quad (1)$$

В это время в пункте, отстоящем по долготе на  $90^\circ$ , наблюдается отлив; соответственно для элементарного объема воды будем иметь

$$0 = g(r_{\oplus} - h) + r_{\oplus} R_{1010}^{\text{Солнце}} + r_{\oplus} R_{1010}^{\text{Луна}}. \quad (2)$$

Вычитая одно уравнение из другого, получаем

$$0 = 2hg'(r_{\oplus}) + r_{\oplus}(R_{2020}^{\text{Солнце}} - R_{1010}^{\text{Солнце}} + R_{2020}^{\text{Луна}} - R_{1010}^{\text{Луна}}). \quad (3)$$

Отметим, что если бы мы ввели центробежные силы, то в уравнении (3) они бы взаимно сократились. Вычислим теперь компоненты тензора Римана в ньютоновском пределе (см. задачу 12.12). Имеем

$$R_{1110}^{\text{Солнце}} = \frac{\partial^2 \Phi_{\text{Солнце}}}{\partial^2 x^2} \Big|_{x=y \approx 0} = \\ = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{M_{\odot}}{[(x-x_{\text{Солнце}})^2 + (y-y_{\text{Солнце}})^2 + (z-z_{\text{Солнце}})^2]^{\frac{3}{2}}} \right]$$

и аналогичные выражения для других компонент. Для наших случаев находим

$$\begin{aligned} R_{1010}^{\text{Солнце}}(x_{\text{Солнце}} = z_{\text{Солнце}} = 0, \quad y_{\text{Солнце}} = R) &= M_{\odot}/R^3, \\ R_{1010}^{\text{Солнце}}(y_{\text{Солнце}} = z_{\text{Солнце}} = 0, \quad x_{\text{Солнце}} = R) &= -2M_{\odot}/R^3, \\ R_{2020}^{\text{Солнце}}(x_{\text{Солнце}} = z_{\text{Солнце}} = 0, \quad y_{\text{Солнце}} = R) &= -2M_{\odot}/R^3, \\ R_{2020}^{\text{Солнце}}(y_{\text{Солнце}} = z_{\text{Солнце}} = 0, \quad x_{\text{Солнце}} = R) &= M_{\odot}/R^3. \end{aligned}$$

Аналогичные соотношения получаются для гравитационного поля Луны. Сизигийные приливы наблюдаются, когда Луна и Солнце расположены на одной линии, скажем на оси  $y$ . Тогда уравнение (3) дает

$$h_{\text{сизиг}} = \frac{3}{4} \left( \frac{M_{\text{Луна}}}{R_{\text{Луна}}^3} + \frac{M_{\odot}}{R_{\odot}^3} \right) \frac{r_{\oplus}^4}{M_{\oplus}} = 39 \text{ см.}$$

Квадратурные приливы соответствуют случаю, когда Луна расположена, например, на оси  $y$ , а Солнце — на оси  $x$ . В этом случае

$$h_{\text{квадр}} = \frac{3}{4} \left( \frac{M_{\text{Луна}}}{R_{\text{Луна}}^3} - \frac{M_{\odot}}{R_{\odot}^3} \right) \frac{r_{\oplus}^4}{M_{\oplus}} = 15 \text{ см.}$$

Разумеется, физические значения высоты приливов во многих случаях значительно превосходят наши оценки. Это обусловлено гидродинамическими эффектами — такими, например, как «хлюпанье» воды в мелководных морях и вблизи береговых линий сложной конфигурации.

**Решение 12.3.** С неплохой точностью можно считать, что твердое тело Земли под воздействием приливообразующей силы, входящей в тензор Римана, деформируется линейно. [Это, однако, неверно для гидродинамических (морских) приливов.] Следовательно, фурье-спектр для земных приливов будет выглядеть так же, как и спектр компонент тензора Римана на поверхности

Земли. Поскольку (по крайней мере в ньютоновском приближении) приливообразующие силы линейно зависят от источников, мы можем рассматривать влияние Луны и Солнца независимо. Гравитационный потенциал, создаваемый массой  $M$ , помещенной в точке с геоцентрическими координатами  $x, y, z$ , имеет вид

$$U = M/(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}.$$

Тогда в ньютоновском пределе компоненты тензора Римана равны

$$\begin{aligned} R_{x_0x_0} &= \partial^2 U / \partial x^2 = \frac{M}{r^3} \left( \frac{3x^2}{r^2} - 1 \right), \\ R_{x_0y_0} &= \partial^2 U / \partial x \partial y = \frac{M}{r^3} \left( \frac{3xy}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

и т. п. для  $yy, zz, yz, xz$ . В системе отсчета, связанной с вращающейся Землей, видимая орбита Солнца или Луны описывается стандартными соотношениями кеплеровской сферической астрономии (см., например, [1], т. 2, стр. 313):

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\bar{\omega} + v) \cos \varphi t - r \sin(\bar{\omega} + v) \cos \epsilon \cdot \sin \varphi t, \\ y &= r \sin(\bar{\omega} + v) \cos \epsilon \cdot \cos \varphi t + r \cos(\bar{\omega} + v) \sin \varphi t, \\ z &= r \sin(\bar{\omega} + v) \sin \epsilon. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $\bar{\omega}$  и  $\epsilon$  — постоянные, равные соответственно долготе перигея и наклонению орбиты к экваториальной плоскости. Угол  $\varphi t$  есть часовой угол для вращающейся Земли:

$$\varphi t = \frac{2\pi}{1 \text{ звездные сутки}} t,$$

$r$  — «радиус-вектор» и  $v$  — «истинная аномалия», дающиеся соотношениями

$$r = a(1 - e \cos E), \quad \cos v = (\cos E - e)(1 - e \cos E)^{-1},$$

где  $a$  — большая полуось орбиты,  $e$  — эксцентриситет, а  $E$  — эксцентрическая аномалия, определяемая из уравнения

$$E - e \sin E = \frac{2\pi}{T} t \equiv \Omega t,$$

где  $T$  — период обращения по орбите. Оставляя только члены первого порядка малости по эксцентриситету  $e$ , после вычисления получаем

$$\begin{aligned} E &= \Omega t + e \sin \Omega t, \\ \cos E &= \cos \Omega t - e \sin^2 \Omega t, \\ r^{-3} &= a^{-3} (1 + 3e \cos \Omega t), \\ \cos v &= \cos \Omega t + e \cos 2\Omega t - e. \end{aligned} \quad (3)$$

Теперь, подставляя уравнение (3) в уравнение (2), а получившийся результат в уравнение (1), будем иметь

$$R_{J_0k_0} = \frac{M}{a^3} \times (\text{постоянные члены} + \text{члены, зависящие от времени } t).$$

При этом зависящие от времени члены имеют следующий характерный вид:

$$3 \left[ \left( \frac{\sin}{\cos} \right)^2 \Omega t - 2e \left( \frac{\sin}{\cos} \right) \Omega t + 2e \left( \frac{\sin}{\cos} \right) \Omega t \left( \frac{\sin}{\cos} \right) 2\Omega t \right] \times \begin{cases} \sin^2 \varepsilon \text{ или} \\ \sin \varepsilon \cos^N \varepsilon \left( \frac{\sin}{\cos} \right) \varphi t, \text{ или} \\ \cos^{2N} \varepsilon \left( \frac{\sin}{\cos} \right)^2 \varphi t \end{cases}$$

(здесь  $\left( \frac{\sin}{\cos} \right)$  означает либо  $\sin$ , либо  $\cos$ , а показатель степени  $mN$  — любое целое число в промежутке от нуля до  $m$  включительно). Это выражение можно разложить по отдельным частотам с помощью последовательного применения тригонометрических тождеств, выражающих произведения синусов и косинусов через суммы членов, зависящих от сумм или разностей частот. В результате мы получаем следующие компоненты:

	Угловая частота	Амплитуда (в главном порядке по $e$ )
(I)	$2\varphi$	$\frac{3}{4} \cos^{2N} \varepsilon$
(II)	$\varphi$	$\frac{3}{2} \sin \varepsilon \cos^N \varepsilon$
(III)	$2\Omega \pm 2\varphi$	$\frac{3}{8} \cos^{2N} \varepsilon$
(IV)	$2\Omega \pm \varphi$	$\frac{3}{4} \sin \varepsilon \cdot \cos^N \varepsilon$
(V)	$2\Omega$	$\frac{3}{2} \sin^2 \varepsilon$ и $\frac{3}{4} \cos^{2N} \varepsilon$
(VI)	$\Omega \pm 2\varphi$	$3e \cos^{2N} \varepsilon$
(VII)	$\Omega \pm \varphi$	$6e \sin \varepsilon \cdot \cos^N \varepsilon$
(VIII)	$\Omega$	$6e \left( \sin^2 \varepsilon \text{ или } \frac{1}{2} \cos^{2N} \varepsilon \right)$
(IX)	$3\Omega \pm 2\varphi$	$\frac{3}{2} e \cos^{2N} \varepsilon$
(X)	$3\Omega \pm \varphi$	$3e \sin \varepsilon \cdot \cos^N \varepsilon$
(XI)	$3\Omega$	$3e \sin^2 \varepsilon$

Для системы Земля — Солнце  $\varepsilon = 23^\circ,5$ ,  $e = 0,017$ ,  $\Omega = 2\pi/1$  год и  $\varphi = 2\pi/(1$  звездные сутки); для системы Земля — Луна  $e = 0,054$ ,

$\Omega = 2\pi/(1 \text{ звездный месяц})$ ;  $\varphi = 2\pi/(1 \text{ звездные сутки})$ , а значение  $\epsilon$  меняется в пределах  $23,5 \pm 5^\circ$  в результате нутации узлов лунной орбиты с периодом 18,6 лет. (Последний факт приводит к дальнейшему расщеплению спектра, которым мы здесь пренебрегаем.) Используя эти значения и учитывая, что величина  $(M/a^3)$  для лунной орбиты в 2,2 раза больше, чем для солнечной, можно оценить относительную величину перечисленных выше компонент и расположить их в порядке убывания интенсивности:

$$M(I), M(V), M(II), M(III), S(I), S(V), M(IV), \\ S(II), S(III), M(VI), M(VIII) \dots,$$

где  $M$  и  $S$  — члены, обусловленные соответственно влиянием Луны и Солнца.

**Решение 12.4.** Лаплас был первым, кто осознал тот факт, что эти два положения должны отличаться друг от друга. Оптически наблюдаемое положение Солнца на небосводе смещено за счет конечности скорости света; другими словами, приходящий от Солнца свет испытывает аберрацию на угол  $\vartheta = v/c$ , где  $v$  — скорость движения Земли по орбите. Далее, поскольку кулоновское гравитационное поле аберрации не испытывает, то, если бы сила тяготения была направлена в сторону смещенного положения Солнца, существовала бы компонента солнечного ускорения, равная  $(GM_\odot/r^2)(v/c)$  и направленная вдоль движения Земли. В этом случае энергия Земли должна была бы возрастать со скоростью

$$\frac{d(E/M_\oplus)}{dt} = \frac{GM_\odot}{r^2} \frac{v^2}{c}.$$

Однако, поскольку  $E/M_\oplus = -\frac{1}{2} GM_\odot/r$ , мы фактически имели бы дело с потерей энергии, соответствующей увеличению радиуса земной орбиты со скоростью  $dr/dt = 2v^2/c$ . Если учесть, что  $v^2 = GM_\odot/r$ , это уравнение легко интегрируется:

$$t - t_0 = \frac{c}{4GM} (r^2 - r_0^2).$$

Для земной орбиты  $r = 1,5 \cdot 10^{13}$  см,  $v = 30$  км/с, так что  $\vartheta \approx 10^{-4}$ . Если теперь положить  $r_0$  равным, например, радиусу Солнца  $r_0 = 7 \cdot 10^{10}$  см, то  $t - t_0 \approx 1,3 \cdot 10^{10}$  с  $\approx 400$  лет. Это значительно меньше, чем длительность геологического периода, в течение которого, как известно, радиус земной орбиты не менялся.

**Решение 12.5.** Световое давление внутри звезды дается формулой

$$P_{\text{изд}} = (1/3) U_{\text{изд}},$$

где  $U_{\text{изл}}$  — плотность энергии излучения. Поскольку свет «диффундирует» наружу, многократно участвуя в процессах рассеяния,  $U_{\text{изл}}$  удовлетворяет уравнению диффузии, а поток излучения пропорционален градиенту  $U_{\text{изл}}$ :

$$F = -\frac{c}{3\kappa\rho} \nabla U_{\text{изл}},$$

где  $\kappa$  — коэффициент непрозрачности (мы используем здесь его значение по Томпсону  $\kappa_{\tau} = \sigma_{\tau}/m_p = 0,4 \text{ см}^2/\text{г}$ ). Соотношение  $L = 4\pi r^2 F$ , связывающее поток излучения с полной светимостью  $L$  звезды, дает

$$dP_{\text{изл}} = -\frac{\kappa\rho}{4\pi c} \frac{Ldr}{r^2},$$

т. е. выражение для суммарного светового давления на элементарный слой вещества толщиной  $dr$  и единичной площадью поверхности. Приравнявая  $dP_{\text{изл}}$  гравитационной силе, действующей на этот элементарный объем в направлении внутрь звезды,  $-GM\rho dr/r^2$ , мы получаем значение эддингтоновского предела:

$$L = \frac{4\pi GMc}{\kappa_{\tau}} = 1,38 \cdot 10^{38} \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right) \text{ эрг/с.}$$

Мы можем также получить этот результат микроскопически, заметив, что поскольку сечение рассеяния пропорционально  $(1 + \cos^2\theta)$  и, следовательно, симметрично относительно направления рассеяния («вперед — назад»), то фотон с импульсом  $p$  передает электрону в среднем при каждом соударении импульс  $p$ . Если радиальная компонента импульса равна  $p_r$ , то, хотя энергия фотона равна  $pc$ , его вклад в светимость (направленный наружу световой поток) уменьшается в  $c/v_r = p/p_r$  раз. Таким образом, радиальная компонента импульса, переданная одному электрону, находящемуся на расстоянии  $r$  от центра звезды, в единицу времени, как раз пропорциональна суммарной светимости в радиальном направлении  $\mathcal{L}$  (постоянной для всех значений радиуса):

$$\frac{\text{(импульс)}}{\text{(время)}} = \frac{L}{4\pi r^2 (\hbar\omega)} \times \sigma_{\tau} \times \left( \frac{\hbar\omega}{c} \right) = \frac{L\sigma_{\tau}}{4\pi r^2 c}.$$

эффективное  
число фотонов,  
проходящих в  
радиальном на-  
правлении через  
единицу площа-  
ди в единицу  
времени
 

 сечение
 

 импульс,  
приходя-  
щий на  
1 фотон

Импульс в единицу времени есть не что иное, как сила, и мы приравняем ее направленной внутрь силе тяготения, действующей

на протон, связанный с рассматриваемым электроном:

$$\frac{L\sigma_{\tau}}{4\pi r^2 c} = \frac{GMm_p}{r^2};$$

это приводит нас к тому же результату, что и полученный выше.

**Решение 12.6.** Пусть  $\varphi^g$  и  $\varphi^e$  — гравитационный и электростатический потенциалы соответственно. Тогда потенциальная энергия электрона равна

$$\Phi = m\varphi^g + e\varphi^e,$$

где  $m$  и  $e$  — масса и заряд электрона, а сила, действующая на электрон, есть

$$\vec{F} = -\nabla\Phi.$$

В статическом случае не может существовать тангенциальная составляющая этой силы, направленная вдоль проводящей поверхности, и, следовательно, энергия  $\Phi$  на внутренней поверхности должна быть постоянной. Пусть теперь внутри сосуда отсутствуют как массы ( $\nabla^2\varphi^g = 0$ ), так и заряды ( $\nabla^2\varphi^e = 0$ ), так что  $\nabla^2\Phi = 0$ . Решение уравнения Лапласа  $\nabla^2\Phi = 0$  всюду внутри проводящего сосуда, представляющего собой эквипотенциальную поверхность, есть в этом случае  $\Phi = \text{const}$ . Таким образом, если в это поле будет помещен электрон, на него не будут действовать никакие силы. [*Примечание.* Поскольку электрон помещается в центр сосуда, силами со стороны зеркальных зарядов можно пренебречь из соображений симметрии.]

**Решение 12.7.** По мере того как содержимое сосуда нагревается, его масса увеличивается пропорционально поступающей энергии в соответствии с формулой  $c^2 dM = \frac{1}{2} kN dT$  (коэффициент  $\frac{1}{2}$  появился потому, что воздух — смесь двухатомных газов;  $N$  — полное число молекул в сосуде). С другой стороны, центр тяжести массы газа повышается, что приводит к уменьшению веса, так как при этом увеличивается расстояние до центра Земли. Действительно, положение центра тяжести определяется формулой

$$z_{\text{ц.т.}} = \int_0^h \rho z dz / \int_0^h \rho dz, \quad \rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{mg}{kT} z\right),$$

следовательно, изменение  $z_{\text{ц.т.}}$  с температурой дается соотношением

$$\frac{dz_{\text{ц.т.}}}{dT} = \frac{k}{mg} \left[ 1 - \left( \frac{\eta}{\text{sh } \eta} \right)^2 \right], \quad \eta = \frac{mgh}{2kT},$$

где  $m$  — средняя масса молекулы воздуха.



Результирующее изменение веса равно, таким образом,

$$\begin{aligned} dW &= \left( g \frac{dM}{dT} + M \frac{dg}{dz_{\text{ц.т.}}} \frac{dz_{\text{ц.т.}}}{dT} \right) dT = \\ &= \left( \frac{7}{2} \frac{gkN}{c^2} - mN \frac{2g}{R_{\oplus}} \frac{k}{mg} \left[ 1 - \frac{\eta^2}{\text{sh}^2 \eta} \right] \right) dT. \end{aligned}$$

Правая часть равенства становится отрицательной, когда

$$1 - \frac{\eta^2}{\text{sh}^2 \eta} > \frac{7}{4} \frac{gR_{\oplus}}{c^2} = 0,122 \cdot 10^{-8}.$$

Это выполняется для  $\eta > 6,05 \cdot 10^{-5}$ , т. е. при  $h = 2kT\eta/mg > 218$  см.

**Решение 12.8.** В силу уравнения Пуассона  $U_{,kk} = 4\pi\rho_0$  имеем

$$T_{jk,k} = \frac{1}{4\pi} (U_{,jk} U_{,k} + U_{,j} U_{,kk} - U_{,nj} U_{,n}) = \rho_0 U_{,j}.$$

Следовательно, мы можем записать ньютоновское уравнение движения в виде

$$\rho_0 \frac{dv_j}{dt} = - \frac{\partial t_{jk}}{\partial x^k} - \rho_0 \frac{\partial U}{\partial x^j} = - \frac{\partial}{\partial x^k} (T_{jk} + t_{jk}),_k. \quad (1)$$

Используем теперь ньютоновское уравнение непрерывности

$$\partial \rho_0 / \partial t + (\rho_0 v^k),_k = 0. \quad (2)$$

Из уравнения (2) и выражения для «конвективной» производной

$$d/dt = \partial/\partial t + v_k \partial/\partial x^k$$

можно получить

$$\rho_0 \frac{dv_j}{dt} = \rho_0 \left( \frac{\partial v_j}{\partial t} + v^k v_{,k}^j \right) = (\rho_0 v_j),_t + (\rho_0 v_j v_k),_k,$$

и тогда уравнение (1) можно записать в виде

$$(\rho_0 v_j),_t + (T_{jk} + t_{jk} + \rho_0 v_j v_k),_k = 0.$$

**Решение 12.9.** Рассмотрим виртуальное смещение  $\vec{\delta}$ ; энергия должна быть стационарна по  $\vec{\delta}$ . Если мы включим в полную энергию гравитационную потенциальную энергию, соответствующую работе, проделанной приложенными силами или против сил, тогда приращение энергии для каждой отдельной силы будет иметь вид

$$dE_i = -\vec{F}_i \cdot \vec{\delta} - (dE_i) (\vec{g}/c^2) \cdot \vec{x}_i,$$

а приращение энергии за счет перемещения массы объекта равно

$$dE = -M\vec{g} \cdot \vec{\delta}.$$

Тогда

$$dE_{\text{полн}} = - \sum \vec{F}_i \cdot \vec{\delta} \left( 1 - \frac{\vec{g} \cdot \vec{x}_i}{c^2} \right) - M \vec{g} \cdot \vec{\delta}$$

для любого  $\vec{\delta}$  и, следовательно,

$$\sum_i \vec{F}_i \left( 1 - \frac{\vec{g} \cdot \vec{x}_i}{c^2} \right) = - M \vec{g}.$$

Обратите внимание, что, относя гравитационный потенциал к центру тяжести, мы избегаем необходимости включать в рассмотрение гравитационную потенциальную энергию. (Этим замечанием мы обязаны К. Нордтведту.)

**Решение 12.10.** В предыдущей задаче мы нашли, что

$$\sum \vec{F}_i \left( 1 - \frac{\vec{g} \cdot \vec{x}_i}{c^2} \right) = - M \vec{g}.$$

Если  $p$  — давление, а  $d\vec{A}$  — ориентированный элемент поверхности, то  $\vec{F} = p d\vec{A}$ , и приведенный выше результат приобретает вид

$$- \int p(x) \left( 1 - \frac{\vec{g} \cdot \vec{x}}{c^2} \right) d\vec{A} = - M \vec{g},$$

или

$$- \int p d\vec{A} + \int p \vec{g} \cdot \frac{\vec{x}}{c^2} d\vec{A} = - M \vec{g}$$

для постоянного  $\vec{g}$ . Теперь, подставляя значения

$$\vec{g} = - \frac{GM}{r^2} \vec{e}_r, \quad \vec{x} = dr \vec{e}_r, \quad d\vec{A} = \pm dA \vec{e}_r,$$

получаем

$$- A [p(r+dr) - p(r)] \vec{e}_r - dr \frac{GM}{c^2 r^2} \vec{e}_r \int p dA = - M \vec{g} = A dr \rho \frac{GM}{r^2} \vec{e}_r,$$

откуда следует

$$\frac{dp}{dr} = - \frac{GM}{r^2} \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right).$$

Этот результат справедлив в любой теории гравитации, в которой выполняется соотношение  $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$  (такие теории называются метрическими), и не зависит от вида уравнений поля. Однако для нахождения массы  $M(r)$ , определяемой так, чтобы локальное ускорение силы тяжести было равно  $g = -GM/r^2$ , в каждой теории существуют свои собственные методы и процедуры.

**Решение 12.11.** Выделенной системой координат в ньютоновской теории являются галилеевы пространственные координаты  $x^j$  и «универсальное время»  $t$ . Уравнение движения

$$\frac{d^2 x^j}{dt^2} = - \frac{\partial \Phi}{\partial x^j}$$

можно переписать в 4-мерном виде:

$$\frac{d^2t}{d\lambda^2} = 0,$$

$$\frac{d^2x^j}{d\lambda^2} + \frac{\partial\Phi}{\partial x^j} \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 = 0.$$

Отсюда непосредственно получаем символы Кристоффеля:

$$\Gamma^j_{00} = \frac{\partial\Phi}{\partial x^j}; \text{ все остальные } \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \text{ равны нулю.}$$

Стандартная формула для компонент тензора Римана дает

$$R^j_{0k0} = -R^j_{00k} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^j \partial x^k}; \text{ все остальные } R^\alpha_{\beta\gamma\delta} \text{ равны нулю.}$$

Если *предположить*, что эти компоненты можно было бы вычислить из какой-то метрики, то тогда мы имели бы

$$R_{j0k0} = g_{ja} R^a_{0k0} = g_{jm} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^m \partial x^k}.$$

Но в этом случае

$$R_{0j k0} = g_{0\alpha} R^\alpha_{jk0} = 0 \neq -R_{j0k0},$$

что нарушает свойство антисимметричности тензора  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ , которым он обладал бы, если бы получался из метрики.

**Решение 12.12.** Пусть ньютоновские траектории пробных частиц описываются уравнениями

$$x^j = x^j(t, n),$$

где  $n$  — параметр, позволяющий отличить одну траекторию семейства от другой. Тогда вектор

$$\vec{n} = \frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial x^k}{\partial n} \frac{\partial}{\partial x^k} \equiv n^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

есть вектор, связывающий соседние траектории. Относительное ускорение соседних траекторий равно

$$\frac{\partial^2 n^j}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial x^j}{\partial n} \right) = \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial^2 x^j}{\partial t^2} \right) = \frac{\partial}{\partial n} \left( -\frac{\partial\Phi}{\partial x^j} \right) = -n^k \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial x^j} \right) = -n^k \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^k \partial x^j},$$

где мы использовали уравнение движения  $\partial^2 x^j / \partial t^2 = -\partial\Phi / \partial x^j$ . Уравнение расхождения геодезических имеет вид

$$\frac{D^2 n^\alpha}{d\tau^2} = -R^\alpha_{\beta\gamma\delta} n^\gamma u^\beta u^\delta.$$

В ньютоновском пределе (скорости  $\sim \varepsilon$ , гравитационные поля  $\sim \varepsilon^2$ ) имеем

$$u^0 = 1 + \mathcal{O}(\varepsilon); u^j = \mathcal{O}(\varepsilon); \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

а параметр  $n$ , связывающий события с одинаковым собственным временем, будет связывать с точностью до  $\mathcal{O}(\epsilon)$  события с одинаковым координатным временем. Таким образом,

$$\frac{D}{d\tau} = \frac{d}{dt} + \mathcal{O}(\epsilon)$$

и параметр

$$\frac{d^2 n^j}{dt^2} = -R^j{}_{0k0} n^k + \mathcal{O}(\epsilon).$$

Тогда в ньютоновском пределе компоненты тензора Римана выражаются через потенциал следующим образом:

$$R^j{}_{0k0} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^k \partial x^j}.$$

Обратите внимание, что, пока рассматриваемые скорости не приближаются к скорости света, другие компоненты  $R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$  не входят в уравнение относительного движения пробных частиц.

**Решение 12.13.** Ньютоновское тяготение обладает характерным свойством мгновенного «действия на расстоянии», причем одновременность определяется в ньютоновской теории с помощью срезов поля «универсального времени»  $t$ . Мы хотим найти релятивистски-инвариантное выражение для гравитационного ускорения в некоторой точке, записанное через распределение плотности вещества  $T^{\mu\nu}$  в остальной части Вселенной. Будем считать, что пространство-время всюду обладает метрикой Минковского. Поскольку в искомое выражение должна входить только компонента  $T^{00}$ , мы с самого начала будем использовать свертку тензора  $T^{\mu\nu}$  с двумя векторами «универсального времени»:

$$\nabla t \cdot T \cdot \nabla t \quad (\text{или } t_{,\alpha} T^{\alpha\beta} t_{,\beta}).$$

Тогда гравитационное ускорение для частицы, находящейся в точке  $x$  и взаимодействующей с остальным веществом по закону «обратных квадратов», будет иметь вид

$$a_{\text{грав}} = G \int_{t=\text{const}} \frac{|\nabla t \cdot T(x') \cdot \nabla t|}{(l \cdot l)^{3/2}} d^3 x',$$

где  $l$  — пространственноподобный вектор, соединяющий точки  $x'$  и  $x$ , а  $d^3 x'$  — элемент собственного объема на срезе с постоянным значением  $t$ . Это выражение еще не согласуется со специальной теорией относительности, так как вектор  $a$  не обязательно будет ортогональным 4-скорости частицы  $u$ . Следовательно, мы должны еще ввести некоторый проекционный оператор, после чего и получим окончательный ответ:

$$a_{\text{грав}} = G \int \frac{\nabla t \cdot T \cdot \nabla t}{(l \cdot l)^{3/2}} [1 + (u \cdot l) u] d^3 x'.$$

Это выражение явным образом согласуется со специальной теорией относительности, поскольку оно, во-первых, содержит в себе только геометрические объекты и, во-вторых, определяет некоторый геометрический объект  $a$  (для которого  $a \cdot u = 0$ ). Согласно этой теории, можно посылать сигналы со скоростью больше скорости света, изменяя распределение масс в какой-то точке. Тогда гравитационное поле будет меняться на поверхностях с постоянным значением  $t$ , а поскольку эти поверхности пространственно-подобны, то они находятся вне светового конуса для всех наблюдателей. Тем не менее теория не является акаузальной, так как мировая линия каждого наблюдателя времениподобна, а  $t$  всегда возрастает в направлении его будущего. Подобным же образом  $t$  возрастает вдоль любого светового луча, который посылает наблюдатель. Следовательно, любой сигнал может в крайнем случае связывать события с одинаковыми  $t$ , но ни одна последовательность сигналов не в состоянии вернуться к данному наблюдателю в момент времени, предшествующий их испусканию. Эта ситуация диаметрально противоположна случаю тахионов (задача 1.6), которые действительно являются акаузальными. Разница состоит в том, что в рассматриваемой задаче скалярное поле  $t$  уже содержит в себе некую «предгеометрию»: оно расслаивает пространство-время так, что при этом существует определенная универсальная упорядоченность времени, тогда как способ, которым «разрезают» пространство-время тахионы, меняются от наблюдателя к наблюдателю.

**Решение 12.14.** Будем рассматривать разность высот между частицами как вектор  $\eta \equiv$  (разность высот)  $e_z$ ; тогда относительное ускорение, обусловленное гравитационными силами, равно

$$\frac{d^2\eta^z}{dt^2} = -R^z_{\beta\gamma\delta} u^\beta \eta^\gamma u^\delta.$$

Поскольку частицы начинают двигаться из состояния покоя, то, если ограничить наблюдения коротким промежутком времени, можно считать, что  $u^i \approx 0$ , и поэтому

$$\frac{d^2\eta^z}{dt^2} = -R^z_{0z0} \eta^z.$$

Компонента тензора Римана легко вычисляется для случая слабого поля:

$$R^z_{0z0} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( -\frac{M}{z} \right) = -\frac{2M}{z^3}.$$

Благодаря полю  $E$  расположенная ниже частица будет испытывать вертикальное ускорение

$$\vec{a} = \frac{q}{m} E \vec{e}_z.$$

Следовательно,

$$\frac{d^2\eta^z}{dt^2} = \frac{2M}{z^3} \eta^z - \frac{q}{m} E.$$

Тот факт, что два члена в правой части кажутся вполне сравнимыми по величине, может поначалу вызвать некоторые опасения. Предположим, однако, что протяженность нашей лаборатории в пространстве-времени ограничена размерами  $\Delta x^\mu \approx L$ . Тогда к концу эксперимента гравитационные силы изменят разность высот между частицами  $\eta^z$  на величину

$$\delta\eta^z \sim \frac{1}{2} \frac{2M}{z^3} \eta^z L^2.$$

Поскольку  $\eta^z < L$ ,

$$\delta\eta^z = \mathcal{O}(L^3).$$

С другой стороны, изменение разности высот, обусловленное электрическим полем, равно

$$\delta\eta^z \sim -\frac{q}{m} \cdot E \cdot \frac{1}{2} L^2 = \mathcal{O}(L^2).$$

Таким образом, если в достаточной степени ограничить пространственновременные «масштабы» нашего эксперимента, то можно будет пренебречь гравитационными эффектами.

**Решение 12.15.** Геометрический объект, описывающий заряженную частицу, есть скаляр, вектор, тензор 2-го ранга и т. д. для спина, равного 0, 1, 2 и т. д. соответственно. Так, например, выражения для плотности заряда частицы с зарядом покоя  $q_0$ , движущейся вдоль мировой линии  $x^\mu = z^\mu(\tau)$  с 4-скоростью  $u$ , суть:

$$\begin{aligned} (\text{скаляр}) \quad \rho(x^\sigma) &= q_0 \int \delta^4[x^\mu - z^\mu(\tau)] d\tau && (\text{для спина } 0); \\ (\text{вектор}) \quad J^\mu(x^\sigma) &= q_0 \int u^\mu \delta^4[x^\sigma - z^\sigma(\tau)] d\tau && (\text{для спина } 1); \\ (\text{тензор 2-го ранга}) \quad T^{\mu\nu}(x^\sigma) &= && (1) \\ &= q_0 \int u^\mu u^\nu \delta^4[x^\sigma - z^\sigma(\tau)] d\tau && (\text{для спина } 2); \\ (\text{тензор } s\text{-го ранга}) \quad T^{\mu\nu\dots\rho}(x^\sigma) &= && \\ &= q_0 \int u^\mu u^\nu \dots u^\rho \delta^4[x^\sigma - z^\sigma(\tau)] d\tau && (\text{для спина } s). \end{aligned}$$

Заряд частицы в некотором лабораторном объеме, измеренный по «кулоновской» части силового взаимодействия в лабораторной системе отсчета (л. с. о.), дается выражением

$$q = \int T^{00\dots 0} d^3x = (-1)^s \int T^{\alpha\beta\dots\gamma} u_\alpha^{\text{л.с.о.}} u_\beta^{\text{л.с.о.}} \dots u_\gamma^{\text{л.с.о.}} d^3x. \quad (2)$$

Подставляя уравнение (1) в уравнение (2), мы находим измеренное

значение заряда отдельной частицы:

$$\begin{aligned} q &= q_0 \int d^3x \int d\tau (-\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^{\text{л.с.о.}})^s \delta^4[x^\sigma - z^\sigma(\tau)] = \\ &= q_0 \int d^3x dt \left(\frac{d\tau}{dt}\right) (-\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^{\text{л.с.о.}})^s \delta^4[x^\sigma - z^\sigma(\tau)]. \end{aligned}$$

Интегрируя  $\delta$ -функцию с учетом соотношений

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^{\text{л.с.о.}} = -\gamma \quad \text{и} \quad d\tau/dt = 1/\gamma,$$

где  $\gamma$  — фактор Лоренца, получаем

$$q = q_0 \gamma^{s-1} \approx q_0 \left(1 + \frac{s-1}{2} v^2\right) \quad \text{для} \quad v \ll c.$$

Далее, для идеального газа имеем

$$\langle v^2 \rangle = 3kT/m_0.$$

Таким образом, суммируя заряды всех частиц газа, находим

$$Q = \sum_n q = nq_0 \left[1 + \frac{s-1}{2} \left(\frac{3kT}{m_0}\right)\right]$$

и, сравнивая это выражение с температурной зависимостью, приведенной в условии задачи, приходим к выводу, что  $s=5$ .

**Решение 12.16.** Предположим противное. Пусть существует такое поле со спином 2, отличное от гравитационного. Поскольку оно обладает квантами с нулевой массой покоя, что соответствует бесконечному радиусу действия, уравнения поля должны допускать в качестве решения слабые плоские волны. Далее, так как это поле обладает спином 2, ему должен быть сопоставлен симметричный «зарядовый» тензор  $J^{\mu\nu}$  со следом, равным нулю. Более того, для слабых полей и малых скоростей взаимодействие между «заряженными» частицами, размеры которых значительно меньше длины волны, должно описываться в основном через соответствующую каждой частице компоненту  $J^{00}$  (т. е. через «кулоновский» предел).

Рассмотрим теперь плоскую волну, падающую на две частицы с зарядами  $J^{00} = q_1$  и  $J^{00} = q_2$ , первоначально находящиеся в одной и той же точке. Под воздействием синусоидальной плоской волны с определенной линейной поляризацией частицы будут участвовать в линейном колебательном (синусоидальном) движении, амплитуда которого прямо пропорциональна заряду и обратно пропорциональна массе частицы. Следовательно, в некоторый момент времени мы можем ввести для нашего поля вектор поляризации (аналог напряженности электрического поля  $E$ ), определяя его как

$$\vec{V} = \left(\frac{q_1}{m_1} - \frac{q_2}{m_2}\right)^{-1} (\vec{x}_1 - \vec{x}_2).$$

Очевидно, что при этом его величина не зависит от числовых значений  $q_1, q_2, m_1, m_2$ . Но здесь-то и кроется противоречие! Действительно, так как наше поле обладает *спином 2*, то при повороте на  $180^\circ$  состояние поляризации должно оставаться *неизменным*, в то время как при повороте на  $180^\circ$  вектор  $\vec{V}$  переходит в  $-\vec{V}$ , а это значит  $\vec{V}=0$ . В чем же дело? По-видимому, в нашем предположении, что поле различным образом действует на разные частицы: теперь мы видим, что у нас нет иного выхода, как только положить  $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$  для *всех* зарядов и масс. Это, однако, эквивалентно утверждению о постоянстве отношения заряда к массе для *всех* частиц:  $q/m = \text{const}$ ; подходящим выбором единиц мы всегда можем добиться, чтобы  $q = m$ . Следовательно, в предельном случае слабых полей, или, что то же самое, в приближении плоских волн, мы получаем  $J^{00} = T^{00}$ , т. е.  $J^{00}$  равно компоненте тензора энергии-импульса, соответствующей плотности массы-энергии. Отсюда в силу требования лоренц-инвариантности мы немедленно получаем  $J^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}$  (мы не имеем права ввести, например, скаляр  $T^\mu_\mu$ , так как он не является геометрическим объектом, сопоставляемым спину 2).

Как мы показали, наше «произвольное» поле со спином 2 ассоциируется с  $T^{\mu\nu}$ . Следовательно, это самое обычное тяготение (или, если угодно, то самое, чем бы оно ни было, что проявляет себя во всех наших экспериментах как тяготение). (Мы нигде не утверждали, что таким образом мы приходим к общей теории относительности.) Фейнман обратил внимание на то, что в наши рассуждения решающим образом входит предположение о «точечной» частице, не обладающей *собственным* вектором поляризации. Это значит, что *можно* было бы в принципе подобрать такое удовлетворяющее приведенным выше условиям поле, которое действовало бы «негравитационным» образом на отдельные частицы, обладающие спином; при этом, однако, для *неполяризованной* материальной среды результирующая сила воздействия равнялась бы нулю.

**Решение 12.17.** В системе единиц СГС имеем

$$c = 2,998 \cdot 10^{10} \text{ см/с;}$$

$$c^2 = 8,998 \cdot 10^{20} \text{ эрг/г;}$$

$$G/c^2 = 0,7425 \cdot 10^{-28} \text{ см/г;}$$

$$G^{1/2} = 2,582 \cdot 10^{-4} \text{ эл.-стат. ед./г.}$$

(Значение  $G^{1/2}$  следует из того факта, что в законах Кулона или Ньютона сила равна  $e^2/r^2$  или  $Gm^2/r^2$ .) Следовательно, в гравитационных единицах искомые значения равны:



$$\text{а) } \hbar = \hbar \left( \frac{G}{c^2} \right) \dot{c} \left( \frac{1}{c^2} \right) = \frac{\hbar G}{c^3} \left[ \frac{(\text{эрг} \cdot \text{с}) (\text{см}/\text{г}) (\text{см}/\text{с})}{(\text{эрг}/\text{г})} \right] \approx 2,611 \cdot 10^{-68} \text{ см}^2;$$

$$\text{б) } e = e \left( \frac{G}{c^2} \right) \left( \frac{1}{G^{1/2}} \right) \approx \frac{eG^{1/2}}{c^2} \left[ \frac{(\text{эл.-стат. ед.}) (\text{см}/\text{г})}{(\text{эл.-стат. ед.}/\text{г})} \right] \approx 1,381 \cdot 10^{-34} \text{ см};$$

$$\text{в) } \frac{e}{m} = \frac{e}{G^{1/2}m} \left[ \frac{(\text{эл.-стат. ед.})}{(\text{г}) (\text{эл.-стат. ед.}/\text{г})} \right] \approx 2,042 \cdot 10^{21};$$

$$\text{г) } M_{\odot} = \frac{GM_{\odot}}{c^2} [(\text{г}) (\text{см}/\text{г})] \approx 1,48 \cdot 10^5 \text{ см};$$

$$\text{д) } L_{\odot} = L_{\odot} \left( \frac{G}{c^2} \right) \left( \frac{1}{c^2} \right) \left( \frac{1}{c} \right) \left[ \frac{(\text{эрг}/\text{с}) (\text{см}/\text{г})}{(\text{эрг}/\text{г}) (\text{см}/\text{с})} \right] \approx 1,07 \cdot 10^{-26};$$

$$\text{е) } 300\text{К} = 300\text{К} \frac{k \left( \frac{G}{c^2} \right)}{c^2} \left[ \frac{(\text{К}) (\text{эрг}/\text{К}) (\text{см}/\text{г})}{(\text{эрг}/\text{г})} \right] \approx 3,42 \cdot 10^{-63} \text{ см};$$

$$\text{ж) } 1 \text{ год} = (3,21 \cdot 10^7 \cdot c) \left[ \frac{(\text{с}) (\text{см})}{(\text{с})} \right] = 9,460 \cdot 10^{17} \text{ см};$$

$$\begin{aligned} 1B &= \left( \frac{1}{299,8} \frac{\text{эрг}}{\text{эл.-стат. ед.}} \right) G^{1/2} \left( \frac{1}{c^2} \right) = \\ &= \frac{1}{299,8} \cdot \frac{G^{1/2}}{c^2} \left[ \frac{(\text{эрг}/\text{эл.-стат. ед.}) (\text{эл.-стат. ед.}/\text{г})}{(\text{эрг}/\text{г})} \right] \approx 9,58 \cdot 10^{-28}. \end{aligned}$$

**Решение 12.18.**

$$L^* = (\hbar G/c^3)^{1/2} = 1,616 \cdot 10^{-33} \text{ см},$$

$$T^* = (\hbar G/c^5)^{1/2} = 5,391 \cdot 10^{-44} \text{ с},$$

$$M^* = (\hbar c/G)^{1/2} = 2,177 \cdot 10^{-5} \text{ г}.$$

На существование этих безразмерных комбинаций первым обратил внимание Планк — сразу же после того, как он ввел в употребление свою квантовую постоянную, — и теперь они носят название планковских длины, массы и времени. Эти комбинации определяются единственным образом с точностью до множителей порядка единицы (например, можно вместо  $\hbar$  использовать  $h$ ), так как, согласно теории размерностей, существует один и только один способ установить соответствие между тремя разномерными величинами и тремя величинами с заранее выбранной размерностью (иными словами, других «свободных» безразмерных комбинаций не существует).

**Решение 12.19.** Условие баланса сил дает

$$Gm_N^2/r^2 = m_N \omega^2 \left( \frac{1}{2} r \right).$$

Согласно правилам квантования Бора, радиусы орбит должны удовлетворять условию

$$2m\omega\left(\frac{1}{2}r\right)^2 = n\hbar.$$

Из этих двух уравнений находим выражение для радиуса

$$r = 2n^2\hbar^2/Gm_N^3.$$

Для низшего энергетического уровня, соответствующего  $n = 1$ , значение радиуса равно

$$r = 2\hbar^2/Gm_N^3 = 6 \cdot 10^{24} \text{ см} \approx 6 \cdot 10^6 \text{ св. лет!}$$

## ГЛАВА 13

**Решение 13.1.** Согласно тождествам Бианки, дивергенция тензора Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

равна нулю.

Поэтому, беря дивергенцию от обеих частей нашего обобщенного уравнения поля, получаем

$$\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) R_{,\mu} = 8\pi T_{\mu}{}^{\nu}{}_{;\nu}.$$

С другой стороны, если сначала свернуть полевые уравнения, а затем продифференцировать их, то найдем

$$(1 - 4\alpha)R_{,\mu} = 8\pi T_{,\mu},$$

откуда следует, что уравнения движения должны иметь вид

$$T_{\mu}{}^{\nu}{}_{;\nu} = \kappa T_{,\mu},$$

где

$$\kappa \equiv \frac{\frac{1}{2} - \alpha}{1 - 4\alpha}.$$

Для жидкости с плотностью  $\rho$  и пренебрежимо малыми давлениями это уравнение в ньютоновском пределе при  $\mu = 0$  можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = \kappa \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

где  $\vec{v}$  — скорость потока жидкости. Если  $\kappa$  не равно нулю (т. е.  $\alpha \neq \frac{1}{2}$ ), то последнее уравнение не совпадает с ньютоновским уравнением непрерывности — иначе говоря, уже в ньютоновском приближении мы сталкиваемся с нарушением закона сохранения массы.

**Решение 13.2.** Равенство нулю тензора Вейля позволяет нам записать метрику в конформно-плоском виде:

$$g_{\mu\nu} = e^{2\varphi} \eta_{\mu\nu},$$

где в ньютоновском пределе  $\varphi \ll 1$  (почти плоское пространство-время). Тогда (см. задачу 9.19) будем иметь

$$R \approx -6\nabla^2\varphi.$$

Для нерелятивистских значений компонент тензора энергии-импульса

$$T^\mu{}_\mu \approx T^0{}_0 \approx -\rho,$$

и уравнения поля приобретают вид

$$-6\varphi_{,\alpha\beta}\eta^{\alpha\beta} = \kappa T = -\kappa\rho.$$

В ньютоновском пределе производные по времени малы по сравнению с производными по пространственным координатам (в системе единиц, где  $c=1$ ), так что мы можем записать

$$6\varphi_{,ij}\delta^{ij} = \kappa\rho.$$

Для  $\kappa=24\pi$  это будет обычное уравнение ньютоновской теории для ньютоновского гравитационного потенциала  $\varphi$ . Из решения задачи 12.11 следует, что ньютоновские траектории являются геодезическими в метрике с  $g_{00} \approx -(1+2\varphi)$ . Следовательно, в ньютоновском пределе предлагаемая теория согласуется с ньютоновской, а  $\varphi$  играет роль ньютоновского потенциала.

Для метрики массивного объекта, например Солнца, функция  $\varphi$  должна убывать до нуля вдали от объекта, где пространство-время становится плоским. Чтобы заметить, что в данной теории отсутствует отклонение световых лучей, достаточно (см. задачу 9.18) обратить внимание на тот факт, что изотропные геодезические для метрики  $g_{\mu\nu} = e^{2\varphi}\eta_{\mu\nu}$  совпадают с изотропными геодезическими для плоского пространства ( $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ), которые, как известно, не отклоняются в поле массивного объекта. Таким образом, если сравнить в удаленных, асимптотически-плоских областях пространства направления движения фотона до и после его взаимодействия с массивным объектом, отклонения наблюдаться не будут.

Вблизи земной поверхности рассматриваемая метрика имеет вид

$$ds^2 = e^{2\varphi(z)} (-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

где координата  $z$  соответствует высоте над поверхностью Земли. Для получения правильного значения ускорения свободного падения частиц необходимо, чтобы  $\varphi \approx -gz$ . Из уравнения геодезической находим, что энергия фотона, движущегося вертикально вверх, меняется по закону

$$\frac{dp^0}{dz} = -\Gamma^0{}_{0z}p^0 = -\varphi_{,z}p^0.$$

Следовательно, фотон теряет энергию с той же скоростью, что и

частица вещества, и предлагаемая теория согласуется с результатами экспериментов Паунда — Ребки, как, впрочем, оно и должно быть для любой теории, основанной на принципе движения по геодезическим.

**Решение 13.3.** Для статического случая уравнение скаляра поля в теории Бранса — Дикке имеет вид

$$\nabla^2 \Phi = \frac{8\pi T}{(3+2\omega)}. \quad (1)$$

Далее, для сферической оболочки массы  $M$  и радиуса  $R$

$$T = -\rho = \frac{M\delta(r-R)}{4\pi r^2}, \quad (2)$$

так что выражения для потенциала  $\Phi$  внутри и вне оболочки суть соответственно

$$\Phi_I = \Phi_1, \quad r < R, \quad (3a)$$

$$\Phi_{II} = \Phi_\infty + \frac{2}{3+2\omega} \frac{M}{r}, \quad r > R, \quad (3b)$$

где  $\Phi_1$  и  $\Phi_\infty$  — постоянные. Сшивая  $\Phi_I$  и  $\Phi_{II}$  при  $r = R$ , получаем

$$\Phi_1 = \Phi_\infty + \frac{2}{3+2\omega} \frac{M}{R}. \quad (4)$$

Наконец, из теории Бранса — Дикке нам известно также, как выражается через  $\Phi$  локальная гравитационная «постоянная» [см. Вейнберг, уравнение (9.9.11)]:

$$G = \Phi^{-1} \left( \frac{4+2\omega}{3+2\omega} \right). \quad (5)$$

Следовательно,

$$\Phi_\infty = \frac{4+2\omega}{3+2\omega} \frac{1}{G_\infty},$$

$$G_1 = \Phi_1^{-1} \left( \frac{4+2\omega}{3+2\omega} \right) \approx \left( \frac{4+2\omega}{3+2\omega} \right) \Phi_\infty^{-1} \left[ 1 - \frac{2M}{\Phi_\infty R (3+2\omega)} \right]$$

и окончательно

$$G_1 = G_\infty \left[ 1 - \frac{G_\infty M}{R} \frac{1}{(2+\omega)} \right]. \quad (6)$$

Это решение справедливо с точностью лишь до членов низшего порядка по  $M/R$ , и не только из-за членов, которыми мы пренебрегли, но и потому, что в более высоком порядке нужно было бы учитывать изменения в метрике  $g_{\mu\nu}$ , обусловленные присутствием массы, и использовать в уравнении (1) вместо «плоского» лапласиана оператор Лапласа в искривленном пространстве.

**Решение 13.4.** Если не должно существовать выделенной системы отсчета, связанной с вакуумом, то тензор энергии-импульса вакуума должен иметь один и тот же вид в любой лоренцевской системе отсчета. Тензор  $\eta_{\mu\nu}$  выглядит одинаково в любой лоренцевской системе отсчета, так что тензор энергии-импульса вида  $\rho_{\text{вак}}\eta_{\mu\nu}$  (или, в общих координатах,  $\rho_{\text{вак}}g_{\mu\nu}$ ) не выделяет ни одну систему. [Единственность  $g_{\mu\nu}$  можно показать следующим образом: если не существует выделенной системы отсчета, то нет и выделенных векторов и, следовательно, нет выделенных собственных векторов. Это возможно лишь тогда, когда *все* векторы являются собственными, но если  $S_{\mu}^{\nu}V_{\nu} = KV_{\mu}$  для всех  $K$ , то это значит, что  $S_{\mu}^{\nu}$  должно быть пропорционально  $\delta_{\mu}^{\nu}$ .

Уравнения поля, включающие в качестве источников как тензор материи, так и тензор энергии-импульса вакуума, имеют вид

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = 8\pi(T_{\text{материи}}^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\rho_{\text{вак}}).$$

Если сравнить их с полевыми уравнениями, содержащими космологический член

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R + \Lambda g^{\mu\nu} = 8\pi T_{\text{материи}}^{\mu\nu},$$

то легко видеть, что мы можем отождествить космологическую постоянную  $\Lambda$  с плотностью энергии вакуума, полагая  $\Lambda = 8\pi\rho_{\text{вак}}$ .

Если бы вакуум состоял из частиц с массой  $m$ , среднее расстояние между которыми равнялось бы  $\lambda \sim \hbar/mc$ , то его плотность энергии была бы порядка  $m(mc/\hbar)^3$ . Соответствующие значения порядка  $10^4$  г/см<sup>3</sup> для электронов и  $10^{17}$  г/см<sup>3</sup> для протонов; оба они несообразно велики.

Если считать, что энергия вакуума обусловлена гравитационным взаимодействием близлежащих частиц (соответствующие энергии имеют порядок величины  $G\frac{m^2}{\lambda}$ ), то эквивалентная плотность массы должна равняться

$$c^{-2}(Gm^2/\lambda)/\lambda^3 = Gm^6c^2/\hbar^4,$$

что дает порядок  $10^{-22}$  г/см<sup>3</sup> для протонов и  $10^{-41}$  г/см<sup>3</sup> для электронов. Средняя плотность вещества в нашей Галактике составляет  $10^{-23}$  г/см<sup>3</sup>, так что наличие плотности «протонного» вакуума, равной  $10^{-22}$  г/см<sup>3</sup>, привело бы к заметным последствиям вплоть до влияния на динамику Галактики. С другой стороны, плотность «электронного» вакуума, равная  $10^{-41}$  г/см<sup>3</sup>, мала даже по сравнению с космологическими плотностями ( $10^{-31}$  г/см<sup>3</sup>), так что она не проявилась бы ни в каких измеримых эффектах.

Все эти соображения нужно рассматривать лишь как наводящие и в определенной степени изобретенные специально для дан-

ного случая. Из соображений размерности следует, что плотность энергии вакуума должна иметь вид

$$\frac{m^4 c^3}{\hbar^3} \left( \frac{G m^2}{c \hbar} \right)^n.$$

При этом для  $n = 1$  мы получаем довольно-таки разумные с некоторой точки зрения значения плотности; рассуждение Зельдовича как раз и представляет собой попытку дать физическое обоснование выбору  $n = 1$ .

**Решение 13.5.** Если свернуть уравнения поля Эйнштейна, мы получим соотношение между следом  $T_{\mu\nu}$  и скалярной кривизной Риччи:

$$R = -8\pi T_{\mu}{}^{\mu}.$$

В локально лоренцевской системе отсчета, где тензор  $T_{\mu}{}^{\nu}$  диагонален,

$$T_{\mu}{}^{\mu} = -\rho + p_x + p_y + p_z,$$

здесь  $p_x, p_y, p_z$  — главные напряжения (численно равные давлению). Для всех известных уравнений состояния  $\rho \geq 3p$ , поэтому скалярная кривизна Риччи  $R$  должна быть положительно определенной, а тензор  $T_{\mu}{}^{\mu}$  — отрицательно определенным.

След тензора энергии-импульса электромагнитного поля равен нулю (см. задачу 4.16), так что если тензор энергии-импульса в данном объеме пространства-времени имеет чисто электромагнитную природу, то  $R = 0$ .

**Решение 13.6.** Зная компоненты  $T_{\alpha}{}^{\beta}$  в своей собственной ортонормированной системе, наш наблюдатель может найти для этого тензора четыре собственных значения и четыре собственных вектора:

$$T_{\alpha}{}^{\beta} W_{\beta} = \lambda W_{\alpha}. \quad (1)$$

Нам известно, что один из собственных векторов времениподобен. Нормируем его таким образом, чтобы  $W_{\alpha} W^{\alpha} = -1$ . Если его компоненты равны  $W^{\alpha} = (\gamma, \gamma v^j)$ , выполним преобразование Лоренца со скоростью  $v^j$  и перейдем к системе отсчета, покоящейся относительно  $W$ . В этой системе  $W^{\hat{\alpha}} = (1, \vec{0})$  и уравнение (1) дает

$$T^{\hat{0}\hat{0}} = -\lambda_{\text{временипод}} \equiv \rho \quad \text{и} \quad T^{\hat{0}\hat{k}} = 0.$$

Квадратная матрица 3-го порядка  $T^{\hat{j}\hat{k}}$  может быть диагонализирована с помощью пространственного поворота, и из уравнения (1) видно, что ее диагональные элементы как раз и представляют собой остальные собственные значения  $\lambda_i = p_i$ , где  $i = 1, 2, 3$ . Пусть теперь  $u$  будет некоторой произвольной 4-скоростью с ком-

понентами  $u^{\hat{\alpha}} = (\bar{\gamma}, \bar{\gamma}, \bar{v}^j)$  в системе отсчета наблюдателя, для которого тензор  $T^{\alpha\beta}$  диагонален. «Слабое энергетическое условие» требует, чтобы  $T^{\alpha\beta}u_{\alpha}u_{\beta} \geq 0$ , так что

$$\rho + \bar{v}_1^2 p_1 + \bar{v}_2^2 p_2 + \bar{v}_3^2 p_3 \geq 0, \quad (2)$$

где скорости  $\bar{v}^j$  произвольны, а  $\bar{v}^2 \leq 1$ . Необходимое и достаточное условие справедливости неравенства (2) гласит:

$$\rho \geq 0, \quad \rho + p_i \geq 0,$$

что может проверить наш наблюдатель после того, как он решил уравнение (1). Случай, когда тензор  $T^{\alpha\beta}$  не имеет ни одного времениподобного собственного вектора, разобран в книге [6], стр. 102 и далее.

**Решение 13.7.** Для  $n=0$  указанное утверждение сводится к  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \leq 0$  и является тривиальным. Для  $n=1$  оно гласит:  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} \geq 0$  для всех времениподобных  $\mathbf{u}$ ; это как раз и есть слабое энергетическое условие. Для  $n=2$  мы имеем условие  $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{T}) \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{T}) \leq 0$ , т. е. вектор  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{T}$  не должен быть пространственноподобным. Однако для наблюдателя с 4-скоростью  $\mathbf{u}$  имеем

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{T} = (-\rho, [\text{плотность потока энергии}]^i)$$

и, согласно условию энергодоминантности,

$$|\rho| > |\text{плотности потока энергии}|,$$

так что вектор  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{T}$  действительно не является пространственноподобным.

Рассмотрим теперь произвольное число  $n$  и утверждение

$$(-1)^n \mathbf{u} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} \cdots \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} \leq 0.$$

Поскольку вектор  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{T}$  не является пространственноподобным, это утверждение для любого числа  $n$  эквивалентно аналогичному утверждению для  $n-2$ . Но мы показали, что из условия энергодоминантности вытекает справедливость этой формулы для  $n=1$  и  $n=2$ , т. е. из условия энергодоминантности вытекает справедливость ее для любого  $n$ . Из сказанного немедленно следует справедливость и обратного утверждения: любой тензор энергии-импульса, для которого справедлива рассматриваемая формула при  $n=1$  и  $n=2$ , удовлетворяет всем требованиям, содержащимся в условии энергодоминантности.

**Решение 13.8.** Да, возможно. Возьмем метрику  $g_{\mu\nu}$ , такую, что  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$  для  $t < 0$  (ясно, что это пустое пространство), а для  $t \geq 0$  пусть  $g_{\mu\nu}$  — произвольно выбранные функции. Единственное требование к этим произвольным функциям, чтобы они были



дважды дифференцируемы и гладко сшивались с соответствующими значениями метрики пустого пространства на гиперповерхности  $t=0$ . Теперь для этой метрики  $g_{\mu\nu}$  можно вычислить тензор Риччи и его свертку (скалярную кривизну), а затем ввести по определению тензор

$$T_{\mu\nu} \equiv (8\pi)^{-1} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right).$$

Очевидно, что этот тензор симметричен, а в силу свернутых тождеств Бианки дивергенция его равна нулю. Если пространство-время будет заполнено материей, распределение которой описывается этим тензором, то метрика  $g_{\mu\nu}$  выбранного нами вида будет решением уравнений поля Эйнштейна. (Необходимо заметить, однако, что для того, чтобы решение было физически осмысленным, тензор  $T_{\mu\nu}$  должен подчиняться некоторым дальнейшим ограничениям: например, плотность энергии должна быть всюду неотрицательной. Это требование, вообще говоря, не обязательно удовлетворяется в рамках рассмотренной нами процедуры.)

**Решение 13.9.** Используем уравнение Киллинга  $\xi_{(\alpha; \beta)} = 0$  и определение статической метрики с помощью условия «стационарности и ортогональности» вектора Киллинга  $\xi$  к семейству гиперповерхностей (см. задачу 10.8). Получим

$$\begin{aligned} 0 &= (\xi_{[\alpha; \beta} \xi_{\gamma]})_{; \gamma} = \\ &= \frac{1}{3} (\xi_{\alpha; \beta} \xi_{\gamma} + \xi_{\gamma; \alpha} \xi_{\beta} + \xi_{\beta; \gamma} \xi_{\alpha})_{; \gamma} = \\ &= \frac{1}{3} (R_{\lambda\gamma\beta\alpha} \xi^{\lambda} \xi^{\gamma} + R_{\lambda\gamma\alpha\beta} \xi^{\lambda} \xi^{\gamma} + R_{\lambda\gamma\beta\alpha} \xi^{\lambda} \xi^{\gamma}), \end{aligned}$$

где мы воспользовались результатом  $\xi_{\mu; \alpha\beta} = R_{\gamma\beta\alpha\mu} \xi^{\gamma}$  (из задачи 10.7). Первый член в приведенном выше выражении равен нулю из соображений симметрии, а оставшиеся члены представляют собой компоненты тензора Риччи; таким образом, мы имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \xi^{\lambda} R_{\lambda[\alpha} \xi_{\beta]} = 8\pi \xi^{\lambda} \left( T_{\lambda[\alpha} - \frac{1}{2} g_{\lambda[\alpha} T \right) \xi_{\beta]} = \\ &= 8\pi \xi^{\lambda} \left( (\rho + p) u_{\lambda} u_{[\alpha} + \frac{1}{2} (\rho - p) g_{\lambda[\alpha} \right) \xi_{\beta]}. \end{aligned}$$

Последний член равен нулю тождественно, откуда следует, что  $u_{[\alpha} \xi_{\beta]} = 0$ , т. е.  $u$  параллельно  $\xi$ .

Менее строгое доказательство получается при использовании эквивалентного определения статической метрики с помощью условия «стационарности и обратимости времени» (см. задачу 10.8). В этом случае мы немедленно замечаем: если  $u$  не параллельно  $\xi$ ,

то  $T^{0i} \neq 0$  в «системе отсчета с обратимым временем». Отсюда, однако, следует, что  $G^{0i} \neq 0$ , а это несовместимо с условием инвариантности метрики относительно обращения времени.

**Решение 13.10.** Из тождеств Бианки  $G^{\nu\mu}_{;\mu} \equiv 0$  имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} G^{\nu 0} \equiv -G^{\nu i}_{;i} - G^{\sigma\mu}\Gamma^{\nu}_{\sigma\mu} - G^{\nu\sigma}\Gamma^{\mu}_{\sigma\mu}.$$

Члены в правой части этого тождества не могут содержать третьих производных от метрики по времени, и, таким образом, в  $G^{\nu 0}$  не могут входить вторые производные по времени. Отсюда следует, что четыре уравнения  $G^{\nu 0} = 8\pi T^{\nu 0}$  играют роль уравнений для начальных данных, или, иначе говоря, связей, налагаемых на данные, задаваемые на гиперповерхности Коши, тогда как  $G^{ij} = 8\pi T^{ij}$  являются динамическими уравнениями.

Исследование упомянутых выше связей, налагаемых на начальные данные, затруднено ввиду произвола в метрике, связанного с произвольностью выбора координатной системы. Чтобы устранить эту запутанность, мы можем прежде всего выбрать четыре координатных условия, налагаемых на метрику; удобно, например, выбрать в качестве исходных нормальные гауссовы координаты, соответствующие  $g_{00} = -1$  и  $g_{0i} = 0$ . В результате мы будем иметь для шести полевых переменных  $g_{ij}$  шесть динамических уравнений  $G^{ij} = 8\pi T^{ij}$ , которые можно разрешить относительно  $\partial^2 g_{ij}/\partial t^2$ , а также четыре уравнения для начальных данных  $G^{\nu 0} = 8\pi T^{\nu 0}$ , приводящие к соотношениям между начальными данными  $g_{ij}$  и  $\partial g_{ij}/\partial t$  на начальной гиперповерхности.

Теперь, чтобы избавиться от членов вида  $\partial^2 g_{ij}/\partial t^2$ , можно продифференцировать по времени четыре уравнения для начальных данных и затем воспользоваться динамическими уравнениями. В результате мы получим четыре новых соотношения между начальными данными. [Легко видеть, что эти новые соотношения должны отличаться от четырех прежних, поскольку  $\partial G^{\nu 0}/\partial t \equiv \equiv 8\pi \partial T^{\nu 0}/\partial t$ , а мы можем выбрать конкретный вид  $\partial T^{\nu 0}/\partial t$  независимо от любых учитывавшихся ранее связей.]

Итак, мы имеем теперь восемь уравнений, связывающих двенадцать функций  $g_{ij}$  и  $\partial g_{ij}/\partial t$  на начальной гиперповерхности Коши. Следовательно, на этой гиперповерхности мы можем еще выбрать независимо четыре произвольные функции.

Если рассматривать четыре произвольные функции как начальные данные для двух полевых переменных и их производных по времени на гиперповерхности Коши, тогда общая картина эволюции во времени гравитационного поля будет описываться динамикой двух полей. Именно по этой причине обычно говорят, что гравитационное поле обладает двумя динамическими степенями свободы.

**Решение 13.11.** Компоненты псевдотензора Ландау — Лифшица задаются с помощью довольно-таки устрашающего выражения:

$$\begin{aligned}
 (-g) t^{\alpha\beta}{}_{\lambda-\lambda} = & (16\pi)^{-1} [\mathcal{E}^{\alpha\beta}{}_{,\lambda} \mathcal{E}^{\lambda\mu}{}_{,\mu} - \mathcal{E}^{\alpha\lambda}{}_{,\lambda} \mathcal{E}^{\beta\mu}{}_{,\mu} + \\
 & + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g_{\lambda\mu} \mathcal{E}^{\lambda\nu}{}_{,\rho} \mathcal{E}^{\rho\mu}{}_{,\nu} - g^{\alpha\lambda} g_{\mu\nu} \mathcal{E}^{\beta\nu}{}_{,\rho} \mathcal{E}^{\mu\rho}{}_{,\lambda} - \\
 & - g^{\beta\lambda} g_{\mu\nu} \mathcal{E}^{\alpha\nu}{}_{,\rho} \mathcal{E}^{\mu\rho}{}_{,\lambda} + \\
 & + g_{\lambda\mu} g^{\nu\rho} \mathcal{E}^{\alpha\lambda}{}_{,\nu} \mathcal{E}^{\beta\mu}{}_{,\rho} + \frac{1}{8} (2g^{\alpha\lambda} g^{\beta\mu} - g^{\alpha\beta} g^{\lambda\mu}) \times \\
 & \times (2g_{\nu\rho} g_{\sigma\tau} - g_{\sigma\rho} g_{\nu\tau}) \mathcal{E}^{\nu\tau}{}_{,\lambda} \mathcal{E}^{\rho\sigma}{}_{,\mu}],
 \end{aligned}$$

где  $\mathcal{E}^{\alpha\beta} \equiv (-g)^{1/2} g^{\alpha\beta}$ .

Для рассматриваемой нами метрики

$$\mathcal{E}^{00} = -(1 - 2\Phi)^{3/2} (1 + 2\Phi)^{-1/2}, \quad \mathcal{E}^{ij} = (1 - 4\Phi^2)^{1/2} \delta^{ij}, \quad \mathcal{E}^{0i} = 0.$$

Отметим, что все члены в выражении для  $t^{\alpha\beta}{}_{\lambda-\lambda}$  включают произведение двух производных от  $\mathcal{E}$ , и поэтому в первом неисчезающем порядке по  $\Phi$  выражение для  $t^{\alpha\beta}$  будет содержать произведения первых производных от  $\Phi$ . Следовательно, при вычислении производных от  $\mathcal{E}$  нам нужно удерживать только члены, пропорциональные  $\Phi_{,i}$ :

$$\mathcal{E}^{00}{}_{,i} \approx 4\Phi_{,i}, \quad \mathcal{E}^{ij}{}_{,k} \approx -4\Phi_{,k} \delta^{ij} \approx 0.$$

Если далее сохранить только члены вида  $\mathcal{E}^{00}{}_{,i}$ , то в выражении для  $t^{\alpha\beta}{}_{\lambda-\lambda}$  уцелеют только подчеркнутые члены и мы будем иметь

$$t^{\alpha\beta}{}_{\lambda-\lambda} = (16\pi)^{-1} [-g^{ij} \mathcal{E}^{\alpha 0}{}_{,i} \mathcal{E}^{\beta 0}{}_{,j} + \frac{1}{8} (2g^{\alpha i} g^{\beta m} - g^{\alpha\beta} g^{im}) \mathcal{E}^{00}{}_{,i} \mathcal{E}^{00}{}_{,m}].$$

Отсюда, если положить  $g^{\alpha\beta} \approx \eta^{\alpha\beta}$  и  $\mathcal{E}^{00}{}_{,i} = 4\Phi_{,i}$ , легко можно получить

$$t^{00}{}_{\lambda-\lambda} = (16\pi)^{-1} [-\delta^{ij} \mathcal{E}^{00}{}_{,i} \mathcal{E}^{00}{}_{,j} + \frac{1}{8} \delta^{im} \mathcal{E}^{00}{}_{,i} \mathcal{E}^{00}{}_{,m}] = \frac{-7}{8\pi} \delta^{ij} \Phi_{,i} \Phi_{,j},$$

$$t^{0i}{}_{\lambda-\lambda} = 0,$$

$$t^{ij}{}_{\lambda-\lambda} = (16\pi)^{-1} \left[ \frac{1}{8} (2\delta^{ii} \delta^{jm} - \delta^{ij} \delta^{im}) \mathcal{E}^{00}{}_{,i} \mathcal{E}^{00}{}_{,m} \right] =$$

$$= (4\pi)^{-1} (\Phi_{,i} \Phi_{,j} - \frac{1}{2} \delta_{ij} \Phi_{,m} \Phi_{,m}).$$

Обратите внимание, что пространственные компоненты  $t^{ij}{}_{\lambda-\lambda}$  совпадают с компонентами тензора напряжений из задачи 12.8.

**Решение 13.12.** Значение скаляра в некоторой заданной точке не изменяется при калибровочном преобразовании, так что

$$\varphi''(x''(P)) = \varphi'(x'(P)) = \varphi'(x''(P) - \xi(P)),$$

$$\varphi''(x'') \approx \varphi'(x'') - \xi^\alpha \varphi_{,\alpha}.$$

Для векторного поля имеем

$$\begin{aligned} V_{\mu}'' &= \frac{\partial (x')^{\nu}}{\partial (x'')^{\mu}} V'_{\nu}(x') = (\delta^{\nu}_{\mu} - \xi^{\nu}_{,\mu})(V'_{\nu}(x'') - V'_{\nu,\sigma}\xi^{\sigma}) \approx \\ &\approx V'_{\mu}(x'') - V_{\nu}\xi^{\nu}_{,\mu} - V_{\mu,\sigma}\xi^{\sigma}. \end{aligned}$$

Аналогично для тензорного поля получаем

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}''(x'') &= \frac{\partial (x')^{\alpha}}{\partial (x'')^{\mu}} \frac{\partial (x')^{\beta}}{\partial (x'')^{\nu}} T'_{\alpha\beta}(x') = \\ &= (\delta^{\alpha}_{\mu} - \xi^{\alpha}_{,\mu})(\delta^{\beta}_{\nu} - \xi^{\beta}_{,\nu})(T'_{\alpha\beta}(x'') - T_{\alpha\beta,\sigma}\xi^{\sigma}) \approx \\ &\approx T'_{\mu\nu} - T_{\mu\beta}\xi^{\beta}_{,\nu} - T_{\beta\nu}\xi^{\beta}_{,\mu} - T_{\mu\nu,\sigma}\xi^{\sigma}. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\xi_{\mu;\nu} = g_{\mu\sigma}\xi^{\sigma}_{;\nu} = g_{\mu\sigma}(\xi^{\sigma}_{,\nu} + \xi^{\alpha}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\nu}) = g_{\mu\sigma}\xi^{\sigma}_{,\nu} + \xi^{\alpha}\Gamma_{\mu\alpha\nu}$$

и что

$$\xi_{(\mu;\nu)} = g_{\sigma(\mu}\xi^{\sigma}_{,\nu)} + \xi^{\alpha}\left(\frac{1}{2}g_{\mu\nu,\alpha}\right).$$

Тогда для метрического тензора получим

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}''(x'') &= g'_{\mu\nu}(x'') - g_{\mu\nu,\sigma}\xi^{\sigma} - 2g_{\sigma(\mu}\xi^{\sigma}_{,\nu)} = g'_{\mu\nu}(x'') - 2\xi_{(\mu;\nu)} = \\ &= \eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu}(x'') - 2\xi_{(\mu;\nu)} \end{aligned}$$

и окончательно

$$h_{\mu\nu}''(x'') = h'_{\mu\nu}(x'') - 2\xi_{(\mu;\nu)}.$$

Поскольку в первом порядке метрика является метрикой Минковского, можно считать, что

$$\xi_{(\mu;\nu)} = \xi_{(\mu,\nu)} + \mathcal{O}(\xi h).$$

**Решение 13.13.** Поскольку символы Кристоффеля

$$\Gamma_{\alpha\mu\beta} = \frac{1}{2}(h_{\alpha\beta,\mu} + h_{\alpha\mu,\beta} - h_{\beta\mu,\alpha})$$

имеют порядок малости  $h$ , в формуле, выражающей компоненты тензора Римана через  $\Gamma$ , можно пренебречь членами, содержащими произведения символов Кристоффеля. В результате будем иметь

$$R_{\alpha\mu\beta\nu} \approx g_{\alpha\lambda}(\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\beta,\nu}) \approx 2\Gamma_{\alpha\mu[\nu,\beta]} = (h_{\alpha[\nu,\beta],\mu} - h_{\mu[\nu,\beta],\alpha}),$$

что и требовалось доказать.

При калибровочном преобразовании  $h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} - 2\xi_{(\mu,\nu)}$  и

$$R_{\alpha\mu\beta\nu} \rightarrow R_{\alpha\mu\beta\nu} - \xi_{\alpha[\nu,\beta],\mu} + \xi_{\mu[\nu,\beta],\alpha} - \xi_{\nu[\alpha,\beta],\mu} + \xi_{\nu[\mu,\beta],\alpha}.$$

Поскольку частные производные коммутируют, добавочные члены взаимно сокращаются и вид тензора Римана остается неизменным.

**Решение 13.14.** При калибровочном преобразовании (см. задачу 13.12) возмущения метрики принимают следующий вид:

$$h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - 2\xi_{(\alpha, \beta)}.$$

Если свернуть это равенство, то легко заметить, что при калибровочном преобразовании след ( $h \equiv h_{\sigma}{}^{\sigma} \equiv \eta^{\sigma\lambda} h_{\sigma\lambda}$ ) изменяется по формуле

$$h' = h - 2\xi^{\sigma}{}_{, \sigma},$$

где  $\xi^{\sigma} \equiv \eta^{\sigma\lambda} \xi_{\lambda}$ . Тогда закон преобразования для  $\bar{h}_{\alpha\beta}$  имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{h}'_{\alpha\beta} &= h'_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} h' = h_{\alpha\beta} - 2\xi_{(\alpha, \beta)} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} (h - 2\xi^{\sigma}{}_{, \sigma}) = \\ &= \bar{h}_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha, \beta} - \xi_{\beta, \alpha} + \eta_{\alpha\beta} \xi^{\sigma}{}_{, \sigma} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \bar{h}'_{\alpha\beta, \beta} &= \eta^{\lambda\beta} \bar{h}'_{\alpha\beta, \lambda} = \bar{h}_{\alpha\beta, \beta} - \xi_{\alpha, \beta, \beta} - \xi_{\beta, \alpha, \beta} + \xi_{\sigma, \alpha}{}^{\sigma, \alpha} = \\ &= \bar{h}_{\alpha\beta, \beta} - \xi_{\alpha, \beta, \beta} = \bar{h}_{\alpha\beta, \beta} - \square \xi_{\alpha}. \end{aligned}$$

Теперь нам нужно только так выбрать четыре функции  $\xi_{\alpha}$ , чтобы они удовлетворяли обычному волновому уравнению  $\square \xi_{\alpha} = \bar{h}_{\alpha\beta, \beta}$ .

Такое решение всегда можно найти (например, можно взять решение с запаздывающими потенциалами из классической теории электромагнитных волн), но оно, разумеется, не единственное: мы всегда можем добавить к  $\xi_{\alpha}$  любое решение уравнения  $\square \xi_{\alpha} = 0$ .

**Решение 13.15.** В задаче 13.13 мы нашли выражение для линеаризованного тензора Римана; если свернуть его, то можно получить линеаризованный тензор Риччи

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (h_{\nu\alpha, \alpha, \mu} + h_{\mu\alpha, \alpha, \nu} - \square h_{\mu\nu} - h_{, \mu\nu}),$$

где  $h \equiv h_{\sigma}{}^{\sigma}$ . В лоренцевской калибровке из  $\bar{h}_{\alpha\beta, \beta} = 0$  следует

$$h_{\alpha\beta, \beta} = \frac{1}{2} h_{, \alpha},$$

так что

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (h_{, \mu\nu} - \square h_{\mu\nu} - h_{, \mu\nu}) = -\frac{1}{2} \square h_{\mu\nu},$$

и, сворачивая еще раз, получаем  $R = -\frac{1}{2} \square h$ . Следовательно, уравнения поля будут иметь вид

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{1}{2} \left( \square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \square h \right) = -\frac{1}{2} \square \bar{h}_{\mu\nu},$$

откуда и находим

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu}.$$

**Решение 13.16.** Чтобы  $\bar{h}_{\mu\nu}$  удовлетворяло как условию лоренцевской калибровки (см. задачу 13.14), так и линеаризованным уравнениям поля, мы должны иметь

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{h}_{\mu\nu, \nu} = \operatorname{Re} [ik^\nu A_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}], \\ 0 &= \bar{h}_{\mu\nu, \sigma}{}^\sigma = \operatorname{Re} [-k_\sigma k^\sigma A_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}]. \end{aligned}$$

Следовательно, 4-вектор  $k$  должен быть изотропным и ортогональным  $A$ .

В задаче 13.14 приведен закон калибровочного преобразования от  $\bar{h}'_{\mu\nu}$  к  $\bar{h}''_{\mu\nu}$ :

$$\bar{h}''_{\mu\nu} = \bar{h}'_{\mu\nu} - 2\xi_{(\mu, \nu)} + \eta_{\mu\nu} \xi^\sigma{}_{,\sigma}$$

Ясно, что калибровочное преобразование должно быть таким, чтобы  $\xi$  имело вид плоской волны  $e^{ik_\alpha x^\alpha}$ . Положим

$$\xi_\mu = -iC_\mu e^{ik_\alpha x^\alpha},$$

тогда получим

$$A''_{\mu\nu} = A'_{\mu\nu} - (C_\mu k_\nu + C_\nu k_\mu) + \eta_{\mu\nu} C^\alpha k_\alpha.$$

Если свернуть это уравнение с  $k^\mu$ , то найдем

$$A''_{\mu\nu} k^\mu = -k^\nu C_\mu k^\mu + k^\nu C^\alpha k_\alpha = 0,$$

так что  $A$  остается ортогональным  $k$ . Теперь мы можем применить к нашему уравнению условие поперечно-бесследовой калибровки  $(A'')_{\mu}{}^\mu = 0$  и  $A''_{\mu 0} = 0$  и в результате получить

$$\begin{aligned} 0 &= (A')_{\mu}{}^\mu + 2C \cdot k, \\ 0 &= A'_{\mu 0} - (C_0 k_\mu + C_\mu k_0) + \eta_{\mu 0} C \cdot k. \end{aligned}$$

Из этих двух уравнений можно найти одно:

$$0 = A'_{\mu 0} - (C_0 k_\mu + C_\mu k_0) - \frac{1}{2} \eta_{\mu 0} A'_{\mu}{}^\mu.$$

Полагая  $\mu = 0$ , будем иметь

$$C_0 = (2k_0)^{-1} (A'_{00} + \frac{1}{2} (A')_{\mu}{}^\mu).$$

пространственные компоненты после этого легко получить из соотношения

$$0 = A'_{i0} - (C_0 k_i + C_i k_0).$$

**Решение 13.17.** Для светового луча, движущегося в направлении оси  $x$ , ненулевые компоненты тензора энергии-импульса суть  $T_{00} = T_{xx} = -T_{0x}$ . Из вида линеаризованных уравнений поля

$$\square \bar{h}_{\alpha\beta} \equiv \bar{h}_{\alpha\beta, \gamma}{}^\gamma = -16\pi T_{\alpha\beta}$$

и из того факта, что все компоненты  $h_{\alpha\beta}$  представляют собой интегралы типа запаздывающих потенциалов, где под знаком интеграла стоит функция источника, следует, что между решениями должно существовать такое же соотношение, как и между источниками:

$$\bar{h}_{00} = \bar{h}_{xx} = -\bar{h}_{0x},$$

причем все остальные компоненты равны нулю. Поскольку след  $\bar{h}_{\alpha\beta}$  равен нулю, то  $\bar{h}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta}$ , и приведенное выше соотношение справедливо также для компонент  $h$  «без черты».

Для фотона, движущегося в направлении оси  $x$  вдоль траектории с аффинным параметром  $\lambda$ ,

$$\frac{d^2y}{d\lambda^2} = -\frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \Gamma_{\alpha\beta}^y = -\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 (\Gamma_{00}^y + \Gamma_{xx}^y + 2\Gamma_{0x}^y).$$

Легко видеть, однако, что правая часть уравнения равна нулю

$$2\Gamma_{0x}^y + \Gamma_{00}^y + \Gamma_{xx}^y = -\frac{1}{2} (h_{00,y} + h_{xx,y} - 2h_{0x,y}) = 0,$$

так что  $d^2y/d\lambda^2 = 0$  и аналогично  $d^2z/d\lambda^2 = 0$ . Иначе говоря, фотон будет продолжать свое движение параллельно световому лучу, и, следовательно, два узких световых луча, двигавшихся первоначально параллельно, не будут притягиваться друг к другу в первом порядке по массе-энергии каждого из них. (В действительности, как можно показать, притяжение будет отсутствовать даже в более высоких порядках.)

**Решение 13.18.** Из линеаризованной теории известно, что в лоренцевской калибровке

$$\square \bar{h}_{\alpha\beta} = -16\pi T_{\alpha\beta}.$$

Поскольку распределение источников — а, следовательно, и поле — стационарно, это уравнение сводится к уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \bar{h}_{\alpha\beta} = -16\pi T_{\alpha\beta}.$$

Чтобы вычислить  $\bar{h}_{0y}$ , нам необходимо знать  $T_{0y}$ . Для массивной сферической конфигурации, имеющей плотность массы  $\rho$  и вращающейся (в положительном направлении вокруг оси  $z$ ) с угловой скоростью  $\Omega$ , имеем

$$T_{0y} = r\Omega\rho \sin\vartheta \cos\varphi.$$

Заметим, что поскольку компонента  $T_{0y}$  пропорциональна действительной части сферической гармонике вида  $Y_{11}(\vartheta, \varphi)$ , то же самое будет относиться и к  $\bar{h}_{0y}$ . Следовательно, можно записать

$\bar{h}_{0y} = f(r) \sin \vartheta \cos \varphi$ , и уравнение Пуассона примет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ r^2 \frac{d}{dr} f(r) \right] - \frac{2f(r)}{r^2} = 16\pi r \Omega \rho.$$

Если распределение источников представляет собой сферическую оболочку массы  $M$  и радиуса  $R$ , то

$$\rho = M \delta(r - R) / 4\pi R^2$$

и это уравнение легко интегрируется; в результате получаем функцию

$$f(r) = -\frac{4M\Omega}{3} \times \begin{cases} \frac{r}{R} & \text{для } r < R, \\ \left(\frac{R}{r}\right)^2 & \text{для } r > R. \end{cases}$$

Следовательно, внутри оболочки

$$g_{0y} \approx h_{0y} = \bar{h}_{0y} = -\frac{4\Omega}{3} M \frac{r}{R} \sin \vartheta \cos \varphi.$$

Из соображений симметрии следует

$$g_{0\varphi}^{\wedge} = g_{0y} |_{\varphi=0} = -\frac{4}{3} \Omega M \left(\frac{r}{R}\right) \sin \vartheta$$

и

$$\omega = -\frac{g_{0\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} = -\frac{g_{0\varphi}^{\wedge}}{(g_{\varphi\varphi})^{\frac{1}{2}}} = \frac{g_{0\varphi}^{\wedge}}{r \sin \vartheta} = \frac{4\Omega M}{3R}.$$

Локально инерциальные системы отсчета внутри оболочки будут вращаться относительно удаленных инерциальных систем со скоростью  $\omega$ . Принцип Маха утверждает, что инерциальные свойства пространства-времени зависят от движения удаленного вещества; увлечение инерциальных систем отсчета, несомненно, является именно таким примером влияния вещества на инерциальные свойства пространства-времени. Постоянство  $\omega$  подсказывает нам, что влияние удаленного вещества на инерциальные свойства должно было бы, по-видимому, описываться законом  $1/r$ , что означало бы в свою очередь, что инерциальные свойства определяются в основном не близлежащим веществом, — правильнее было бы учитывать влияние всей материи, содержащейся во Вселенной. (Заметим, что, если не считать нескольких идеализированных примеров, подобных только что рассмотренному, никому пока еще не удалось достичь более или менее заметных успехов в «выводе» принципа Маха из уравнений полуобщей теории относительности.)

**Решение 13.19.** Уравнения движения  $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$  явно калибровочно инвариантны; в лоренцевской калибровке, однако (см. за-



дачу 13.15), справедливо соотношение

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = - (16\pi)^{-1} \square \bar{h}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0,$$

а не  $T_{\mu\nu}{}^{;\nu} = 0$ .  $T^{\mu\nu}{}_{;\nu}$  и  $T^{\mu\nu}{}_{;\nu}$  отличаются на величину порядка  $T\Gamma$ . Поскольку же как  $T$ , так и  $\Gamma$  порядка  $h_{\alpha\beta}$ , то несовпадающие члены будут второго порядка по отклонению метрики от плоской.

**Решение 13.20.** Согласно принципу эквивалентности, ускорение тела не зависит от величины его массы, а зависит лишь от других масс, с которыми оно взаимодействует через гравитационное поле. Отсюда следует, что тело с положительной массой притягивает и положительные, и отрицательные массы, а тело с отрицательной массой отталкивает как те, так и другие.

Таким образом, в нашем случае ускорение отрицательной массы направлено к положительной массе и равно  $GM/\ell^2$ . (Поскольку  $\ell \gg M$ , мы работаем в ньютоновском пределе.) Ускорение положительной массы совпадает с ускорением отрицательной массы как по величине, так и по направлению: обе массы как бы стараются угнаться друг за другом.

Как только мы начинаем рассматривать частицы в движении, проблема усложняется, ибо каждая частица испытывает запаздывающее воздействие поля другой частицы.

Так как по условию задачи  $M \ll \ell$ , мы будем искать решение с помощью линеаризованной теории, применение которой будет оправданно до тех пор, пока расстояние между частицами, измеренное в сопутствующей системе, связанной с любой из них, будет намного больше  $M$ . Уравнение

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = - 16\pi T_{\mu\nu} \quad (1)$$

обладает решением в виде „запаздывающего“ интеграла:

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = 4 \int \frac{T_{\mu\nu}(t', \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \delta(t' + |\vec{x} - \vec{x}'| - t) d^3x' dt'. \quad (2)$$

В линеаризованной теории справедлив принцип суперпозиции для  $T_{\mu\nu}$  (т. е. и для  $h_{\mu\nu}$ ) каждой частицы. Для частицы массы  $m$ , движущейся вдоль мировой линии

$$x^\mu = z^\mu(\tau), \quad (3)$$

имеем

$$T_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = m \int u_\mu u_\nu \delta^4(x - z(\tau)) d\tau = m u_\mu u_\nu \delta^3(\vec{x} - \vec{z}(t))/u^0, \quad (4)$$

где при интегрировании мы использовали замену  $d\tau = dt/u^0$ .

Подставляя формулу (4) в (2), получаем

$$\begin{aligned}\bar{h}_{\mu\nu}(t, \vec{x}) &= 4m \int \frac{u_\mu u_\nu \delta^3[\vec{x}' - \vec{z}(t')] \delta(t' + |\vec{x} - \vec{x}'| - t) d^3x' dt'}{u^0(t') |\vec{x} - \vec{x}'|} = \\ &= 4m \int \frac{u_\mu(t') u_\nu(t') \delta(t' + |\vec{x} - \vec{z}(t')| - t) dt'}{u^0(t') |\vec{x} - \vec{z}(t')|}.\end{aligned}\quad (5)$$

Из соображений симметрии ясно, что в это выражение входит зависимость только от одной пространственной координаты — скажем, для определенности,  $x$ . Пусть

$$R(t') = |x - z(t')| = \varepsilon [x - z(t')], \quad (6)$$

где  $\varepsilon = \pm 1$  для  $x \gtrless z$ . Тогда

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, x) = 4m \int \frac{u_\mu u_\nu \delta(t' + R - t) dt'}{u^0 R}. \quad (7)$$

4-скорость  $u$  находим из уравнения движения

$$du^\mu/d\tau = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta,$$

или в нашем случае

$$du^\mu/d\tau + \eta^{\mu\nu} u^\alpha u^\beta (h_{r\alpha,\beta} + h_{r\beta,\alpha} - h_{\alpha\beta,r})/2 = 0 \quad (8)$$

Легко видеть, что величина  $h_{\alpha\beta}$  для 2-й частицы, измеренная в точке нахождения 1-й частицы, используется для определения  $u_\mu$  для 1-й частицы, и наоборот. Далее, из соображений симметрии следует

$$u^y = u^z = 0 \quad (9)$$

для обеих частиц. Выпишем уравнение (8) для  $\mu=0$  и  $\mu=x$ , используя соотношение  $h_{00} = h_{xx}$  [непосредственно вытекающее из уравнения (7)]:

$$du^0/d\tau = \frac{1}{2} h_{00,0} (u^{0^2} - u^{x^2}) + h_{00,x} u^0 u^x + h_{0x,x} u^{x^2}, \quad (10)$$

$$du^x/d\tau = \frac{1}{2} h_{00,x} (u^{0^2} - u^{x^2}) + h_{0x,0} u^{0^2} - h_{00,0} u^0 u^x. \quad (11)$$

Найдем теперь производные от  $h_{\alpha\beta}$ , вновь прибегнув к уравнению (7):

$$\bar{h}_{00,0} = 4m \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{u^0(t') \delta(t' + R(t') - t) dt'}{R(t')} = -4m \int \frac{u^0 \delta'(t' + R - t) dt'}{R},$$

где  $\delta'$  означает дифференцирование по аргументу  $\delta$ -функции. Пусть

$$f(t') = t' + R(t'),$$

$$\frac{df}{dt'} = 1 - \varepsilon v(t'), \quad v = \frac{dz}{dt'}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \bar{h}_{00,0} &= -4m \int \frac{u^0}{R} \left[ \frac{d}{df} \delta(f-t) \right] \frac{dt'}{df} df = \\
 &= 4m \int \frac{d}{df} \left[ \frac{u^0}{R} \frac{dt'}{df} \right] \delta(f-t) df = \\
 &= 4m \left[ \frac{dt'}{df} \frac{d}{dt'} \left( \frac{u^0}{R} \frac{dt'}{df} \right) \right]_{f=t} = \\
 &= 4m \left[ \frac{1}{1-\varepsilon v} \frac{d}{dt'} \frac{u^0}{(1-\varepsilon v)R} \right]_{t'=t-R(t)}. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Поскольку  $du^0/dt' \approx m$ , то в пределах точности до первого порядка по  $m$  нам нет необходимости дифференцировать  $u^0$  и  $v$  в уравнении (12). Таким образом,

$$\bar{h}_{00,0} = 4m \left[ \frac{\varepsilon v u^0}{(1-\varepsilon v)^2 R^2} \right]_{\text{запазд}}, \quad (13)$$

где индекс «запазд» означает значение, взятое в «запаздывающий» момент времени  $t' = t - R(t')$ . С другой стороны, можно написать для  $v(t')$  разложение

$$\begin{aligned}
 v(t') &= v(t) + (dv/dt)(t' - t) + \dots = \\
 &= v(t) + \mathcal{O}(m)
 \end{aligned}$$

и аналогичное разложение для  $u^0 = (1 - v^2)^{-1/2}$ . Далее,

$$\begin{aligned}
 R(t') &= \varepsilon [x - z(t')] = \\
 &= \varepsilon [x - z(t) - v(t)(t' - t)] + \mathcal{O}(m) = \\
 &= \varepsilon [x - z(t) + v(t)R(t')],
 \end{aligned}$$

откуда имеем

$$R(t')(1 - \varepsilon v) = \varepsilon [x - z(t)].$$

Поскольку  $\bar{h}_{00,0}$  определяется в точке местоположения другой частицы, можно записать

$$\bar{h}_{00,0} = 4m \frac{\varepsilon v u^0}{(z_1 - z_2)^2}, \quad (14)$$

где значения всех величин определяются в один и тот же момент времени  $t$ . Аналогичным образом получаем

$$\bar{h}_{0x,0} = \frac{-u^x}{u^0} \bar{h}_{00,0}, \quad (15)$$

$$\bar{h}_{xx,0} = \left( \frac{u^x}{u^0} \right)^2 \bar{h}_{00,0}. \quad (16)$$

Производные по пространственным координатам можно найти,

если заметить, что  $x$  входит только в  $R$  из уравнения (7). Отсюда

$$\begin{aligned} \bar{h}_{00, x} &= \varepsilon \frac{\partial}{\partial R} 4m \int \frac{u^0 \delta(t' + R - t) dt'}{R} = \\ &= 4m\varepsilon \left[ - \int \frac{u^0 \delta(t' + R - t) dt'}{R^2} + \int \frac{u^0 \delta'(t' + R - t) dt'}{R} \right] = \\ &= 4m\varepsilon \left[ - \int \frac{u^0}{R^2} \delta(f - t) \frac{dt'}{df} df + \int \frac{u^0}{R} \frac{dt'}{df} \frac{d}{df} \delta(f - t) df \right] = \\ &= -4m\varepsilon \left[ \frac{u^0}{(1 - \varepsilon v) R^2} + \frac{1}{(1 - \varepsilon v)} \frac{d}{dt'} \left\{ \frac{u^0}{(1 - \varepsilon v) R} \right\} \right]_{\text{запазд}} = \\ &= -4m\varepsilon \left[ \frac{u^0}{(1 - \varepsilon v) R^2} + \frac{u^0 \varepsilon v}{(1 - \varepsilon v)^2 R^2} \right]_{\text{запазд}} = \\ &= - \frac{4m\varepsilon u^0}{(z_1 - z_2)^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Аналогично

$$\bar{h}_{0x, x} = - \frac{u^x}{u^0} \bar{h}_{00, x}, \quad (18)$$

$$\bar{h}_{xx, x} = \left( \frac{u^x}{u^0} \right)^2 \bar{h}_{00, x}. \quad (19)$$

Отметим, что уравнения (14)–(19) удовлетворяют условию калибровочной инвариантности  $h_{\mu, \alpha}^{\alpha} = 0$ . Выпишем теперь уравнения движения (10) и (11) для 1-й частицы, полагая  $u^0 = \gamma$ ,  $u^x = \gamma v$  и  $g = m/(z_1 - z_2)^2$ . Примем за 1-ю частицу положительной массы с координатой  $z_1 > z_2$ , так что  $\varepsilon = +1$ , а масса, играющая роль источника в уравнениях (14)–(19), является отрицательной. Будем иметь

$$d\gamma_1/d\tau = -g\gamma_2 v_2 (1 + v_2^2) + 2g\gamma_2 (1 + v_2^2) \gamma_1^2 v_1 - 4g\gamma_2 v_2 \gamma_1^2 v_1^2, \quad (20)$$

$$d(\gamma_1 v_1)/d\tau = g\gamma_2 (1 + v_2^2) - 4g\gamma_2 v_2^2 \gamma_1^2 + 2g\gamma_2 v_2 (1 + v_2^2) \gamma_1^2 v_1. \quad (21)$$

В такой записи уравнения для  $d\gamma_2/d\tau_2$  и  $d(\gamma_2 v_2)/d\tau_2$  обладают точно такими же правыми частями, что и уравнения (20) и (21), отличаясь лишь заменой  $v_2$  на  $v_1$  и наоборот (знак произведения  $\varepsilon m$  не меняется). Так как  $v_1 = v_2$  при  $t = 0$ , то  $v_1 = v_2$  для всех  $t$ . Следовательно, разность  $z_1 - z_2$  постоянна для всех  $t$ , т. е.  $z_1 - z_2 = l$ . Наконец, мы можем опустить индексы 1 и 2 в уравнениях (20) и (21) и после некоторых упрощений получить

$$d\gamma/d\tau = g v/\gamma, \quad (22)$$

$$d(\gamma v)/d\tau = g/\gamma. \quad (23)$$

Эти уравнения не являются независимыми, поскольку  $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$ . Отсюда находим, что дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$dv/d\tau = g(1 - v^2)^2, \quad (24)$$

откуда

$$2g\tau = v/(1 - v^2) + \text{Arth } v, \quad (25)$$

где  $\tau = 0$  при  $v = 0$ . Далее, поскольку

$$\frac{dz}{dv} = \frac{dz}{dt} \frac{dt}{d\tau} \frac{d\tau}{dv} = \frac{v}{g} (1 - v^2)^{-\frac{5}{2}},$$

находим

$$z_2 = \frac{1}{3g} [(1 - v^2)^{-3/2} - 1], \quad (26)$$

$$z_1 = z_2 + l$$

и аналогично из

$$\frac{dt}{dv} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d\tau}{dv} = \frac{1}{g} (1 - v^2)^{-5/2} \quad (27)$$

получаем

$$t = \frac{v}{g} \left[ (1 - v^2)^{-1/2} + \frac{v^2}{3} (1 - v^2)^{-3/2} \right]. \quad (28)$$

Уравнения (26) и (28) представляют собой параметрические уравнения траекторий, где роль параметра играет  $v$ . Заметим, что, в то время как разность координат частиц остается постоянной, расстояние между ними («собственное расстояние»), измеренное наблюдателем, движущимся вместе с одной из частиц, увеличивается приблизительно как  $\gamma l$ . Действительно, предположим, что 1-я частица в некоторый момент времени  $t_1$  находится в точке с координатой  $z_1(t_1)$  и обладает скоростью  $v$ . Преобразование Лоренца к локально сопутствующей инерциальной системе отсчета дает

$$\begin{aligned} x' &= \gamma [x - z_1(t_1) - v(t - t_1)], \\ t' &= \gamma [t - t_1 - v \{x - z_1(t_1)\}]. \end{aligned}$$

Тогда в этих координатах траектория 2-й частицы есть  $z'_2(t'_2)$  где

$$\begin{aligned} z'_2 &= \gamma [z_2(t_2) - z_1(t_1) - v(t_2 - t_1)], \\ t'_2 &= \gamma [t_2 - t_1 - v \{z_2(t_2) - z_1(t_1)\}]. \end{aligned}$$

Расстояние до 2-й частицы равно  $-z'_2(t'_2 = 0)$ . Введем величину

$$\beta = z_2(t_2) - z_1(t_1).$$

Из  $t'_2 = 0$  следует

$$t_2 = t_1 + v\beta,$$

откуда

$$\begin{aligned} \beta &= z_2(t_1 + v\beta) - z_1(t_1) \approx \\ &\approx z_2(t_1) + v\beta \left. \frac{dz_2}{dt} \right|_{t=t_1} + \frac{v^2\beta^2}{2} \left. \frac{d^2z_2}{dt^2} \right|_{t=t_1} - z_1(t_1) = \\ &= -l + v^2\beta + \mathcal{O}(m/L). \end{aligned}$$

Решая относительно  $\beta$ , получаем

$$\beta = \frac{-l}{(1 - v^2)}.$$

Следовательно,

$$-z'_2(t'_2 = 0) = -\gamma(\beta - v^2\beta) \approx \gamma l.$$

## ГЛАВА 14

**Решение 14.1.** Найдем сначала, какой тензор энергии-импульса соответствует точечной частице. Пусть масса частицы есть  $m$ . В мгновенно сопутствующей системе все компоненты  $T^{\mu\nu}$  обращаются в нуль, кроме  $T^{00}$ , которая должна иметь вид  $\delta$ -функции от координат частицы. Поэтому

$$T^{\mu\nu} \sim \int \delta^4(x^\alpha - x^\alpha(\tau)) u^\mu u^\nu d\tau,$$

где  $x^\alpha(\tau)$  — траектория частицы в пространстве-времени как функция ее собственного времени  $\tau$ . Далее, мы хотим, чтобы величина  $T^{\mu\nu}$  преобразовывалась как тензор. Произведение  $u^\mu u^\nu$  уже преобразовывается как тензор, но  $\delta^4(x^\alpha - x^\alpha(\tau))$  не есть скаляр — истинным скаляром является  $\delta^4(x^\alpha - x^\alpha(\tau)) (-g)^{-1/2}$ . Действительно,

$$1 = \text{скаляр} = \int \delta^4(x^\alpha - x^\alpha(\tau)) d^4x = \int \frac{\delta^4}{(-g)^{1/2}} (-g)^{1/2} d^4x. \quad (1)$$

Таким образом, нормируя на массу  $m$ , будем иметь

$$T^{\mu\nu} = m \int \delta^4(x^\alpha - x^\alpha(\tau)) \frac{u^\mu u^\nu}{(-g)^{1/2}} d\tau \equiv \int \rho u^\mu u^\nu d\tau, \quad (2)$$

где  $\rho$  включает в себя все члены, за исключением 4-скоростей  $u$ . Далее,

$$0 = T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \int [(\rho u^\nu)_{;\nu} u^\mu + (\rho u^\nu) u^\mu{}_{;\nu}] d\tau. \quad (3)$$

Умножая скалярно на  $u^\mu$ , получаем

$$0 = \int [- (\rho u^\nu)_{;\nu} + \rho (\nabla_u u) \cdot u] d\tau. \quad (4)$$

Второй член равен нулю, поскольку 4-ускорение  $\nabla_u u$  ортогонально 4-скорости. Отсюда следует, что первый член также равен нулю, и поэтому из уравнения (3) находим

$$0 = \int (\rho u^\nu) u^\mu{}_{;\nu} d\tau.$$

Это означает, что  $u^\nu u^\mu{}_{;\nu} = 0$ , независимо от того, в какой точке плотность  $\rho$  ( $\delta$ -функция) отлична от нуля, т. е. в каком месте ни находилась бы частица. Но ведь  $u^\nu u^\mu{}_{;\nu} = 0$  и есть уравнение геодезической!

**Решение 14.2.** Если система находится в тепловом равновесии, то суммарный поток энергии между любыми двумя элементарными объемами  $A$  и  $B$  (фиг. 27), для которых разрешен обмен энергией, будет равен нулю. Представим себе теперь «световод», соединяющий два таких элементарных объема; по нему может распространяться переносящий тепло поток фотонов. Поскольку и световод, и вся система статичны, энергия фотона при внутреннем отражении в световоде не меняется. Тем не менее между  $A$  и  $B$  существует обмен энергией за счет гравитационного красного смещения:

$$(h\nu)_A / (h\nu)_B = (-g_{00}^B)^{1/2} / (-g_{00}^A)^{1/2}.$$

Воспользуемся теперь тем, что спектральная яркость излучения абсолютно черного тела  $B_\nu(T_A)$  в  $A$  изменяется за счет красного смещения любой природы таким образом, что в результате снова получается спектр излучения абсолютно черного тела, но только соответствующий другой температуре:

$$T_B = [(h\nu)_B / (h\nu)_A] T_A.$$

Если при этом сохраняется тепловое равновесие, то именно такова должна быть температура окружающей среды в  $B$ , чтобы восходящий и нисходящий тепловые потоки в световоде взаимно компенсировались. Итак,

$$T_B = [(-g_{00}^A)^{1/2} / (-g_{00}^B)^{1/2}] T_A$$

и

$$T (-g_{00})^{1/2} = \text{const}$$

в любой точке системы.

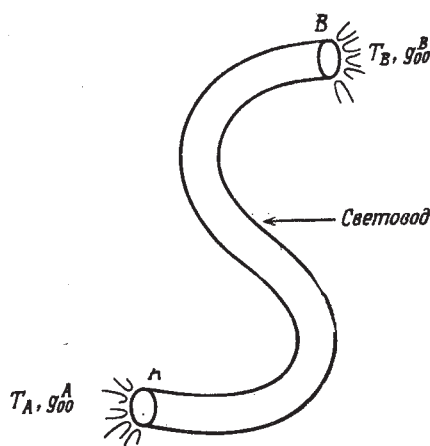
**Решение 14.3.** Для идеальной жидкости тензор энергии-импульса имеет вид

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu},$$

и, следовательно, уравнения движения суть

$$0 = T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = (\rho + p)_{;\nu} u^\mu u^\nu + (\rho + p) (u^\mu{}_{;\nu} u^\nu + u^\mu u^\nu{}_{;\nu}) + p_{;\nu} g^{\mu\nu}.$$

Чтобы получить уравнение Эйлера, спроектируем это уравнение ортогонально  $u$ , воспользовавшись проекционным оператором-тен-



Фиг. 27.

зором

$$P_{\alpha\beta} = u_\alpha u_\beta + g_{\alpha\beta}.$$

В результате найдем

$$\begin{aligned} 0 &= P_{\alpha\mu} T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \\ &= 0 + P_{\alpha\mu} (\rho + p) u^\mu{}_{;\nu} u^\nu + 0 + p_{;\nu} g^{\mu\nu} P_{\alpha\mu} = \\ &= (\rho + p) u_{\alpha;\nu} u^\nu + p_{;\alpha} + p_{;\nu} u^\nu u^\alpha, \end{aligned}$$

т. е. как раз уравнение Эйлера.

Переходя к ньютоновскому пределу (см. решение задачи 14.8), запишем уравнение Эйлера в виде

$$\rho_0 (1 + \pi + p/\rho_0) (u_{j;\nu} u^\nu - \Gamma^{\alpha}{}_{\nu j} u_\alpha u^\nu) = -p_{;j} - u_j dp/d\tau.$$

Подставляя значения  $u^0 = 1$ ,  $u_0 = -1$ ,  $u_j = v_j$ , будем иметь

$$\rho_0 (dv_j/d\tau + \Gamma^0{}_{0j}) \approx -p_{;j}.$$

Но

$$\Gamma^0{}_{0j} \approx -\Gamma_{00j} = -\frac{1}{2} g_{00;j} \approx \Phi_{;j},$$

откуда окончательно получим

$$\frac{dv_j}{d\tau} = -\Phi_{;j} - \frac{1}{\rho_0} p_{;j}.$$

**Решение 14.4.** Уравнение Эйлера для идеальной жидкости имеет вид

$$(\rho + p) \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u} = -\nabla p - \mathbf{u} \nabla_{\mathbf{u}} p.$$

Из условия наличия гидростатического равновесия следует существование временного вектора Киллинга  $\xi$ . Согласно задаче 13.9, 4-скорость жидкости должна быть параллельна этому вектору Киллинга, т. е.

$$\mathbf{u} = \xi / |\xi|.$$

(В компонентах такая запись означает, что только там  $u^i = 0$ , где  $\xi = \partial/\partial t$ .) Из задачи 10.14 нам известно, что

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u} = \frac{1}{2} \nabla \ln |\xi \cdot \xi|.$$

Мы знаем также, что  $\partial p/\partial t = 0$ , т. е.  $\nabla_{\mathbf{u}} p \sim \nabla_{\xi} p = 0$ , и, следовательно,

$$\nabla p = -(\rho + p) \nabla \ln |\xi \cdot \xi|^{1/2}.$$

Но

$$\xi \cdot \xi = (\partial/\partial t) \cdot (\partial/\partial t) = g_{00},$$

так что

$$|\xi \cdot \xi|^{1/2} = (-g_{00})^{1/2},$$

откуда и следует требуемый результат.



В ньютоновском пределе  $\rho \ll \rho_0$  и  $g_{00} \approx -(1 + 2\Phi)$ , причем ньютоновский потенциал  $\Phi \ll 1$ . Следовательно,

$$\frac{\partial \rho}{\partial x^\nu} \approx -\rho \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{1}{2} \ln(1 + 2\Phi) \approx -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu}.$$

**Решение 14.5.** Подставляя  $\rho = 1/3\rho_0$  в уравнение гидростатического равновесия (см. задачу 14.4)

$$\rho, \lambda = (\rho + p) [\ln(-g_{00})^{1/2}], \lambda,$$

получаем

$$-\ln(-g_{00})^{1/2} = \frac{1}{4} \int \frac{d\rho}{\rho}.$$

Интегрирование дает

$$\rho = \text{const} \cdot (-g_{00})^{-2}.$$

Поскольку  $g_{00}$  остается конечным,  $\rho$  не может обратиться в нуль, и, следовательно, свободной поверхности не существует.

**Решение 14.6.** Статическому однородному гравитационному полю соответствует линейный элемент

$$ds^2 = g_{tt} dt^2 + g_{zz} dz^2 + dx^2 + dy^2, \quad (1)$$

где величины  $g_{tt}$  и  $g_{zz}$  зависят только от  $z$ . Не обращающиеся в нуль символы Кристоффеля легко вычисляются (см. задачу 7.6). Вес, измеряемый с помощью весов при  $z=0$ , есть  $W(0)$ , где

$$W(z) = \int T^{\hat{z}\hat{z}} dx dy = \int g_{zz} T^{zz} dx dy. \quad (2)$$

Мы хотим доказать, что  $W(0)$  зависит только от  $T^{\hat{t}\hat{t}} = g_{tt} T^{tt}$  и не зависит от других компонент  $T^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ . Имеем

$$0 = T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = |g|^{-1/2} (|g|^{1/2} T^{\alpha\beta})_{;\beta} + \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} T^{\beta\gamma}. \quad (3)$$

Положим  $\alpha=t$  и проинтегрируем по  $x$  и  $y$ , воспользовавшись тем фактом, что  $g_{\alpha\beta}$  не зависит от  $x, y$  и  $t$ :

$$0 = \int T^{tt}{}_{,t} dx dy + \int T^{tx}{}_{,x} dx dy + \int T^{ty}{}_{,y} dx dy + |g|^{-1/2} (|g|^{1/2} \int T^{tz} dx dy)_{,z} + 2\Gamma^t{}_{tz} \int T^{tz} dx dy. \quad (4)$$

Первый член обращается в нуль ввиду того, что  $T^{\hat{t}\hat{t}}$  не зависит от времени. Второй и третий члены дают вклады, пропорциональные значениям  $T^{tx}$  и  $T^{ty}$  на границе области интегрирования, которые в свою очередь обращаются в нуль на границах, расположенных вне сосуда. Уравнение (4) можно записать в виде

$$0 = |g|^{-1/2} g_{tt} (|g|^{1/2} g_{tt} \int T^{tz} dx dy)_{,z}. \quad (5)$$

Отсюда следует, что

$$|g|^{1/2} g_{tt} \int T^{tz} dx dy$$

не зависит от  $z$ . Поэтому если этот член обращается в нуль в области выше сосуда, то он равен нулю всюду.

Подставим теперь в уравнение (3)  $\alpha = z$  и проинтегрируем по  $x$  и  $y$ :

$$0 = \int T^{zt},_t dx dy + \int T^{zx},_x dx dy + \int T^{zy},_y dx dy + \\ + |g|^{-\frac{1}{2}} \left( |g|^{\frac{1}{2}} \int T^{zz} dx dy \right),_z + \Gamma^z_{tt} \int T^{tt} dx dy + \Gamma^z_{zz} \int T^{zz} dx dy. \quad (6)$$

Первый член обращается в нуль по соображениям, изложенным выше, а второй и третий дают вклады, которые зависят от границы области интегрирования и также обращаются в нашем случае в нуль. Используя уравнение (2), находим

$$(|g_{tt}|^{1/2} W),_z = |g_{tt}|^{1/2},_z \int T^{\hat{t}\hat{t}} dx dy. \quad (7)$$

Проинтегрируем уравнение (7) от  $z=0$  до верхней границы сосуда и, воспользовавшись тем, что  $W|_{\text{верх}} = 0$ , получим выражение

$$W(0) = |g_{tt}|^{-1/2}_{z=0} \int_0^{\text{верх}} dz \int dx dy |g_{tt}|^{1/2},_z T^{\hat{t}\hat{t}}, \quad (8)$$

зависящее только от компоненты  $T^{\hat{t}\hat{t}}$ . (Данным решением задачи мы обязаны В. Унру.)

**Решение 14.7.** Поскольку гравитационное поле стационарно, существует временной вектор Киллинга  $\xi = \partial/\partial t$ . Умножим скалярно на этот вектор уравнение Эйлера для течения идеального газа (задача 14.3):

$$(\rho + p) \xi \cdot \nabla_u \mathbf{u} = -\xi \cdot \nabla p - \xi \cdot \mathbf{u} \nabla_u p. \quad (1)$$

Но, так как, согласно уравнению Киллинга,  $\nabla \xi$  антисимметрично,

$$\xi \cdot \nabla_u \mathbf{u} = \nabla_u (\xi \cdot \mathbf{u}) - (\nabla_u \xi) \cdot \mathbf{u} = \nabla_u (\xi \cdot \mathbf{u}).$$

Кроме того, для стационарного течения

$$\xi \cdot \nabla p = \partial p / \partial t = 0.$$

Подставляя  $u_0 = \mathbf{u} \cdot \xi$ , находим

$$(\rho + p) du_0/d\tau = u_0 dp/d\tau. \quad (2)$$

Для адиабатического течения идеальной жидкости первое начало термодинамики (см. задачу 5.19) гласит:

$$dp = (\rho + p) dn/n. \quad (3)$$

Из уравнений (2) и (3) имеем

$$\frac{du_0}{u_0} = \frac{dn}{n} = \frac{d(\rho + p)}{\rho + p},$$

откуда следует

$$u_0 = \text{const} \cdot \frac{n}{\rho + p}.$$

**Решение 14.8.** Ньютоновский предел уравнений релятивистской гидродинамики можно получить, если выбрать глобальную, почти лоренцевскую систему, в которой

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0(1 + \pi), & \pi &\ll 1, \\ g_{00} &= -(1 + 2\varphi), & |\varphi| &\ll 1, \\ p/\rho_0 &\ll 1, & v^2 &\ll 1. \end{aligned}$$

Здесь  $\rho_0 = nm_B$  есть плотность массы покоя ( $m_B$  — средняя масса покоя бариона),  $\pi$  — удельная внутренняя энергия,  $\varphi$  — ньютоновский потенциал и  $v$  — обычная 3-скорость жидкости. Поскольку

$$u^{\hat{0}} = (1 - v^2)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} v^2$$

и

$$u_0 = (-g_{00})^{1/2} u^{\hat{0}} \approx 1 + \frac{1}{2} v^2 + \varphi,$$

уравнение Бернулли принимает вид

$$\left(1 + \frac{1}{2} v^2 + \varphi\right) = \frac{\text{const} \cdot n}{\rho_0(1 + \pi + p/\rho_0)},$$

откуда следует

$$\left(1 + \frac{1}{2} v^2 + \varphi\right)(1 + \pi + p/\rho_0) = \text{const}$$

и, наконец,

$$\frac{1}{2} v^2 + \varphi + \pi + p/\rho_0 = \text{const}.$$

**Решение 14.9.**

а) Условие, что  $\xi$  есть вектор, связывающий мировые линии соседних частиц, можно записать следующим образом:

$$\mathcal{L}_u \xi = \alpha u, \tag{1}$$

где  $\alpha$  — скалярная функция. В задаче 8.14 функция  $\alpha$  равнялась нулю, так как вектор  $\xi$  связывал события с одинаковым собственным временем; сейчас мы найдем  $\alpha$  из условия, что  $\xi^{\hat{0}} = \xi \cdot u = 0$  вдоль мировых линий:

$$0 = \nabla_u (\xi \cdot u) = \xi \cdot a + u \cdot \nabla_u \xi. \tag{2}$$

Сравним это уравнение с уравнением (1), умноженным скалярно на  $u$ :

$$u \cdot (\nabla_u \xi - \nabla_\xi u) = -\alpha,$$

откуда получим, что  $\alpha = \xi \cdot a$ . (Напомним, что  $u \cdot \nabla_{\xi} u = = \frac{1}{2} \nabla_{\xi} (u \cdot u) = 0$ .) Таким образом, мы имеем

$$\nabla_u \xi = \nabla_{\xi} u + (\xi \cdot a) u. \quad (3)$$

Условие для жесткого движения  $\nabla_u (\xi \cdot \xi) = 0$  равносильно условию  $\xi \cdot \nabla_u \xi = 0$  или в силу уравнения (3) условию

$$\xi^{\alpha} \xi^{\beta} (u_{\alpha; \beta} + u_{\alpha} a_{\beta}) = 0.$$

Поскольку это соотношение должно быть справедливым для всех  $\xi$ , отсюда вытекает

$$u_{(\alpha; \beta)} + u_{(\alpha} a_{\beta)} = 0,$$

и, следовательно,

$$\sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} \vartheta P_{\alpha\beta} = u_{(\alpha; \beta)} + u_{(\alpha} a_{\beta)} = 0$$

(обозначения и определения см. в задаче 5.18). Итак, жесткое движение может иметь место в том и только в том случае, если  $\sigma_{\alpha\beta} = \vartheta = 0$ .

б) Ввиду симметрии  $\sigma^{\alpha\beta} = \sigma^{\beta\alpha}$  условие  $\sigma^{\alpha\beta} = 0$  сводится к 10 уравнениям. Если учесть еще 5 тождеств:  $u^{\alpha} \sigma_{\alpha\beta} = 0$  и  $P^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} = = \sigma^{\alpha}_{\alpha} = 0$ , то у нас остается 5 независимых уравнений, которые вместе с условием  $\vartheta = 0$  дадут в сумме 6 независимых уравнений связей.

Условия существования жесткого движения не налагают ограничений на  $a^{\alpha}$  или  $\omega^{\alpha\beta}$ . Каждая из этих характеристик включает в себя по 3 независимые компоненты (в силу соотношений  $a^{\alpha} u_{\alpha} = 0$  и  $\omega^{\alpha\beta} = -\omega^{\beta\alpha}$ ), так что у нас имеется 6 степеней свободы, как и в нерелятивистском жестком движении.

**Решение 14.10.** Из определения  $\vartheta = \nabla \cdot u$  имеем

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} = u^{\beta} (u^{\alpha}_{; \alpha})_{; \beta} = u^{\beta} u^{\alpha}_{; \alpha\beta} = u^{\beta} (u^{\alpha}_{; \beta\alpha} - R^{\alpha}_{\beta\alpha\gamma} u^{\gamma}) = u^{\beta} u^{\alpha}_{; \beta\alpha} - R_{\beta\gamma} u^{\beta} u^{\gamma}. \quad (1)$$

Если, однако, воспользоваться результатами задачи 5.18, то получим

$$u^{\alpha}_{; \beta\alpha} u^{\beta} = (u^{\alpha}_{; \beta} u^{\beta})_{; \alpha} - u^{\alpha}_{; \beta} u^{\beta}_{; \alpha} = a^{\alpha}_{; \alpha} - - \left( \omega^{\alpha}_{\beta} + \sigma^{\alpha}_{\beta} + \frac{1}{3} \vartheta P^{\alpha}_{\beta} - a^{\alpha} u_{\beta} \right) \cdot \left( \omega^{\beta}_{\alpha} + \sigma^{\beta}_{\alpha} + \frac{1}{3} \vartheta P^{\beta}_{\alpha} - a^{\beta} u_{\alpha} \right). \quad (2)$$

Учитывая свойства симметрии  $\omega_{\alpha\beta}$ ,  $\sigma_{\alpha\beta}$  и  $P_{\alpha\beta}$ , а также тот факт, что они ортогональны  $u$ , из уравнений (1) и (2) находим

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{d\tau} &= a^{\alpha}_{; \alpha} - \omega^{\alpha}_{\beta} \omega^{\beta}_{\alpha} - \sigma^{\alpha}_{\beta} \sigma^{\beta}_{\alpha} - \frac{1}{3} \vartheta^2 - R_{\alpha\beta} u^{\alpha} u^{\beta} = \\ &= a^{\alpha}_{; \alpha} + 2\omega^2 - 2\sigma^2 - \frac{1}{3} \vartheta^2 - R_{\alpha\beta} u^{\alpha} u^{\beta}. \end{aligned}$$

**Решение 14.11.** Так как жидкость движется вдоль геодезических,

$$a_\alpha \equiv u^\beta u_{\alpha;\beta} = 0,$$

а поскольку в течении отсутствуют первая и вторая вязкости (см. задачу 5.18), то

$$\sigma_{\alpha\beta} = \vartheta = 0.$$

Применяя разложение  $\nabla \mathbf{u}$  из задачи 5.18 к нашему случаю, получаем

$$u_{\alpha;\beta} = \omega_{\alpha\beta}.$$

Но  $\omega$  антисимметрично, так что  $u_{(\alpha;\beta)} = 0$ , и, следовательно,  $\mathbf{u}$  удовлетворяет уравнению Киллинга.

**Решение 14.12.** На геометрическом языке процесс установления наблюдателем своей локальной системы координат  $x^\alpha$  описывается следующим образом. Если  $\mathbf{u}$  есть 4-скорость центра ящика, направленная вдоль его мировой линии, то наблюдатель выбирает вдоль своей мировой линии вектор  $\mathbf{e}_0$ , такой, что

$$\mathbf{e}_0 = \mathbf{u} \quad \text{и} \quad \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = \eta_{\alpha\beta}.$$

Далее, из каждой точки  $P(\tau)$  ( $\tau$  — собственное время) своей мировой линии он проводит пространственные геодезические, ортогональные  $\mathbf{u}$ , аффинный параметр для которых есть собственная длина  $s$ . Если  $\mathbf{n}$  — касательный вектор к пространственной геодезической, проходящей через точку  $P$  вблизи мировой линии наблюдателя, то он приписывает точке  $P$  координаты  $x^0 = \tau$ ,  $x^k = sn^k$ .

Уравнение движения пробной частицы имеет вид

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dx^\gamma}{d\lambda} = 0, \quad (1)$$

где мы можем считать, что аффинный параметр  $\lambda$  совпадает с собственным временем частицы. 4-скорость частицы есть  $dx^\alpha/d\lambda = (\gamma, \gamma\vec{v})$ , где  $\gamma \equiv (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$ . Заменим теперь в уравнении (1)  $d/d\lambda$  на  $d/dt$ , используя соотношение  $d/d\lambda = \gamma d/dt$ :

$$\frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} + \frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} \frac{dx^\alpha}{dt} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{dt} \frac{dx^\gamma}{dt} = 0. \quad (2)$$

Подставляя  $\alpha = 0$ , будем иметь

$$\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} + \Gamma^0_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{dt} \frac{dx^\gamma}{dt} = 0,$$

Подставляя теперь это соотношение в уравнение (2), для  $\alpha = j$  получаем

$$\frac{dv^j}{dt} + (-v^j \Gamma^0_{\beta\gamma} + \Gamma^j_{\beta\gamma}) \frac{dx^\beta}{dt} \frac{dx^\gamma}{dt} = 0. \quad (3)$$

С точностью до первого порядка по  $v$  уравнение (3) можно записать в виде

$$\frac{dv^j}{dt} - v^j \Gamma^0_{00} + \Gamma^j_{00} + 2\Gamma^j_{k0} v^k = 0. \quad (4)$$

Таким образом, с точностью до первого порядка по  $\vec{x}$  и  $\vec{v}$  имеем

$$\frac{dv^j}{dt} = v^j \Gamma^0_{00} \Big|_{\vec{x}=0} - \Gamma^j_{00} \Big|_{\vec{x}=0} - x^k \Gamma^j_{00,k} \Big|_{\vec{x}=0} - 2v^k \Gamma^j_{k0} \Big|_{\vec{x}=0}. \quad (5)$$

Значение символов Кристоффеля при  $\vec{x} = 0$  можно найти, воспользовавшись результатом задачи 7.17:

$$\Gamma^\beta_{\alpha 0} \mathbf{e}_\beta = \nabla_\alpha \mathbf{e}_\alpha = -\Omega^\beta_{\alpha} \mathbf{e}_\beta, \\ \Gamma_{\beta\alpha 0} = -\Omega_{\beta\alpha} \equiv a_\alpha u_\beta - a_\beta u_\alpha + \varepsilon_{\alpha\beta\lambda\sigma} u^\lambda \omega^\sigma.$$

Поскольку  $u^\alpha = (1, \vec{0})$ ,  $u_\alpha = (-1, \vec{0})$ ,  $a_\alpha = (0, \vec{a})$ ,  $\omega^\sigma = (0, \vec{\omega})$ , получаем

$$\Gamma_{\beta\alpha 0} = 0, \text{ если } \beta = \alpha, \\ \Gamma_{0j0} = -\Gamma_{j00} = -a_j, \\ \Gamma_{kj0} = -\Gamma_{jko} = \varepsilon_{jko} \omega^m = \varepsilon_{jkm} \omega^m. \quad (6)$$

Значения коэффициентов Кристоффеля с «чисто пространственными» индексами находятся из условия, что координатные линии  $x^\alpha = (\tau, sn^k)$ , где  $\tau$  и  $n^k$  не зависят от  $s$ , суть геодезические. В результате имеем

$$0 = \frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = 0 + \Gamma^\alpha_{jk} n^j n^k.$$

Это соотношение справедливо при  $\vec{x} = 0$  для произвольных  $\vec{n}$ , откуда следует

$$\Gamma_{\alpha jk} = 0. \quad (7)$$

Найдем производную  $\Gamma^j_{00,k}$  из выражения для тензора Римана:

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^\alpha_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^\alpha_{\gamma\mu} \Gamma^\mu_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha_{\delta\mu} \Gamma^\mu_{\beta\gamma}.$$

Получаем

$$\Gamma^j_{00,k} = R^j_{0k0} + \Gamma^j_{0k,0} - \Gamma^j_{k\mu} \Gamma^\mu_{00} + \Gamma^j_{0\mu} \Gamma^\mu_{0k}.$$

При  $\vec{x} = 0$

$$\Gamma^j_{0k,0} = -\varepsilon_{jkm} \omega^m, \\ \Gamma^j_{k\mu} \Gamma^\mu_{00} = 0, \\ \Gamma^j_{0\mu} \Gamma^\mu_{0k} = \Gamma^j_{00} \Gamma^0_{0k} + \Gamma^j_{0m} \Gamma^m_{0k} = \\ = a_j a_k + \varepsilon_{mjn} \omega^n \varepsilon_{kml} \omega^l,$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{dv^j}{dt} &= -a_j - \dot{x}^k (R^j_{0k0} - \varepsilon_{jkm} \omega^m_{,0} + a_j a_k + \varepsilon_{mjn} \omega^n \varepsilon_{kmi} \omega^i) + 2\varepsilon_{jkm} \omega^m v^k = \\ &= -a_j (1 + \vec{a} \cdot \vec{x}) - R^j_{0k0} x^k + (\vec{x} \times \vec{\omega},_0)^j - [(\vec{x} \times \vec{\omega}) \times \vec{\omega}]^j + 2(\vec{v} \times \vec{\omega})^j. \end{aligned}$$

Первый член в этом выражении соответствует «силе инерции», обусловленной ускорением системы отсчета; коэффициент  $1 + \vec{a} \cdot \vec{x}$  учитывает релятивистскую поправку (см. [1], упражнение 37.4). Второй член представляет собой «истинную» гравитационную силу. В приближении слабого поля мы могли бы в духе ньютоновской физики выделить по отдельности вклад от локального ускорения силы тяжести,  $\partial\Phi/\partial x_j$ , и некое «абсолютное» ускорение  $\vec{a}_{абс}$ , именно

$$\begin{aligned} a_j + R^j_{0k0} x^k &= (a_j)_{абс} + \partial\Phi/\partial x^j |_{\vec{x}=0} + \partial^2\Phi/\partial x^j \partial x^k |_{\vec{x}=0} x^k \approx \\ &\approx (a_j)_{абс} + \hat{c}\Phi/\partial x^j |_{\vec{x}=\vec{x} \text{ частицы}}. \end{aligned}$$

Члены, в которые входит  $\vec{\omega}$ , те же, что и в нерелятивистской механике; второй и третий члены суть центробежная сила и сила Кориолиса соответственно.

**Решение 14.13.** Приравнявая дивергенцию тензора энергии-импульса нулю, имеем

$$\begin{aligned} 0 &= 4\pi T_{\mu;\nu} = \Phi_{;\mu;\nu} \Phi^{;\nu} + \Phi_{;\mu} \Phi^{;\nu}_{;\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\nu} (2\Phi_{\alpha;\nu} \Phi^{;\alpha}) = \\ &= (\Phi_{;\mu;\nu} - \Phi_{;\nu;\mu}) \Phi^{;\nu} + \Phi_{;\mu} \Phi^{;\nu}_{;\nu}. \end{aligned}$$

Поскольку вторые ковариантные производные скаляра коммутируют между собой (действительно,  $\Phi_{[\mu;\nu]} = \Phi_{[\mu;\nu]} + \Phi_{;\sigma} \Gamma^{\sigma}_{[\mu\nu]} = 0$ ), в нашем уравнении остается только второй член и уравнение движения в итоге имеет вид

$$\square\Phi \equiv \Phi^{;\nu}_{;\nu} = 0.$$

**Решение 14.14.** В предлагаемом уравнении (2) член  $1/6 R\Phi$  не зависит от размеров лаборатории точно так же, как и член с  $\rho$ . Следовательно, если мы измеряем поле  $\Phi$ , то в принципе мы можем измерить и скалярную кривизну Риччи; в этом смысле конформно-инвариантное уравнение (2) находится в противоречии с духом сильного принципа эквивалентности.

Чтобы найти аномальные силы взаимодействия между частицами, обусловленные  $R$ -членом, перейдем к локально лоренцевской системе, в которой одна из частиц неподвижна. Поле  $\Phi$ , источником которого является эта неподвижная частица с зарядом  $\mu_1$ , удовлетворяет уравнению

$$\Phi_{,j}{}^{,j} - \frac{1}{6} R\Phi = \mu_1 \delta(\mathbf{r}).$$

Когда мы выписываем это уравнение, то подразумеваем существование некоторой глобальной (или по крайней мере порядка размеров лаборатории) инерциальной системы координат; иначе говоря, мы пренебрегаем тем самым всеми проявлениями кривизны, кроме скалярной кривизны Риччи. Другими словами, мы предполагаем (так оно, впрочем, и есть на самом деле), что эти другие проявления кривизны не нарушают сильный принцип эквивалентности.

Уравнение для  $\Phi$  имеет решение вида

$$\Phi = -\frac{\mu_1}{r} \exp\{-r/a \sqrt{6}\}, \text{ где } a = R^{-\frac{1}{2}},$$

откуда сила, действующая на частицу с зарядом  $\mu_2$ , равна

$$Fr = \mu_2 \Phi, r = \mu_1 \mu_2 / r^2 [1 + r/\sqrt{6}a] \exp\{-r/a \sqrt{6}\} \approx \\ \approx \mu_1 \mu_2 / r^2 [1 + r^2/12a^2 + \mathcal{O}(r^3/a^3)].$$

Мы видим, что аномальная сила, обусловленная  $R$ -членом и равная приблизительно  $\mu_1 \mu_2 / 12a^2$ , не зависит от расстояния между частицами, а это явно нарушает сильный принцип эквивалентности.

Из уравнений Эйнштейна ясно, что величина скалярной кривизны Риччи порядка плотности массы-энергии и, следовательно, отношение аномальных сил к «обычным» скалярным силам составляет

$$\frac{r^2}{12a^2} \sim r^2 \rho_{\text{масса-энергия}} \sim r^2 [\rho/\rho_{\text{ядерн}}] \cdot 10^{-14},$$

где  $r$  измеряется в сантиметрах. Таким образом, даже если скалярные силы измеряются внутри вещества с ядерными плотностями  $\rho_{\text{ядерн}} = 10^{14}$  г/см<sup>3</sup>, то для того, чтобы аномальные силы, обусловленные  $R$ -членом, начали заметно проявлять себя, нам необходимо было бы иметь в распоряжении заполненную таким веществом «лабораторию» довольно-таки внушительных размеров ( $r \sim 100$  км и более). В любом же практическом эксперименте влияние этих гипотетических  $R$ -сил было бы ничтожно.

**Решение 14.15.** Согласно результатам задачи 7.7(и) и уравнениям Максвелла,

$$4\pi J^\mu = F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \frac{1}{|g|^{1/2}} (|g|^{1/2} F^{\mu\nu})_{;\nu}, \\ 4\pi J^\mu{}_{;\mu} = 4\pi \frac{4}{|g|^{1/2}} (J^\mu |g|^{1/2})_{;\mu} = \frac{1}{|g|^{1/2}} (|g|^{1/2} F^{\mu\nu})_{;\mu\nu}.$$

Поскольку тензор  $F$  антисимметричен, левая часть должна быть равна нулю.



**Решение 14.16.** В плоском пространстве-времени имеем

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 4\pi J^\mu,$$

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu},$$

откуда

$$-A^{\mu,\nu}{}_{;\nu} + A^{\nu,\mu}{}_{;\nu} = 4\pi J^\mu. \quad (1)$$

Если мы поменяем во втором члене порядок дифференцирования по  $\mu$  и  $\nu$ , что можно делать в плоском пространстве-времени, а затем применим правило «запятая переходит в точку с запятой», то получим

$$-A^{\mu;\nu}{}_{;\nu} + A^{\nu;\nu}{}_{;\mu} = 4\pi J^\mu. \quad (2)$$

Если же, с другой стороны, мы применим это правило непосредственно к уравнению (1), то будем иметь

$$-A^{\mu;\nu}{}_{;\nu} + A^{\nu;\mu}{}_{;\nu} = 4\pi J^\mu.$$

Порядок дифференцирования во втором члене теперь можно изменить лишь вместе с введением члена с кривизной (см. задачу 9.8):

$$-A^{\mu;\nu}{}_{;\nu} + A^{\nu;\mu}{}_{;\nu} + R^\mu{}_\sigma A^\sigma = 4\pi J^\mu. \quad (3)$$

Уравнения (2) и (3) приводят, вообще говоря, к различным следствиям, которые можно проверить на эксперименте. Тем не менее мы пока что (вплоть до 1975 г.) не располагаем *никакими* экспериментальными данными, позволяющими сказать, какое из этих уравнений правильно.

**Решение 14.17.** Для члена связи с кривизной того вида, которой был найден в задаче 14.16, мы имеем (в лоренцевской калибровке, т. е. при условии  $A^\mu{}_{;\mu} = 0$ )

$$\square A^\mu + (R^\mu{}_\nu A^\nu) = 4\pi J^\mu,$$

где скобки означают, что этот член может как присутствовать, так и отсутствовать. Поскольку в вакууме тензор Риччи равен нулю, единственная надежда обнаружить присутствие этого члена могла бы быть связана с экспериментами в веществе (например, в стекле). Первый член в уравнении имеет порядок  $A^\mu [\min(\frac{c}{v}, \ell)]^{-2}$ . Величина тензора Риччи (как следует из уравнений поля) порядка

$$G\rho/c^2 \approx 0,74 \cdot 10^{-28} \text{ см}^{-2} \left( \frac{\rho}{\text{г} \cdot \text{см}^{-3}} \right).$$

Следовательно, относительная поправка, вносимая в уравнение вторым членом, равна

$$\frac{\delta A^\mu}{A^\mu} \sim \left( \frac{\min(\frac{c}{v}, \ell) (\rho/\text{г} \cdot \text{см}^{-3})^{\frac{1}{2}}}{1,16 \cdot 10^{14} \text{ см}} \right)^2,$$

Поскольку предполагается, что пространственные масштабы земных процессов не превосходят размеров Земли  $l \sim 6 \cdot 10^8$  см, числовое значение этой поправки для  $\rho = 1$  составляет  $(\delta A^\mu / A^\mu) \lesssim (5 \cdot 10^{-6})^2$ . Можно, разумеется, изобретать и более хитроумные члены связи с кривизной, например вида  $K R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} A^\mu$ , где  $K$  — размерная константа. Поскольку, однако, приписать  $K$  какое-либо естественное значение не представляется возможным, то не существует и способа оценить *априори* величину эффекта, обусловленного подобными членами. Так как рассматриваемые уравнения сходны с уравнением Прока

$$\square A^\mu + mA^\mu = 0,$$

то эксперименты по измерению массы покоя фотона могли бы в принципе дать какие-то ограничения на значение  $K$ ; к сожалению, пока что эксперименты не дали в этом направлении никаких результатов.

**Решение 14.18.** Для тензора энергии-импульса электромагнитного поля имеем

$$4\pi T^{\mu\nu} = - (F^\mu_\alpha F^{\alpha\nu} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}), \quad (1)$$

$$4\pi T^{\mu\nu}_{;\nu} = - (F^\mu_{\alpha;\nu} F^{\alpha\nu} + F^\mu_\alpha F^{\alpha\nu}_{;\nu} + \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta;\mu}) = 0. \quad (2)$$

Рассматривая сумму первого и последнего членов в уравнении (2), получаем

$$\begin{aligned} -F^{\alpha\beta} g^{\mu\tau} \left( \frac{1}{2} F_{\alpha\beta;\tau} + F_{\tau\alpha;\beta} \right) &= -\frac{1}{2} F^{\alpha\beta} g^{\mu\tau} (F_{\alpha\beta;\tau} + F_{\tau\alpha;\beta} - F_{\tau\beta;\alpha}) = \\ &= -\frac{1}{2} F^{\alpha\beta} g^{\mu\tau} (F_{\alpha\beta;\tau} + F_{\tau\alpha;\beta} + F_{\beta\tau;\alpha}) \sim F^{\alpha\beta} g^{\mu\tau} F_{[\alpha\beta;\tau]}. \end{aligned}$$

Если  $F$  выводится из выражения для векторного потенциала  $A$  обычным образом, то  $F_{[\alpha\beta;\tau]} = 0$ , и у нас остается уравнение

$$0 = 4\pi T^{\mu\nu}_{;\nu} = -F^\mu_\alpha F^{\alpha\nu}_{;\nu}.$$

Отсюда следует, что  $F^{\alpha\nu}_{;\nu} = 0$ , за исключением случая, когда детерминант, составленный из коэффициентов  $F^\mu_\alpha$ , сам обращается в нуль. Но  $\det(F^\mu_\alpha) = -(\vec{E} \cdot \vec{B})^2$ , что и требовалось доказать.

**Решение 14.19.** Заметим сначала, что гамильтониан нормирован таким образом, что обладает размерностью (масса)<sup>2</sup>; это означает, что уравнения Гамильтона суть

$$dx^\mu/d\lambda = \partial H / \partial \pi_\mu, \quad (1)$$

$$d\pi_\mu/d\lambda = -\partial H / \partial x^\mu, \quad (2)$$

где  $\lambda$  — некоторый аффинный параметр (для частицы массы  $m$  он равен  $\tau/m$ , где  $\tau$  — собственное время). Если бы гамильтониан  $H$  был поделен на  $m$ , то в уравнениях (1) и (2) можно было бы заменить  $d/d\lambda$  на  $d/d\tau$ ; преимущество использования  $d/d\lambda$  заключается в том, что  $d/d\lambda$  можно использовать также и в случае безмассовых частиц.

Поскольку 4-импульс частицы есть  $p^\mu = dx^\mu/d\lambda$  и так как  $g^{\mu\nu}$  и  $A_\mu$  являются функциями от  $x^\alpha$ , а не от  $\pi_\alpha$ , уравнение (1) дает

$$p^\mu = g^{\mu\nu} (\pi_\nu - eA_\nu). \quad (3)$$

Из уравнения (2) получаем

$$\frac{d\pi_\alpha}{d\lambda} = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu}{}_{,\alpha} (\pi_\mu - eA_\mu) (\pi_\nu - eA_\nu) + g^{\mu\nu} e A_{\mu,\alpha} (\pi_\nu - eA_\nu).$$

Из уравнения (3), однако, следует

$$\begin{aligned} \frac{d\pi_\alpha}{d\lambda} &= \frac{d}{d\lambda} (g_{\alpha\mu} p^\mu + eA_\alpha) = \\ &= g_{\alpha\mu} \frac{dp^\mu}{d\lambda} + g_{\alpha\mu,\beta} p^\beta p^\mu + eA_{\alpha,\beta} p^\beta \end{aligned}$$

(здесь мы воспользовались соотношением  $d/d\lambda = p^\beta \partial/\partial x^\beta$ ). Умножая на  $g^{\alpha\gamma}$ , находим

$$\frac{dp^\gamma}{d\lambda} + g^{\alpha\gamma} g_{\alpha\mu,\beta} p^\beta p^\mu + \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} g^{\mu\nu}{}_{,\alpha} p_\mu p_\nu = g^{\alpha\gamma} e (A_{\mu,\alpha} - A_{\alpha,\mu}) p^\mu.$$

Перегруппируем теперь производные от  $g_{\alpha\beta}$  таким образом, чтобы в результате сконструировать символ Кристоффеля. Поскольку

$$0 = (g^{\mu\beta} g_{\beta\gamma})_{,\alpha} = g^{\mu\beta}{}_{,\alpha} g_{\beta\gamma} + g^{\mu\beta} g_{\beta\gamma,\alpha},$$

то, умножая на  $g^{\gamma\nu}$ , получаем

$$g^{\mu\nu}{}_{,\alpha} = -g^{\gamma\nu} g^{\mu\beta} g_{\beta\gamma,\alpha}.$$

Следовательно,

$$\frac{dp^\gamma}{d\lambda} + g^{\alpha\gamma} \left( g_{\alpha\mu,\beta} - \frac{1}{2} g_{\beta\mu,\alpha} \right) p^\beta p^\mu = g^{\alpha\gamma} e F_{\alpha\mu} p^\mu.$$

Так как

$$g_{\alpha\mu,\beta} p^\beta p^\mu = \frac{1}{2} (g_{\alpha\mu,\beta} + g_{\alpha\beta,\mu}) p^\beta p^\mu,$$

окончательно имеем

$$\frac{dp^\gamma}{d\lambda} + \Gamma^\gamma_{\beta\mu} p^\beta p^\mu = e F^\gamma{}_\mu p^\mu,$$

что и является уравнением движения.

**Решение 14.20.** Для незаряженной пробной частицы сохраняющейся величиной является  $p \cdot \xi$ , поэтому можно было бы предположить, что в случае заряженной частицы будет сохра-

няться  $\pi \cdot \xi$ , где  $\pi$  — канонический импульс, равный  $p + eA$  (см. задачу 14.19). В справедливости такого предположения, с одной стороны, можно убедиться, например, заметив, что поскольку у нас задан вектор Киллинга  $\xi$ , то соответственно должна существовать некая циклическая координата. Другими словами, мы можем выбрать координаты таким образом, что гамильтониан  $H$  не будет зависеть от какой-то одной координаты, и тогда сопряженный ей канонический импульс будет сохраняющейся величиной.

С другой стороны, мы можем непосредственно проверить наше предположение, обратившись к уравнению движения

$$\Delta_p p = eF \cdot p,$$

из которого следует

$$\begin{aligned} \nabla_p (\pi \cdot \xi) &= (\nabla_p p) \cdot \xi + p \cdot \nabla_p \xi + e (\nabla_p A) \cdot \xi + eA \cdot \nabla_p \xi = \\ &= e\xi \cdot F \cdot p + 0 + e (\nabla_p A) \cdot \xi - ep \cdot \nabla_A \xi. \end{aligned}$$

Чтобы переписать в другом виде последний член в первой строчке и показать, что второй член обращается в нуль, мы воспользовались уравнением Киллинга. Заметим теперь, что порядок векторных «сомножителей» в скалярных произведениях в первой строчке несуществен, но когда в дело вступает тензор  $F$ , обладающий уже двумя «входными каналами» для «ввода» векторов, необходимо обращать внимание на то, в каком порядке должны стоять векторы<sup>1)</sup>. Далее, тот факт, что электромагнитное поле допускает наличие циклической координаты, выражается соотношением

$$0 = \mathcal{L}_\xi A = \nabla_\xi A - \nabla_A \xi.$$

Переписывая еще раз последний член в выражении для  $\nabla_p (\pi \cdot \xi)$  с помощью этого соотношения, получаем

$$\begin{aligned} \nabla_p (\pi \cdot \xi) &= e\xi \cdot F \cdot p + e\xi \cdot (\nabla A) \cdot p - ep \cdot (\nabla A) \cdot \xi = \\ &= e\xi \cdot F \cdot p - e\xi \cdot F \cdot p = 0, \end{aligned}$$

где мы воспользовались тем фактом, что  $F$  есть не что иное, как антисимметризованное выражение для  $\nabla A$ . Таким образом, интегралом движения, т. е. сохраняющейся величиной вдоль траектории частицы, является  $\pi \cdot \xi$ .

**Решение 14.21.** Ясно, что четыре уравнения Максвелла

$$F_{[\alpha\beta, \nu]} = 0 = \tilde{F}_{[\alpha\beta, \nu]}$$

инвариантны по отношению к конформному преобразованию.

<sup>1)</sup> О «входных каналах» подробнее см. [1], гл. 1, стр. 110. — Прим. перев.

Другие четыре уравнения Максвелла имеют вид

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = |g|^{-1/2} [F^{\mu\nu} |g|^{1/2}]_{;\nu} = 4\pi J^\mu.$$

Поскольку

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} = f^2 \tilde{g}^{\mu\alpha} \tilde{g}^{\nu\beta} \tilde{F}_{\alpha\beta} = f^2 \tilde{F}^{\mu\nu};$$

$$\tilde{g} \equiv \text{Det}(\tilde{g}_{\alpha\beta}) = f^4 g,$$

очевидно, что

$$|g|^{1/2} F^{\mu\nu} = |\tilde{g}|^{1/2} \tilde{F}^{\mu\nu},$$

откуда следует

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu}{}_{;\nu} &= \frac{f^2}{|\tilde{g}|^{1/2}} [|\tilde{g}|^{1/2} \tilde{F}^{\mu\nu}]_{;\nu} = 4\pi J^\mu = 4\pi g^{\mu\alpha} J_\alpha = \\ &= 4\pi (f \tilde{g}^{\mu\alpha}) f \tilde{J}_\alpha = 4\pi f^2 \tilde{J}^\mu \end{aligned}$$

и окончательно

$$\tilde{F}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 4\pi \tilde{J}^\mu.$$

## ГЛАВА 15

**Решение 15.1.** Когда частица движется в экваториальной плоскости, квадрат момента количества движения  $L^2 = p_\varphi^2$ . Очевидно, что это сохраняющаяся величина, так как сохраняется  $p_\varphi$ . (Действительно,  $\xi = \partial/\partial\varphi$  есть вектор Киллинга, и из задачи 10.10 следует, что  $\xi \cdot p$  сохраняется.) Однако в силу сферической симметрии движение всегда происходит в экваториальной плоскости *некоторой* координатной системы, получающейся из исходной путем поворота. Тогда, если бы мы смогли записать  $p_\varphi^2$  как величину, инвариантную по отношению к поворотам, а затем определить этот инвариант в исходной системе, наша цель была бы достигнута.

В некоторый момент времени, когда радиальная координата частицы равна  $r$ , компоненты ковариантной 4-скорости  $\tilde{p}$  суть  $(p_t, p_r, p_\vartheta, p_\varphi)$ . Рассмотрим теперь «приведенную» 4-скорость  $\tilde{p}_\alpha^{\text{прив}} = (0, 0, rp_\vartheta, rp_\varphi)$ , которая получается из  $\tilde{p}_\alpha$  путем преобразования, не зависящего от  $\vartheta$  и  $\varphi$  (например, путем проектирования). Тогда, если движение будет происходить в экваториальной плоскости, мы будем иметь  $p_\vartheta = 0$  и  $\vartheta = \pi/2$ , откуда

$$L^2 = g^{\alpha\beta} \tilde{p}_\alpha^{\text{прив}} \tilde{p}_\beta^{\text{прив}} = g^{\varphi\varphi} r^2 p_\varphi^2 = p_\varphi^2 - \text{интеграл движения.}$$

Но в общем случае

$$L^2 = g^{\vartheta\vartheta} r^2 p_\vartheta^2 + g^{\varphi\varphi} r^2 p_\varphi^2 = p_\vartheta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta}.$$

Следовательно, эта величина должна сохраняться и в общем случае, что и требовалось доказать.

### Решение 15.2.

а) Воспользовавшись сферической симметрией метрики, ориентируем координатные оси таким образом, чтобы частица при  $\tau = 0$  имела  $\vartheta = \pi/2$  и  $\dot{\vartheta} = 0$ . Тогда единственным решением уравнения геодезической

$$\frac{d}{d\tau} (r^2 \dot{\vartheta}) = r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi}^2$$

является  $\vartheta = \pi/2$  для всех  $\tau$ ,

б) Воспользовавшись интегралом движения  $L^2$  из задачи 15.1, получим

$$\left(\frac{d\vartheta}{d\lambda}\right)^2 = (g^{\vartheta\vartheta} p_\vartheta)^2 = \frac{1}{r^4} \left( L^2 - \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta} \right). \quad (1)$$

Предположим, что невозмущенная орбита обладает параметрами  $\vartheta = \pi/2$ ,  $L = p_\varphi = K$ . Пусть частица испытывает возмущение, выводящее ее из плоскости орбиты, т. е.  $\vartheta = \pi/2 + \delta\vartheta$ ,  $L = K + \delta L$ ,  $p_\varphi = K + \delta p_\varphi$ . С точностью до первого порядка по  $\delta L$  и  $\delta p_\varphi$  и до второго порядка по  $\delta\vartheta$  уравнение (1) дает

$$\left[\frac{d(\delta\vartheta)}{d\lambda}\right]^2 = \frac{1}{r^4} [2K\delta L - 2K\delta p_\varphi - K^2(\delta\vartheta)^2],$$

откуда

$$\frac{d^2(\delta\vartheta)}{d\lambda^2} = -\frac{K^2}{r^4} \delta\vartheta.$$

Из этого уравнения видно, что возмущение  $\delta\vartheta$  осциллирует вблизи  $\vartheta = \pi/2$  и не растет со временем, т. е. орбиты являются устойчиво плоскими.

**Решение 15.3.** В случае радиального падения у нас есть два интеграла движения:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1 \quad \text{и} \quad \mathbf{u} \cdot \partial/\partial t = u_0 = -(1 - 2M/r) u^0.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} &= -1 = -(1 - 2M/r) (u^0)^2 + (1 - 2M/r)^{-1} (ur)^2 = \\ &= [-(1 - 2M/r) + (1 - 2M/r)^{-1} (dr/dt)^2] (u^0)^2 = \\ &= [-(1 - 2M/r) + (1 - 2M/r)^{-1} (dr/dt)^2] (u_0)^2 (1 - 2M/r)^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Решая относительно  $(dr/dt)^2$ , находим

$$(dr/dt)^2 = (1 - 2M/r)^2 [1 - (1 - 2M/r) (u_0)^{-2}]. \quad (2)$$

Неподвижный наблюдатель измеряет временные интервалы

$$d\hat{t} = (1 - 2M/r)^{1/2} dt$$

и радиальные расстояния

$$d\hat{r} = (1 - 2M/r)^{-1/2} dr,$$

так что измеряемая им скорость есть

$$\frac{d\hat{r}}{d\hat{t}} = (1 - 2M/r)^{-1} \frac{dr}{dt}. \quad (3)$$

Заметим, что эта локально измеряемая скорость независимо от значения  $u_0$  приближается к скорости света по мере того, как  $r$  приближается к  $2M$ .

**Решение 15.4.** Первые интегралы уравнения движения по геодезической (см. задачу 15.3) суть

$$u_0 = -\tilde{E} = \text{const},$$

$$g^{00}u_0^2 + g_{rr}(u^r)^2 = -1,$$

откуда получаем

$$u^0 = \frac{dt}{d\tau} = \frac{\tilde{E}}{1-2M/r}, \quad (1)$$

$$u^r = \frac{dr}{d\tau} = -(\tilde{E}^2 - 1 + 2M/r)^{1/2}. \quad (2)$$

Знак минус перед квадратным корнем в уравнении (2) соответствует частице, падающей на центр.

*Случай 1.* Для этого случая из условия  $dr/d\tau = 0$  при  $r = R$  следует

$$2M/R = 1 - \tilde{E}^2,$$

т. е.  $\tilde{E} < 1$ . Тогда уравнение (2) можно записать следующим образом:

$$d\tau = \frac{dr}{\left(\frac{2M}{r} - \frac{2M}{R}\right)^{1/2}}. \quad (3)$$

Это уравнение можно проинтегрировать в конечном виде. Получим

$$\tau = \left(\frac{R^3}{8M}\right)^{1/2} \left[ 2 \left( \frac{r}{R} - \frac{r^2}{R^2} \right)^{1/2} + \arccos \left( \frac{2r}{R} - 1 \right) \right], \quad (4)$$

где постоянная интегрирования выбрана таким образом, чтобы  $\tau = 0$  при  $r = R$ . Удобно переписать уравнение (4) в параметрическом виде, вводя «параметр циклоиды»

$$\eta = \arccos \left( \frac{2r}{R} - 1 \right).$$

Будем иметь

$$r = \frac{1}{2} R (1 + \cos \eta) \quad (\eta = 0 \text{ при } r = R), \quad (5)$$

$$\tau = \left(\frac{R^3}{8M}\right)^{1/2} (\eta + \sin \eta). \quad (6)$$

Из уравнения (1) следует

$$t = \int \frac{\tilde{E} d\tau}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} = \tilde{E} \int \frac{d\tau}{d\eta} \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} d\eta =$$

$$= \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2} \int \frac{\left(\frac{R^3}{8M}\right)^{1/2} (1 + \cos \eta) d\eta}{1 - 4M [R(1 + \cos \eta)]^{-1}}.$$



По таблице интегралов находим

$$\frac{t}{2M} = \ln \left| \frac{\left(\frac{R}{2M}-1\right)^{1/2} + \operatorname{tg}\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\left(\frac{R}{2M}-1\right)^{1/2} - \operatorname{tg}\left(\frac{\eta}{2}\right)} \right| + \left(\frac{R}{2M}-1\right)^{1/2} \left[ \eta + \frac{R}{4M}(\eta + \sin \eta) \right], \quad (7)$$

где постоянная интегрирования выбрана таким образом, чтобы  $t=0$  при  $\eta=0$ , т. е. при  $r=R$ . Отметим, что  $t \rightarrow \infty$ , когда  $\operatorname{tg}(\eta/2) \rightarrow (R/2M-1)^{1/2}$ , т. е. когда  $r \rightarrow 2M$ .

*Случай 2.* В этом случае  $\tilde{E}=1$  и уравнение (2) дает

$$\tau = -\frac{2}{3} \left(\frac{r^3}{2M}\right)^{1/2} + \operatorname{const}, \quad (8)$$

и, поскольку

$$\frac{dt}{dr} = \frac{dt/d\tau}{dr/d\tau},$$

мы получаем

$$t = -\frac{2}{3} \left(\frac{r^3}{2M}\right)^{1/2} - 4M \left(\frac{r}{2M}\right)^{1/2} + 2M \ln \left| \frac{\left(\frac{r}{2M}\right)^{1/2} + 1}{\left(\frac{r}{2M}\right)^{1/2} - 1} \right| + \operatorname{const}. \quad (9)$$

*Случай 3* Аналогично случаю 1 выберем  $R$  таким образом, чтобы

$$\frac{2M}{R} = \tilde{E}^2 - 1 = (1 - v_\infty^2)^{-1} - 1 = \frac{v_\infty^2}{1 - v_\infty^2}.$$

Тогда перемена знака  $R$  в уравнении (4) дает

$$\tau = -\left(\frac{R^3}{8M}\right)^{1/2} \left[ 2 \left(\frac{r}{R} + \frac{r^2}{R^2}\right)^{1/2} - \operatorname{Arch}\left(\frac{2r}{R} + 1\right) \right]. \quad (10)$$

Заметим, что  $\tau=0$  при  $r=0$  и  $\tau=-\infty$  при  $r=\infty$ . Вводя переменную

$$\eta = \operatorname{Arch}\left(\frac{2r}{R} + 1\right),$$

получаем

$$r = \frac{R}{2} (\operatorname{ch} \eta - 1) \quad (r=0 \text{ при } \eta=0), \quad (11)$$

$$\tau = -\left(\frac{R^3}{8M}\right)^{1/2} (\operatorname{sh} \eta - \eta). \quad (12)$$

Уравнение, соответствующее уравнению (7), имеет вид

$$\frac{t}{2M} = \ln \left| \frac{\left(\frac{R}{2M}+1\right)^{1/2} + \operatorname{cth} \frac{\eta}{2}}{\left(\frac{R}{2M}+1\right)^{1/2} - \operatorname{cth} \frac{\eta}{2}} \right| - \left(\frac{R}{2M}+1\right)^{1/2} \left[ \eta + \frac{R}{4M}(\operatorname{sh} \eta - \eta) \right]. \quad (13)$$

Заметим, что, когда  $r$  изменяется от  $\infty$  до  $2M$ ,  $t$  изменяется от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

**Решение 15.5.** Выберем экваториальную плоскость так, чтобы  $\vartheta = \pi/2$ . Тогда  $u^\vartheta = 0$ . Одним из первых интегралов движения является нормировка 4-скорости, откуда следует

$$g^{00}u_0^2 + g^{\varphi\varphi}u_\varphi^2 + g_{rr}u^r{}^2 = -1. \quad (1)$$

Еще два первых интеграла дают нам векторы Киллинга  $\partial/\partial t$  и  $\partial/\partial\varphi$ :

$$\begin{aligned} u_\varphi &= \tilde{L} = \text{const}, \\ u_0 &= -\tilde{E} = \text{const}, \end{aligned}$$

где  $\tilde{L}$  и  $\tilde{E}$  — соответственно момент количества движения на единицу массы покоя и энергия на единицу массы покоя. Тогда из уравнения (1) получаем

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{-1 - g^{00}\tilde{E}^2 - g^{\varphi\varphi}\tilde{L}^2}{g_{rr}}, \quad (2)$$

или, подставляя в явном виде метрические коэффициенты,

$$dr/d\tau = \pm \left\{ -1 + \tilde{E}^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} - \frac{\tilde{L}^2}{r^2} \right\} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{1/2}. \quad (3)$$

Из  $u^\varphi = g^{\varphi\varphi}\tilde{L}$  следует

$$d\varphi/d\tau = \tilde{L}/r^2.$$

Подставляя это соотношение в уравнение (3), окончательно получаем

$$\frac{dr}{d\varphi} = \pm \frac{r^2}{\tilde{L}} \left\{ -1 + \tilde{E}^2 \left(1 - 2M/r\right)^{-1} - \frac{\tilde{L}^2}{r^2} \right\} \left(1 - 2M/r\right)^{1/2}.$$

**Решение 15.6.** Выберем  $\vartheta = \pi/2$  и  $p^\vartheta = 0$ . Если  $\lambda$  — некоторый аффинный параметр, такой, для которого

$$p^r = dr/d\lambda \quad \text{и} \quad p^\varphi = d\varphi/d\lambda = r^{-2}p_\varphi,$$

то

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{p^r}{p^\varphi}.$$

Соотношение  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = 0$  дает нам уравнение, связывающее  $p^r$ ,  $p^\varphi$  и  $p^0$ ; его можно решить относительно  $dr/d\varphi$ :

$$(dr/d\varphi)^2 = r^4 (1 - 2M/r) [\gamma (1 - 2M/r)^{-1} - 1/r^2], \quad (1)$$

где  $\gamma \equiv p_\vartheta^2/p_\varphi^2 = \text{const}$ . Если теперь ввести переменную  $u \equiv M/r$ , уравнение (1) примет вид

$$(u')^2 = (1 - 2u) [\gamma M^2 (1 - 2u)^{-1} - u^2] = \gamma M^2 - u^2 + 2u^3; \quad (2)$$

здесь штрих означает обычное дифференцирование по  $\varphi$ . Продиф-

ференцировав это уравнение, мы получим весьма простое уравнение 2-го порядка:

$$u'' + u = 3u^2. \quad (3)$$

В предельном случае  $M/b \ll 1$  за нулевое приближение к решению можно выбрать решение типа «прямой линии»  $r \sin \varphi = b$  или

$$u_0 = (M/b) \sin \varphi.$$

Запишем теперь  $u = u_0 + u_1 + \dots$ , где  $u_1 \ll 1$ , так что уравнение (3) можно приближенно записать так:

$$u_1'' + u_1 \approx 3u_0^2 = 3 \left(\frac{M}{b}\right)^2 \sin^2 \varphi = \frac{3}{2} \left(\frac{M}{b}\right)^2 (1 - \cos 2\varphi).$$

Это уравнение можно решить методом подбора; решение имеет вид

$$u \approx \left(\frac{M}{b}\right) \sin \varphi + \frac{1}{2} \left(\frac{M}{b}\right)^2 (3 + \cos 2\varphi).$$

Теперь мы можем найти полный угол отклонения, вычисляя значения двух углов, при которых  $r = \infty$  ( $u = 0$ ). Эти углы должны удовлетворять уравнению

$$2 \sin \varphi \approx - (M/b) (3 + \cos 2\varphi),$$

откуда получаем

$$\varphi \approx -2(M/b) \quad \text{и} \quad \varphi \approx \pi + 2(M/b).$$

Таким образом, полный угол отклонения составляет  $4M/b$ .

**Решение 15.7.**

а) Уравнение орбиты было получено в задаче 15.5. Если теперь ввести новую переменную  $u \equiv M/r$  и два новых параметра  $\varepsilon$  и  $u_0$ , заменяющих  $\tilde{E}$  и  $\tilde{L}$ , то уравнение орбиты можно будет переписать в виде

$$(du/d\varphi)^2 + (u - u_0)^2 - \varepsilon^2 u_0^2 = 6u_0(u - u_0)^2 + 2(u - u_0)^3.$$

[См. также [1], т. 2, уравнение (25.47) и [2], уравнение (8.4.29).]

Члены в правой части представляют собой релятивистские поправки; в ньютоновской теории гравитации правая часть была бы равна нулю.

Нулевым приближением к решению является ньютоновское решение, т. е.

$$u = u_0 (1 + \varepsilon \cos \varphi),$$

где  $\varepsilon$  — эксцентриситет. Заметим теперь, что первый поправочный член имеет вид

$$6u_0(u - u_0)^2 = \mathcal{O}(u_0^3 \varepsilon^2) = \mathcal{O}\left(\frac{m^3}{r_0^2} \varepsilon^2\right),$$

а второй поправочный член есть

$$(u - u_0)^3 = \mathcal{O}\left(\frac{m^3}{r_0^3} e^3\right),$$

так что мы можем им просто пренебречь! Следовательно, поправки первого порядка можно найти из уравнения

$$(du/d\varphi)^2 + (1 - 6u_0)(u - u_0)^3 = u_0^2 e^2.$$

Сделаем теперь замену переменных

$$\psi \equiv (1 - 6u_0)^{1/2} \varphi, \quad \mu = u - u_0,$$

тогда уравнение примет вид

$$(d\mu/d\psi)^2 + \mu^2 = u_0^2 e^2 / (1 - 6u_0).$$

Заметим, что решение периодически по  $\psi$ ; это значит, что и  $r$  периодически по  $\psi = (1 - 6u_0)^{1/2} \varphi$ . Следовательно, одна полная орбита соответствует  $\psi = 2\pi$  или  $\varphi = 2\pi (1 - 6M/r_0)^{-1/2}$ , поэтому смещение периастрия дается формулой

$$\frac{\delta\varphi}{2\pi} \Big|_{\text{за одно обращение}} = \frac{3M}{r_0}.$$

[Другой способ вычисления смещения, более подходящий для случая больших эксцентриситетов, см. в книге Эддингтона [Eddington A. S., The Mathematical Theory of Relativity (Cambridge University Press, 1922, Sec. 40)<sup>1</sup>].

б) Из классических ньютоновских уравнений орбиты получаем

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 + \frac{2\Phi(u)}{L^2} = \frac{2E_\infty}{L^2}.$$

После подстановки потенциала

$$\Phi = -M/r - AM/r^3$$

это уравнение принимает вид

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 - \frac{2mu}{L^2} - \frac{2Amu^3}{L^2} = \frac{2E_\infty}{L^2}.$$

Перепишем его следующим образом:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + (1 - c)(u - u_0)^2 - \frac{2Am}{L^2}(u - u_0)^3 = \text{const.}$$

Сравнивая коэффициенты при  $u^2$ , приходим к выводу, что  $c = 6Au_0m/L^2$ . Для почти круговых орбит  $L^2 \approx mr$ , поэтому  $c = 6A/r_0^2$ . Из рассмотрения случая «а» нам известно, что решение

<sup>1</sup>) Имеется перевод: Эддингтон А. С. Математическая теория относительности, Харьков — Киев: ГНТИ Украины, 1933, гл. 3, § 40. — Прим.перев.

периодично по переменной  $(1+c)^{1/2}\varphi$ , так что полное угловое отклонение от периастрия к периастрию составляет

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{(1-c)^2} \frac{1}{1} = \frac{2\pi}{\left(1 - \frac{6A}{r_0^2}\right)^2} \frac{1}{1}.$$

Отсюда

$$\frac{\delta\varphi}{2\pi} \Big|_{\text{за одно обращение}} = \frac{3A}{r_0^2}.$$

Периастрий совершает опережающее движение в случае сплюснутости звезды  $A > 0$  и отстает, если звезда вытянута  $A < 0$ .

в) В системе единиц, где  $c = G = 1$ ,  $M_{\odot} = 1,5$  км. Для Меркурия  $r_0 = 0,58 \cdot 10^8$  км. Так как период орбитального обращения Меркурия составляет 0,241 года, релятивистское смещение перигелия равно

$$\delta\varphi = 0,105 \text{ дуговой секунды за одно обращение} = \\ = 42 \text{ дуговым секундам за столетие.}$$

Если бы это смещение было обусловлено сплюснутостью Солнца, мы имели бы для других планет смещение

$$\delta\varphi = (42 \text{ сек/столетие}) (r_{\text{Мерк}}/r)^2 (T_{\text{орбиты Мерк}}/T_{\text{орб}}) = \\ = (42 \text{ сек/столетие}) (r_{\text{Мерк}}/r)^{\frac{7}{2}}.$$

Числовые значения смещений тогда составляли бы

	$r_{\text{Мерк}}/r$	Общая теория относительности, сек/столетие	Сплюснутость, сек/столетие
Меркурий	1	42	42
Венера	0,536	8,8	4,7
Земля	0,386	3,9	1,51
Марс	0,245	1,25	0,3

**Решение 15.8.** Мы будем решать задачу в два этапа. Вначале вычислим частоту лазерного излучения, измеренную наблюдателем, покоящимся при значении радиальной координаты  $r$  («НПР»), а затем вычислим красное смещение между этим наблюдателем и наблюдателем, покоящимся на бесконечности («НПБ»).

Пусть  $u_P$  — 4-скорость ракеты «Р» и  $p_P$  — импульс фотона при значении радиальной координаты  $r$ . Тогда

$$\frac{\nu_{\text{НПР}}}{\nu_0} = \frac{u_{\text{НПР}} \cdot p_P}{u_P \cdot p_P}. \quad (1)$$

Если  $v$  — собственная относительная скорость ракеты и НПР-наблюдателя, то в системе отсчета ракеты уравнение (1) можно

переписать в виде

$$\frac{v_{\text{НПР}}}{v_0} = \frac{\gamma v_0 (1 + v \cos \alpha)}{v_0},$$

откуда

$$v_{\text{НПР}} = \gamma v_0 (1 + v \cos \alpha), \quad (2)$$

где  $\gamma \equiv (1 - v^2)^{-1/2}$ . Чтобы вычислить  $v$ , вспомним, что на круговых орбитах угловая скорость

$$\Omega \equiv \frac{d\varphi}{dt}$$

в точности равна скорости, даваемой третьим законом Кеплера в ньютоновской теории тяготения:

$$\Omega = \left( \frac{M}{r^3} \right)^{1/2} \quad (3)$$

(см. задачу 17.4). Следовательно,

$$v = \frac{d\hat{\varphi}}{d\hat{t}} = \frac{r d\varphi}{(1 - 2M/r)^{1/2} dt} = \left[ \frac{M}{r(1 - 2M/r)} \right]^{1/2}. \quad (4)$$

Тогда наблюдатель на бесконечности будет измерять частоту

$$v_{\text{НПБ}} = \frac{v_{\text{НПР}}}{u_{\text{НПР}}} = v_{\text{НПР}} (1 - 2M/r)^{1/2},$$

или

$$v_{\text{НПБ}} = \gamma v_0 (1 + v \cos \alpha) (1 - 2M/r)^{1/2},$$

где  $v$  определяется уравнением (4).

### Решение 15.9.

а) Первый интеграл движения дает нам уравнение

$$(dr/dt)^2 + V^2(r) = \tilde{E}^2, \quad (1)$$

где  $V$  определено в задаче 15.11. Если теперь воспользоваться соотношением

$$d\varphi/d\tau = p^\varphi = \tilde{L}/r^2 \quad (2)$$

и ввести новую переменную  $u \equiv M/r$ , то можно получить уравнение, связывающее  $u$  и  $\varphi$ :

$$\left( \frac{du}{d\varphi} \right)^2 = \frac{\tilde{E}^2 - (1 - 2u)(1 + \tilde{L}^2 u^2)}{\tilde{L}^2}, \quad (3)$$

где  $L \equiv \tilde{L}/M$ . Продифференцируем уравнение (3) по  $\varphi$ :

$$2u'u'' = - (2uL^2 - 2 - 6L^2u^2) u' L^{-2},$$

или

$$u'' + u = \frac{1}{L^2} + 3u^2. \quad (4)$$

Для больших прицельных параметров правая часть уравнения (4) мала. Положим  $u = u_0 + \epsilon v$ ; в этом случае правая часть уравнения (4) имеет порядок  $\mathcal{O}(\epsilon)$ . Соответствующим образом выбирая оси  $x$  и  $y$ , можно добиться, чтобы

$$u_0 = A \cos \varphi, \quad A = \text{const}. \quad (5)$$

Подставляя  $u_0$  в уравнение (4), получаем

$$v'' + v = L^{-2} + 3A^2 \cos^2 \varphi = L^{-2} + \frac{3}{2} A^2 (1 + \cos 2\varphi). \quad (6)$$

Решение уравнения (6) имеет вид

$$v = L^{-2} + \frac{3}{2} A^2 - \frac{A^2}{2} \cos 2\varphi = L^{-2} + 2A^2 - A^2 \cos^2 \varphi,$$

откуда следует

$$u = A \cos \varphi - A^2 \cos^2 \varphi + L^{-2} + 2A^2. \quad (7)$$

Асимптоты орбиты даются уравнением  $u = 0$ , т. е.

$$A^2 \cos^2 \varphi - A \cos \varphi - B = 0,$$

где

$$B = \frac{1}{L^2} + 2A^2,$$

$$\cos \varphi = \frac{A - (A^2 + 4A^2 B)^{\frac{1}{2}}}{2A^2} \approx -\frac{B}{A}. \quad (8)$$

Поскольку отношение  $B/A$  — малая величина, решение уравнения (8) имеет простой вид:

$$\varphi \approx \pi/2 - B/A. \quad (9)$$

Так как обеим асимптотам соответствует одинаковый угол отклонения (для  $\varphi \approx \pi/2$  и  $\varphi \approx -\pi/2$ ), то полный угол отклонения составляет

$$\Delta\varphi = 2B/A. \quad (10)$$

Если  $b$  — минимальное расстояние, на которое приближается частица к рассеивающему центру, то из определения (5) для  $A$  следует

$$A = M/b. \quad (11)$$

Далее,

$$\begin{aligned} L^2 &= \frac{L^2}{M^2 m^2} = \frac{b^2 (E^2 - m^2)}{M^2 m^2} = \frac{b^2 \beta^2}{M^2 (1 - \beta^2)}, \\ B &= \frac{M^2 (1 - \beta^2)}{b^2 \beta^2} + \frac{2M^2}{b^2} = \frac{M^2 (1 + \beta^2)}{b^2 \beta^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Из соотношений (10) — (12) окончательно получаем

$$\Delta\varphi_{\text{грав}} = \frac{2M(1+\beta^2)}{b\beta^2}. \quad (13)$$

б) Дифференциальное уравнение, описывающее траекторию, запишем следующим образом:

$$\frac{d}{dt}(m\gamma\dot{r}) = \gamma m r \omega^2 - \frac{Ze^2}{r^2}, \quad (14a)$$

$$m\gamma r^2 \omega \equiv L = \text{const}, \quad (14б)$$

$$m\gamma - \frac{Ze^2}{r} \equiv E = \text{const}. \quad (14в)$$

Из уравнения (14б) имеем

$$d/dt = (L/m\gamma r^2) d/d\varphi,$$

так что уравнение (14a) принимает вид

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} u + \left(1 - \frac{Z^2 e^4}{L^2}\right) u = \frac{Ze^2 E}{L^2}, \quad (15)$$

где  $u \equiv 1/r$ . Запишем решение уравнения (15):

$$u = \frac{1}{b} \cos \tau\varphi + \frac{Ze^2 E}{L^2 - Z^2 e^4}, \quad (16a)$$

$$\tau \equiv \left(1 - \frac{Z^2 e^4}{L^2}\right)^{1/2}; \quad (16б)$$

оно для больших  $L$  сводится к выражению

$$u = \frac{1}{b} \cos \varphi + \frac{Ze^2 E}{L^2}. \quad (17)$$

Наконец, асимптоты даются уравнением

$$0 = \frac{1}{b} \cos \varphi + \frac{Ze^2 E}{L^2},$$

или

$$\varphi \approx \frac{bZe^2 E}{L},$$

так что полный угол отклонения есть

$$\Delta\varphi_{\text{электромаг}} = \frac{2bZe^2 E}{L}. \quad (18)$$

Воспользовавшись соотношениями

$$E = m(1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$L^2 = \frac{b^2 m^2 \beta^2}{1 - \beta^2}.$$



перепишем формулу (18) в виде

$$\Delta\varphi_{\text{электромаг}} = \frac{2Ze^2(1-\beta^2)^{1/2}}{mb\beta^2}. \quad (19)$$

Формулы (13) и (19) отличаются друг от друга потому, что гравитационное поле тензорное, а электромагнитное — векторное: эти поля изменяются по-разному при преобразованиях Лоренца, что приводит к различной зависимости угла отклонения от  $\beta$ , когда  $\beta$  не мало.

**Решение 15.10.** Для решения этой задачи удобно использовать «излучательные координаты Эддингтона — Финкельштейна»: определим  $r^*$  посредством соотношения

$$dr^*/dr = (1 - 2M/r)^{-1},$$

т. е.

$$r^* = r + 2M \ln(r/2M - 1) + \text{const},$$

и введем запаздывающую временную координату

$$u = t - r^*.$$

Метрика Шварцшильда в этих координатах записывается в виде

$$ds^2 = -(1 - 2M/r) du^2 - 2du dr + r^2 d\Omega^2. \quad (1)$$

Полагая  $ds = 0$ , мы видим, что в этой метрике фотоны, излучаемые в радиальном направлении от центра, распространяются вдоль линий  $u = \text{const}$ . Красное смещение вычисляется путем сравнения промежутков времени между приемом и излучением фотонов для различных наблюдателей:

$$\frac{\Lambda_\infty}{\Lambda_{\text{изл}}} = \frac{(\Delta t)_\infty}{(\Delta \tau)_{\text{изл}}} = \frac{(\Delta u)_\infty}{(\Delta \tau)_{\text{изл}}} = \frac{(\Delta u)_{\text{изл}}}{(\Delta \tau)_{\text{изл}}} = \left. \frac{du}{d\tau} \right|_{\text{изл}}. \quad (2)$$

Обратите внимание, что мы можем установить соотношение между временными интервалами на бесконечности и временными интервалами в месте нахождения излучателя, воспользовавшись тем фактом, что  $u = \text{const}$  вдоль траектории световых лучей (фиг. 28). Теперь мы должны найти компоненту  $du/d\tau = U^u$  4-скорости излучателя  $U$  как функцию времени  $t$ .

Поскольку  $u$  и  $t$  являются циклическими координатами, то из соотношений

$$U_t = U_u = \text{const} = -\tilde{E} \quad (3)$$

и  $U \cdot U = 1$  имеем

$$U_r = \frac{-\tilde{E} - (\tilde{E}^2 - 1 + 2M/r)^{1/2}}{1 - 2M/r}, \quad (4)$$

Следовательно,

$$U^u = g^{uu}U_u + g^{ur}U_r = 0 + [\tilde{E} + (\tilde{E}^2 - 1 + 2M/r)^{1/2}] (1 - 2M/r)^{-1} \quad (5)$$

и

$$\begin{aligned} U^r &= g^{ur}U_u + g^{rr}U_r = \tilde{E} + [-\tilde{E} - (\tilde{E}^2 - 1 + 2M/r)^{1/2}] = \\ &= -(\tilde{E}^2 - 1 + 2M/r)^{1/2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом,

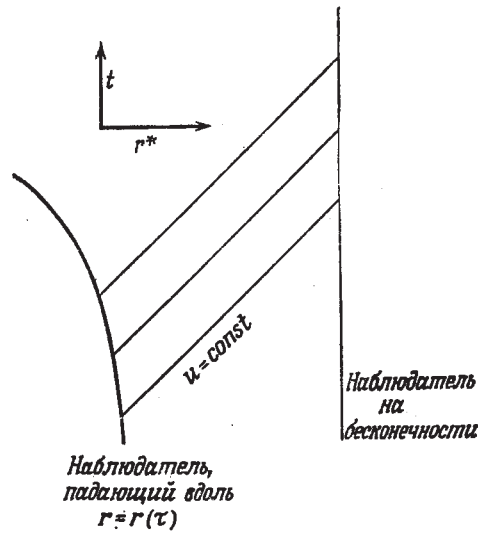
$$\frac{dr}{du} = \frac{U^r}{U^u} = \frac{-(\tilde{E}^2 - 1 + 2M/r)^{1/2} (1 - 2M/r)}{\tilde{E} + (\tilde{E}^2 - 1 + 2M/r)^{1/2}}. \quad (7)$$

Вблизи  $r = 2M$  из уравнения (7) получаем

$$\begin{aligned} du &\approx -2(1 - 2M/r)^{-1} dr \approx -2(r/2M - 1)^{-1} dr, \\ u &\approx -4M \ln(r/2M - 1) + \text{const}, \\ 1 - 2M/r &\approx \exp(-u/4M). \end{aligned}$$

Подставляя все эти выражения в уравнение (5), приходим к выводу, что при  $r \rightarrow 2M$

$$U^u \approx e^{+u/4M}.$$



Фиг. 28.

Но для наблюдателя, находящегося на фиксированном (и большом расстоянии  $r$ ),  $u = t + \text{const}$ , так что окончательно имеем

$$\lambda_{\text{изл}}/\lambda_{\infty} \approx \exp(-t/4M).$$

**Решение 15.11.** При движении частиц сохраняющимися величинами являются  $u_t \equiv \tilde{E}$  и  $u_\varphi \equiv \tilde{L}$ , так что из  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1$  получаем

$$(dr/d\tau)^2 + V^2(r) = \tilde{E}^2, \quad (1a)$$

$$V \equiv [(1 - 2M/r)(1 + \tilde{L}^2/r^2)]^{1/2}. \quad (1б)$$

[См. также [1], уравнение (25.15) или [2], уравнение (8.4.13)]. Полагая  $\partial V^2/\partial r = 0$ , мы можем найти максимум  $V^2$ :

$$V_{\text{макс}}^2 = \frac{L^2 + 36 + (\bar{L}^2 - 12)(1 - 12/\bar{L}^2)^{1/2}}{54}, \quad (2a)$$

$$\bar{L} \equiv \tilde{L}/M. \quad (2б)$$

Если для частицы  $\tilde{E} > V_{\text{макс}}$ , то она захватывается. Таким образом, предельное значение  $\bar{L}$ , при котором еще происходит захват, находим, приравнявая

$$\tilde{E}^2 = V_{\text{макс}}^2. \quad (3)$$

а) Для больших  $E$  (больших  $\bar{L}$ ) уравнение (2a) сводится к уравнению

$$V_{\text{макс}}^2 = \frac{\bar{L}^2 + 36 + (\bar{L}^2 - 12)(1 - 6/\bar{L}^2)}{54} = \frac{\bar{L}^2 + 9}{27},$$

и уравнение (3) принимает вид

$$\bar{L}_{\text{крит}}^2 = 27\tilde{E}^2 - 9. \quad (4)$$

Аналогично  $L_{\text{крит}}$  можно ввести критический прицельный параметр  $b_{\text{крит}}$ , который задается соотношением

$$b_{\text{крит}} = \frac{L_{\text{крит}}}{p} = \frac{L_{\text{крит}}}{(E^2 - m^2)^{1/2}},$$

где  $m$  — масса частицы. Захват происходит для прицельных параметров, удовлетворяющих неравенству  $b < b_{\text{крит}}$ . Тогда сечение захвата можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{захв}} &= \pi b_{\text{крит}}^2 = \frac{\pi L_{\text{крит}}^2}{(E^2 - m^2)} = \frac{\pi M^2 \bar{L}_{\text{крит}}^2}{(\tilde{E}^2 - 1)} \approx \\ &\approx \frac{\pi M^2}{\tilde{E}^2} \left(1 + \frac{1}{\tilde{E}^2}\right) (27\tilde{E}^2 - 9) \end{aligned}$$

или

$$\pi b_{\text{крит}}^2 \approx 27\pi M^2 \left(1 + \frac{2}{3\tilde{E}^2}\right). \quad (5)$$

б) Для  $\tilde{E} \approx 1$  (малые значения  $\beta$ ) имеем

$$\tilde{E}^2 \approx 1 + \beta^2,$$

и уравнение (3) можно приближенно записать в виде

$$18 + 54\beta^2 \approx \bar{L}^2 + (\bar{L}^2 - 12)^{3/2} / \bar{L}.$$

Решая это уравнение относительно  $\bar{L}^2$  с точностью до первого порядка по  $\beta^2$ , находим

$$\bar{L}_{\text{крит}}^2 = 16(1 + 2\beta^2) + \mathcal{O}(\beta^4)$$

и

$$\sigma_{\text{захв}} = \pi b_{\text{крит}}^2 = \frac{\pi M^2 \bar{L}_{\text{крит}}^2}{(\bar{E}^2 - 1)} \approx \frac{16\pi M^2}{\beta^2}. \quad (6)$$

**Решение 15.12.** Будем считать, что орбита Джона расположена в плоскости  $\vartheta = \pi/2$ . Поскольку орбита круговая, то  $u^r = 0$ , и из  $r$ -компоненты уравнения геодезической  $Du^r/d\tau = 0$  получаем

$$\Gamma_{tt}^r (u^t)^2 + \Gamma_{\varphi\varphi}^r (u^\varphi)^2 = 0,$$

и, следовательно, для орбиты Джона

$$\omega^2 \equiv \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \left(\frac{u^\varphi}{u^t}\right)^2 = -\frac{\Gamma_{tt}^r}{\Gamma_{\varphi\varphi}^r} = \frac{M}{r^3} = \frac{1}{64M^2}.$$

Поскольку  $d\varphi/dt = 1/8M$ , а между встречами Джон проходит угловое расстояние в  $20\pi$  радиан, это соответствует промежутку координатного времени, равному

$$\Delta t = 160\pi M.$$

Из соотношения

$$g_{tt} (u^t)^2 + g_{\varphi\varphi} (u^\varphi)^2 = -1$$

для орбиты Джона получаем

$$u^t \equiv \frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{3M}{r}\right)^{-1/2} = 2.$$

Следовательно, измеренный Джоном промежуток собственного времени между встречами равен

$$\Delta\tau_{\text{Джон}} = \frac{1}{2} \Delta t = 80\pi M \approx 251,5M.$$

Для описания траектории Питера мы используем уравнения радиального падения (задача 15.4). Время, в течение которого Питер падает от  $R$  до  $r = 4M$ , должно равняться

$$\frac{1}{2} \Delta t = 80\pi M.$$

Нам необходимо найти значения  $R$  и  $\eta$ , соответствующие интервалу времени  $t$ , равному  $80\pi M$ , и тогда мы сможем определить соответствующий интервал собственного времени для Питера из

уравнения (6) в решении задачи 15.4:

$$\Delta\tau_{\text{Питер}} = 2 \left( \frac{R^3}{8M} \right)^{1/2} (\eta + \sin \eta). \quad (1)$$

Уравнения для  $R$  и  $\eta$  — это уравнения (7) и (5) из решения задачи 15.4:

$$40\pi = \ln \left[ \frac{(X-1)^{1/2} + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \eta}{(X-1)^{1/2} - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \eta} \right] + (X-1)^{1/2} \left[ \eta + \frac{1}{2} X (\eta + \sin \eta) \right], \quad (2)$$

$$4 = X (1 + \cos \eta), \quad (3)$$

где  $X \equiv R/2M$ .

Обратимся теперь к физической интуиции: для Питера путешествие в направлении от звезды занимает довольно значительное время, за которое Джон успевает совершить несколько обращений по орбите. Поэтому и расстояние  $X$  должно быть весьма велико, и, следовательно,  $\eta \approx \pi$ . Поскольку логарифмическая функция меняется медленно, мы пренебрежем логарифмическим членом и напишем приближенно:

$$40\pi \approx X^{1/2} \left( \pi + \frac{1}{2} X\pi \right).$$

Отсюда получаем  $X^{3/2} \approx 80$ , т. е.  $X \approx 18,5$ . Тогда из уравнения (3) находим  $1 + \cos \eta \approx 0,216$  и соответственно  $\eta = 2,47$ . Более точно,

$$\eta = 2,46029 \quad \text{и} \quad X = \frac{R}{2M} = 17,91737,$$

откуда

$$\Delta\tau_{\text{Питер}} = 468,72M.$$

Таким образом, по часам Джона пройдет гораздо меньший (примерно вдвое) интервал собственного времени, чем по часам Питера. Это и понятно: ведь Джон все время находится на ультрарелятивистской орбите, оставаясь в то же время глубоко в гравитационной яме, и оба эти фактора «замедляют» ход его часов, тогда как Питер проводит большую часть этого времени, путешествуя со сравнительно небольшими скоростями не очень глубоко в гравитационной яме (вспомним, что  $R/2M \sim 18$ ).

**Решение 15.13.** Очевидно, нам необходимо такое преобразование, чтобы

$$r^2 = e^{2\lambda} r'^2, \quad (1a)$$

$$e^{2\lambda} dr^2 = e^{2\lambda} dr'^2. \quad (16)$$

Используя оба эти условия, мы получаем дифференциальное

уравнение для  $\bar{r} = \bar{r}(r)$ , выраженное через известную функцию  $\Lambda$ :

$$\frac{d\bar{r}}{\bar{r}} = e^{\Lambda} \frac{dr}{r}.$$

Оно легко интегрируется, и решение записывается в виде

$$\bar{r} = \text{const} \cdot \exp\left(\int \frac{e^{\Lambda}}{r} dr\right), \quad (2a)$$

$$e^{2\mu} = r^2/\bar{r}^2. \quad (2b)$$

Для шварцшильдовской метрики

$$e^{\Lambda} = (1 - 2M/r)^{-1/2},$$

и из уравнения (2a) получаем

$$\bar{r} = \text{const} \cdot \exp\left(\int \frac{dr}{(r^2 - 2Mr)^{1/2}}\right),$$

откуда

$$r = \bar{r} (1 + M/2\bar{r})^2, \quad (3)$$

если мы выберем постоянную интегрирования так, чтобы  $r \rightarrow \bar{r}$  при  $r \rightarrow \infty$ . Соотношение (3) можно также обратить:

$$\bar{r} = \frac{1}{2} [r - M \pm (r(r - 2M))^{1/2}]. \quad (4)$$

Из уравнения (2b) имеем

$$e^{2\mu} = (1 + M/2\bar{r})^4. \quad (5)$$

Отсюда следует, что площадь поверхности сферы с постоянными  $r$  и  $t$  дается формулой

$$A = (1 + M/2\bar{r})^4 \bar{r}^2 \int d\vartheta \sin \vartheta d\varphi = 4\pi \bar{r}^2 (1 + M/2\bar{r})^4. \quad (6)$$

Для построения диаграммы погружения заметим, что 1) согласно уравнению (4), отображение  $r$  в  $\bar{r}$  является двузначным и 2) координата  $\bar{r}$  описывает лишь ту область шварцшильдовской геометрии, где  $r \geq 2M$  [в уравнении (4)  $\bar{r}$  становится комплексным для  $r < 2M$ ].

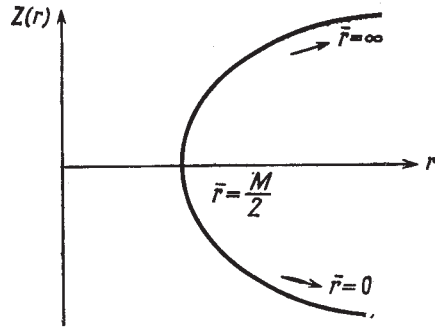
Для построения диаграммы погружения поверхности с постоянными  $t$  и  $r$  необходимо найти функцию  $z(r)$  такую, для которой

$$\begin{aligned} ds^2 &= dz^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2 = [1 + (dz/dr)^2] dr^2 + r^2 d\varphi^2 = \\ &= (1 - 2M/r)^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2. \end{aligned}$$

Решение имеет вид

$$z = [8M(r - 2M)]^{1/2}. \quad (7)$$

Парабола, являющаяся графиком этой функции, изображена на фиг. 29. Поверхность погружения представляет собой параболоид, полученный путем вращения параболы вокруг оси  $r$ .



Фиг. 29.

**Решение 15.14.**

а) Рассмотрим буст в направлении  $e_{\hat{x}}$ . Для параметра скорости  $\psi = \text{Arth } \beta$  преобразование определяется формулами

$$\Lambda^{\hat{t}}_{\hat{t}'} = \Lambda^{\hat{x}}_{\hat{x}'} = \text{ch } \psi, \quad \Lambda^{\hat{t}}_{\hat{x}'} = \Lambda^{\hat{x}}_{\hat{t}'} = \text{sh } \psi,$$

откуда

$$\begin{aligned} R_{\hat{t}'\hat{x}'\hat{t}'\hat{x}'} &= \Lambda^{\alpha}_{\hat{t}'} \Lambda^{\beta}_{\hat{x}'} \Lambda^{\gamma}_{\hat{t}'} \Lambda^{\delta}_{\hat{x}'} R_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}} = \\ &= \text{ch}^4 \psi R_{\hat{t}\hat{x}\hat{t}\hat{x}} + \text{ch}^2 \psi \text{sh}^2 \psi R_{\hat{t}\hat{x}\hat{x}\hat{t}} + \\ &+ \text{sh}^2 \psi \text{ch}^2 \psi R_{\hat{x}\hat{t}\hat{t}\hat{x}} + \text{sh}^4 \psi R_{\hat{x}\hat{t}\hat{x}\hat{t}} = \\ &= (\text{ch}^4 \psi - 2 \text{sh}^2 \psi \text{ch}^2 \psi + \text{sh}^4 \psi) R_{\hat{t}\hat{x}\hat{t}\hat{x}} = \\ &= (\text{ch}^2 \psi - \text{sh}^2 \psi)^2 R_{\hat{t}\hat{x}\hat{t}\hat{x}} = R_{\hat{t}\hat{x}\hat{t}\hat{x}}. \end{aligned}$$

б) В геометрии Шварцшильда неисчезающие физические компоненты тензора Римана суть

$$\begin{aligned} R_{\hat{t}\hat{r}\hat{t}\hat{r}} &= R_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}} = -2M/r^3, \\ R_{\hat{t}\hat{\theta}\hat{t}\hat{\theta}} &= R_{\hat{t}\hat{\phi}\hat{t}\hat{\phi}} = -R_{\hat{r}\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}} = -R_{\hat{r}\hat{\phi}\hat{r}\hat{\phi}} = M/r^3 \end{aligned}$$

плюс компоненты, сопряженные перечисленным в силу симметрии. Чтобы показать, что все физические компоненты являются инвариантными по отношению к бусту в радиальном направлении, мы можем непосредственно вычислить в явном виде 20 независимых компонент, подвергшихся бусту. Другой способ состоит в том, чтобы ввести в шварцшильдвской геометрии векторы

$$l \equiv e_{\hat{t}} + e_{\hat{r}}, \quad n \equiv e_{\hat{t}} - e_{\hat{r}}, \quad m \equiv e_{\hat{\theta}} + ie_{\hat{\phi}}.$$

Легко видеть, что тензор Римана можно представить как сумму

произведений этих векторов:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2} \frac{M}{r^3} \{ -(\mathbf{n} \wedge \mathbf{l})(\mathbf{n} \wedge \mathbf{l}) + (\mathbf{m} \wedge \mathbf{m}^*)(\mathbf{m} \wedge \mathbf{m}^*) + \\ + \operatorname{Re} [(\mathbf{n} \wedge \mathbf{m})(\mathbf{l} \wedge \mathbf{m}^*) + (\mathbf{l} \wedge \mathbf{m}^*)(\mathbf{n} \wedge \mathbf{m})] \}.$$

Очевидно, что компоненты вектора  $\mathbf{m}$  инвариантны по отношению к бусту в направлении  $r$  с параметром скорости  $\psi$ . Из соотношений

$$\mathbf{e}_t = \operatorname{ch} \psi \mathbf{e}_{\hat{t}} - \operatorname{sh} \psi \mathbf{e}_{\hat{r}}, \quad \text{и} \quad \mathbf{e}_r = \operatorname{ch} \psi \mathbf{e}_{\hat{r}} - \operatorname{sh} \psi \mathbf{e}_{\hat{t}},$$

следует:

$$\mathbf{l} = \mathbf{e}_t + \mathbf{e}_r = e^{-\psi} (\mathbf{e}_{\hat{t}} + \mathbf{e}_{\hat{r}}),$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_t - \mathbf{e}_r = e^{\psi} (\mathbf{e}_{\hat{t}} + \mathbf{e}_{\hat{r}}),$$

откуда

$$l_{\hat{\mu}} n_{\hat{\nu}} = l_{\hat{\mu}} n_{\hat{\nu}}.$$

Тогда из вида тензора  $\mathbf{R}$  ясно, что все компоненты инвариантны.

Чтобы убедиться, что такой вывод несправедлив по отношению к бустам в других направлениях, заметим, что для буста в  $\phi$ -направлении с параметром скорости  $\psi$  будем иметь

$$R_{\hat{r}\hat{t}\hat{r}\hat{t}} = \Lambda_{\hat{r}}^{\alpha} \Lambda_{\hat{t}}^{\beta} R_{\alpha\hat{r}\beta} = \\ = \operatorname{sh} \psi \operatorname{ch} \psi (R_{\hat{r}\hat{t}\hat{t}} + R_{\hat{r}\hat{\phi}\hat{\phi}}) = \\ = - (M/r^3) \operatorname{sh} \psi \operatorname{ch} \psi \neq R_{\hat{r}\hat{t}\hat{r}\hat{t}}.$$

**Решение 15.15.** В координатах Крускала шварцшильдовская метрика записывается в виде

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} (-dv^2 + du^2) + r^2 d\Omega^2, \quad (1a)$$

где

$$\left( \frac{r}{2M} - 1 \right) e^{r/2M} = u^2 - v^2. \quad (1b)$$

Полагая в выражении (1a)  $v = \text{const}$  и  $\phi = \pi/2$  и записывая затем линейный элемент в виде некоторой евклидовой поверхности вращения, будем иметь

$$\frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} du^2 + r^2 d\phi^2 = [1 + (dz/dr)^2] dr^2 + r^2 d\phi^2, \quad (2)$$

или

$$1 + \left( \frac{dz}{dr} \right)^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} \left( \frac{du}{dr} \right)^2.$$

Вычисляя  $du/dr$  из уравнения (1b), получаем

$$1 + \left( \frac{dz}{dr} \right)^2 = \frac{r}{2M} \frac{e^{r/2M}}{(r/2M - 1) e^{r/2M} + v^2}. \quad (3)$$



Чтобы погружение было возможным,  $z$  должна быть действительной функцией, т. е. должно выполняться неравенство

$$\frac{r/2Me^{r/2M}}{(r/2M-1)e^{r/2M}+v^2} \geq 1. \quad (4)$$

Отсюда следует условие

$$r/2M \geq \ln v^2.$$

Таким образом, для  $|v| > 1$  должно существовать минимальное значение  $r$ , выделяющие область, внутри которой погружение не удастся.

С геометрической точки зрения необходимым условием погружения является выполнение неравенства

$$\frac{d \text{ (периметр)}}{d \text{ (собственный радиус)}} \leq 2\pi. \quad (5)$$

Рассмотрим теперь общее условие, налагаемое на  $dv/du$ , допускающее евклидово погружение. Пусть мы имеем некоторое сечение, описываемое функцией  $v(u)$ . Тогда

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} \left[ 1 - \left( \frac{dv}{du} \right)^2 \right] du^2 + r^2 d\varphi^2 = \\ &= \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} \left[ 1 - \left( \frac{dv}{du} \right)^2 \right] \left[ \frac{(r/8M^2) e^{r/2M}}{\left( u - v \frac{dv}{du} \right)^2} \right]^2 dr^2 + r^2 d\varphi^2, \end{aligned} \quad (6)$$

и погружение допустимо, если

$$\frac{r}{2M} e^{r/2M} \left[ 1 - \left( \frac{dv}{du} \right)^2 \right] \geq \left( u - v \frac{dv}{du} \right)^2 \quad (7)$$

для любого  $r$ .

**Решение 15.16.** Чтобы избежать гипнотического воздействия привычных координатных обозначений, переобозначим  $r$  и следующим образом:  $r \rightarrow z$ ,  $t \rightarrow w$ . Тогда рассматриваемая метрика примет вид

$$ds^2 = -dw^2 + \frac{4}{9} \left[ \frac{(9/2)M}{z-w} \right]^{2/3} dz^2 + [(9/2)M(z-w)^2]^{2/3} d\Omega^2 \quad (1)$$

Введем теперь новую координату  $r$ , определив ее соотношением

$$r = \left[ \frac{9}{2} M (z-w)^2 \right]^{1/3}. \quad (2)$$

[Мы пришли к этой мысли, потому что выражение (1) явно сферически-симметрично, и, следовательно, коэффициент при  $d\Omega^2$  обладает геометрическим смыслом радиуса кривизны.] Введя  $r$

таким образом, получим

$$-\left(\frac{2r^3}{9M}\right)^{1/2} + z = w, \quad (3a)$$

$$dw = dz - \left(\frac{r}{2M}\right)^{1/2} dr. \quad (36)$$

Подставляя равенства (2) и (3) в выражение (1), будем иметь

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dz^2 + 2\left(\frac{r}{2M}\right)^{1/2} dz dr - \frac{r}{2M} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (4)$$

Теперь нам хотелось бы попытаться диагонализовать члены с  $dz^2$ ,  $dz dr$  и  $dr^2$ . Введем для этого координату  $t$  и функцию  $F(r)$  согласно определению

$$z = t + F(r) \quad (5)$$

и подставим в выражение (4):

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) (dt^2 + 2F' dt dr + F'^2 dr^2) + \\ + 2\left(\frac{r}{2M}\right)^{1/2} dr (dt + F' dr) - \frac{r}{2M} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (6)$$

Выберем теперь  $F$  таким образом, чтобы метрика была диагональна, т. е.

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) F' = \left(\frac{r}{2M}\right)^{1/2}. \quad (7)$$

При таком выборе  $F'$  линейный элемент (6) принимает вид

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{r}{2M}\right) dr^2 + \\ + 2\left(\frac{r}{2M}\right) \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - \frac{r}{2M} dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

или

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (8)$$

Перед нами метрика Шварцшильда в координатах кривизны, которая соответствует, разумеется, статистическому пространству-времени. Исходные координаты (1) называются «координатами Леметра». В них временная координата  $w$  измеряет собственное время наблюдателей, свободно падающих на центр; каждый такой наблюдатель движется вдоль линии  $z = \text{const}$ .

**Решение 15.17.** В метрике задачи 15.16 для наблюдателя, покоящегося в данной системе координат, справедливо соотношение  $z = \text{const}$  (см. решение 15.16). Согласно определению (5) из

решения 15.16, это означает, что

$$dt = -F' dr = -\left(\frac{r}{2M}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr, \quad (1)$$

где мы использовали также условие (7) из решения 15.16. Из уравнения (1) получаем

$$(dr/dt)^2 = (2M/r) \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2. \quad (2)$$

Сравнивая уравнение (2) с уравнением (2) из решения 15.3 (где для частицы, падающей из состояния покоя на бесконечности,  $u_0 = 1$ ), видим, что наше уравнение (2) соответствует радиально падающей частице, обладающей на бесконечности значением энергии, равным массе покоя.

**Решение 15.18.** Релятивистское уравнение Бернулли (см. задачу 14.7)

$$u_0 = \left(\frac{n}{\rho + p}\right) \left(\frac{n_\infty}{\rho_\infty + p_\infty}\right)^{-1} \quad (1)$$

можно записать через собственную радиальную скорость жидкости

$$v = (1 - 2M/r) dr/dt$$

с помощью соотношения между  $u_0$  и  $dr/dt$ :

$$g_{00} (u^0)^2 + g_{rr} (u^r)^2 = -1.$$

В результате получим

$$v^2 = 1 - \frac{\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{\rho + p}{n}\right)^2}{\left(\frac{\rho_\infty + p_\infty}{n_\infty}\right)^2}. \quad (2)$$

Если теперь воспользоваться законом сохранения массы покоя

$$(u^\alpha n |g|^{1/2}), \quad \alpha = 0,$$

то можно найти (предварительно вновь выразив  $u^r$  через  $v$ )

$$\frac{v (1 - 2M/r)^{1/2} n r^2}{(1 - v^2)^{1/2}} = \text{const} \equiv \frac{M}{4\pi}. \quad (3)$$

Обратите внимание, что в этом решении мы обозначаем через  $n$  плотность массы покоя, а не плотность числа частиц, как обычно:

$$n_{\text{здесь}} \equiv m_p n_{\text{обычн.}}$$

Теперь было бы желательно выразить  $n$  через скорость звука  $a$

с помощью уравнения  $p = Kn^\gamma$  (ср. решение 5.25):

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho} = \frac{\gamma Kn^{\gamma-1}}{1 + \gamma Kn^{\gamma-1}/(\gamma-1)}.$$

Отсюда следует:

$$\gamma Kn^{\gamma-1} = \frac{a^2}{1 - a^2/(\gamma-1)} = \frac{a^2(\rho+p)}{n} \quad (4)$$

и, далее,

$$n = \left[ \frac{a^2}{\gamma K (1 - a^2/(\gamma-1))} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}}. \quad (5)$$

Если мы хотим найти самосогласованное решение для некоторого постоянного  $M$  и некоторого  $v(r)$ , то соотношения (2), (3) и (5) можно рассматривать как систему уравнений, определяющую  $M$  как функцию  $r$  и  $v$ . Тогда мы сможем найти радиус, при котором течение становится сверхзвуковым, полагая  $v = a$  и  $dM = 0$ . Сначала мы должны выразить  $r$  через  $a$ . Используя уравнения (3) и (4) (при  $v = a$ ), получаем

$$r = \frac{2M}{1 - (1 - a^2/(\gamma-1))^2 (1 - a^2) \tau_\infty}, \quad (6)$$

где

$$\tau_\infty \equiv \left( \frac{\rho+p}{n} \right)_\infty.$$

Подставляя соотношения (6) и (5) в уравнение (3), будем иметь

$$\frac{M}{4\pi} = \frac{4M^2 a \left(1 - \frac{a^2}{\gamma-1}\right) \left[ \frac{a^2}{\gamma K (1 - a^2/(\gamma-1))} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}}}{\left[ 1 - (1 - a^2) (1 - a^2/(\gamma-1))^2 \tau_\infty \right]^2}. \quad (7)$$

Разлагая уравнение (4) в ряд, находим

$$\tau_\infty \approx 1 + \frac{a_\infty^2}{\gamma-1}$$

и затем продолжаем вычисления с точностью до низшего порядка по  $a$ . Из равенства  $d \ln M / da = 0$  получаем

$$a^2 = \frac{2a_\infty^2}{5-3\gamma}, \quad \text{если } \gamma \neq 5/3, \quad (8a)$$

и

$$a^2 = 2 \cdot 3^{-1/4} a_\infty, \quad \text{если } \gamma = 5/3. \quad (8b)$$

Используя уравнения (8) и уравнение (6), окончательно находим, что радиус, при котором течение становится сверхзвуковым, дается формулами

$$r_s = \left( \frac{5-3\gamma}{8} \right) \frac{2M}{a_\infty^2}, \quad \text{если } \gamma \neq 5/3, \quad (9a)$$

и

$$r_s = \frac{3^{1/2}M}{4a_\infty}, \quad \text{если } \gamma = 5/3. \quad (96)$$

**Решение 15.19.** Для диагональной метрики  $\square \Phi$  имеет вид

$$\square \Phi = \nabla \cdot (\nabla \Phi) = (-g)^{-1/2} [(-g)^{1/2} g^{\alpha\beta} \Phi_{,\beta}]_{,\alpha}; \quad (1)$$

$$\square \Phi = (-g)^{-1/2} \{ \{(-g)^{1/2} g^{00} \Phi_{,0}\}_{,0} + \{(-g)^{1/2} g^{rr} \Phi_{,r}\}_{,r} + \{(-g)^{1/2} g^{\theta\theta} \Phi_{,\theta}\}_{,\theta} + \{(-g)^{1/2} g^{\varphi\varphi} \Phi_{,\varphi}\}_{,\varphi} \}. \quad (2)$$

В шварцшильдовской метрике, записанной в координатах кривизны,

$$g^{00} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, \quad g^{rr} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right), \quad (3)$$

а  $g^{\theta\theta}$  и  $g^{\varphi\varphi}$  имеют тот же вид, что и в плоском пространстве. Легко можно обнаружить, что третий и четвертый члены в уравнении (2) имеют тот же вид, что и в плоском пространстве (вместе с «плоским» оператором момента количества движения  $L^2$ ), и, следовательно, уравнение (2) можно записать следующим образом:

$$\square \Phi = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \Phi_{,00} + \frac{1}{r^2} \left[ r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \Phi_{,r} \right]_{,r} + \frac{L^2 \Phi}{r^2}. \quad (4)$$

Тогда из уравнений поля  $\square \Phi = 0$  следует:

$$0 = \Phi_{,00} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[ r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \Phi_{,r} \right]_{,r} - \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \Phi. \quad (5)$$

Предположим, что  $\Phi$  можно представить в виде

$$\Phi = \frac{1}{r} \psi(r, t) Y_{\ell m}(\theta, \varphi). \quad (6)$$

Подставляя (6) в уравнение (5), получаем

$$\psi_{,00} - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[ \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \psi_{,r} \right]_{,r} + V_\ell(r) \psi = 0, \quad (7a)$$

где

$$V_\ell(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[ \frac{2M}{r^3} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right]. \quad (7b)$$

**Решение 15.20.** Уравнения поля Бранса — Дикке можно представить в виде

$$G^{\mu\nu} + F^{\mu\nu}(\Phi; \alpha, \Phi; \alpha\beta) = T^{\mu\nu}, \quad (1a)$$

$$\square \Phi = T^\mu{}_\mu, \quad (1b)$$

где каждый член, входящий в  $F^{\mu\nu}$ , пропорционален производным

от скалярного поля  $\Phi$ . В пустоте решение уравнения (16) есть

$$\Phi = \text{const.} \quad (2)$$

Подставляя решение (2) в уравнение (1a), находим

$$G^{\mu\nu} = 0,$$

т. е. уравнения Эйнштейна в пустом пространстве. Следовательно, шварцшильдовская метрика является решением уравнений поля Бранса — Дикке в пустоте. (Статическая сферически-симметричная вакуумная метрика наиболее общего вида в теории Бранса — Дикке содержит два произвольных параметра, соответствующих массе и скалярному заряду. Сферическая черная дыра обладает нулевым скалярным зарядом и описывается решением типа Шварцшильда.)

## ГЛАВА 16

**Решение 16.1.** Поскольку для наблюдателя, неподвижного в системе координат  $t, r, \vartheta, \varphi$ , временная ось направлена вдоль его 4-скорости, то соответствующий базисный вектор должен быть направлен вдоль  $\partial/\partial t$  и обладать при этом правильной нормировкой. В соответствии с этим выберем в качестве базисного вектора  $\mathbf{e}_{\hat{t}} = f\partial/\partial t$ , где величина  $f$  должна быть определена из условия нормировки:

$$-1 = \mathbf{e}_{\hat{t}} \cdot \mathbf{e}_{\hat{t}} = f^2 \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} = f^2 g_{00} = -f^2 e^{2\Phi}.$$

Следовательно,  $f = e^{-\Phi}$  и

$$\mathbf{e}_{\hat{t}} = e^{-\Phi} \frac{\partial}{\partial t}. \quad (1)$$

Все три направления  $\partial/\partial \vartheta, \partial/\partial \varphi, \partial/\partial r$  ортогональны  $\partial/\partial t$ . Выбирая базисные векторы вдоль них и нормируя на единицу точно так же, как и выше, получаем

$$\mathbf{e}_{\hat{r}} = e^{-\mu} \frac{\partial}{\partial r}, \quad \mathbf{e}_{\hat{\vartheta}} = e^{-\mu} r^{-1} \frac{\partial}{\partial \vartheta}, \quad \mathbf{e}_{\hat{\varphi}} = e^{-\mu} (r \sin \vartheta)^{-1} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (2)$$

Базисные векторы, определенные в (1) и (2), образуют ортонормированную собственную систему отсчета неподвижного наблюдателя. Дуальные им 1-формы  $\tilde{\omega}^{\hat{\alpha}}$  находятся из требования

$$\langle \tilde{\omega}^{\hat{\alpha}}, \mathbf{e}_{\hat{\beta}} \rangle = \delta^{\alpha}_{\beta} \quad (3)$$

и, как легко видеть, имеют следующий вид:

$$\tilde{\omega}^{\hat{t}} = e^{\Phi} \tilde{d}t, \quad \tilde{\omega}^{\hat{r}} = e^{\mu} \tilde{d}r, \quad \tilde{\omega}^{\hat{\vartheta}} = e^{\mu} r \tilde{d}\vartheta, \quad \tilde{\omega}^{\hat{\varphi}} = e^{\mu} r \sin \vartheta \tilde{d}\varphi. \quad (4)$$

**Решение 16.2.** Наблюдатель проводит измерения в своей локальной ортонормированной системе:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\hat{t}} &= e^{-\Phi} \mathbf{e}_t, & \mathbf{e}_{\hat{r}} &= e^{-\lambda} \mathbf{e}_r, & \mathbf{e}_{\hat{\vartheta}} &= r^{-1} \mathbf{e}_{\vartheta}, & \mathbf{e}_{\hat{\varphi}} &= (r \sin \vartheta)^{-1} \mathbf{e}_{\varphi}; \\ \tilde{\omega}^{\hat{t}} &= e^{\Phi} \tilde{d}t, & \tilde{\omega}^{\hat{r}} &= e^{\lambda} \tilde{d}r, & \tilde{\omega}^{\hat{\vartheta}} &= r \tilde{d}\vartheta, & \tilde{\omega}^{\hat{\varphi}} &= r \sin \vartheta \tilde{d}\varphi. \end{aligned}$$

Метрика здесь имеет тот же вид, что и во введении в этой главе, только вместо  $(1 - 2m/r)^{-1}$  у нас стоит  $e^{2\lambda}$ . Объем жидкого элемента, измеряемый нашим наблюдателем, равен

$$V = \tilde{\omega}^{\hat{t}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\vartheta}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\varphi}} = e^{\lambda} r^2 \sin \vartheta \tilde{d}r \wedge \tilde{d}\vartheta \wedge \tilde{d}\varphi = e^{\lambda} r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi.$$

Давление, действующее на прогивоположные точки вертикальных «стенок» жидкого элемента, одно и то же, но из-за наличия радиального градиента давления верхняя и нижняя «стенки» испытывают различное давление:

$$|p_{\text{верх}} - p_{\text{ниж}}| = |\rho_{,r} \tilde{\omega}^{\hat{r}}| = |\rho_{,r} e^{-\lambda} \tilde{\omega}^{\hat{r}}|.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |F_{\text{выталки}}| &= |(p_{\text{верх}} - p_{\text{ниж}}) \times \text{площадь поверхности}| = \\ &= |\rho_{,r} e^{-\lambda} \tilde{\omega}^{\hat{r}} \omega^{\hat{\theta}} \omega^{\hat{\phi}}| = |\rho_{,r} e^{-\lambda} V|. \end{aligned}$$

Так как выталкивающая сила направлена по радиусу, то

$$F_{\text{выталки}} = e^{-\lambda} \rho_{,r} V e_{\hat{r}} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \rho_{,r} V e_{\hat{r}}.$$

Подставив значение  $\rho_{,r}$  из уравнения Оппенгеймера — Волкова, находим

$$F_{\text{грав}} = -F_{\text{выталки}} = -\frac{(\rho + p)(m + 4\pi r^3 p) V e_{\hat{r}}}{r^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

В ньютоновской теории этот результат имел бы вид

$$\rho_{,r} V e_{\hat{r}} = -\frac{\rho m V}{r^2} e_{\hat{r}}.$$

**Решение 16.3.** Сферически-симметричная метрика может зависеть только от  $t$ ,  $dt$ ,  $r$ ,  $dr$  и  $d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$ :

$$ds^2 = -A(r, t) dt^2 + B(r, t) dr^2 + 2C(r, t) dr dt + D(r, t) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

Выберем в качестве новой радиальной координаты  $r' = D^{\frac{1}{2}}(r, t)$ . Опуская штрихи, будем иметь

$$ds^2 = -E(r, t) dt^2 + F(r, t) dr^2 + 2G(r, t) dr dt + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

Избавимся от  $G$ , вводя новую временную координату:

$$dt' = H(r, t) [E(r, t) dt - G(r, t) dr],$$

где  $H$  — интегрирующий множитель, выбранный таким образом, чтобы правая сторона была полным дифференциалом. Метрика тогда принимает стандартный вид (штрихи вновь опущены):

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r, t)} dt'^2 + e^{2\lambda(r, t)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$



Из задачи 9.20 вытекает, что тензор Эйнштейна обладает следующими нетривиальными компонентами:

$$G_{\hat{t}\hat{t}} = 2e^{-2\lambda}\lambda_{,r}/r + (1 - e^{-2\lambda})/r^2, \quad (1)$$

$$G_{\hat{t}\hat{r}} = 2e^{-(\Phi+\lambda)}\lambda_{,t}/r, \quad (2)$$

$$G_{\hat{r}\hat{r}} = (e^{-2\lambda} - 1)/r^2 + 2e^{-2\lambda}\Phi_{,r}/r, \quad (3)$$

$$G_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = G_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = e^{-2\lambda}(\Phi_{,rr} + \Phi_{,r}{}^2 - \Phi_{,r}\lambda_{,r} + \Phi_{,r}/r - \lambda_{,r}/r) - e^{-2\Phi}(\lambda_{,tt} + \lambda_{,t}{}^2 - \Phi_{,t}\lambda_{,t}). \quad (4)$$

Чтобы выполнялись уравнения поля в пустоте  $G_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = 0$ , как видно из соотношения (2), величина  $\lambda$  не должна зависеть от  $t$ . Тогда соотношение (1) принимает вид

$$\frac{2d\lambda}{1 - e^{2\lambda}} = \frac{dr}{r}.$$

Отсюда находим

$$e^{2\lambda} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}. \quad (5)$$

Постоянная интегрирования выбрана равной  $2M$  из соображений удобства. Теперь соотношения (3) и (4) представляют собой эквивалентные уравнения, определяющие  $\Phi$  (эти уравнения должны быть эквивалентны в силу тождества  $G^{\hat{\alpha}}_{\hat{\alpha};\hat{\beta}} \equiv 0$ ). Простейшим образом можно найти  $\Phi$ , если сложить друг с другом уравнения (1) и (3). Это даст нам

$$\Phi_{,r} = -\lambda_{,r},$$

откуда

$$e^{2\Phi} = f(t)e^{-2\lambda}.$$

Вводя новую временную координату посредством соотношения

$$dt' = f^{1/2}(t) dt,$$

мы избавляемся от  $f$ , и метрика окончательно приобретает вид

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt'^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2).$$

Это и есть (статическая) шварцшильдовская метрика.

*Примечание.* Используемая здесь координата  $r$  задается соотношением  $4\pi r^2 =$  площадь поверхности сферы, где соответствующие сферы определяются сферической симметрией задачи. Если бы функция  $r$  не была монотонной, мы не смогли бы использовать ее в качестве координаты. Тем не менее более подробное рассмотрение этого случая (см. [1], т. 3, стр. 42) показывает, что решения, отличные от шварцшильдовского, отсутствуют.

**Решение 16.4.** Из теоремы Биркгофа (см. задачу 16.3) мы знаем, что для сферически-симметричной системы метрика в пустоте представляет собой решение Шварцшильда. Следовательно, внутри самогравитирующей полый сферы пространство описывается метрикой Шварцшильда, но в данном случае точка  $r=0$  не является сингулярной. Это значит, что масса  $M$  (которая фактически является постоянной интегрирования в решении уравнений Эйнштейна) должна быть положена равной нулю, чтобы избежать расходящихся членов в метрике, содержащих  $M/r$ . Следовательно, внутри полый сферы метрика является плоской, и поэтому пробные частицы не испытывают воздействия гравитационных сил.

**Решение 16.5.** Запишем вакуумные уравнения поля для метрики  $g_{\mu\nu}$  и скалярного поля  $\Phi$  в теории Бранса — Дикке:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = \frac{\omega}{\Phi^2} \left( \Phi_{,\alpha} \Phi_{,\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \Phi_{,\gamma} \Phi_{,\gamma} \right) + \Phi^{-1} (\Phi_{,\alpha;\beta} - g_{\alpha\beta} \square \Phi), \quad (1)$$

$$\square \Phi = 0. \quad (2)$$

Если мы используем стандартный вид статической сферически-симметричной метрики

$$ds^2 = -e^{2U} dt^2 + e^{2\lambda} dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

то уравнение  $\square \Phi = 0$  запишется как

$$(e^{U-\lambda} r^2 \Phi_{,r})_{,r} = 0. \quad (3)$$

Общее решение этого уравнения есть

$$\Phi = a \int \frac{e^{\lambda-U}}{r^2} dr + b. \quad (4)$$

Вблизи  $r=0$  метрические функции  $e^{2U}$  и  $e^{2\lambda}$  стремятся к единице (вблизи  $r=0$  метрика близка к метрике Минковского). Следовательно, интеграл в уравнении (4) расходится вблизи  $r=0$ , и  $\Phi$  вблизи начала координат можно записать так:

$$\Phi \approx a/r + b. \quad (5)$$

Но если  $a$  не равно нулю, то правая часть уравнения (1) будет порядка  $a^2/r^2$ . (Этот эффект не обусловлен выбором координат; след правой части порядка  $a^2/r^2$ , поэтому из уравнения (1) вытекает, что скалярная кривизна расходится как  $a^2/r^2$ .) Следовательно, чтобы решение было регулярным в начале координат, необходимо, чтобы  $a$  равнялось нулю, т. е.  $\Phi$  должно быть постоянным. Для случая постоянного  $\Phi$  уравнение (1) сводится к статическим сферически-симметричным уравнениям поля общей теории

относительности в пустоте, а из теоремы Биркгофа известно, что единственным решением этих уравнений, удовлетворяющим условию «хорошего» поведения в  $r=0$ , является

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}.$$

**Решение 16.6.** Рассмотрим компоненты  $T^{\mu\nu}$  в любой точке в некотором ортонормированном репере  $[e_{\hat{t}}, e_{\hat{r}}, e_{\hat{\theta}}, e_{\hat{\phi}}]$ . Из условия сферической симметрии следует, что значения компонент инвариантны по отношению к поворотам:

$$\begin{aligned} e_{\hat{\theta}} &\rightarrow \cos\alpha e_{\hat{\theta}} + \sin\alpha e_{\hat{\phi}}, \\ e_{\hat{\phi}} &\rightarrow -\sin\alpha e_{\hat{\theta}} + \cos\alpha e_{\hat{\phi}}. \end{aligned}$$

Очевидно, что компоненты  $T_{\hat{t}\hat{t}}$ ,  $T_{\hat{t}\hat{r}}$  и  $T_{\hat{r}\hat{r}}$  остаются инвариантными при поворотах. Пара компонент  $(T_{\hat{t}\hat{\theta}}, T_{\hat{t}\hat{\phi}})$  преобразуется при поворотах как 2-мерный вектор и, следовательно, не является инвариантной. Поэтому мы приходим к выводу, что  $T_{\hat{t}\hat{\theta}} = T_{\hat{t}\hat{\phi}} = 0$  и аналогично  $T_{\hat{r}\hat{\theta}} = T_{\hat{r}\hat{\phi}} = 0$ . Единственной 2-мерной матрицей, инвариантной по отношению к поворотам, является матрица, кратная единичной, откуда следует

$$\begin{pmatrix} T_{\hat{\theta}\hat{\theta}} & T_{\hat{\theta}\hat{\phi}} \\ T_{\hat{\phi}\hat{\theta}} & T_{\hat{\phi}\hat{\phi}} \end{pmatrix} = T_{\hat{\theta}\hat{\theta}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, всего имеется четыре независимых компоненты:  $T_{\hat{t}\hat{t}}$ ,  $T_{\hat{t}\hat{r}}$ ,  $T_{\hat{r}\hat{r}}$  и  $T_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = T_{\hat{\phi}\hat{\phi}}$ .

**Решение 16.7.** Стандартный вид метрики для статической сферически-симметричной звезды есть

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + e^{2\Lambda} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (1)$$

Легче всего расписать уравнение  $T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$  в компонентах, если вспомнить, что оно эквивалентно первому началу термодинамики:

$$d\rho/d\tau = \frac{\rho + p}{n} \frac{dn}{d\tau} \quad (2)$$

(см. задачу 5.19) и уравнению Эйлера:

$$(\rho + p) u_{\alpha;\beta} u^{\beta} = -\rho_{;\alpha} - p_{;\beta} u^{\beta} u_{\alpha} \quad (3)$$

(см. задачу 14.3). Для статической звезды обе части уравнения (2) обращаются в нуль тождественно. Единственной ненулевой компонентой  $u$  является  $u^t$ , и из соотношения  $u \cdot u = -1$  следует, что  $u^t = e^{-\Phi}$ . Поскольку в нуль не обращается только произ-

водная  $p_{,r}$ , единственной нетривиальной компонентой уравнения (3) будет

$$\begin{aligned} -p_{,r} &= (\rho + p) u_{r;\beta} u^\beta = -(\rho + p) \Gamma^{\alpha}_{r\beta} u_\alpha u^\beta = \\ &= -(\rho + p) \Gamma^t_{rt} u_t u^t = (\rho + p) \Phi_{,r}. \end{aligned}$$

**Решение 16.8.** Пусть  $m(r)$  — решение ньютоновских уравнений внутреннего строения политропной звезды:

$$dm/dr = 4\pi r^2 \rho, \quad (1)$$

$$dp/dr = -\frac{Gm\rho}{r^2}, \quad (2)$$

$$p = K\rho^\gamma. \quad (3)$$

Если  $\gamma = 4/3$ , звезда находится в безразличном равновесии (обладает нулевым запасом устойчивости); это видно из того факта, что

$$\begin{aligned} \tilde{m}(r) &= m(\alpha r), \\ \tilde{\rho}(r) &= \alpha^3 \rho(\alpha r), \\ \tilde{p}(r) &= \alpha^4 p(\alpha r) \end{aligned}$$

также являются решением системы уравнений (1)–(3), причем им соответствуют те же значения полной массы  $m(\infty)$  и коэффициента  $K$ .

Релятивистское уравнение, соответствующее уравнению (1), выглядит точно так же; что же касается заданного уравнения состояния (3), то мы *предполагаем*, что в релятивистской теории его вид также не меняется. Уравнение (2) в релятивистском случае заменяется на

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2} \left(1 + \frac{p}{\rho}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 p}{m}\right) \left(1 - \frac{m}{r}\right)^{-1} \quad (4)$$

[см. [2], уравнение (11.1.13) или [1], т. 2, уравнение (23.22)]. Поскольку рассматриваемая нами звезда является почти ньютоновской, члены в скобках очень близки к единице. Следовательно, можно найти точное решение уравнения (4), которое будет почти совпадать с решением ньютоновского уравнения (2) [например, подставляя ньютоновское решение в уравнение (4), получая затем малые поправки к  $p$  и находя решение методом итераций]. Обозначим это решение через  $\hat{m}(r)$ ,  $\hat{\rho}(r)$ ,  $\hat{p}(r)$ . Сконструируем из таких функций «пробное решение»:

$$\begin{aligned} \tilde{m}(r) &= \hat{m}(\alpha r), \\ \tilde{\rho}(r) &= \alpha^3 \hat{\rho}(\alpha r), \\ \tilde{p}(r) &= \alpha^4 \hat{p}(\alpha r). \end{aligned}$$

Если мы подставим его в систему релятивистских уравнений, то равенство правой и левой сторон в уравнениях (1) и (3) не нарушится, но для уравнения (4) отношение правой части уравнения к левой с точностью до членов низшего порядка будет уже равняться следующей величине:

$$\frac{\text{правая часть}}{\text{левая часть}} = 1 + (\alpha - 1) \left[ \frac{\hat{p}}{\hat{\rho}} + 4\pi (\alpha r)^3 \frac{\hat{p}}{\hat{m}} + \frac{2\hat{m}}{\alpha r} \right]. \quad (5)$$

Для  $\alpha > 1$ , что соответствует сжатию звезды до меньшего значения радиуса, правая часть больше левой, а это означает, что градиент давления всюду в звезде недостаточен для поддержания равновесного состояния и звезда вынуждена сжиматься до еще меньшего радиуса. Но и этот радиус не будет равновесным, ибо звезда по-прежнему будет оставаться почти ньютоновской, так что предыдущие аргументы вновь окажутся применимыми. Следовательно, состояние с  $\gamma = 4/3$  неустойчиво и область устойчивости должна начинаться с некоторого значения  $\gamma > 4/3 + \epsilon$ .

**Решение 16.9.** Увеличение массы звезды, состоящей из вырожденного газа, приводит к увеличению плотности вещества до тех пор, пока энергия Ферми частиц газа (электронов в случае белого карлика и нейтронов в случае нейтронной звезды) не достигнет релятивистских значений. Если  $A$  — число барионов в звезде, а  $R$  — радиус звезды, то ферми-энергия составляет приблизительно (в релятивистской области)

$$\mathcal{E}_F \approx \frac{\hbar c}{R} A^{1/3}. \quad (1)$$

(В этом уравнении мы пренебрегли таким не очень существенным фактом, что как в нейтронной звезде, так и в белом карлике на один барион приходится примерно вдвое большее число фермионов, поддерживающих давление.) Гравитационная масса-энергия на фермион равна приблизительно

$$\mathcal{E}_G \approx - \frac{G A m_B^2}{R}, \quad (2)$$

где  $m_B$  — масса бариона.

Заметим, что как гравитационная энергия, так и энергия сжатия одинаково зависят от  $R$ . Следовательно, решающую роль играет знак суммарного коэффициента, стоящего перед  $R^{-1}$ . Если он *положителен*, то при добавлении массы радиус будет возрастать, а энергии Ферми начнут становиться нерелятивистскими, в результате чего энергия сжатия будет убывать быстрее  $R^{-1}$ , и в конце концов при некотором конечном значении  $R$  будет достигнуто устойчивое равновесие. Если же коэффициент *отрицателен*, то в звезде установится и будет продолжаться режим

коллапса. Таким образом, критическое число барионов, при котором звезда становится неустойчивой, находится путем приравнивая  $\mathcal{E}_G$  и  $\mathcal{E}_F$ ;

$$A_{\text{крит}} = \left( \frac{\hbar c}{G m_B^2} \right)^{3/2} \approx 10^{57}. \quad (3)$$

Уравнение (3) соответствует критической предельной массе

$$M_{\text{крит}} = m_B A_{\text{крит}} \approx 2M_{\odot} \quad (4)$$

и предельным значениям радиуса

$$R_{\text{крит}} \sim \hbar c A_{\text{крит}}^{1/3} \times \begin{cases} (m_p c^2)^{-1} & \text{для белого карлика,} \\ (m_B c^2)^{-1} & \text{для нейтронной звезды,} \end{cases} \approx \begin{cases} 5,0 \cdot 10^8 \text{ см} & \text{для белого карлика,} \\ 2,7 \cdot 10^5 \text{ см} & \text{для нейтронной звезды.} \end{cases}$$

**Решение 16.10.** Пусть в некоторой выбранной точке  $P$  наблюдатель строит сферу  $S$ , проходящую через  $P$  и определенную таким образом, чтобы во всех точках на  $S$  геометрия была одинаковой. Тогда из выражения для линейного элемента находим, что *измеряемая* площадь поверхности этой сферы будет равна

$$A(r) = 4\pi r^2. \quad (1)$$

Градиент скалярной функции  $A(r)$  есть 1-форма, т. е.

$$\nabla A(r) \equiv \tilde{d}A = 8\pi r \tilde{d}r. \quad (2)$$

Следовательно,

$$\tilde{d}A \cdot \tilde{d}A = 64\pi^2 r^2 \tilde{d}r \tilde{d}r = 64\pi^2 r^2 (1 - 2m/r) \quad (3)$$

и

$$m(r) = \frac{(A/\pi)^{1/2}}{4} \left( 1 - \frac{\tilde{d}A \cdot \tilde{d}A}{16\pi A} \right). \quad (4)$$

### Решение 16.11.

а) Шварцшильдовская метрика

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (1)$$

в преобразованных координатах принимает вид

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) du^2 - 2 du dr + r^2 d\Omega^2. \quad (2)$$

б) Мы хотим вычислить компоненты тензора Эйнштейна  $G_{\alpha\beta}$  для случая  $M = M(u)$ . Проще всего найти символы Кристоффеля из выражения для лагранжевой функции, использованной в за-

даче 7.25 для нахождения геодезических:

$$L = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{u}^2 - 2\dot{u}\dot{r} + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2. \quad (3)$$

Уравнение Эйлера — Лагранжа

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad (4)$$

дает нам уравнение геодезической

$$\ddot{u} - (M/r^2) \dot{u}^2 + r\dot{\vartheta}^2 + r \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 = 0, \quad (5)$$

откуда мы выписываем не равные нулю символы Кристоффеля:

$$\Gamma^u_{uu} = -\frac{M}{r^2}, \quad \Gamma^u_{\vartheta\vartheta} = r, \quad \Gamma^u_{\varphi\varphi} = r \sin^2 \vartheta.$$

Подобным же образом уравнение (4), в котором  $r$  заменено на  $u$ ,  $\vartheta$  и  $\varphi$ , дает нам оставшиеся символы Кристоффеля:

$$\begin{aligned} \Gamma^r_{uu} &= \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) - \frac{M'}{r}, & \Gamma^r_{\vartheta\vartheta} &= -r \left(1 - \frac{2M}{r}\right), \\ \Gamma^r_{\varphi\varphi} &= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) r \sin^2 \vartheta, & \Gamma^r_{ur} &= \frac{M}{r^2}, \quad \Gamma^{\vartheta}_{r\vartheta} = \frac{1}{r}, \\ \Gamma^{\vartheta}_{\varphi\varphi} &= -\sin \vartheta \cos \vartheta, & \Gamma^{\varphi}_{r\varphi} &= \frac{1}{r}, \quad \Gamma^{\varphi}_{\vartheta\varphi} = \text{ctg } \vartheta. \end{aligned}$$

Их значения совпадают с соответствующими значениями для метрики Шварцшильда, за исключением  $\Gamma^r_{uu}$ . Из формулы для тензора Риччи [см. [1], т. 1, уравнение (8.516)]

$$R_{\alpha\beta} = \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta, \gamma} - (\ln |g|^{1/2})_{, \alpha\beta} + (\ln |g|^{1/2})_{, \gamma} \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\gamma}_{\beta\delta} \Gamma^{\delta}_{\alpha\gamma}$$

видно, что все компоненты  $R_{\alpha\beta}$  имеют те же значения, что и в шварцшильдовской метрике (т. е. нулевые), за исключением

$$R_{uu} = -2M'/r^2.$$

Скалярная кривизна Риччи равна

$$R = g^{uu} R_{uu} = 0,$$

поэтому единственная ненулевая компонента тензора Эйнштейна есть

$$G_{uu} = -2M'/r^2,$$

откуда следует, что

$$T_{uu} = -M'/4\pi r^2$$

и что все остальные компоненты  $\mathbf{T}$  равны нулю. Поскольку вектор  $\mathbf{k} \equiv \nabla u$  [т. е.  $k_{\alpha} = (1, 0, 0, 0)$ ] является изотропным, тензор энергии-импульса

$$\mathbf{T} = -\frac{M'}{4\pi r^2} \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}$$

соответствует чистому полю излучения. Таким образом, физическая интерпретация этого решения (называемого метрикой Вайдья) состоит в следующем: перед нами внешняя метрика сферической звезды, масса которой убывает, поскольку энергия уносится излучением.

**Решение 16.12.** Уравнения внутреннего строения звезды имеют вид [см. [1], г. 2, уравнение (23.5) или [2], раздел 11.1]

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (1)$$

$$m = \int_0^r 4\pi r^2 \rho dr, \quad (2)$$

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(\rho + p)(m + 4\pi r^3 p)}{r(r - 2m)}, \quad (3)$$

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{m + 4\pi r^3 p}{r(r - 2m)}. \quad (4)$$

Поскольку величина  $\rho$  постоянна,  $\rho = \rho_0$ , уравнение (2) дает

$$m = 4\pi r^3 \rho_0 / 3 \quad (5)$$

и

$$M = 4\pi R^3 \rho_0 / 3, \quad (6)$$

где  $R$  — радиус, а  $M$  — полная масса звезды. Подставив уравнение (5) в уравнение (3), получаем

$$\frac{dp}{4\pi(\rho_0 + p)\left(\frac{1}{3}\rho_0 + p\right)} = -\frac{r dr}{1 - (8\pi/3)r^2\rho_0}.$$

Проинтегрируем и решим относительно  $p$ :

$$\frac{p}{\rho_0} = \frac{(1 - 2Mr^2/R^3)^{1/2} - (1 - 2M/R)^{1/2}}{3(1 - 2M/R)^{1/2} - (1 - 2Mr^2/R^3)^{1/2}}. \quad (7)$$

Постоянная интегрирования определяется из требования, чтобы  $p = 0$  при  $r = R$ . Величину  $\Phi$  проще всего найти из уравнения

$$\frac{d\Phi}{dp} = \frac{d\Phi/dr}{dp/dr} = -\frac{1}{\rho_0 + p}.$$

Интегрируя, получаем

$$e^\Phi = \text{const}/(\rho_0 + p) = \frac{3}{2}(1 - 2M/R)^{1/2} - \frac{1}{2}(1 - 2Mr^2/R^3)^{1/2}, \quad (8)$$

где постоянная интегрирования выбирается с помощью уравнения (7) таким образом, чтобы

$$e^\Phi|_{r=R} = (1 - 2M/R)^{1/2},$$



т. е. чтобы метрика гладко сшивалась с метрикой Шварцшильда вне звезды.

Таким образом, мы находим однопараметрическое семейство моделей звездной структуры, которое удобно параметризуется, если в качестве параметра выбрать давление в центре звезды:

$$\frac{p_c}{\rho_0} = \frac{1 - (1 - 2M/R)^{1/2}}{3(1 - 2M/R)^{1/2} - 1}. \quad (9)$$

Давление в центре становится бесконечным, когда

$$3\left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2} - 1 = 0,$$

т. е. предельное значение  $R/2M$  равно  $9/8$ .

Сильное энергетическое условие требует выполнения неравенства  $p_c < \rho_0$ , т. е. правая часть уравнения (9) должна быть меньше 1. Отсюда получаем ограничение  $R/2M > 4/3$ .

**Решение 16.13.** Для релятивистского полностью вырожденного ферми-газа уравнение состояния имеет вид  $p = (1/3)\rho$ , поэтому уравнения внутреннего строения (см. задачу 16.12) записываются следующим образом:

$$dp/dr = -\frac{4\rho(m + 4\pi r^3 \rho/3)}{r(r - 2m)}, \quad (1)$$

$$dm/dr = 4\pi r^2 \rho. \quad (2)$$

Подставляя предполагаемое решение  $m(r) = 3r/4$  в уравнение (2), получаем

$$\rho(r) = (3/14)(4\pi r^2)^{-1};$$

подставляя затем эти значения  $\rho$  и  $m$  в уравнение (1), убеждаемся, что они действительно являются решением системы. Из уравнения состояния находим

$$p(r) = (1/14)/(4\pi r^2)^{-1}.$$

Чтобы определить  $n(r)$ , воспользуемся формулами для релятивистского ферми-газа (см. задачу 5.24):

$$n = \int_0^{p_F} \left(\frac{2}{h^3}\right) 4\pi p^3 dp = \frac{8\pi}{3h^3} p_F^3, \quad (3)$$

$$\rho = \int_0^{p_F} p \left(\frac{2}{h^3}\right) 4\pi p^2 dp = \frac{8\pi}{4h^3} p_F^4. \quad (4)$$

Исключая  $p_F$  (импульс Ферми) из уравнений (3) и (4), получаем

$$n(r) = \frac{8\pi}{3h^3} \left(\frac{4h^3 \rho}{8\pi}\right)^{3/4}.$$

Подставляя теперь  $\rho(r)$ , окончательно находим

$$n(r) = \frac{K}{r^{3/2}}, \quad K = \frac{8\pi}{3h^3} \left( \frac{4h^3}{8\pi} \cdot \frac{3}{14} \cdot \frac{1}{4\pi} \right)^{1/4}. \quad (5)$$

Полное число частиц внутри сферы радиуса  $r$  дается интегралом

$$\begin{aligned} N(r) &= \int_0^r n(r) d(\text{собственный объем}) = \\ &= \int_0^r n(r) e^{\Lambda} 4\pi r^2 dr = \frac{14\pi}{3} K r^{3/2}; \end{aligned} \quad (6)$$

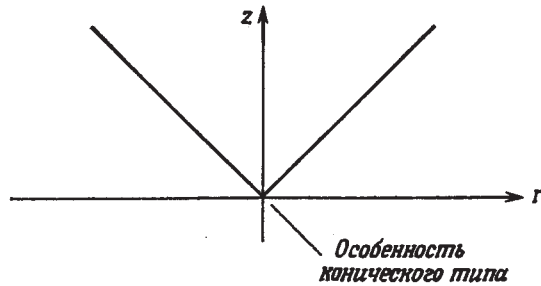
он остается конечным для всех  $r$ . Обратите внимание, что при вычислении интеграла (6) мы использовали соотношение

$$e^{2\Lambda} \equiv g_{rr} = \left( 1 - \frac{2m(r)}{r} \right)^{-1} = \frac{7}{4}.$$

3-геометрия гиперповерхности  $t = \text{const}$  имеет метрику

$${}^{(3)}ds^2 = g_{rr} dr^2 + r^2 d\Omega^2 = (7/4) dr^2 + r^2 d\Omega^2.$$

Очевидно, что в начале координат эта метрика обладает особенностью конического типа (фиг. 30), так как радиусу 2-сферы, равному  $r$ , соответствует радиус  $(7/4)^{1/2}r$ , превышающий  $r$ .



Фиг. 30.

Уравнение погружения для радиального сечения имеет вид

$${}^{(3)}ds^2 = (7/4) dr^2 = dr^2 + dz^2,$$

откуда следует

$$z = \pm (3/4)^{1/2} r.$$

**Решение 16.14.** В координатах кривизны метрика не может быть непрерывна при пересечении оболочки, так как

$$g_{rr} = (1 - 2m(r)/r)^{-1},$$

а  $m(r)$  изменяется в точке пересечения оболочки. Поэтому мы будем использовать изотропные координаты, в которых метрика, несмотря ни на что, непрерывна и осуществляется гладкое сшивание метрики пустого пространства внутри оболочки с метрикой, характеризующейся наличием массы  $M$  вне ее. Эта метрика имеет вид

$$ds^2 = -e^\gamma dt^2 + e^\alpha (dr^2 + r^2 d\Omega^2), \quad (1)$$

$$e^\gamma = \begin{cases} \left(1 - \frac{M}{2r}\right)^2 \left(1 + \frac{M}{2r}\right)^{-2}, & r > R, \\ \left(1 - \frac{M}{2R}\right)^2 \left(1 + \frac{M}{2R}\right)^{-2}, & r < R, \end{cases} \quad (2a)$$

$$e^\alpha = \begin{cases} \left(1 + \frac{M}{2r}\right)^4, & r > R, \\ \left(1 + \frac{M}{2R}\right)^4, & r < R. \end{cases} \quad (2б)$$

При сшивании метрики в выражениях (1) и (2) мы воспользовались тем фактом, что по теореме Биркгофа (см. задачу 16.3) геометрия является шварцшильдовской вне оболочки и плоской внутри нее. Кроме того, мы полагаем, что поверхность оболочки расположена на расстоянии, соответствующем значению изотропной радиальной координаты  $r = R$ .

Определим далее компоненты интегральных напряжений  $\Lambda^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$  следующим инвариантным образом:

$$\Lambda^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon} T^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} d\hat{r} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon} T^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} e^{\frac{1}{2}\alpha} dr. \quad (3)$$

Значения компонент  $\Lambda$  можно найти, используя уравнения поля Эйнштейна и замечая при этом, что, согласно уравнениям (2) и (3), вклад в них могут давать только те члены  $S^{\mu\nu}$ , которые содержат вторые производные от метрики.

Компоненты  $G^{\mu\nu}$  для метрики (1) имеют вид (см. задачу 9.20)

$$G^0_0 \sim \alpha'' e^{-\alpha} \sim -\frac{d}{dr^2}(e^{-\alpha}), \quad (4a)$$

$$G^r_r \sim 0, \quad (4б)$$

$$G^{\phi}_\phi = G^\varphi_\varphi \sim \frac{1}{2} e^{-\alpha} (\alpha'' + \gamma'') \sim -\frac{1}{2} \left[ \frac{d^2}{dr^2}(e^{-\alpha}) - \frac{d}{dr}(e^{-\alpha}\gamma') \right],$$

где  $\sim$  означает, что мы отбрасываем все члены, не включающие вторые производные. Используя формулы (3) и (4), а также эйнштейновские уравнения поля, получаем

$$\Lambda^{\hat{0}\hat{0}} = \Lambda^0_0 = -(8\pi)^{-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon} e^{\alpha/2} \frac{d^2}{dr^2}(e^{-\alpha}) dr \sim -(8\pi)^{-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{\frac{\alpha}{2}} \times \left. \frac{d}{dr}(e^{-\alpha}) \right|_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}$$

и, далее,

$$\Lambda^{\hat{\theta}\hat{\theta}} = \frac{-M}{4\pi R^2 (1 + M/2R)^3}, \quad (4в)$$

$$\Lambda^{\hat{r}\hat{r}} = \Lambda^r_r = 0, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \Lambda^{\hat{\theta}\hat{\theta}} = \Lambda^{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} &= -(8\pi)^{-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon} \frac{1}{2} e^{\alpha/2} \left[ \frac{d^2}{dr^2} (e^{-\alpha}) - \frac{d}{dr} (e^{-\alpha} \gamma') \right] dr = \\ &= -(8\pi)^{-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} e^{\alpha/2} \left[ \frac{d}{dr} (e^{-\alpha}) - e^{-\alpha} \gamma' \right] \Big|_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}, \end{aligned}$$

или

$$\Lambda^{\hat{\theta}\hat{\theta}} = \frac{M}{8\pi R^2} \left( \frac{M/2R}{1 - M/2R} \right) \left( 1 + \frac{M}{2R} \right)^{-3}. \quad (6)$$

Чтобы дать правильную интерпретацию уравнений (4)–(6), мы должны помнить, что  $R$  – радиус оболочки в изотропных координатах. В координатах кривизны радиус  $\mathcal{R}$  есть

$$\mathcal{R} = R (1 + M/2R)^2, \quad (7)$$

и, таким образом, собственная поверхностная плотность массы равна

$$\frac{M}{4\pi \mathcal{R}^2} = \frac{M}{4\pi R^2 (1 + M/2R)^4}. \quad (8)$$

В ньютоновском пределе уравнения (4)–(6) дают

$$\Lambda^{\hat{\theta}\hat{\theta}} \rightarrow -\frac{M}{4\pi R^2},$$

$$\Lambda^{\hat{r}\hat{r}} = 0,$$

$$\Lambda^{\hat{\theta}\hat{\theta}} = \Lambda^{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} \rightarrow \frac{M^2}{16\pi R^3}.$$

**Решение 16.15.** Условие энергодоминантности требует, чтобы выполнялось неравенство

$$|T^{\hat{\theta}\hat{\theta}}| > |T^{\hat{r}\hat{r}}|. \quad (1)$$

Используя результаты решения 16.14 и интегрируя по тонкой оболочке, мы приходим к неравенству

$$\left( 1 + \frac{M}{2R} \right)^{-3} > \frac{1}{2} \frac{M/2R}{1 - M/2R} \left( 1 + \frac{M}{2R} \right)^{-3}, \quad (2)$$

где  $R$  – изотропная радиальная координата. Полагая  $M/2R = x$ , получаем  $2 - 2x > x$  или  $x < 2/3$ , что дает

$$R > 3/4 M.$$

Соответственно для шварцшильдовской радиальной координаты  $\mathcal{R}$  имеем

$$\mathcal{R} = R \left( 1 + \frac{M}{2R} \right)^2 > \frac{25}{12} M, \quad (3)$$

что составляет около 1,04 шварцшильдовского радиуса.

**Решение 16.16.** В изотропных координатах (см. задачу 16.14) красное смещение на радиальной бесконечности равно

$$\begin{aligned} z &= \frac{\lambda_{\infty}}{\lambda_{\text{поверх}}} - 1 = \frac{(-g_{00})_{\infty}^{1/2}}{(-g_{00})_{\text{поверх}}^{1/2}} - 1 = (e^{-\nu/2})_{\text{поверх}} - 1 = \\ &= \frac{1 + M/2R}{1 - M/2R} - 1 = \frac{M/R}{1 - M/2R}. \end{aligned}$$

Интегральная плотность массы-энергии и поперечные напряжения равны соответственно

$$\begin{aligned} -\Lambda^{\hat{\theta}\hat{\theta}} &= \frac{M}{4\pi R^2} \left( 1 + \frac{M}{2R} \right)^{-3}, \\ \Lambda^{\hat{\phi}\hat{\phi}} = \Lambda^{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} &= \frac{M}{8\pi R^2} \left( \frac{M/2R}{1 - M/2R} \right) \left( 1 + \frac{M}{2R} \right)^{-3}. \end{aligned}$$

Следовательно, отношение интегральных напряжений к плотности массы-энергии равно

$$\frac{\Lambda^{\hat{\phi}\hat{\phi}}}{-\Lambda^{\hat{\theta}\hat{\theta}}} = \frac{M/4R}{1 - M/2R} = \frac{1}{4} z,$$

так что красное смещение на бесконечности выражается через эти величины следующим образом:

$$z = -4\Lambda^{\hat{\phi}\hat{\phi}}/\Lambda^{\hat{\theta}\hat{\theta}}.$$

Если выполняется условие энергодоминантности, то

$$|\Lambda^{\hat{\phi}\hat{\phi}}| \leq |\Lambda^{\hat{\theta}\hat{\theta}}| \quad \text{и} \quad z \leq 4.$$

**Решение 16.17.** Неисчезающие компоненты 4-скорости жидкости суть  $u^t$  и  $u^{\varphi} = \Omega u^t$ , т. е.

$$\mathbf{u} = u^t \left( \frac{\partial}{\partial t} + \Omega \frac{\partial}{\partial \varphi} \right).$$

Пусть

$$\xi = \frac{\partial}{\partial t} + \Omega \frac{\partial}{\partial \varphi} = \xi_{(t)} + \Omega \xi_{(\varphi)}.$$

Поскольку  $\Omega$  — постоянная, вектор  $\xi$  является вектором Киллинга. Согласно задаче 10.14, имеем

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u} = \nabla \ln |\xi \cdot \xi|^{1/2},$$

где

$$|\xi \cdot \xi|^{1/2} = 1/u',$$

так как  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -1$ . Таким образом, уравнение Эйлера (см. задачу 14.3) для жидкости принимает вид

$$(\rho + p) \nabla \ln (u')^{-1} = -\nabla p - (\nabla_{(u'\xi)} p) \mathbf{u}.$$

Поскольку  $p$  не зависит от  $t$  и  $\varphi$ , ясно, что  $\nabla_{\xi} p = 0$ . Отсюда имеем

$$(\rho + p) \nabla \ln u' = \nabla p.$$

**Решение 16.18.** Учтем прежде всего, что  $d\rho = (\rho + p) d \ln u'$  (звезда находится в состоянии гидростатического равновесия; см. задачу 16.17). Возьмем затем от обеих частей этого уравнения внешнюю производную и, воспользовавшись соотношением  $dd\rho = 0$ , получим

$$0 = d(\rho + p) \wedge d \ln u' = d(\rho + p) \wedge (\rho + p)^{-1} d\rho.$$

Отсюда вытекает

$$d\rho \wedge d\rho = 0,$$

и, следовательно, поверхность  $\rho = \text{const}$  совпадает с поверхностью  $p = \text{const}$ .

**Решение 16.19.** Поверхность звезды представляет собой поверхность постоянного давления  $p$  (так как  $p = 0$ ). Из задачи 16.18 следует, что она является также поверхностью постоянных значений  $\rho$  и в силу параллельности

$$d\rho \sim du'$$

поверхностью постоянных значений  $u'$ . Но в обозначениях задачи 16.17

$$(u')^{-1} = |\xi \cdot \xi|^{1/2} = |g_{tt} + 2g_{t\varphi}\Omega + g_{\varphi\varphi}\Omega^2|^{1/2},$$

так что на поверхности звезды

$$g_{tt} + 2g_{t\varphi}\Omega + g_{\varphi\varphi}\Omega^2 = \text{const}.$$

**Решение 16.20.** Пусть  $p$  — 4-импульс фотона, а  $\mathbf{u}_{\text{изл}}$  и  $\mathbf{u}_{\infty}$  — соответственно 4-скорости некоторой излучающей точки на поверхности звезды и наблюдателя на бесконечности. Тогда отношение излученной частоты к наблюдаемой равно

$$\frac{\nu_{\text{изл}}}{\nu_{\infty}} = \frac{p \cdot \mathbf{u}_{\text{изл}}}{p \cdot \mathbf{u}_{\infty}}.$$

Но для  $\mathbf{u}_{\text{изл}}$  не равны нулю только  $t$ - и  $\varphi$ -компоненты, так что

$$p \cdot \mathbf{u}_{\text{изл}} = p_t u' + p_{\varphi} u^{\varphi} = p_t u' (1 + \Omega t),$$

где  $\Omega \equiv u^\Phi/u^t$  — угловая скорость вращения звезды, а  $\ell \equiv r_\Phi/r_t$  — прицельный параметр фотона по отношению к оси вращения. Заметим, что  $r_\Phi$  и  $r_t$  сохраняются вдоль траектории фотона. Кроме того,  $r_t = \mathbf{r} \cdot \mathbf{u}_\infty$ , поскольку  $u^t = 1$ , и, следовательно,

$$z = u^t(1 + \Omega\ell) - 1 = \frac{1 + \Omega\ell}{|g_{tt} + 2\Omega g_{t\Phi} + \Omega^2 g_{\Phi\Phi}|_{\text{изл}}^{1/2}} - 1.$$

Так как  $g_{tt} + 2\Omega g_{t\Phi} + \Omega^2 g_{\Phi\Phi}$  на поверхности жестко вращающейся звезды есть постоянная (см. задачу 16.19), вариация значений  $z$  вдоль поверхности звезды дается формулой

$$\Delta z = \frac{\Omega \Delta \ell}{|g_{tt} + 2\Omega g_{t\Phi} + \Omega^2 g_{\Phi\Phi}|_{\text{поверх}}^{1/2}}.$$

Однако все фотоны, достигающие наблюдателя, расположенного в направлении оси вращения звезды, должны обладать компонентой импульса  $p_\Phi = 0$ , а это значит, что  $\ell = 0$  и, следовательно,  $\Delta \ell = 0$ . Таким образом, для такого наблюдателя уширение  $\Delta z = 0$ .

**Решение 16.21.** Конфигурация идеальной жидкости называется конвективно-устойчивой, если ее масса (т. е. масса покоя плюс энергия) не изменяется при перераспределении барионов. Мы вычислим сначала изменение массы  $\delta M$  такой конфигурации, обусловленное притяжением из бесконечности  $\delta A$  барионов.

Пусть некий удаленный астрофизик бросает в нашу конфигурацию кусок вещества, обладающий полной массой-энергией  $\mu_B \delta A + W_0$ , где  $\mu_B$  — среднее значение массы покоя барионов и  $W_0$  — дополнительная энергия, которая должна быть затрачена, чтобы барионы попали внутрь жидкости. Неподвижный наблюдатель с радиальной координатой  $r$  ловит эти барионы и дополнительную энергию и измеряет их полную массу-энергию, которая оказывается равной

$$W = u^0 p_0 = e^{-\Phi} (\mu_B \delta A + W_0), \quad (1)$$

где  $e^{-\Phi}$  — фактор красного смещения, обусловленный метрикой

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + (1 - 2m/r)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2)$$

Используя энергию  $W$ , локальный наблюдатель должен нагреть и сжать барионы до состояния, соответствующего локальным термодинамическим условиям, а затем высвободить для них пространство внутри звезды (другими словами, попросту «втиснуть» их туда). Имеем

$$W_{\delta A(\text{лок. усл})} = (p/n) \delta A, \quad (3a)$$

$$W_{\text{высвобод}} = p \delta V = (p/n) \delta A, \quad (3б)$$

где  $n$  — плотность числа барионов. (Заметим по предположению, что звезда уже обладает экстремальным значением полной массы-энергии; поэтому изменением ее энергии, обусловленным тем, что вещество звезды смещается, освобождая место для  $\delta A$  барионов, и внутри нее устанавливается новая структура, можно пренебречь.) Остающаяся после этих процессов избыточная энергия равна

$$\begin{aligned} W_{\text{избыт}}(r) &= W - (W_{\delta A} + W_{\text{высвобод}}) = \\ &= e^{-\Phi} (\mu_B \delta A + W_0) - \frac{(\rho + p)}{n} \delta A. \end{aligned} \quad (4)$$

Затем локальный наблюдатель превращает долю  $(1 - e^\Phi)$  от энергии  $W_{\text{избыт}}$  в кинетическую энергию, так что он может «швырнуть остатки» наблюдателю на бесконечности, и тому достанется энергия

$$W_{\text{избыт}}(\infty) = W_{\text{избыт}}(r) e^\Phi = \mu_B \delta A + W_0 - e^\Phi \frac{(\rho + p)}{n} \delta A. \quad (5)$$

Следовательно, по измерениям наблюдателя на бесконечности масса звезды возрастает на величину  $\delta M$ , равную

$$\delta M = e^\Phi \frac{(\rho + p)}{n} \delta A = e^\Phi \left( \frac{\partial \rho}{\partial n} \right)_S \delta A; \quad (6)$$

здесь последнее соотношение следует из первого начала термодинамики.

Условие конвективной устойчивости эквивалентно требованию независимости  $\delta M$  от  $r$ :

$$e^\Phi (\rho + p)/n = \text{const}. \quad (7)$$

Можно легко показать, обратившись к уравнению Эйлера

$$\frac{dp}{dr} = -(\rho + p) \frac{d\Phi}{dr}, \quad (8)$$

что условие (7) эквивалентно требованию адиабатичности изменений термодинамических переменных вдоль радиуса. Беря производную по  $r$  от уравнения (7), получаем

$$-\frac{(\rho + p)}{n} \frac{dn}{dr} + \frac{d\rho}{dr} + \frac{dp}{dr} + (\rho + p) \frac{d\Phi}{dr} = 0. \quad (9)$$

Используя уравнение (8), можно переписать уравнение (9) в виде

$$\frac{d\rho}{dr} = \frac{(\rho + p)}{n} \frac{dn}{dr} = \left( \frac{\partial \rho}{\partial n} \right)_S \frac{dn}{dr}. \quad (10)$$

Из этого уравнения ясно, что критерием конвективной устойчивости является изэнтропичность процессов в жидкости.

**Решение 16.22.** Будем исходить из уравнения Эйлера для жестко вращающейся звезды:

$$(\rho + p) \frac{\partial p}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \ln u}{\partial x^\mu}, \quad (1)$$



Сравним его с условием постоянства энергии инжекции

$$\frac{\rho+p}{nu^0} = \text{const.} \quad (2)$$

Возьмем логарифмическую производную от обеих частей уравнения (2) и подставим ее в уравнение (1). Получим

$$(\rho+p)^{-1} \frac{\partial \rho}{\partial x^\mu} = n^{-1} \frac{\partial n}{\partial x^\mu}. \quad (3)$$

Уравнение (3) представляет собой запись первого начала термодинамики для изэнтропических систем.

**Решение 16.23.** Поскольку вне звезды  $T^\mu_\nu$  обращается в нуль, мы можем брать объемный интеграл по всему пространству в некоторый момент времени  $t$ . Из уравнений поля следует

$$8\pi \left( T^\mu_\nu - \frac{1}{2} \delta^\mu_\nu T \right) = R^\mu_\nu,$$

поэтому интегральное выражение для массы есть

$$\begin{aligned} I &\equiv - \int (2T^\mu_\nu - \delta^\mu_\nu T) \xi^\nu d^3\Sigma_\mu = - (4\pi)^{-1} \int R^\mu_\nu \xi^\nu d^3\Sigma_\mu = \\ &= (4\pi)^{-1} \int \xi^{\mu;\nu} d^3\Sigma_\mu = (8\pi)^{-1} \oint \xi^{\mu;\nu} d^2\Sigma_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

[Третье равенство следует из решения 10.6; последнее равенство вытекает из теоремы Стокса, см. задачу 8.10 (в).] Если выбрать координаты  $t, r, \vartheta, \varphi$ , переходящие на бесконечности в сферические координаты, то будем иметь

$$d^2\Sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2!} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{\partial(x^\alpha, x^\beta)}{\partial(\vartheta, \varphi)} d\vartheta d\varphi = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi,$$

и, следовательно,

$$\xi^{\mu;\nu} d^2\Sigma_{\mu\nu} = 2\xi^t{}_{;r} r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi.$$

Асимптотический вид метрики есть

$$\begin{aligned} ds^2 &= - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 - \frac{4J \sin^2 \vartheta}{r} dt d\varphi + \\ &+ \left( 1 + \frac{2M}{r} \right) (dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \end{aligned}$$

Поскольку единственной ненулевой компонентой  $\xi_{(t)}$  является  $\xi^t = 1$ , имеем

$$\xi^t{}_{;r} \approx \xi^t{}_{;r} = \xi^t{}_{;r} + \Gamma^t{}_{\alpha r} \xi^\alpha = 0 + \Gamma^t{}_{tr} \approx - \frac{1}{2} g_{t,r} = M/r^2.$$

Тогда для интеграла  $I$  получаем

$$I = (8\pi)^{-1} \int \frac{2M}{r^2} r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = M,$$

что и требовалось доказать. Аналогично имеем

$$S \equiv \int T^\mu_\nu \xi^\nu_{(\varphi)} d^3\Sigma_\mu = (8\pi)^{-1} \int R^\mu_\nu \xi^\nu_{(\varphi)} d^3\Sigma_\mu - (16\pi)^{-1} \int R \xi^\mu_{(\varphi)} d^3\Sigma_\mu.$$

Поскольку  $d^3\Sigma_\varphi = 0$ , второй член обращается в нуль и

$$\begin{aligned} S &= -(8\pi)^{-1} \int \xi^{\mu;\nu} d^3\Sigma_\mu - 0 = -(16\pi)^{-1} \oint \xi^{\mu;\nu} d^2\Sigma_{\mu\nu} = \\ &= -(16\pi)^{-1} \oint 2\xi^t; r r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned} \xi^t; r &\approx \xi^t; r + \Gamma^t_{\alpha r} \xi^\alpha = 0 + \Gamma^t_{\varphi r} = g^{t\varphi} \Gamma_{\varphi r} + g^{t\varphi} \Gamma_{\varphi\varphi r} \approx \\ &\approx -\frac{1}{2} g_{t\varphi, r} + \left(\frac{-2J}{r^3}\right) \frac{1}{2} g_{\varphi\varphi, r} = -3J \sin^2 \vartheta / r^2, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$S = (16\pi)^{-1} \int 6J \sin^2 \vartheta d\vartheta d\varphi = J.$$

**Решение 16.24.** В координатах кривизны

$$\xi^\nu_{(\alpha)} = \delta^\nu_\alpha \quad \text{и} \quad d^3\Sigma_\mu = \delta^t_\mu |g|^{1/2} dr d\vartheta d\varphi,$$

поэтому рассматриваемый интеграл равен

$$I \equiv - \int (2T^\mu_\nu - \delta^\mu_\nu T) \xi^\nu_{(\alpha)} d^3\Sigma_\mu = - \int (2T^t_t - T) e^{\Phi + \lambda r^2} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dr.$$

Но в данном случае

$$\begin{aligned} T^t_t &= (\rho + p) u^t u_t + p \delta^t_t = -\rho, \\ T &= -(\rho + p) + 4p = 3p - \rho. \end{aligned}$$

Так как в подынтегральном выражении нет функций, зависящих от  $\vartheta$  и  $\varphi$ , интегрирование по углам дает  $4\pi$ , и, следовательно,

$$I = \int_0^R (\rho + 3p) e^{\Phi + \lambda 4\pi r^2} dr. \quad (1)$$

Воспользуемся методом интегрирования по частям. Поскольку

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho dr, \quad (2)$$

имеем

$$\int_0^R \rho e^{\Phi + \lambda 4\pi r^2} dr = m e^{\Phi + \lambda} \Big|_0^R - \int_0^R m (e^{\Phi + \lambda})' dr, \quad (3)$$

где штрих означает производную по  $r$ . Производную  $p'$  можно найти из уравнений внутреннего строения звезды, поэтому запи-

шем интеграл

$$\int_0^R 3\rho e^{\Phi+\lambda} 4\pi r^2 dr = \rho e^{\Phi+\lambda} 4\pi r^3 \Big|_0^R - \int_0^R 4\pi r^3 (p e^{\Phi+\lambda})' dr. \quad (4)$$

Первый член в правой части уравнения (3) есть  $m(R) = M$ , так как  $m = 0$  при  $r = 0$ , а  $\Phi = -\lambda$  при  $r = R$ . Первый член в правой части уравнения (4) равен нулю, так как  $p = 0$  при  $r = R$ . Следовательно,  $I = M$  при условии, что сумма остающихся членов в уравнениях (3) и (4) обращается в нуль. Эта сумма равна

$$\begin{aligned} & \int_0^R m (e^{\Phi+\lambda})' dr + \int_0^R 4\pi r^3 (p e^{\Phi+\lambda})' dr = \\ & = \int_0^R dr e^{\Phi+\lambda} \{m(\Phi' + \lambda') + 4\pi r^3 [p' + p(\Phi' + \lambda')]\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Вспомним теперь, что

$$e^{2\lambda} = (1 - 2m/r)^{-1},$$

откуда

$$\lambda' = \frac{(4\pi r^3 \rho - m)}{r(r - 2m)}.$$

Если этот результат и соотношения

$$\begin{aligned} \Phi' &= \frac{m + 4\pi r^3 \rho}{r(r - 2m)}, \\ \rho' &= \frac{-(\rho + p)(m + 4\pi r^3 \rho)}{r(r - 2m)} \end{aligned}$$

подставить в выражение в фигурных скобках в равенстве (5), то все члены взаимно уничтожатся и интеграл обратится в нуль, что и требовалось.

**Решение 16.25.** Пусть  $\theta$ ,  $\varphi$  и радиальная координата  $R$  сопутствуют некоторому сферическому слою вещества звезды. Тогда можно записать метрику в виде

$$ds^2 = g_{tt} dt^2 + g_{tR} dR dt + g_{RR} dR^2 + g_{\theta\theta} dt dx^\theta + g_{R\theta} dR dx^\theta + g_{\theta\varphi} dx^\theta dx^\varphi,$$

где  $i, j = \theta, \varphi$ . Если метрика сферически-симметрична, то для  $dt = dR = 0$  мы должны иметь

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j = r^2(R, t) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

Далее,  $g_{t\theta}$  и  $g_{R\theta}$  определяют некоторые векторы в 2-мерном  $(\theta, \varphi)$ -пространстве, и поэтому в силу изотропии сферических оболочек  $g_{t\theta}$  и  $g_{R\theta}$  должны обращаться в нуль. Наконец, чтобы избавиться от члена  $g_{t\varphi}$ , мы можем ввести новую временную координату  $T = T(t, r)$ , не нарушая при этом «условия сопутствования» радиаль-

ной координаты. Тогда получим

$$ds^2 = g_{TT} dT^2 + g_{RR} dR^2 + r^2(R, T) d\Omega^2.$$

Таким образом, мы, вообще говоря, можем добиться одновременно, чтобы координаты были сопутствующими, а метрика — диагональной.

Рассмотрим теперь движение элемента жидкости. Из выражения для 4-скорости жидкости

$$\mathbf{u} = (-g_{TT})^{-1/2} \mathbf{e}_T$$

получаем выражение для ускорения жидкости:

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u} = \mathbf{e}_R \left[ \frac{du^R}{d\tau} + (u^T)^2 \Gamma_{TT}^R \right] = -\frac{1}{2} \mathbf{e}_R (u^T)^2 g^{RR} g_{TT,R}.$$

Отсюда следует, что ускорение жидкости равно нулю (а значит, и градиент давления равен нулю) в том и только в том случае, когда  $g_{TT}$  есть функция только от  $T$ . Но если это так, то мы можем ввести новую временную координату  $\tau(T)$  с помощью соотношения

$$d\tau/dT = (-g_{TT})^{1/2}.$$

Но это соотношение означает, что  $\tau$  — собственное время для жидкости! Таким образом, одновременное наличие всех трех принятых свойств возможно тогда и только тогда, когда градиент давления равен нулю; но поскольку давление должно обращаться в нуль на поверхности звезды, равенство нулю градиента давления эквивалентно равенству нулю давления всюду внутри звезды.

### Решение 16.26.

а) Первое начало термодинамики (см. задачу 5.19) в сопутствующей системе записывается в виде

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho+p} = \frac{\dot{n}}{n},$$

где  $n$  — плотность числа барионов. Число барионов в сферическом слое толщиной  $dR$  есть  $(4\pi nr^2 e^\Lambda) dR$ , так что закон сохранения числа барионов в этом слое имеет вид

$$\partial(nr^2 e^\Lambda)/\partial t = 0,$$

откуда следует

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho+p} = -\frac{2\dot{r}}{r} - \dot{\Lambda}.$$

Рассматривая теперь это уравнение совместно с соотношениями

$$G^{\hat{t}}_{\hat{R}} = 0 = \frac{2}{r} e^{-\Phi-\Lambda} (r' - r\Phi' - r'\Lambda)$$

(см. задачу 9.20) и

$$T^{\beta}_{R; \beta} = 0 = \rho' + (\rho + p)\Phi',$$

получаем

$$-\dot{\rho} = (\rho + p) \left( \frac{2\dot{r}}{r} + \frac{\dot{r}'}{r'} \right) + \frac{\dot{r}p'}{r'}.$$

Теперь можно подставить найденное соотношение в выражение для  $\dot{m}$ :

$$\begin{aligned} \dot{m} &= 4\pi \int_0^R (2r\dot{r}r'\rho + r^2\dot{r}'\rho + r^2r'\dot{\rho}) dR = \\ &= -4\pi \int_0^R (2rr'\dot{r}p + r^2\dot{r}'p + r^2r'\dot{p}') dR = -4\pi \int_0^R (r^2\dot{r}p)' dR. \end{aligned}$$

Поскольку  $r^2\dot{r}p = 0$  при  $R = 0$ , имеем

$$\dot{m} = -4\pi r^2 p \dot{r}.$$

б) Из равенства

$$G^{\dot{t}}_{\dot{t}} = -8\pi\rho$$

(см. задачу 9.20) получаем

$$8\pi r^2 = 1 - r'^2 e^{-2\Lambda} + \dot{r}^2 e^{-2\Phi} + 2r\dot{r}e^{-2\Phi}\dot{\Lambda} + 2re^{-2\Lambda}(r'\Lambda' - r'').$$

Воспользуемся теперь равенством

$$G^{\dot{t}}_{\dot{R}} = 0,$$

чтобы исключить  $\dot{\Lambda}$ , а также тем фактом, что  $8\pi r^2 p r' dR$  представляет собой полный дифференциал по отношению к  $R$ :

$$\begin{aligned} 8\pi r^2 r' &= r' - (r')^3 e^{-2\Lambda} + \dot{r}^2 r' e^{-2\Phi} + 2r\dot{r}e^{-2\Phi}(r' - r'\Phi') + \\ &+ 2rr'e^{-2\Lambda}(r'\Lambda' - r'') = [r - e^{-2\Lambda}r(r')^2 + r(\dot{r})^2 e^{-2\Phi}]r'. \end{aligned}$$

Интегрируя, находим искомое соотношение

$$2m = r(1 - e^{-2\Lambda}(r')^2 + \dot{r}^2 e^{-2\Phi}) = r(1 - \Gamma^2 + U^2).$$

**Решение 16.27.** Из решения задачи 16.26 имеем

$$dr/d\tau = U, \tag{1}$$

$$dm/d\tau = -4\pi r^2 p U, \tag{2}$$

$$U = \frac{dr}{d\tau} = \pm \left[ \Gamma^2 + \left( \frac{2m}{r} - 1 \right) \right]^{1/2}. \tag{3}$$

Как видно из первых двух уравнений,  $dr/d\tau$  и  $dm/d\tau$  имеют противоположные знаки; тогда для того, чтобы оболочка прошла от  $2m/r < 1$  до  $2m/r > 1$ , во время прохождения через  $r = 2m$  должны

выполняются неравенства

$$\dot{r} \leq 0, \quad \dot{m} \geq 0.$$

Поэтому в уравнении (3) мы выбираем знак минус:

$$\frac{dr}{d\tau} = - \left[ \Gamma^2 + \left( \frac{2m}{r} - 1 \right) \right]^{1/2}.$$

Итак, радиус будет продолжать уменьшаться, пока

$$\Gamma^2 + \left( \frac{2m}{r} - 1 \right) > 0,$$

но если радиус уменьшается, масса должна увеличиваться, что в свою очередь будет приводить к возрастанию члена  $\left( \frac{2m}{r} - 1 \right)$ , и в результате коллапс не сможет прекратиться.

Предположим теперь, что оболочка сколлапсировала настолько, что  $2m/r - 1 = \varepsilon > 0$ . Поскольку эта величина продолжает возрастать, приходим к неравенству

$$dr/d\tau \leq \varepsilon^{1/2},$$

т. е. оболочка достигнет  $r=0$  за собственное время  $\leq 2m/\varepsilon^{1/2}$ . [Решением этой задачи мы обязаны Дж. Бардину.]

**Решение 16.28.** Из задачи 16.25 нам известно, что в случае коллапса в отсутствие давления мы можем выбрать  $\Phi = 0$ . Из равенств  $G^R_R = 0$  (см. задачу 9.20) и  $\Phi = 0$  получаем

$$0 = 2r\ddot{r} + 1 - r'^2 e^{-2\lambda} + \dot{r}^2 = 2r\ddot{r} + 1 - \Gamma^2 + U^2,$$

откуда следует (см. задачу 16.26)

$$\ddot{r} = \frac{d^2 r}{d\tau^2} = - \frac{M}{r^2}.$$

**Решение 16.29.** Из динамического уравнения для массы (см. задачу 16.26)

$$\dot{m} = -4\pi r^2 \dot{r} = 0$$

непосредственно следует, что масса не зависит от времени; это физически вполне очевидно. Дифференцируя обе части уравнения для  $\Gamma^2$  из задачи 16.26, получаем

$$2\Gamma\dot{\Gamma} = 2U\dot{U} + \frac{2m}{r^2} \dot{r} = 2\dot{r} \left( \dot{r} + \frac{m}{r^2} \right),$$

откуда (см. результат задачи 16.28) видно, что  $\Gamma$  также не зависит от времени.

Теперь динамическое уравнение для  $r(R, \tau)$  представляет собой простое дифференциальное уравнение первого порядка, которое можно решить в параметрическом виде.

Случай а.  $\Gamma^2 - 1 < 0$ .

$$r = \frac{m(b)}{1 - \Gamma^2} (1 + \cos \eta), \quad (1a)$$

$$\tau = \frac{m(b)}{(1 - \Gamma^2)^{3/2}} (\eta + \sin \eta) + F(b), \quad (1б)$$

где  $F(b)$  — произвольная функция.

Случай б.  $\Gamma^2 - 1 = 0$ .

$$r = \left\{ \frac{3}{2} (m(b))^{1/2} [G(b) - \tau] \right\}^{2/3}, \quad (2)$$

где  $G(b)$  — произвольная функция.

Случай в.  $\Gamma^2 - 1 > 0$ .

$$r = \frac{m(b)}{\Gamma^2 - 1} (\operatorname{ch} \eta - 1), \quad (3a)$$

$$\tau = \frac{m(b)}{(\Gamma^2 - 1)^{3/2}} (\operatorname{sh} \eta - \eta) + H(b), \quad (3б)$$

где  $H(b)$  — произвольная функция.

Заметим, что у нас имеются три свободные функции, т. е. функции, вид которых мы можем задать, исходя из конкретной физической ситуации. Именно, выбирая  $m(b)$ , мы можем выбрать тем самым конкретное распределение масс в некоторый начальный момент времени и во все последующие моменты.

Выбор «постоянных интегрирования»  $F(b)$ ,  $G(b)$ ,  $H(b)$  соответствует выбору значения  $r$  для каждого элемента жидкости на начальной гиперповерхности, т. е. заданию  $r(b, t) = 0$ .

И, наконец, выбор  $\Gamma^2(b)$  соответствует выбору скорости элемента жидкости на начальной гиперповерхности.

Сравнивая наше уравнение с уравнением для радиальной геодезической, мы видим, что  $\Gamma^2 - 1$  можно рассматривать как сохраняющуюся «энергию на бесконечности» жидкой оболочки. Неудивительно поэтому, что решение соответствует трем режимам: в задаче о разлете жидкой оболочки мы можем придать ей скорость меньше параболической, т. е. «второй космической» (случай а), в точности равную параболической (случай б), или превосходящую параболическую (случай в). Заметим, что вышеприведенные решения симметричны относительно обращения времени, поэтому, например, решение в случае в может описывать падение сферических оболочек на центр (это замечание справедливо также для задач 16.25, 16.26 и 16.30). Обратите внимание на тот факт, что если три свободные функции выбраны неаккуратно, то массивные оболочки могут налететь друг на друга!

**Решение 16.30.**

1. Тензор энергии-импульса имеет вид

$$T_{\alpha\beta} = \rho u_{\alpha} u_{\beta}.$$

Предположения о сферической симметрии и равномерном распределении плотности эквивалентны предположению об однородности и изотропии, так что метрика должна представлять собой решение Фридмана

$$ds^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau) [d\chi^2 + \Sigma^2(\chi) (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)], \quad (1)$$

где

$$\Sigma = \begin{cases} \sin \chi, & \text{если } k=1, \\ \chi, & \text{если } k=0, \\ \text{sh } \chi, & \text{если } k=-1. \end{cases}$$

Поверхности звезды соответствует некоторое постоянное значение «радиальной» координаты  $\chi = \chi_0$ . Из вида линейного элемента (1) следует, что собственный радиус звезды, определяемый по длине периметра, есть  $R = a(\tau) \Sigma(\chi_0)$ . Уравнения поля Эйнштейна (см. задачи 19.16 и 19.18) в отсутствие давления принимают вид

$$\left(\frac{a, \tau}{a}\right)^2 = -\frac{k}{a^2} + \frac{8\pi\rho}{3}, \quad (2)$$

$$\rho a^3 = \text{const.} \quad (3)$$

Уравнение (2) можно переписать в виде

$$\rho = \frac{3}{8\pi} \left[ \left(\frac{R, \tau}{R}\right)^2 + \frac{k\Sigma^2(\chi_0)}{R^2} \right]. \quad (4)$$

Следовательно, если  $R, \tau = 0$  при любом конечном значении  $R$ , то  $k$  должно быть равно  $+1$ , т. е.  $\rho$  — положительная величина. Наоборот, если  $k = -1$ , то  $R, \tau$  никогда не обращается в нуль. Случай  $k = 0$  соответствует  $R, \tau \rightarrow 0$  при  $R \rightarrow \infty$ .

2. Из уравнения Эйлера в отсутствие давления следует, что  $\nabla_{\alpha} u^{\alpha} = 0$ , т. е. каждый элемент жидкости движется вдоль геодезической. В силу сферической симметрии задачи все геодезические являются радиальными.

3. Мы выполним сшивание для  $k = +1$ ; для случаев  $k = 0$  и  $k = -1$  сшивание проводится аналогично. Для  $k = +1$  уравнения (2) и (3) дают

$$(a, \tau)^2 = a_m/a - 1, \quad (5)$$

где значение постоянной в уравнении (3) было фиксировано тем, что мы положили  $a$  равным его максимальному значению:  $a = a_m = a_{\text{макс}}$ , когда  $a, \tau = 0$ . Уравнение (5) можно проинтегрировать непосредственно в том виде, в котором оно записано; удобно,



однако, ввести временной параметр посредством соотношения

$$d\tau = a d\eta. \quad (6)$$

Из уравнений (5) и (6) получаем

$$a = \frac{1}{2} a_m (1 + \cos \eta), \quad (7)$$

$$\tau = \frac{1}{2} a_m (\eta + \sin \eta). \quad (8)$$

Постоянные интегрирования были выбраны таким образом, чтобы  $a = a_m$  и  $\tau = 0$  при  $\eta = 0$  и чтобы  $a = 0$  и  $\tau = \pi a_m / 2$  при  $\eta = \pi$ . Внутренняя 3-геометрия поверхности звезды, измеряемая изнутри ее, находится путем подстановки в выражение (1) значения  $\chi = \chi_0$ :

$${}^{(3)}ds^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau) \sin^2 \chi_0 d\Omega^2 = a^2(\eta) (-d\eta^2 + \sin^2 \chi_0 d\Omega^2). \quad (9)$$

Внешняя метрика имеет вид

$$ds^2 = -(1 - 2M/r) dt^2 + (1 - 2M/r)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (10)$$

Радиальная координата поверхности звезды есть  $r = R(\tau)$ , а  $R(\tau)$  можно найти из уравнения для радиальных геодезических (см. задачу 15.4) по формулам

$$R = \frac{1}{2} R_t (1 + \cos \eta), \quad (11)$$

$$\tau = \left( \frac{R_t^3}{8M} \right)^{1/2} (\eta + \sin \eta), \quad (12)$$

$$u' = \frac{dt}{d\tau} = \frac{(1 - 2M/R_t)^{1/2}}{1 - 2M/R}. \quad (13)$$

Таким образом, 3-геометрия поверхности звезды во внешней метрике имеет вид

$${}^{(3)}ds_{\perp}^2 = -d\tau^2 + R^2(\tau) d\Omega^2 = -\left( \frac{R_t^3}{8M} \right) (1 + \cos \eta) d\eta^2 + \frac{R_t^3}{4} (1 + \cos \eta)^2 d\Omega^2. \quad (14)$$

Сравнивая с уравнением (9), мы видим, что эти 3-геометрии гладко сшиваются друг с другом, если мы отождествим следующие параметры:

$$R_t = a_m \sin \chi_0, \quad 2M = a_m \sin^3 \chi_0. \quad (15)$$

Вычислим теперь внешнюю кривизну поверхности  $K_{\perp}^{(3)}$ , измеряемую изнутри звезды. Нормаль к поверхности есть

$$\mathbf{n} = a^{-1} \partial / \partial x \quad (16)$$

(вспомним, что  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$ ), а векторы  $\mathbf{u} = \partial / \partial \tau$ ,  $\partial / \partial \theta$  и  $\partial / \partial \phi$  лежат

на поверхности. Пусть теперь индексы  $i, j$  пробегают «значения»  $\tau, \theta, \varphi$ . Тогда

$$\begin{aligned} K_{ij} &\equiv -\mathbf{e}_i \cdot \nabla_j \mathbf{n} = -\mathbf{e}_i \cdot \Gamma_{nj}^\alpha \mathbf{e}_\alpha = -g_{i\alpha} \Gamma_{nj}^\alpha = \\ &= -\Gamma_{inj} = -\frac{1}{2} (g_{in,j} + g_{ij,n} - g_{nj,i}) = -\frac{1}{2} g_{ij,n}, \end{aligned} \quad (17)$$

поскольку

$$g_{in} = a^{-1} g_{i\chi} = 0.$$

Из вида метрики следует, что

$$K_{\tau\tau}^{(-)} = K_{\tau\theta}^{(-)} = K_{\tau\varphi}^{(-)} = K_{\theta\varphi}^{(-)} = 0, \quad (18)$$

$$K_{\theta\theta}^{(-)} = K_{\varphi\varphi}^{(-)} \sin^2 \theta = -\frac{1}{2} a_m (1 + \cos \eta) \sin \chi_0 \cos \chi_0. \quad (19)$$

Во внешней метрике 4-скорость записывается в виде

$$\mathbf{u} = u^t \mathbf{e}_t + u^r \mathbf{e}_r.$$

Нормаль к поверхности

$$\mathbf{n} = n^t \mathbf{e}_t + n^r \mathbf{e}_r$$

удовлетворяет соотношениям

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1 = g_{tt} (n^t)^2 + g_{rr} (n^r)^2, \quad (20)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0 = n^t u_t + n^r u_r. \quad (21)$$

Поскольку

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -1 = g^{tt} (u_t)^2 + g^{rr} (u_r)^2 \quad (22)$$

и

$$g^{rr} = (g_{rr})^{-1} = -(g^{tt})^{-1} = -g_{tt} = 1 - 2M/r,$$

из приведенных выше уравнений следует:

$$n^t = u_r, \quad n^r = -u_t. \quad (23)$$

Пусть, как и прежде, индексы  $i, j$  пробегают значения  $\tau, \theta, \varphi$ . Тогда уравнение (17) справедливо также и для внешней метрики, так как

$$g_{in} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i = 0.$$

Уравнение (18) также справедливо во внешней метрике, поскольку

$$\mathbf{e}_\tau \cdot \mathbf{e}_\tau = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -1, \quad \mathbf{e}_\tau \cdot \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\tau \cdot \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\varphi = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} K_{\theta\theta}^{(+)} &= K_{\varphi\varphi}^{(+)} \sin^2 \theta = -\frac{1}{2} (r^2)_{,n} = -\frac{1}{2} (r^2)_{,r} n_r = r u_t = \\ &= -R (1 - 2M/R_i)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} R_i (1 + \cos \eta) (1 - 2M/R_i)^{\frac{1}{2}} = \\ &= -\frac{1}{2} a_m \sin \chi_0 \cos \chi_0 (1 + \cos \eta), \end{aligned}$$

где мы использовали уравнения (23), (13), (11) и (15). Таким образом,  $K_{ij}^{(+)} = K_{ij}^{(-)}$ , и доказательство завершено.

## ГЛАВА 17

**Решение 17.1.** Параметры массы и момента количества движения для асимптотически-плоской метрики можно определить, если найти такую систему координат, в которой данная метрика принимает вид

$$g_{00} = -\left(1 - \frac{2\tilde{M}}{r} + \mathcal{O}(r^{-2})\right), \quad (1)$$

$$g_{0j} = -\left(4e_{jkl}\tilde{S}^k \frac{x^l}{r^3} + \mathcal{O}(r^{-3})\right). \quad (2)$$

Тогда постоянные  $\tilde{M}$  и  $\tilde{S}^k$  в разложении как раз и будут массой и моментом количества движения источника (см. [2], гл. 9.4 и [1], гл. 19.3).

Разложение метрики Керра в координатах Буайе — Линдквиста в ряд по степеням  $r^{-1}$  дает нам главные члены разложения вида

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \dots\right)dt^2 - \left(\frac{4aM}{r} \sin^2 \vartheta + \dots\right)dt d\varphi + \\ + (1 + \dots)[dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)].$$

Преобразовывая к декартовым координатам с помощью подстановки

$$x \equiv r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y \equiv r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z \equiv r \cos \vartheta,$$

получаем

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \dots\right)dt^2 - \left(\frac{4aM}{r^3} + \dots\right)(x dy - y dx) dt + \\ + (1 + \dots)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (3)$$

Сравнивая (3) с (1) и (2), немедленно находим

$$\tilde{M} = M,$$

$$\tilde{S} = aM e_z.$$

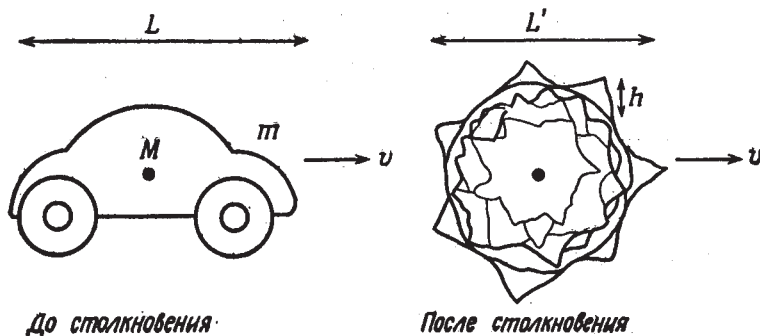
**Решение 17.2.** Пусть до спрессовывания автомобиль характеризуется длиной  $L$  и массой  $m$ , а после — длиной  $L'$  и «параметром бугристости»  $h$  (см. фиг. 31); масса черной дыры равна  $M$ . Предположим также, что величина внутреннего напряжения на единицу массы, которое может выдержать сталь, составляет  $\varepsilon$  ( $\sim 0,1$  эВ на массу ядра; см. задачу 5.6). Сравнивая силы гра-

витационного давления с требующимися внутренними напряжениями, получаем следующие «условия спрессовывания»:

$$\left(\frac{GM}{L^2}\right)L > \varepsilon \quad \text{условие, необходимое для того, чтобы спрессовывание началось,} \quad (1)$$

$$\left(\frac{GM}{L'^2}\right)h > \varepsilon \quad \text{условие, необходимое для того, чтобы после спрессовывания бугорки не превосходили } h. \quad (2)$$

Если учесть, что при переработке на металлолом автомобили обычно спрессовывают до 1/10 их первоначального размера, то



Фиг. 31.

легко видеть, что эти два неравенства становятся эквивалентными, если  $h/L' = 1/10$ , что кажется вполне разумным значением. Полагая  $L' \approx 100$  см и  $\varepsilon \approx 10^9$  эрг/г, получаем  $\mu \gtrsim 10^{28}$  г.

Время, необходимое для спрессовывания остова, определяется временем свободного падения на дыру

$$(L^2/GM)^{1/2} \sim 10^{-5} \text{ с,}$$

так что в час можно переработать порядка  $10^8$  остовов.

**Решение 17.3.** Чтобы ракетный корабль двигался вдоль времениподобной мировой линии, его 4-скорость должна удовлетворять следующему соотношению (получающемуся из шварцшильдовской метрики):

$$1 = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\vartheta}{d\tau}\right)^2 - r^2 \sin^2 \vartheta \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2.$$

Внутри горизонта все члены отрицательны, за исключением того,

который содержит  $(dr/d\tau)^2$ , откуда следует условие

$$\left(\frac{2M}{r} - 1\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 > 1.$$

Мы знаем также (например, из картины коллапса Эддингтона — Финкельштейна или Крускала), что знак  $dr/d\tau$  должен быть отрицательным для «направленного в будущее» (т. е. физического) наблюдателя, откуда имеем

$$dr < -\left(\frac{2M}{r} - 1\right)^{1/2} d\tau$$

и

$$\begin{aligned} \tau_{\text{макс}} &= -\int_{2M}^0 \left(\frac{2M}{r} - 1\right)^{-1/2} dr = \\ &= \left[ r^{1/2} (2M - r)^{1/2} + M \arccos \left(\frac{r}{M} - 1\right) \right]_{2M}^0 = \pi M. \end{aligned}$$

**Решение 17.4.** Мы рассмотрим случай керровской черной дыры, а затем получим шварцшильдовский случай, полагая  $a = 0$ . Метрика Керра (в обычных координатах Буйе — Линдквиста) имеет вид

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) dt^2 - \left(4Mar \frac{\sin^2 \theta}{\Sigma}\right) dt d\varphi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \\ &+ \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + 2Ma^2 \frac{r \sin^2 \theta}{\Sigma}\right) \sin^2 \theta d\varphi^2, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2, \quad \Sigma \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta.$$

Уравнение геодезических есть

$$d^2 x^\mu / d\tau^2 + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 0, \quad (2)$$

но первый член обращается в нуль, поскольку  $u^t$  и  $u^\varphi$  — единственные неисчезающие компоненты  $u$  — являются постоянными. Компоненту  $r$  уравнения (2) можно записать в виде

$$0 = \Gamma_{r\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = (\Gamma_{rtt} dt^2 + 2\Gamma_{rt\varphi} dt d\varphi + \Gamma_{r\varphi\varphi} d\varphi^2) (d\tau)^{-2}. \quad (3)$$

Так как метрические коэффициенты зависят только от  $r$  и  $\theta$ , необходимые нам символы Кристоффеля в экваториальной плоскости  $\theta = \pi/2$  суть

$$\begin{aligned} \Gamma_{rtt} &= -\frac{1}{2} g_{tt,r} = M/r^2, \\ 2\Gamma_{rt\varphi} &= -g_{t\varphi,r} = -2Ma/r^2, \\ \Gamma_{r\varphi\varphi} &= -\frac{1}{2} g_{\varphi\varphi,r} = \frac{Ma^2}{r^2} - r. \end{aligned} \quad (4)$$

Учитывая, что  $\Omega \equiv d\varphi/dt$ , из уравнений (3) и (4) получаем

$$0 = \Omega^2 \left( \frac{Ma^2}{r^2} - r \right) - \frac{2Ma}{r^2} \Omega + \frac{M}{r^2}. \quad (5)$$

Два корня этого квадратного уравнения (соответствующие прямой и обратной орбитам) равны

$$\Omega = M^{1/2} / (\pm r^{3/2} + aM^{1/2}). \quad (6)$$

Для  $a=0$  получаем уравнение  $\Omega^2 = M/r^3$ , которое (по случайному совпадению, обусловленному выбором координат) в точности соответствует закону Кеплера в ньютоновской теории тяготения.

**Решение 17.5.** Метрика Рейсснера — Нордстрема имеет вид

$$ds^2 = -Adt^2 + A^{-1}dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2),$$

где  $A \equiv 1 - 2M/r + Q^2/r^2$ . Найдем вначале кеплеровскую частоту обращения для круговых орбит  $\Omega \equiv d\varphi/dt$  (точно так же, как в задаче 17.4). В нашем случае имеем

$$\Gamma_{rtt} = -\frac{1}{2} g_{tt,r} = \frac{M}{r^2} - \frac{Q^2}{r^3},$$

$$2\Gamma_{rt\varphi} = -g_{t\varphi,r} = 0,$$

$$\Gamma_{r\varphi\varphi} = -\frac{1}{2} g_{\varphi\varphi,r} = -r,$$

откуда получаем квадратное уравнение для  $\Omega$ :

$$\Omega^2 r - \left( \frac{M}{r^2} - \frac{Q^2}{r^3} \right) = 0.$$

Частота орбитального обращения равна

$$\Omega = \pm \left( \frac{M}{r^3} - \frac{Q^2}{r^4} \right)^{1/2}.$$

Собственная скорость движущегося по орбите наблюдателя по отношению к координатно-покоящемуся наблюдателю есть

$$\hat{v} = \frac{d\hat{\varphi}}{d\hat{t}} = \frac{rd\varphi}{A^{1/2}dt} = \left( \frac{Mr - Q^2}{r^2 - 2Mr + Q^2} \right)^{1/2}.$$

(«Шляпками» обозначены ортонормированные компоненты в покоящейся системе отсчета.) В покоящейся системе локально измеряемая напряженность электромагнитного поля обладает только одной компонентой:

$$E_{\hat{r}} = \frac{Q}{r^2}.$$

Применяя преобразование Лоренца и учитывая обычные соотношения для электрического и магнитного полей, получаем, что

в системе отсчета, связанной с наблюдателем на орбите, все компоненты напряженности полей будут равны нулю, за исключением

$$E_{\hat{r}} = (1 - \hat{v}^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{Q}{r^2} = \frac{Q}{r^2} \left( \frac{r^2 - 2Mr + Q^2}{r^2 - 3Mr + 2Q^2} \right)^{1/2},$$

$$B_{\hat{\phi}} = (1 - \hat{v}^2)^{-\frac{1}{2}} \hat{v} \frac{Q}{r^2} = \frac{Q}{r^2} \left( \frac{Mr - Q^2}{r^2 - 3Mr + 2Q^2} \right)^{1/2}.$$

**Решение 17.6.** Удельный момент количества движения  $a$  и заряд  $e$  черной дыры Керра — Ньюмана с массой  $M$  не могут быть произвольно большими: они должны удовлетворять неравенству

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{Ge^2}{c^4} \leq \frac{G^3}{c^4} M^2 \quad (1)$$

(здесь мы для ясности включили фундаментальные константы  $G$  и  $c$ ). Неравенство (1) следует из условия существования горизонта, расположенного от центра на расстоянии

$$r_H = M + (M^2 - e^2 - a^2)^{1/2}.$$

Если неравенство (1) нарушается, мы имеем дело с «голой сингулярностью», которая к тому же оказывается акаузальной. Из эксперимента мы знаем, что спин, заряд и масса электрона таковы, что член с  $a^2$  в неравенстве (1) имеет порядок  $10^{-22}$  см<sup>2</sup>, член с  $e^2$  — порядок  $10^{-68}$  см<sup>2</sup>, а член с  $m^2$  — порядок  $10^{-110}$  см<sup>2</sup>. Таким образом, неравенство довольно глубоко нарушается и электрон — это не черная дыра.

**Решение 17.7.** Поскольку у нас имеется три соотношения между компонентами 4-импульса

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = -m^2, \quad p_t = E, \quad p_\phi = L,$$

уравнения орбиты можно свести к виду

$$(dr/d\lambda)^2 = V(E, L, r),$$

где  $\lambda$  — аффинный параметр, а  $V$  — некоторый эффективный потенциал. Условие того, что орбита является круговой, есть равенство нулю  $dr/d\lambda$ , т. е.

$$V(E, L, r) = 0, \quad (1)$$

$$V'(E, L, r) = 0, \quad (2)$$

где  $V' \equiv \partial V / \partial r$ . По теореме существования неявной функции систему уравнений (1) и (2) можно разрешить относительно

$$E = E(r), \quad L = L(r),$$

при условии, что

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial V}{\partial E} & \frac{\partial V}{\partial L} \\ \frac{\partial V'}{\partial E} & \frac{\partial V'}{\partial L} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (3)$$

(Это условие в данном случае выполнено.) Тогда  $dE/dr$  и  $dL/dr$  можно найти с помощью дифференцирования уравнений (1) и (2):

$$0 = \frac{dV}{dr} = \frac{\partial V}{\partial E} \frac{dE}{dr} + \frac{\partial V}{\partial L} \frac{dL}{dr} + V', \quad (4)$$

$$0 = \frac{dV'}{dr} = \frac{\partial V'}{\partial E} \frac{dE}{dr} + \frac{\partial V'}{\partial L} \frac{dL}{dr} + V''. \quad (5)$$

Рассмотрим теперь некоторую орбиту с  $r=r_0$  и внесем возмущение таким образом, чтобы  $r=r_0+\varepsilon$ . Уравнение возмущенной орбиты есть

$$(dr/d\lambda)^2 = V(r_0) + \varepsilon V'(r_0) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 V''(r_0) + \dots,$$

где  $V(r_0)=0$  и  $V'(r_0)=0$  (условие для невозмущенной круговой орбиты). Тогда устойчивость зависит от  $V''$ : если орбита устойчива, то потенциал  $V''$  должен быть отрицательным. Для случая *краевой* устойчивости мы в дополнение к  $V=0$  и  $V'=0$  имеем условие  $V''=0$ , так что единственным решением уравнений (4) и (5) будет  $dE/dr=0$  и  $dL/dr=0$ . Из физических соображений ясно, что эти экстремумы суть минимумы.

### Решение 17.8.

а) Из соотношений  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -1$  и  $\Omega \equiv u^\varphi/u^0$  имеем

$$\begin{aligned} -1 &= g_{00}(u^0)^2 + 2g_{0\varphi}u^0u^\varphi + g_{\varphi\varphi}(u^\varphi)^2 = \\ &= (u^0)^2(g_{00} + 2\Omega g_{0\varphi} + \Omega^2 g_{\varphi\varphi}) \end{aligned} \quad (1)$$

и, следовательно,

$$u^0 = (-g_{00} - 2\Omega g_{0\varphi} - \Omega^2 g_{\varphi\varphi})^{-1/2},$$

где в плоскости  $\vartheta = \pi/2$

$$-g_{00} = 1 - 2M/r, \quad -g_{0\varphi} = 2Ma/r, \quad -g_{\varphi\varphi} = -(r^2 + a^2r + 2Ma^2)/r.$$

Остальные компоненты легко найти, выразив их через  $u^0$ :

$$\begin{aligned} u^\varphi &= \Omega u^0, \\ u_0 &= g_{00}u^0 + g_{0\varphi}u^\varphi = u^0(g_{00} + \Omega g_{0\varphi}), \\ u_\varphi &= g_{0\varphi}u^0 + g_{\varphi\varphi}u^\varphi = u^0(g_{0\varphi} + \Omega g_{\varphi\varphi}). \end{aligned}$$

б) Из уравнения (1) имеем

$$Y \equiv g_{00} + 2\Omega g_{0\varphi} + \Omega^2 g_{\varphi\varphi} < 0. \quad (2)$$



Наблюдатель может быть координатно-покоящимся ( $\Omega = 0$ ) только там, где  $g_{00} < 0$ , т. е. в экваториальной плоскости только при  $r > r_0 = 2M$ .

в) Дискриминант квадратного трехчлена  $Y$  в неравенстве (2) есть

$$(g_{0\varphi})^2 - g_{00}g_{\varphi\varphi} = r^2 - 2Mr + a^2 = (r - r_+) (r - r_-).$$

Он отрицателен в области  $r_- < r < r_+$ . Если дискриминант  $Y$  отрицателен, то  $Y$  имеет один и тот же знак для любых  $\Omega$ , т. е. тот же знак, что и  $g_{\varphi\varphi}$ . Поскольку величина  $g_{\varphi\varphi}$  положительна, это нарушает неравенство (2), которое предполагает наличие только времениподобных движений и постоянство  $r$ . Следовательно, наблюдатель не может оставаться покоящимся при постоянном значении  $r$ . Обратите внимание, что при  $r \rightarrow r_+$   $\Omega$  стремится к

$$-g_{0\varphi}/g_{00} = a/2Mr_+.$$

**Решение 17.9.** Сохраняющаяся энергия частицы есть скалярное произведение 4-импульса на временной вектор Киллинга  $\xi_{(t)} = \partial/\partial t$ :

$$E = -\mathbf{p} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) = -p_t. \quad (1)$$

Метрика Керра имеет вид

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\psi} (d\varphi - \omega dt)^2 + e^{2\mu_r} dr^2 + e^{2\mu_\varphi} d\vartheta^2. \quad (2)$$

Контравариантные компоненты  $g^{\alpha\beta}$  равны

$$g^{tt} = -e^{-2\nu}, \quad g^{t\varphi} = -\omega e^{-2\nu}, \quad g^{\varphi\varphi} = e^{-2\psi} - \omega^2 e^{-2\nu}, \\ g^{rr} = e^{-2\mu_r}, \quad g^{\vartheta\vartheta} = e^{-2\mu_\varphi}. \quad (3)$$

Если масса частицы есть  $\mu$ , то

$$-\mu^2 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = -e^{-2\nu} p_t^2 - e^{-2\nu} 2\omega p_t p_\varphi + \\ + (e^{-2\psi} - e^{-2\nu} \omega^2) p_\varphi^2 + e^{-2\mu_r} p_r^2 + e^{-2\mu_\varphi} p_\vartheta^2. \quad (4)$$

Решая квадратное уравнение (4) относительно  $p_t = E$ , получаем

$$E = \omega p_\varphi + [e^{2\nu-2\psi} p_\varphi^2 + e^{2\nu} (e^{-2\mu_r} p_r^2 + e^{-2\mu_\varphi} p_\vartheta^2 + \mu^2)]^{1/2}. \quad (5)$$

Знак перед квадратным корнем в выражении (5) положителен, так что для частицы, покоящейся на бесконечности,  $E = +\mu$ . Если  $E$  должно быть отрицательным, то нам необходимо выбрать  $p_\varphi$  со знаком минус и потребовать выполнения неравенства

$$[e^{2\nu-2\psi} p_\varphi^2 + e^{2\nu} (e^{-2\mu_r} p_r^2 + e^{-2\mu_\varphi} p_\vartheta^2 + \mu^2)]^{1/2} < -\omega p_\varphi. \quad (6)$$

Мы можем найти границу области отрицательных энергий  $E$ , если положим  $p_r = p_\vartheta = 0$  и устремим к нулю  $\mu$  (т. е. будем рассматривать ультрарелятивистские частицы). Это даст нам условие

$$e^{2\nu-2\psi} < \omega^2,$$

эквивалентное

$$g_{tt} > 0.$$

Другими словами, орбиты таких частиц должны находиться внутри эргосферы. (Этот результат следует также из задачи 10.15.)

Когда с борта космического корабля выпускается снаряд, из закона сохранения 4-импульса имеем

$$P_{до} = P_{после} + P_{снаряда}. \quad (7)$$

Умножая скалярно на временной вектор Киллинга, получаем

$$E_{до} = E_{после} + E_{снаряда}. \quad (8)$$

Поскольку космический корабль может войти в эргосферу из бесконечности, имеем  $E_{до} > \mu$ . Внутри эргосферы он может выпустить снаряд с достаточно большой скоростью (с отрицательным значением  $p_\phi$ ), так что  $E_{снаряда} < 0$ . Тогда из уравнения (7) следует

$$E_{после} > E_{до},$$

и корабль отправляется на бесконечность с возросшей полной энергией. Обратите внимание, что, поскольку и траектория космического корабля, и траектория обладающего отрицательной энергией снаряда временноподобны, снаряд можно выпустить с борта корабля с (локально измеренной) скоростью, меньшей  $c$ .

**Решение 17.10.** В задаче 17.8 мы видели, что при приближении к горизонту  $\Omega \rightarrow a/2Mr_+$ , когда  $\phi = \pi/2$ . Чтобы доказать справедливость этого предельного соотношения для любых  $\phi$ , запишем (в обозначениях задачи 17.9)

$$\Omega = \frac{p_\phi}{p^t} = \frac{g^{\phi\phi}p_\phi + g^{\phi t}p_t}{g^{tt}p_t + g^{\phi t}p_\phi} = \omega - e^{2\nu} \frac{e^{-2\psi}p_\phi}{p_t + \omega p_\phi}.$$

При  $\Delta = 0$  (т. е. на горизонте) метрическая функция  $e^{-2\psi}$  остается конечной, но  $e^{2\nu}$  обращается в нуль, так что  $\Omega = \omega$ , и при  $\Delta = 0$  имеем

$$\omega = \frac{-g_{\phi t}}{g_{\phi\phi}} = \frac{a}{2Mr_+}.$$

**Решение 17.11.** Запишем сначала  $r$ - и  $\phi$ -компоненты уравнений орбитального движения в геометрии Керра [см., например, [1], уравнение (33.32)]:

$$(r^2 + a^2 \cos^2 \phi) dr/d\tau = \pm V_r^{1/2}, \quad (1)$$

$$(r^2 + a^2 \cos^2 \phi) d\phi/d\tau = \pm V_\phi^{1/2}, \quad (2)$$

где

$$V_r = [E(r^2 + a^2) - La]^2 - \Delta[r^2 + (L - aE)^2 + Q], \quad (3)$$

$$V_\phi = Q - \cos^2 \phi [a^2(1 - E^2) + L^2/\sin^2 \phi], \quad (4)$$

$$\Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2,$$

а  $E$ ,  $L$  и  $Q$  — интегралы движения. Чтобы орбита проходила через  $\phi = 0$  и  $\phi = \pi$ , потенциал  $V_\phi$  должен быть положительным как при  $\phi = 0$ , так и при  $\phi = \pi$ . Согласно уравнению (4), из этого условия следует

$$L = 0 \text{ и } Q > a^2(1 - E^2).$$

Тогда уравнение (3) принимает вид

$$V_r = E^2(r^2 + a^2)^2 - \Delta[r^2 + a^2 + I], \quad (5)$$

где

$$I \equiv Q - a^2(1 - E^2) > 0.$$

Условия, необходимые для того, чтобы орбита характеризовалась постоянным значением радиальной координаты  $r$ , суть  $V_r = 0$  и  $dV_r/dr = 0$  (условие локального экстремума и условие бесконечного сохранения экстремума). Условие, налагаемое на производную, дает

$$0 = 2E^2r(r^2 + a^2) - (r - M)E^2(r^2 + a^2)^2/\Delta - r\Delta, \quad (6)$$

где для исключения интеграла движения  $I$  мы воспользовались условием  $V_r = 0$  и уравнением (5). Этот результат можно переписать в виде

$$E^2 = r\Delta^2[(r^2 + a^2)(r^3 - 3Mr^2 + a^2r + a^2M)]^{-1}. \quad (7)$$

Для очень больших значений  $r$  получаем

$$E \approx \left(1 - \frac{M}{2r} + \dots\right),$$

т. е. не что иное, как ньютоновскую энергию связи для круговой орбиты. При уменьшении  $r$  изменения  $E$  описываются уравнением (7). Очевидно, что, поскольку числитель неотрицателен, то решение уравнения (7) перестает существовать в единственном случае — когда знаменатель обращается в нуль (обращение знаменателя в бесконечность вне горизонта невозможно). Следовательно, полярные круговые орбиты существуют вплоть до минимального радиуса  $r$ , определяемого из уравнения

$$r^3 - 3Mr^2 + a^2r + a^2M = 0. \quad (8)$$

Это уравнение легко решается с помощью классической формулы для решений кубического уравнения; минимальный радиус поляр-

ной орбиты равен

$$r = M \left\{ 1 + \frac{2(3 - \bar{a}^2)^{1/2}}{3^{1/2}} \cos \left[ \frac{1}{3} \arccos \left( \frac{3^{3/2}(1 - \bar{a}^2)}{(3 - \bar{a}^2)^{3/2}} \right) \right] \right\},$$

где  $\bar{a} \equiv a/M$ . Обратите внимание, что в предельном случае  $E^2$  стремится к бесконечности, следовательно, предельным случаем является орбита фотона. Минимальный радиус может иметь значения в интервале  $r = 3M$  для  $a = 0$  до  $r = (1 + 2^{1/2})M$  для  $a = M$ .

**Решение 17.12.** Пусть  $\xi$  — времениподобный вектор Киллинга, существующий в силу статичности черной дыры. Уравнение Киллинга гласит:

$$\xi_{\alpha;\beta} = -\xi_{\beta;\alpha}, \quad (1)$$

а требование статичности метрики (см. задачу 10.8) имеет вид

$$\xi_{[\alpha;\beta} \xi_{\gamma]} = 0. \quad (2)$$

4-скорость неподвижного наблюдателя параллельна  $\xi$ , т. е.

$$u = \xi/v^{1/2}, \quad (3)$$

$$v = -\xi^\alpha \xi_\alpha. \quad (4)$$

Для фотона с импульсом  $p$  поверхность бесконечного красного смещения определяется условием

$$0 = (p \cdot u)_\infty / (p \cdot u)_{\text{излучатель}} = v_{\text{излучатель}}^{1/2},$$

где мы использовали тот факт, что  $p \cdot \xi$  постоянно вдоль геодезической траектории фотона и  $v$  нормировано на бесконечности на единицу. Таким образом, эргоповерхность — это поверхность, на которой вектор Киллинга  $\xi$  является изотропным. Докажем, теперь, что эргоповерхность  $v = 0$  есть изотропная гиперповерхность, т. е. нормаль к ней является изотропным вектором. С помощью уравнения (1) перепишем уравнение (2) в виде

$$\xi_{\alpha;\beta} \xi_\gamma + \xi_{\gamma;\alpha} \xi_\beta - \xi_{\gamma;\beta} \xi_\alpha = 0, \quad (5)$$

а затем умножим скалярно уравнение (5) на  $\xi^\gamma$ :

$$v \xi_{\alpha;\beta} + v_{, [\alpha} \xi_{\beta]} = 0. \quad (6)$$

Из уравнения (6) видно, что  $v_{,\alpha}$  параллельно  $\xi_\alpha$  всюду, где  $v = 0$ . Но  $v_{,\alpha}$  есть нормаль к гиперповерхности  $v = 0$ , т. е. нормальный вектор является изотропным, что и требовалось доказать.

Это доказательство должно быть изменено в вырожденном случае  $v_{,\alpha} = 0$ , поскольку возможно, что  $v = 0$  в конечной области, а не только на гиперповерхности. Подробное исследование показывает, однако, что это не так [см. Carter B., Journ. Math. Phys., 10, 70 (1969)].

Доказанная здесь теорема относится к шварцшильдовской черной дыре, где поверхность  $r = 2M$  является одновременно и горизонтом, и поверхностью бесконечного красного смещения для неподвижных наблюдателей (фактически для всех наблюдателей). Примером такого случая, когда эргоповерхность не совпадает с горизонтом, может служить черная дыра Керра.

**Решение 17.13.** На внешнем горизонте ( $r = r_+$ ) метрика с  $dt = dr = 0$  приобретает вид

$$ds^2 = (r_+^2 + a^2 \cos^2 \vartheta) d\vartheta^2 + \frac{(r_+^2 + a^2)^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2}{(r_+^2 + a^2 \cos^2 \vartheta)}.$$

Следовательно, площадь поверхности горизонта есть

$$A = \iint g^{1/2} d\vartheta d\varphi = \iint (r_+^2 + a^2) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 4\pi (r_+^2 + a^2).$$

Поскольку  $r_+$  — больший корень уравнения  $\Delta = 0$ , мы имеем

$$r_+ = M + (M^2 + Q^2 - a^2)^{1/2},$$

откуда и следует искомый результат.

**Решение 17.14.** Две исходные черные дыры имеют одну и ту же площадь поверхности, так что первоначальная суммарная площадь поверхности (см. результат задачи 17.13, но с  $Q = 0$ ) есть

$$A_{\text{начальн}} = 16\pi M_1 [M_1 + (M_1^2 - a^2)^{1/2}].$$

Конечная черная дыра является шварцшильдовской, откуда

$$A_{\text{конечн}} = 4\pi (2M_2)^2 = 16\pi M_2^2.$$

Неравенство  $A_{\text{конечн}} \geq A_{\text{начальн}}$  приобретает вид

$$M_2^2 \geq M_1^2 + M_1 (M_1^2 - a^2)^{1/2}.$$

Если  $a = M_1$ , то  $M_2 \geq M_1$ . Полная начальная масса была равна  $2M_1$ , так что конечная масса должна равняться по меньшей мере половине этого значения. Итак, согласно теореме Хокинга, до 50% первоначальной массы может быть превращено в уходящее излучение!

Этот процесс является наиболее эффективным среди всех соударений незаряженных черных дыр. Действительно, предположим, что две черные дыры с массами  $M_1$  и  $M_2$  и параметрами момента количества движения  $a_1$  и  $a_2$  сливаются и образуют новую черную дыру с массой  $M_3$  и параметром момента количества движения  $a_3$ . Тогда из неравенства  $A_{\text{конечн}} \geq A_{\text{начальн}}$  следует

$$M_1 [M_1 + (M_1^2 - a_1^2)^{1/2}] + M_2 [M_2 + (M_2^2 - a_2^2)^{1/2}] \leq M_3 [M_3 + (M_3^2 - a_3^2)^{1/2}].$$

Наибольший выход энергии получается при равенстве двух частей; более того, для данных значений  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $a_1$  и  $a_2$  наименьшая масса  $M_3$  (и, следовательно, наибольшее значение излученной энергии) соответствует случаю  $a_3 = 0$ . Аналогично для данного значения  $M_3$  при  $a_3 = 0$  наибольшее значение суммы  $M_1 + M_2$  (опять-таки соответствующее наибольшей излученной энергии) достигается при  $|a_1| = |a_2| = M_1 = M_2$ . Поскольку  $a_3 = 0$ , из сохранения момента количества движения следует, что  $a_1 = -a_2$ , и мы приходим к ситуации, которая была подробно разобрана выше. Окончательный вывод: в процессе соударения и слияния двух керровских черных дыр может быть излучено не более 50% первоначальной массы.

**Решение 17.15.** Площадь поверхности  $A$  и «приведенная площадь поверхности»  $\tilde{A}$  керровской черной дыры определяются следующим образом:

$$A \equiv 8\pi\tilde{A} = 8\pi[M^2 + (M^4 - J^2)^{1/2}], \quad (1)$$

или, что то же самое,

$$\tilde{A}^2 - 2\tilde{A}M^2 + J^2 = 0. \quad (2)$$

Беря первую вариацию от этого выражения, получаем

$$(\tilde{A} - M^2)\delta\tilde{A} = 2\tilde{A}M\delta M - J\delta J. \quad (3)$$

Левая часть равенства неотрицательна в силу второго закона динамики черных дыр (теорема Хокинга из задачи 17.14). Пусть некоторый частный тип волны обладает зависимостью от  $t$  и  $\phi$  вида  $\exp(-i\omega t + im\phi)$ . Как скалярные, так и электромагнитные и гравитационные волны удовлетворяют соотношению

$$\delta M = \frac{\omega}{m} \delta J, \quad (4)$$

откуда следует

$$\left(2AM - J \frac{m}{\omega}\right) \delta M \geq 0. \quad (5)$$

Для случая усиления волны закон сохранения энергии требует, чтобы масса дыры уменьшалась, т. е.  $\delta M < 0$ ; следовательно, второй член в скобках в неравенстве (5) должен быть отрицательным. Это условие можно переписать в виде

$$\frac{2Mr_+}{a} - \frac{m}{\omega} < 0, \quad (6)$$

где  $r_+$  — координатный радиус горизонта событий. Если учесть, что  $m$  и  $\omega$  могут иметь любой знак, условие переписывается окончательно в виде

$$0 \leq \omega \leq \frac{ma}{2Mr_+}, \quad (7)$$

где  $\leq$  означает «расположено между». Обратите внимание, что  $a/2Mr_+$  есть как раз  $\Omega$  — «угловая скорость черной дыры» (см. задачу 17.10).

**Решение 17.16.**

а) Используя результат задачи 7.7

$$\square \Phi = (-g)^{1/2} [(-g)^{1/2} g^{\alpha\beta} \Phi,_{\alpha}]_{,\beta}$$

и соотношение

$$(-g)^{1/2} = (r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta) \sin \vartheta,$$

запишем

$$0 = \left[ -\frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} + a^2 \sin^2 \vartheta \right] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{Mar}{\Delta} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial \varphi} + \left( \frac{1}{\sin^2 \vartheta} - \frac{a^2}{\Delta} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \Delta \frac{\partial}{\partial r} \Phi \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right). \quad (1)$$

б) Пусть в уравнении (1) зависимость от  $t$  и  $\varphi$  имеет вид

$$\Phi(t, r, \vartheta, \varphi) = e^{-i\omega t} e^{im\varphi} R(r) S(\vartheta).$$

Поделив обе части уравнения (1) на  $\Phi$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( \Delta \frac{dR}{dr} \right) + \omega^2 \frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - \frac{4Mar\omega m}{\Delta} + \frac{a^2 m^2}{\Delta} = \\ = \frac{-1}{S \sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{dS}{d\vartheta} \right) + a^2 \omega^2 \sin^2 \vartheta + \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta}. \end{aligned} \quad (2)$$

Поскольку левая часть (2) есть функция только от  $r$ , а правая часть — только от  $\vartheta$ , каждая из них должна быть равна некоторой постоянной  $A$ . Следовательно,

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{dS}{d\vartheta} \right) - \left( a^2 \omega^2 \sin^2 \vartheta + \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} - A \right) S = 0 \quad (3)$$

и

$$\frac{d}{dr} \left( \Delta \frac{dR}{dr} \right) + \left[ \frac{\omega^2 (r^2 + a^2)^2 - 4Mar\omega m + a^2 m^2}{\Delta} - A \right] R = 0. \quad (4)$$

Так как функция  $S$  должна быть регулярной при  $\vartheta = 0$  и  $\vartheta = \pi$ , уравнение (3) представляет собой уравнение для собственных значений  $A$ . Фактически функция  $S$  есть функция типа сферической гармоники; в простейшем случае, когда  $a\omega = 0$ , мы имеем  $S = P_{\ell m}(\cos \vartheta)$  и  $A = \ell(\ell + 1)$ .

в) Удобно (но не обязательно) ввести «черепашью» координату  $r^*$ , удовлетворяющую соотношению

$$dr^*/dr = (r^2 + a^2)/\Delta.$$

Причина этого названия ясна из того факта, что интервал  $(r_+, \infty)$  в координатах  $r$  растягивается до  $(-\infty, \infty)$  в коорди-

натах  $r^*$ . Тогда уравнение (4) приобретает вид

$$\frac{d^2 R}{dr^{*2}} + \frac{2r\Delta}{(r^2+a^2)^2} \frac{dR}{dr^*} + \left[ \omega^2 + \frac{a^2 m^2 - 4Marm\omega - \Delta A}{(r^2+a^2)^2} \right] R = 0. \quad (5)$$

При  $r \rightarrow \infty$  получаем приближенное уравнение

$$\frac{d^2 R}{dr^{*2}} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr^*} \omega^2 R \approx 0,$$

решение которого

$$R \sim r^{-1} e^{\pm i\omega r^*}$$

соответствует входящим и выходящим волнам.

г) При  $\Delta \rightarrow 0$  из уравнения (5) получаем

$$\frac{d^2 R}{dr^{*2}} + \left[ \omega^2 - \frac{2am\omega}{2Mr_+} + \frac{a^2 m^2}{(2Mr_+)^2} \right] R = 0$$

и, следовательно,

$$R \sim e^{\pm i(\omega - m\omega_+) r^*},$$

где

$$\omega_+ \equiv a/2Mr_+.$$

д) Поскольку все физические наблюдатели на горизонте связаны друг с другом преобразованиями Лоренца, все они придут к единодушному заключению, представляет ли некоторое частное решение входящие или выходящие волны. Поэтому мы можем вести все вычисления для любого удобного для нас наблюдателя. Выберем некоторого наблюдателя с постоянным  $r$ , расположенного в самой непосредственной близости к горизонту, но вне его. Поскольку такой наблюдатель находится внутри эргосферы, он будет увлекаться в движение вокруг центра в положительном направлении по углу  $\varphi$  с угловой скоростью

$$\Omega = d\varphi/dt > 0,$$

где  $\Omega = \omega_+$  (см. задачу 17.10). Для такого наблюдателя локальная зависимость от  $t$  и  $r$  решения

$$\Phi = e^{-i\omega t} e^{im\varphi} e^{\pm i(\omega - m\omega_+) r^*} S(\vartheta) \quad (6)$$

имеет вид

$$\Phi = e^{-i(\omega - m\omega_+) t} e^{\pm i(\omega - m\omega_+) r^*} e^{im\tilde{\varphi}} \tilde{S}(\vartheta),$$

где мы положили  $\tilde{\varphi} = \varphi - \omega_+ t$ . Следовательно,  $e^{-i(\omega - m\omega_+) r^*}$  соответствует входящим волнам.

е) Тензор энергии-импульса скалярного поля имеет вид

$$4\pi T_{\alpha\beta} = \Phi_{, \alpha} \Phi_{, \beta}^* - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} |\Phi_{, \gamma} \Phi_{, \gamma}^*|.$$

(Операция комплексного сопряжения необходима, поскольку  $\Phi$



представлено в комплексном виде.) Вектор потока энергии есть

$$J_\beta = -T_{\alpha\beta}\xi^\alpha,$$

где  $\xi$  — временной вектор Киллинга  $\partial/\partial t$  (см. задачу 10.11). Поток энергии, проникающей в горизонт, находится путем интегрирования радиальной компоненты  $J$  по 2-поверхности  $r = r_+$ :

$$\frac{dE}{dt} = \int T^r_t |g|^{1/2} d\vartheta d\varphi.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} 4\pi T^r_t &= \text{Re}(\Phi_{,t}\Phi^*, r) = \text{Re}\left(\Phi_{,t}\Phi^*, r, \frac{r^2+a^2}{\Sigma}\right) = \\ &= \omega(\omega - m\omega_+) S^2(\vartheta) \frac{2Mr_+}{\Sigma}, \end{aligned}$$

имеем

$$\frac{dE}{dt} = \omega(\omega - m\omega_+) \frac{2Mr_+}{4\pi} \int S^2(\vartheta) \sin\vartheta d\vartheta d\varphi;$$

величина  $dE/dt$  отрицательна, т. е. энергия выходит из-под горизонта наружу в том случае, если  $\omega - m\omega_+ < 0$ , иначе говоря, если  $0 < \omega/m < \omega_+$ , что находится в полном согласии с результатом задачи 17.15.

**Решение 17.17.** Предположим, что в дыру введены заряд  $\delta Q$  и энергия  $\delta E$ . Тогда имеем

$$\delta(Q^2 - M^2) = 2Q\delta Q - 2M\delta E. \quad (1)$$

Однако не все значения  $\delta Q$  и  $\delta E$  являются допустимыми. Радиальный «эффективный потенциал» для падающей заряженной частицы в метрике Рейсснера — Нордстрема (см. [1], уравнение 33.32) определяется уравнением

$$r^2 \frac{dr}{d\tau} = - \{(r^2 \delta E - Q\delta Q r)^2 - \Delta(\mu_0^2 r^2 + L_z^2 + \mathcal{L})\}^{1/2}, \quad (2)$$

где  $E$ ,  $L_z$  и  $\mathcal{L}$  — сохраняющиеся величины, а  $\mu_0$  — масса покоя частицы. Для частицы, пересекающей при падении в черную дыру горизонт событий,  $dr/d\tau \leq 0$  на горизонте при  $r = r_+$ . Так как  $\Delta = 0$  при  $r = r_+$ , уравнение (2) принимает вид

$$r^2 \frac{dr}{d\tau} = - (r_+^2 \delta E - Q\delta Q r_+) \leq 0 \quad (3)$$

и, следовательно,  $\delta E > Q\delta Q/r_+$ . Учитывая уравнение (1), имеем

$$\delta(Q^2 - M^2) \leq 2\delta E(r_+ - M) = 2\delta E(M^2 - Q^2)^{1/2}. \quad (4)$$

При  $Q^2 \rightarrow M^2$  правая часть стремится к нулю как квадратный корень из  $(M^2 - Q^2)$ , так что никакими последующими добавлениями  $\delta E$  нельзя сделать интеграл от левой части положительным.

**Решение 17.18.**

$$\begin{aligned} \text{а) } \quad \tilde{\omega}^t \cdot \tilde{\omega}^t &= |g_{tt} - \omega^2 g_{\varphi\varphi}|^{1/2} \tilde{dt} \cdot |g_{tt} - \omega^2 g_{\varphi\varphi}|^{1/2} \tilde{dt} = \\ &= -(g_{tt} - \omega^2 g_{\varphi\varphi}) g_{tt}. \end{aligned}$$

(Мы выбрали знак минус, потому что  $g_{tt} - \omega^2 g_{\varphi\varphi} < 0$ .) В метрике Керра единственным недиагональным членом является  $g_{t\varphi}$ . Построив матрицу, обратную  $g_{\alpha\beta}$ , найдем

$$g^{tt} = g_{tt} - \omega^2 g_{\varphi\varphi},$$

т. е.

$$\tilde{\omega}^t \cdot \tilde{\omega}^t = -1.$$

Аналогично можно вычислить другие скалярные произведения и показать, что

$$\tilde{\omega}^{\hat{\alpha}} \cdot \tilde{\omega}^{\hat{\beta}} = \eta^{\alpha\beta}.$$

б) Дуальный базис  $e_{\hat{\alpha}}$  определяется с помощью соотношения

$$\langle \tilde{\omega}^{\hat{\alpha}}, e_{\hat{\beta}} \rangle = \delta^{\alpha\beta}.$$

Если

$$\tilde{\omega}^{\hat{\alpha}} = A^{\hat{\alpha}}_{\beta} \tilde{\omega}^{\beta} \quad \text{и} \quad e_{\hat{\beta}} = B_{\hat{\beta}}^{\nu} e_{\nu},$$

то матрица  $B_{\hat{\beta}}^{\nu}$  должна быть транспонированной обратной матрицей для  $A^{\hat{\alpha}}_{\beta}$ . Чтобы найти  $B$  из  $A$ , мы можем отделить недиагональную ( $t\varphi$ )-часть от диагональной ( $r\theta$ )-части; тогда из

$$\begin{bmatrix} \tilde{\omega}^{\hat{t}} \\ \tilde{\omega}^{\hat{\varphi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |g_{tt} - \omega^2 g_{\varphi\varphi}|^{1/2} & 0 \\ -\omega (g_{\varphi\varphi})^{1/2} & (g_{\varphi\varphi})^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{dt} \\ \tilde{d\varphi} \end{bmatrix}$$

следует

$$\begin{bmatrix} e_{\hat{t}} \\ e_{\hat{\varphi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |g_{tt} - \omega^2 g_{\varphi\varphi}|^{-1/2} & \omega |g_{tt} - \omega^2 g_{\varphi\varphi}|^{-1/2} \\ 0 & (g_{\varphi\varphi})^{-1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_t \\ e_{\varphi} \end{bmatrix}.$$

Поскольку ( $r\theta$ )-часть диагональная, обратная матрица для нее находится элементарно:

$$e_{\hat{r}} = (\Delta/\Sigma)^{1/2} e_r, \quad e_{\hat{\theta}} = \Sigma^{-1/2} e_{\theta}.$$

в) Поле 4-скоростей свободно от вращения, если  $\omega_{\alpha\beta} = 0$  (см. задачу 5.18) или, что то же самое, если и ортогонально гиперповерхности

$$u_{[\alpha; \beta\mu\nu]} = 0$$

(см. задачу 7.23). Быстрее всего можно проверить выполнение этого условия, если воспользоваться базисными 1-формами и экви-

валентностью  $u_{[\hat{\alpha}; \hat{\beta}]}$  и  $d\tilde{\omega}^{\hat{t}}$ . Тогда условие

$$u_{[\hat{\alpha}; \hat{\beta}]} u^{\hat{\alpha}} = 0$$

будет равносильно условию

$$d\tilde{\omega}^{\hat{t}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{t}} = 0.$$

Но

$$\tilde{\omega}^{\hat{t}} = \alpha dt,$$

где

$$\alpha = |g_{tt} - \omega^2 g_{\varphi\varphi}|^{1/2} = \alpha(r, \vartheta),$$

так что

$$d\tilde{\omega}^{\hat{t}} = \alpha_{,r} \tilde{dr} \wedge \tilde{dt} + \alpha_{,\vartheta} \tilde{d\vartheta} \wedge \tilde{dt}$$

и

$$d\tilde{\omega}^{\hat{t}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{t}} = 0$$

ввиду того, что  $\tilde{dt} \wedge \tilde{dt} = 0$  (здесь  $\wedge$  означает полностью антисимметризованное прямое произведение).

г) 4-скорость наблюдателя с нулевым моментом количества движения определяется выражением

$$u = e_t = |g_{tt} - \omega^2 g_{\varphi\varphi}|^{-1/2} (e_t + \omega e_\varphi).$$

Векторы  $e_t$  и  $e_\varphi$  суть векторы Киллинга. Векторное поле  $e_t + \omega e_\varphi$  не является векторным полем Киллинга, так как угловая скорость  $\omega$  не является постоянной. Тем не менее любой конкретный наблюдатель с нулевым моментом количества движения движется вдоль вектора Киллинга  $\xi = e_t + \omega_0 e_\varphi$  ( $\omega_0$  — фиксированная постоянная, которую мы выбираем равной  $\omega$  для радиального расстояния конкретного рассматриваемого нами наблюдателя с нулевым количеством движения). Следовательно, можно воспользоваться результатами задачи 10.14 и получить

$$a = \frac{1}{2} \nabla \ln |\xi \cdot \xi| = \frac{1}{2} \nabla \ln |g_{tt} + 2\omega_0 g_{t\varphi} + \omega_0^2 g_{\varphi\varphi}|.$$

Подставляя  $g_{t\varphi} = -\omega g_{\varphi\varphi}$ , для  $\omega = \omega_0$  окончательно получаем

$$a = \frac{1}{2} \nabla \ln |g_{tt} - \omega^2 g_{\varphi\varphi}|.$$

**Решение 17.19.** Если в метрике Керра в координатах Буайе — Линдквиста положить  $t = \text{const}$  и  $r = r_+$ , мы получим метрику горизонта

$$ds^2 = (r_+^2 + a^2 \cos^2 \vartheta) d\vartheta^2 + (2Mr_+)^2 \sin^2 \vartheta (r_+^2 + a^2 \cos^2 \vartheta)^{-1} d\varphi^2. \quad (1)$$

(При записи метрического коэффициента  $g_{\varphi\varphi}$  мы использовали соотношение  $r_+^2 + a^2 = 2Mr_+$ .) Гауссова кривизна  $K$  2-поверхности

сти — это то же самое, что Риманова кривизна из задачи 9.23, где мы вычисляли тензор Римана для 2-мерной метрики. Для наших целей удобно воспользоваться некоторым ортонормированным базисом. Для метрики вида

$$ds^2 = e^{2\alpha_1} (dx^1)^2 + e^{2\alpha_2} (dx^2)^2 \quad (2)$$

положим

$$\tilde{\omega}^{\hat{1}} = e^{\alpha_1} \tilde{dx}^1, \quad \tilde{\omega}^{\hat{2}} = e^{\alpha_2} \tilde{dx}^2 \quad (3)$$

и получим

$$K = R_{\hat{1}\hat{2}\hat{1}\hat{2}} = R_{1212} e^{-2(\alpha_1 + \alpha_2)}. \quad (4)$$

Быстрее всего найти тензор Римана с помощью 1-форм, как в задачах 8.27 и 9.20. Поскольку

$$d\tilde{\omega}^{\hat{1}} = e^{\alpha_1} \tilde{d}\alpha_1 \wedge \tilde{dx}^1 = e^{\alpha_1} \alpha_{1,2} \tilde{dx}^2 \wedge \tilde{dx}^1 = \alpha_{1,2} e^{-\alpha_1} \tilde{\omega}^{\hat{2}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{1}},$$

а выражение для  $\tilde{\omega}^{\hat{2}}$  отличается от приведенного только заменой индексов 1 на 2 и наоборот, находим

$$\tilde{\omega}^{\hat{1}}_{\hat{2}} = e^{-\alpha_2} \alpha_{1,2} \tilde{\omega}^{\hat{1}} - e^{-\alpha_1} \alpha_{2,1} \tilde{\omega}^{\hat{2}}. \quad (5)$$

(Напомним, что  $d\tilde{\omega}^{\hat{\alpha}} = -\tilde{\omega}^{\hat{\alpha}}_{\hat{\beta}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\beta}}$  и  $\tilde{\omega}^{\hat{\alpha}}_{\hat{\beta}} = -\tilde{\omega}^{\hat{\beta}}_{\hat{\alpha}}$ .) Единственная нетривиальная форма кривизны есть

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{\hat{1}}_{\hat{2}} &= d\tilde{\omega}^{\hat{1}}_{\hat{2}} + \tilde{\omega}^{\hat{1}}_{\hat{\alpha}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\alpha}}_{\hat{2}} = \\ &= d(\alpha_{1,2} e^{\alpha_1 - \alpha_2} \tilde{dx}^1 - \alpha_{2,1} e^{\alpha_2 - \alpha_1} \tilde{dx}^2) + 0 = \\ &= (\alpha_{1,2} e^{\alpha_1 - \alpha_2})_2 \tilde{dx}^2 \wedge \tilde{dx}^1 - (\alpha_{2,1} e^{\alpha_2 - \alpha_1})_1 \tilde{dx}^1 \wedge \tilde{dx}^2 = \\ &= -e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)} [(e^{\alpha_2,1} e^{-\alpha_1})_{,1} + (e^{\alpha_1,2} e^{-\alpha_2})_{,2}] \tilde{\omega}^{\hat{1}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{2}}. \end{aligned}$$

Так как

$$\mathcal{R}^{\hat{1}}_{\hat{2}} = R_{\hat{1}\hat{2}\hat{1}\hat{2}} \tilde{\omega}^{\hat{1}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{2}},$$

имеем

$$K = R_{\hat{1}\hat{2}\hat{1}\hat{2}} = -e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)} [(e^{\alpha_2,1} e^{-\alpha_1})_{,1} + (e^{\alpha_1,2} e^{-\alpha_2})_{,2}]. \quad (6)$$

Из уравнения (6) с использованием явного вида метрики (1), где  $x^1 = \theta$ ,  $x^2 = \varphi$ , находим

$$K = 2Mr_+ \frac{r_+^2 - 3a^2 \cos^2 \theta}{(r_+^2 + a^2 \cos^2 \theta)^3}. \quad (7)$$

Обратите внимание, что если  $r_+^2 - 3a^2 < 0$ , то кривизна  $K$  отрицательна в некотором промежутке значений  $\theta$  вблизи полюсов ( $\theta = 0, \pi$ ). Но если кривизна  $K$  отрицательна, то поверхность не может быть глобально погружена в евклидово 3-пространство. Так как

$$r_+ = M + (M^2 - a^2)^{1/2},$$

условие

$$r_+^2 - 3a^2 < 0$$

эквивалентно условию

$$a > 3^{1/2} M/2.$$

Теорема Гаусса — Бонне гласит:

$$\int K d^2S = 2\pi\chi,$$

где  $\chi$  — эйлерова характеристика поверхности ( $\chi = 2$  для сферы,  $\chi = 0$  для тора и т. п.). Поскольку

$$d^2S = (g)^{1/2} d\vartheta d\varphi = 2Mr_+ \sin\vartheta d\vartheta d\varphi,$$

имеем

$$\begin{aligned} \chi &= (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi (2Mr_+)^2 \frac{r_+^2 - 3a^2 \cos^2\vartheta}{(r_+^2 + a^2 \cos^2\vartheta)^3} \sin\vartheta d\vartheta = \\ &= (2Mr_+)^2 2 \int_0^1 \frac{r_+^2 - 3a^2x^2}{(r_+^2 + a^2x^2)^3} dx = (2Mr_+)^2 2 \left[ \frac{x}{(r_+^2 + a^2x^2)^2} \right]_0^1 = 2, \end{aligned}$$

т. е. поверхность горизонта топологически эквивалентна 2-сфере. [Более подробное рассмотрение см. в статье Смарра: *Smarr L.*, *Phys. Rev. D7*, 289 (1973)].

**Решение 17.20.** Явление усиления падающего на черную дыру излучения, описанное в задачах 17.15 и 17.16, на квантовомеханическом языке соответствует вынужденному излучению (или отрицательному поглощению). Если нам известна интенсивность вынужденного излучения, то интенсивность спонтанного излучения можно найти следующим образом.

Пусть  $p$  — вероятность спонтанного испускания одного кванта на единицу объема фазового пространства. Если число падающих квантов равно  $N$ , то вероятность получения  $N+1$  испущенных квантов в процессе вынужденного излучения равна  $(N+1)p$ , так как интересующие нас кванты (гравитоны, фотоны) являются бозонами. Чтобы упростить рассуждения, предположим, что  $p \ll 1$ , тогда мы не должны рассматривать случай излучения более одного дополнительного кванта. Размерность результата не изменилась бы, если бы мы даже отбросили это упрощающее предположение. Математическое ожидание для числа испущенных дополнительных квантов равно

$$\begin{aligned} \langle \Delta N \rangle &= (\text{число дополнительных квантов}) \times \\ &\times (\text{вероятность испускания этого числа}) = 1 \times (N+1)p. \end{aligned}$$

Параметр усиления есть

$$A \equiv \frac{\langle \Delta N \rangle}{N} = \left( 1 + \frac{1}{N} \right) p. \quad (1)$$

В классическом пределе ( $N \rightarrow \infty$ ) имеем  $A \approx \rho$ . Сформулированное Ферми «золотое правило квантовой механики» гласит, что интенсивность спонтанного излучения определяется формулой

$$\frac{dN}{dt} \sim \int_{\text{Фазовое пространство}} \rho. \quad (2)$$

Заменяем в уравнении (2)  $\rho$  на  $A$  и вспомним, что на «классическом» языке этот эффект описывается в терминах «мод» с «квантовыми числами»  $\ell$  и  $m$ , а также частоты  $\omega$ . Следовательно,

$$\frac{dN}{dt} \sim \sum_{\ell, m} \int A d\omega. \quad (3)$$

Как и во всех задачах о «просачивании» через потенциальный барьер,  $A$  резко падает до нуля для больших значений  $\ell$  и  $m$ . Точно так же обстоит дело и в задачах 17.15 и 17.16:  $A$  не равно нулю для  $\omega \sim 1/M$  в области  $\Delta\omega \sim 1/M$ , где  $M$  — масса черной дыры. Поскольку для малых значений  $\ell$  и  $m$  параметр усиления  $A$  порядка единицы, заменим в уравнении (3)  $A$  на 1 и снимем знак суммирования. Тогда

$$\frac{dN}{dt} \sim \Delta\omega \sim \frac{1}{M}.$$

Черная дыра будет терять энергию (процесс «квантового испарения» черных дыр!) со скоростью

$$\frac{dE}{dt} \sim \hbar\omega \frac{dN}{dt} \sim \frac{\hbar}{M^2}.$$

Отсюда получаем, что скорость потери момента количества движения есть

$$\frac{dJ}{dt} \sim \frac{m}{\omega} \frac{dE}{dt} \sim \frac{\hbar}{M}.$$

Следовательно, постоянная времени для потери момента количества движения равна

$$\tau \sim J/(dJ/dt) \sim M^2(\hbar/M) \sim M^3/\hbar \sim (M/10^{15} \text{ г})^3 10^{10} \text{ лет}.$$

Тогда для  $M \lesssim 10^{15}$  г момент количества движения  $J$  уже должен был бы практически обратиться в нуль за счет процесса «квантового испарения». Для  $M \approx 10^{33}$  г доля потерянного за  $10^{10}$  лет момента количества движения составляет  $\approx 10^{-54}$ .

**Решение 17.21.** Для всех статических метрик пространства-времени «поверхность бесконечного красного смещения» ( $g_{00} = 0$ ) совпадает с горизонтом (см. задачу 17.12). Следовательно, если рассматриваемая метрика описывает черную дыру, то местополо-

жение поверхности этой дыры должно даваться соотношением  $g_{00} = 0$  или, в данном случае,  $\bar{\rho} = 1/2$ , где  $\bar{\rho} \equiv \rho/m$ . Теперь мы покажем, что на самом деле поверхность  $\bar{\rho} = 1/2$  не содержится в том многообразии, которое является асимптотически плоским при  $\bar{\rho} \rightarrow \infty$  и, следовательно, не может быть достигнута ни одним из объектов нашей Вселенной.

Из вида метрического коэффициента  $g_{\rho\rho}$  следует, что  $\bar{\rho} = 1,5$  соответствует поверхности, находящейся на бесконечном собственном радиальном расстоянии от любой точки с  $\bar{\rho} > 1,5$ . Чтобы показать, что поверхность  $\bar{\rho} = 1,5$  не является достижимой за любой конечный промежуток собственного времени и, таким образом, не принадлежит к асимптотически плоскому многообразию, достаточно рассмотреть радиальные изотропные геодезические. (Читатель может проверить, что в случае нерадиальных или времениподобных геодезических дело обстоит даже еще хуже.) Имеем

$$g_{\rho\rho} (p^\rho)^2 + g^{00} (p_0)^2 = 0,$$

или

$$\frac{d\rho}{d\lambda} = \left(\bar{\rho} - \frac{3}{2}\right) \frac{\left(\bar{\rho} + \frac{1}{2}\right)}{\left(\bar{\rho} - \frac{1}{2}\right)^2} p_0,$$

где  $\lambda$  — аффинный параметр. Если вспомнить, что  $p_0$  — интеграл движения, поскольку метрика стационарна, то из приведенного выше уравнения следует

$$p_0^{-1} \int_{\rho}^{\bar{\rho} = 3/2} \frac{\left(\bar{\rho} - \frac{1}{2}\right)^2 d\rho}{\left(\bar{\rho} - \frac{3}{2}\right)\left(\bar{\rho} + \frac{1}{2}\right)} = \int_{\lambda}^{\lambda_0} d\lambda.$$

Так как интеграл в левой части расходится при  $\bar{\rho} = 3/2$ , поверхность  $\bar{\rho} = 3/2$  удалена на бесконечное аффинное расстояние. При  $\bar{\rho} \geq 3/2$  отсутствуют какие-либо сингулярности, и  $\bar{\rho}$  является монотонно убывающей координатой для радиально падающих фотонов и частиц. Поэтому поверхность  $\bar{\rho} = 1/2$ , так же как и поверхность  $\bar{\rho} = 3/2$ , должна находиться вне физического многообразия.

Приведенный выше вывод свидетельствует также о том, что поверхность звезды, коллапсирующей таким образом, чтобы индуцировать рассматриваемую вакуумную метрику, никогда не может достигнуть  $\bar{\rho} = 3/2$ . Следовательно, для реалистических физических систем данная метрика реализуема только при  $\bar{\rho} > 3/2$ .

## ГЛАВА 18

**Решение 18.1.** Искомая мощность гравитационного излучения определяется квадратом третьей производной по времени от квадрупольного момента:

$$\text{Мощность} = \frac{G}{5c^5} (\ddot{\ddot{X}})^2 \sim \frac{GM^2L^4}{5c^5 t^3}.$$

Соответствующие параметры для среднего массачусетского автомобилиста: масса кулака и предплечья  $M \approx 2 \cdot 10^3$  г; длина предплечья  $L \approx 50$  см; средний период одного «сотрясения»  $t \approx 0,2$  с. Ведя вычисления в единицах СГС, получаем, что мощность излучения составляет величину порядка  $2 \cdot 10^{-48}$  эрг/с.

Чтобы подсчитать полную энергию, расходуемую в этом процессе автомобилистом, воспользуемся тем фактом, что мускулы являются почти полностью неконсервативными, так что на каждое «сотрясение» кулаком уходит энергия, приблизительно равная максимальной кинетической энергии всей движущейся руки:

$$\text{Мощность} = \frac{1}{2} M \frac{L^2}{t^2} \cdot \frac{1}{t} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ эрг/с.}$$

Таким образом, «коэффициент полезного действия» этого процесса равен примерно  $10^{-51}$ .

**Решение 18.2.** Гравитационная энергия связи системы порядка  $M^2/R$ , а кинетическая энергия порядка  $MR^2/T_{\text{дин}}^2$ , где  $T_{\text{дин}}$  — некоторое характерное время, описывающее движение системы. Из теоремы вириала известно, что для систем, находящихся в равновесии,

$$T_{\text{дин}}^2 \sim R^3/M.$$

Скорость потери энергии на гравитационное излучение определяется квадратом третьей производной по времени от квадрупольного момента и равна примерно

$$P^{GW} \sim M^2 R^4 / T_{\text{дин}}^5.$$

Время, необходимое для того, чтобы реакция излучения заметно повлияла на систему, есть время, необходимое для излучения заметной доли ее энергии в виде гравитационных волн

$$T = \frac{E_{\text{кин}}}{P^{GW}} \sim \frac{T_{\text{дин}}^4}{MR^2} \sim \frac{RT_{\text{дин}}^2}{M^2}.$$



Тогда отношение этого «времени гравитационного затухания» к динамическому характерному времени системы будет порядка

$$\frac{T}{T_{\text{дин}}} \sim \frac{RT_{\text{дин}}}{M^2} \sim \left(\frac{R}{M}\right)^{3/2}.$$

Очевидно, что силы реакции гравитационного излучения будут играть существенную роль только в релятивистских компактных системах.

**Решение 18.3.** Три независимые ориентации диполя соответствуют трем компонентам некоторого трехмерного вектора. Поскольку квадруполью отвечает трехмерный тензор второго ранга (9 компонент), который является симметричным (3 ограничения) и бесследовым (1 ограничение), то для него существует 5 независимых «ориентаций». Примером пяти независимых «квадрупольных» тензоров могут служить пять тензоров, у которых все компоненты равны нулю, кроме

$$I_{zz} = -\frac{1}{2} I_{xx} = -\frac{1}{2} I_{yy} = 1,$$

$$I_{yy} = -\frac{1}{2} I_{xx} = -\frac{1}{2} I_{zz} = 1,$$

$$I_{xy} = I_{yx}, \quad I_{xz} = I_{zx}, \quad I_{yz} = I_{zy}.$$

**Решение 18.4.** Предположим, что стержень расположен в плоскости  $xy$  и вращается вокруг оси  $z$ . Если  $\mu$  — масса на единицу длины стержня, то единственными *зависящими от времени* компонентами тензора приведенного квадрупольного момента будут

$$\ddot{I}_{xx} = \mu \cos^2(\omega t) \cdot 2 \int_0^{l/2} x^2 dx = \frac{\mu l^3}{12} \cos^2(\omega t) = \frac{Ml^2}{24} \cos(2\omega t) + \text{const},$$

$$\ddot{I}_{yy} = -\frac{Ml^2}{24} \cos(2\omega t) + \text{const},$$

$$\ddot{I}_{xy} = \ddot{I}_{yx} = \frac{Ml^2}{24} \sin(2\omega t),$$

так что

$$L_{GW} = \frac{1}{5} \langle \ddot{I}_{jk} \ddot{I}_{jk} \rangle = \frac{(2\omega)^6}{5} \left(\frac{Ml^2}{24}\right)^2 \langle 2\cos^2 2\omega t + 2\sin^2 2\omega t \rangle = \frac{2}{45} \omega^6 M^2 l^4.$$

(Обратите внимание, что мы используем систему единиц, где  $G = c = 1$ )

Чтобы вычислить избыточный заряд на концах стержня, приравняем электростатическую и центробежную силы:

$$|e\nabla\Phi| = r\omega^2,$$

где  $\Phi$  — электростатический потенциал, а  $e$  и  $m$  — соответственно заряд и масса электрона. Тогда по порядку величины плотность заряда, «индуцированного» центробежными силами, будет равна

$$\rho \sim -\nabla^2\Phi \sim -(m/e)\omega^2.$$

Разумеется, это обеднение электронами (плотность  $\rho$  отрицательна!) в основной части стержня будет уравновешено избыточными электронами, «приплюснутыми» к концам стержня. Ясно, что их заряд должен быть равен  $(m/e)\omega^2\ell A$ , где  $A$  — площадь поперечного сечения стержня. В результате стержень превращается в электрический квадруполь с моментом порядка  $(m/e) \times \omega^2\ell^3 A$ . Мощность электромагнитного квадрупольного излучения, обусловленного этим «индуцированным» моментом, будет равна по порядку величины квадрату квадрупольного момента, умноженному на  $\omega^6$ , т. е.  $\omega^{10}(m/e)^2\ell^6 A^2$ . Тогда отношение электромагнитного затухания к гравитационному затуханию есть

$$\frac{L_{EM}}{L_{GW}} \sim \frac{\omega^{10}(m/e)^2\ell^6 A^2}{\omega^6 \rho^2 A^2 \ell^6} = \left[ \frac{(m/e)\omega^2}{\rho} \right]^2.$$

В системе единиц, где  $G=c=1$ ,  $(m/e) \approx 0,5 \cdot 10^{-21}$ ,  $\rho$  ( $10 \text{ г/см}^3$ )  $\approx 10^{-27}$  и  $\omega$  ( $1 \text{ кГц}$ )  $\approx \frac{1}{3} \cdot 10^{-7}$ , откуда

$$L_{EM}/L_{GW} \sim 10^{-18}.$$

На сей раз верх одержало гравитационное излучение.

**Решение 18.5.** Сила реакции излучения, действующая на элемент объема источника, есть

$$dF_i = -\Phi_{,i} \rho d^3x.$$

Скорость, с которой этот элемент объема теряет энергию, равна скорости, с которой силы реакции излучения совершают над ним работу, т. е.  $v^i dF_i$ , где  $v$  — скорость элемента объема источника. Тогда для всего источника имеем

$$\frac{dE}{dt} = - \int \Phi_{,i} v^i \rho d^3x = \int \Phi (v^i \rho)_{,i} d^3x.$$

Здесь мы использовали теорему Гаусса о дивергенции и, чтобы получить второе равенство, оценили значение интеграла по некоторой поверхности, лежащей вне источника. Уравнение непрерывности гласит:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{v}\rho) = -\partial\rho/\partial t,$$

и поэтому

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= - \int \Phi \frac{\partial\rho}{\partial t} d^3x = -\frac{1}{5} \mathcal{I}_{jk}^{(5)} \frac{d}{dt} \int x^j x^k \rho d^3x = \\ &= -\frac{1}{5} \mathcal{I}_{jk}^{(5)} \frac{d}{dt} \left( \mathcal{I}_{jk} + \frac{1}{3} \delta_{jk} \int r^2 \rho d^3x \right). \end{aligned}$$

Поскольку  $\mathcal{I}_{jk}\delta_{jk}=0$ , последний член обращается в нуль, и мы получаем

$$dE/dt = -\left(\frac{1}{5}\right) \mathcal{I}_{jk}^{(5)} \dot{\mathcal{I}}_{jk}.$$

Найдем среднее по времени от этого выражения для нескольких периодов колебаний. Так как мы предполагаем, что на протяжении этого промежутка времени вековые изменения параметров источника малы, имеем

$$\frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{I}_{jk}^{(5)} \dot{\mathcal{I}}_{jk} dt \approx \frac{1}{T} \int_0^T \ddot{\mathcal{I}}_{jk} \dot{\mathcal{I}}_{jk} dt$$

и

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = -\frac{1}{5} \langle \ddot{\mathcal{I}}_{jk} \dot{\mathcal{I}}_{jk} \rangle.$$

Чтобы найти скорость уменьшения момента количества движения, воспользуемся тем фактом, что для некоторого элемента объема источника тормозящий момент сил реакции излучения есть

$$\mathbf{r} \times d\mathbf{F} = -\mathbf{r} \times \nabla \Phi \rho d^3x = \frac{d\mathbf{J}}{dt},$$

а для всего источника

$$\begin{aligned} \frac{dJ^i}{dt} &= -e^{ijk} \int x^j \Phi_{,k} \rho d^3x = -e^{ijk} \int x^j \left( \frac{2}{5} \mathcal{I}_{km}^{(5)} x^m \right) \rho d^3x = \\ &= -\frac{2}{5} e^{ijk} \mathcal{I}_{km}^{(5)} \int x^j x^m \rho d^3x = -\frac{2}{5} e^{ijk} \mathcal{I}_{km}^{(5)} \mathcal{I}_{jm}. \end{aligned}$$

Усредняя по времени и интегрируя по частям так же, как и выше, получаем

$$\left\langle \frac{dJ^i}{dt} \right\rangle = -\frac{2}{5} e^{ijk} \langle \ddot{\mathcal{I}}_{km} \dot{\mathcal{I}}_{jm} \rangle.$$

**Решение 18.6.** Пусть  $m_1$ ,  $m_2$  и  $r_1$ ,  $r_2$  суть соответственно массы и расстояния от центра масс для двух звезд, обращающихся вокруг центра масс с угловой частотой  $\omega$ . Из ньютоновской механики известно, что

$$r_1 m_1 = r_2 m_2 = R\mu,$$

где  $R \equiv r_1 + r_2$ , а  $\mu$  — приведенная масса, равная  $m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ . Теперь полную энергию двойной системы можно записать в виде функции от  $M \equiv m_1 + m_2$ ,  $R$  и  $\mu$ :

$$E = \left( \frac{1}{2} r_1^2 m_1 + \frac{1}{2} r_2^2 m_2 \right) \omega^2 - \frac{m_1 m_2}{R} = \frac{1}{2} \omega^2 R^2 \mu - \frac{\mu M}{R} = -\frac{1}{2} \frac{\mu M}{R}.$$

Здесь мы воспользовались также законами Кеплера.

Теперь можно рассчитать мощность, рассеиваемую системой в виде гравитационных волн, если вычислить значение приведенного квадрупольного момента

$$\bar{I}_{jk} \equiv \int \rho \left( x_j x_k - \frac{1}{3} r^2 \delta_{jk} \right) d^3x.$$

Обратите внимание, что «приводящий член»  $\int \frac{1}{3} \rho r^2 \delta_{jk} d^3x$  не меняется со временем, и поэтому им можно пренебречь. Направим ось  $z$  вдоль оси орбитального обращения, и пусть  $\varphi$  будет азимутальным углом — от оси  $x$  до линии, соединяющей обе звезды. Тогда, если не учитывать не зависящие от времени члены, можно записать:

$$I_{xx} = (r_1^2 m_1 + r_2^2 m_2) \cos^2 \varphi = \frac{1}{2} R^2 \mu \cos 2\varphi + \text{const},$$

$$I_{yy} = -\frac{1}{2} R^2 \mu \cos 2\varphi + \text{const},$$

$$I_{xy} = I_{yx} = \frac{1}{2} R^2 \mu \sin 2\varphi.$$

Поскольку  $\varphi = \omega t$ , мы можем прямо продифференцировать трижды по времени эти выражения, а затем взять сумму  $\ddot{\bar{I}}_{jk} \ddot{\bar{I}}_{jk}$  и усреднить ее по времени. В результате будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} \langle \ddot{\bar{I}}_{jk} \ddot{\bar{I}}_{jk} \rangle &= \frac{1}{5} (2\omega)^6 \left( \frac{1}{2} R^2 \mu \right)^2 \langle \sin^2 2\omega t + \sin^2 2\omega t + 2 \cos^2 2\omega t \rangle = \\ &= \frac{32}{5} \omega^6 R^4 \mu^2 = \frac{32}{5} \frac{M^3 \mu^2}{R^5} = P_{GW}. \end{aligned}$$

Поскольку эта мощность излучается за счет уменьшения энергии орбитального движения, получаем

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\mu M}{R^2} \frac{dR}{dt} = -P_{GW} = -\frac{32}{5} \frac{M^3 \mu^2}{R^5}.$$

Результирующее дифференциальное уравнение

$$R^3 \frac{dR}{dt} = -\frac{64}{5} M^3 \mu$$

легко интегрируется и приводит к решению

$$R^4 = - (256/5) M^3 \mu t + \text{const}.$$

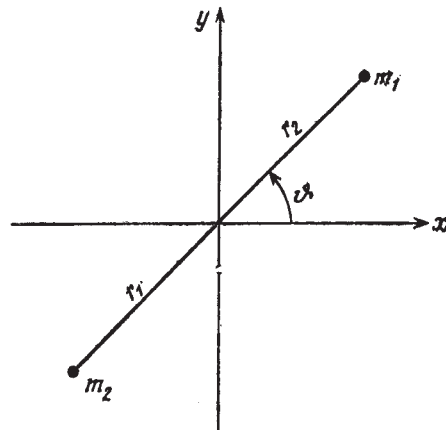
Если обозначить через  $t_0$  время, через которое расстояние между звездами уменьшится до нуля в согласии с данной формулой, то получим

$$R^4 = \frac{256}{5} M^3 \mu (t_0 - t).$$

Время  $t_0$  можно найти, если заметить, что при  $t=0$  расстояние  $R$  равно некоторому начальному значению  $R_{\text{нач}}$ . Следовательно,

$$t_0 = \frac{5R_{\text{нач}}^3}{256M^2\mu}.$$

**Решение 18.7.** Значения большой полуоси и эксцентриситета орбиты, выраженные через полную энергию орбитального движе-



Фиг. 32.

ния  $E$  и момент количества движения  $L$ , суть

$$a = -m_1 m_2 / 2E, \tag{1}$$

$$e^2 = 1 + \frac{2EL^2(m_1 + m_2)}{m_1^3 m_2^3}, \tag{2}$$

откуда

$$\frac{da}{dt} = \frac{m_1 m_2}{2E^2} \frac{dE}{dt}, \tag{3}$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{m_1 + m_2}{m_1^3 m_2^3 e} \left( L^2 \frac{dE}{dt} + 2EL \frac{dL}{dt} \right). \tag{4}$$

Если расстояние между двумя частицами (см. фиг. 32) есть  $r$ , причем

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\vartheta}, \tag{5}$$

тогда

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r, \quad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r,$$

так что компоненты тензора квадрупольного момента имеют вид

$$\begin{aligned} I_{xx} &= m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2 \cos^2 \vartheta, \\ I_{yy} &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2 \sin^2 \vartheta, \\ I_{xy} &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta, \\ I &\equiv I_{xx} + I_{yy} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Согласно ньютоновским уравнениям движения,

$$\dot{\vartheta} = \frac{[(m_1 + m_2) a (1 - e^2)]^{1/2}}{r^2}, \quad (7)$$

поэтому из уравнения (5) следует

$$\dot{r} = e \sin \vartheta \left[ \frac{m_1 + m_2}{a(1 - e^2)} \right]^{1/2}. \quad (8)$$

Вычислим теперь последовательные производные по времени от  $I_{ij}$ , используя для упрощения получающихся выражений уравнения (5), (7) и (8). Будем иметь

$$\dot{I}_{xx} = \frac{-2m_1 m_2 r \cos \vartheta \sin \vartheta}{[(m_1 + m_2) a (1 - e^2)]^{1/2}}, \quad (9)$$

$$\ddot{I}_{xx} = \frac{-2m_1 m_2}{a(1 - e^2)} (\cos 2\vartheta + e \cos^3 \vartheta), \quad (10)$$

$$\ddot{I}_{xx} = \frac{2m_1 m_2}{a(1 - e^2)} (2 \sin 2\vartheta + 3e \cos^2 \vartheta \sin \vartheta) \dot{\vartheta}, \quad (11)$$

$$\dot{I}_{yy} = \frac{2m_1 m_2}{[(m_1 + m_2) a (1 - e^2)]^{1/2}} r (\sin \vartheta \cos \vartheta + e \sin \vartheta), \quad (12)$$

$$\ddot{I}_{yy} = \frac{2m_1 m_2}{a(1 - e^2)} (\cos 2\vartheta + e \cos \vartheta + e \cos^3 \vartheta + e^2), \quad (13)$$

$$\ddot{I}_{yy} = \frac{-2m_1 m_2}{a(1 - e^2)} (2 \sin 2\vartheta + e \sin \vartheta + 3e \cos^2 \vartheta \sin \vartheta) \dot{\vartheta}, \quad (14)$$

$$\dot{I}_{xy} = \frac{m_1 m_2 r (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta + e \cos \vartheta)}{[(m_1 + m_2) a (1 - e^2)]^{1/2}}, \quad (15)$$

$$\ddot{I}_{xy} = \frac{-2m_1 m_2}{a(1 - e^2)} (\sin 2\vartheta + e \sin \vartheta + e \sin \vartheta \cos^2 \vartheta), \quad (16)$$

$$\ddot{I}_{xy} = \frac{-2m_1 m_2}{a(1 - e^2)} (2 \cos 2\vartheta - e \cos \vartheta + 3e \cos^3 \vartheta) \dot{\vartheta}, \quad (17)$$

$$\ddot{I} = \ddot{I}_{xx} + \ddot{I}_{yy} = \frac{-2m_1 m_2 e \sin \vartheta \dot{\vartheta}}{a(1 - e^2)}. \quad (18)$$

Тогда скорость потери энергии равна

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= -\frac{1}{5} \ddot{X}_{jk} \ddot{X}_{jk} = -\frac{1}{5} \left( \ddot{I}_{jk} \ddot{I}_{jk} - \frac{1}{3} \ddot{I}^2 \right) = \\ &= -\frac{1}{5} \left( \ddot{I}_{xx}^2 + 2\ddot{I}_{xy}^2 + \ddot{I}_{yy}^2 - \frac{1}{3} \ddot{I}^2 \right) = \\ &= \frac{-8m_1^2 m_2^2}{15a^2 (1-e^2)^2} [12(1+e \cos \vartheta)^2 + e^2 \sin^2 \vartheta] \dot{\vartheta}^3. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались соотношениями (9)–(18) и обычными алгебраическими упрощениями. Теперь необходимо усреднить полученный результат по периоду одного обращения по орбите. Согласно третьему закону Кеплера, этот период равен

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\dot{\vartheta}} d\vartheta = \frac{2\pi a^{3/2}}{(m_1 + m_2)^{1/2}},$$

откуда

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dE}{dt} dt = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{dE}{dt} \frac{1}{\dot{\vartheta}} d\vartheta = \\ &= \frac{-32}{5} \frac{m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{a^5 (1-e^2)^{7/2}} \left( 1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Аналогично скорость потери момента количества движения есть

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= -\frac{2}{5} \varepsilon_{zlj} \ddot{X}_{lk} \ddot{X}_{kj} = -\frac{2}{5} \varepsilon_{zlj} \ddot{I}_{lk} \ddot{I}_{kj} = -\frac{2}{5} [\ddot{I}_{xy} (\ddot{I}_{yy} - \ddot{I}_{xx}) + \\ &+ \ddot{I}_{xy} (\ddot{I}_{xx} - \ddot{I}_{yy})] = -\frac{8}{5} \frac{m_1^2 m_2^2}{a^2 (1-e^2)^2} (4 + 10e \cos \vartheta + e^2 (9 \cos^2 \vartheta - \\ &- 1) + e^3 (3 \cos^3 \vartheta - \cos \vartheta)] \dot{\vartheta}. \end{aligned}$$

Усредняя по времени, получаем

$$\left\langle \frac{dL}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{dL}{dt} \frac{1}{\dot{\vartheta}} d\vartheta = -\frac{32}{5} \frac{m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)^{1/2}}{a^{7/2} (1-e^2)^2} \left( 1 + \frac{7}{8} e^2 \right). \quad (20)$$

Наконец, подставляя полученные выражения в уравнения (3) и (4), будем окончательно иметь

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = \frac{2a^2}{m_1 m_2} \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = -\frac{64}{5} \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{a^3 (1-e^2)^{7/2}} \left( 1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right), \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle &= \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2 e} \left[ \frac{a(1-e^2)}{m_1 + m_2} \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle - \frac{(1-e^2)^{1/2}}{a^{1/2} (m_1 + m_2)^{1/2}} \left\langle \frac{dL}{dt} \right\rangle \right] = \\ &= -\frac{304}{15} \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2) e}{a^4 (1-e^2)^{5/2}} \left( 1 + \frac{121}{304} e^2 \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Из уравнения (22) видно, что производная  $de/dt$  отрицательна, т. е. реакция излучения приводит к уменьшению эксцентриситета.

Если в уравнение (21) подставить  $e=0$ , мы вновь придем к результату задачи 18.6. (О способах интегрирования уравнений (21) и (22) в случае  $e \neq 0$  см. статью Питерса [Peters P. C., Phys. Rev., 136, 1224 (1964)].)

**Решение 18.8.** Для рассматриваемой волны тензор Риччи должен быть равен нулю. Тогда, свертывая результат задачи 13.13, будем иметь

$$0 = 2R_{\mu\nu} = h^{\alpha}_{\nu,\alpha\mu} + h^{\alpha}_{\mu,\alpha\nu} - h_{\mu\nu}{}^{\alpha}{}_{;\alpha} - h_{,\mu\nu}.$$

Поскольку возмущения суть функции только от  $u = t - x$ , автоматически обращаются в нуль третий член в даламбертиане  $\square h_{\mu\nu}$  и компоненты  $R_{22}$ ,  $R_{23}$  и  $R_{33}$ . Для  $\mu, \nu = 0, 2$  находим

$$\frac{d^2}{du^2} (h^0_2 - h^1_2) = 0.$$

Отсюда следует, что  $h^0_2 = h^1_2$ . (Постоянные интегрирования в данном случае несущественны: это не функции типа «распространяющейся волны»; они не переносят энергии, и так как они не дают вклада в тензор Римана, то их можно устранить с помощью калибровочного преобразования.) Аналогично имеем

$$h^0_3 = h^1_3 \quad \text{из уравнения для } \mu, \nu = 0, 3,$$

$$h^0_0 - h^1_0 = \frac{1}{2} h \quad \text{из уравнения для } \mu, \nu = 0, 0,$$

$$h^2_2 + h^3_3 = 0 \quad \text{из уравнения для } \mu, \nu = 1, 0.$$

Другие комбинации  $\mu, \nu$  не дают новых независимых соотношений.

Наличие этих четырех ограничений оставляет только шесть независимых компонент  $h_{\alpha\beta}$ . Далее калибровочное преобразование вида  $\xi_{\mu}(t-x)$  приводит к компонентам  $h_{\alpha\beta}$ , являющимся функциями только от  $(t-x)$ , и, следовательно, оставляет в силе приведенные выше четыре ограничения. Поэтому мы выберем калибровочное преобразование именно указанного вида, причем такое, которое обратило бы в нуль компоненты  $h_{00}$ ,  $h_{11}$ ,  $h_{02}$  и  $h_{03}$  и оставило бы лишь компоненты  $h_{23} = h_{32}$  и  $h_{22} - h_{33}$ , инвариантные относительно него. Явный вид такого калибровочного преобразования есть

$$\xi_0(u) = \frac{1}{2} \int^u h_{00}(\tilde{u}) d\tilde{u}, \quad \xi_1(u) = -\frac{1}{2} \int^u h_{11}(\tilde{u}) d\tilde{u},$$

$$\xi_2(u) = \int^u h_{02}(\tilde{u}) d\tilde{u}, \quad \xi_3(u) = \int^u h_{03}(\tilde{u}) d\tilde{u}.$$

Посмотрим теперь, получили ли мы те же самые компоненты, если бы спроектировали возмущение таким образом, чтобы выделить его поперечно-бесследовую часть. Поскольку  $h = h^0_0 + h^1_1$ , выделение путем проектирования поперечной части эквивалентно выделению поперечно-бесследовой части. Но применение опера-



тора проектирования, выделяющего поперечную часть, оставляет инвариантными компоненты  $h_{22}$ ,  $h_{23}$  и  $h_{33}$ , что и имеет место в случае нашего калибровочного преобразования. Таким образом, мы другим путем приходим к тем же самым компонентам.

**Решение 18.9.** Направим ось  $z$  вдоль оси симметрии системы и введем циклическую аксиальную координату  $\varphi$ . В некоторый момент времени  $t = \text{const}$  в расположенной вдали от источников асимптотически плоской области, через которую распространяются гравитационные волны, момент количества движения внутри замкнутой 2-поверхности  $r = r_1$  есть (в силу симметрии задачи имеется только одна аксиальная компонента)

$$J_1 = -(16\pi)^{-1} \oint_{r=r_1} \xi^{\mu;\nu} d^2 \Sigma_{\mu\nu}, \quad (1)$$

где  $\xi = \partial/\partial\varphi$ . [См. задачу 16.23. Доказательство проходит, даже если не существует временного вектора Киллинга и даже при наличии волн, поскольку волны изменяют только пространственно-пространственные части метрики — см. [1], т. 2, уравнение (19.5).] Аналогично момент количества движения внутри замкнутой 2-поверхности  $r = r_2$  ( $r_2 > r_1$ ) есть

$$J_2 = -(16\pi)^{-1} \oint_{r=r_2} \xi^{\mu;\nu} d^2 \Sigma_{\mu\nu}. \quad (2)$$

Следовательно, момент количества движения волн в области между  $r_1$  и  $r_2$  равен

$$\begin{aligned} J_2 - J_1 &= -(16\pi)^{-1} \oint_{r=r_2} \xi^{\mu;\nu} d^2 \Sigma_{\mu\nu} + (16\pi)^{-1} \oint_{r=r_1} \xi^{\mu;\nu} d^2 \Sigma_{\mu\nu} = \\ &= \int_{r_1 \leq r \leq r_2} T^{\mu}_{\nu} \xi^{\nu} d^3 \Sigma_{\mu}, \end{aligned}$$

где мы, как и при решении задачи 16.23, использовали теорему Стокса. Поскольку в области  $r_1 \leq r \leq r_2$  компоненты тензора  $T^{\mu}_{\nu}$  равны нулю, то равна нулю и разность  $J_2 - J_1$ , так что поток момента количества движения для гравитационных волн также обращается в нуль.

**Решение 18.10.** Плоскую волну, распространяющуюся в направлении оси  $z$ , можно описать в месте расположения детектора с помощью величин

$$h_{xx} = -h_{yy} = \text{Re} \{A_+ e^{-i\omega t}\}, \quad h_{xy} = h_{yx} = \text{Re} \{A_x e^{-i\omega t}\}.$$

Если плоская волна является монохроматической (и, следовательно, полностью поляризованной), амплитуды  $A_+$  и  $A_x$  будут постоянными. В более общем случае, когда мы рассматриваем волны в узком диапазоне частот вблизи  $\omega$ , амплитуды  $A_+$  и  $A_x$

будут медленно меняющимися функциями времени (медленными по сравнению с осцилляциями волны). Так как интенсивность пропорциональна квадратам модулей амплитуд  $A$ , можно ввести поляризационный тензор

$$\rho_{ab} \equiv \frac{\langle A_a A_b^* \rangle}{|A_+|^2 + |A_x|^2},$$

определяя его по аналогии со случаем электромагнитных волн (см. [7], 5-е изд., стр. 160 и далее).

Следуя и дальше этой аналогии, замечаем, что рассматриваемая матрица является эрмитовой со следом, равным единице, и мы можем переписать ее в виде

$$\rho_{ab} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & 1 - \xi_3 \end{bmatrix}.$$

Как и в случае электромагнитных волн, назовем величины  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\xi_3$  параметрами Стокса волны. (Примечание. Некоторые авторы называют их нормированными параметрами Стокса.)

Эти параметры характеризуют состояние поляризации волны. Чтобы понять их физический смысл, рассмотрим смесь, состоящую из 1) неполяризованных волн, 2) волн с круговой поляризацией и 3) линейно-поляризованных волн в направлении, составляющем с осями  $x$  и  $y$  угол  $\psi$ . Математически эти три случая соответствуют суперпозиции следующих амплитуд:

1)  $A_+ = G_1(t)$ ,  $A_x = G_2(t)$ , где  $\langle |G_1(t)|^2 \rangle = \langle |G_2(t)|^2 \rangle \equiv \langle |G|^2 \rangle$  и  $\langle G_1(t) G_2^*(t) \rangle = 0$ ,

2)  $A_+ = H(t)$ ,  $A_x = \pm iH(t)$ ,

3)  $A_+ = F(t) \cos 2\psi$ ,  $A_x = F(t) \sin 2\psi$ .

Мы предполагаем, разумеется, что  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $F$  и  $H$  являются физически независимыми. Тогда поляризационную матрицу можно записать в виде

$$\rho = \frac{1}{I} \begin{bmatrix} \langle |F|^2 \rangle \cos^2 2\psi + \langle |G|^2 \rangle + \langle |H|^2 \rangle & \langle |F|^2 \rangle \sin 2\psi \cos 2\psi \mp i \langle |H|^2 \rangle \\ \langle |F|^2 \rangle \sin 2\psi \cos 2\psi \pm i \langle |H|^2 \rangle & \langle |F|^2 \rangle \sin^2 2\psi + \langle |G|^2 \rangle + \langle |H|^2 \rangle \end{bmatrix},$$

$$I \equiv \langle |F|^2 \rangle + 2 \langle |G|^2 \rangle + 2 \langle |H|^2 \rangle,$$

откуда следует

$$\xi_3 = \frac{1}{I} \langle |F|^2 \rangle \cos 4\psi, \quad \xi_1 = \frac{1}{I} \langle |F|^2 \rangle \sin 4\psi, \quad \xi_2 = \pm \frac{2}{I} \langle |H|^2 \rangle.$$

Теперь мы видим, что характеристики состояния поляризации гравитационного излучения можно найти из параметров Стокса почти таким же образом, как и в случае электромагнитного излучения.

Степень максимальной линейной поляризации  $(\xi_2^2 + \xi_3^2)^{1/2}$ .  
 Направление максимума линейной поляризации  $\text{tg } 4\psi = \xi_1/\xi_3$ .  
 Степень круговой поляризации  $|\xi_2|$  (положительные значения  $\xi_2$  соответствуют право-циркулярной поляризации).  
 Общая степень поляризации  $(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)^{1/2}$ .

**Решение 18.11.** Проще всего проанализировать этот процесс в почти ньютоновской системе отсчета. Тогда движение пробных частиц (и наблюдателя) описывается уравнением вида

$$\ddot{x} \sim R x \sim \dot{h} \dot{x},$$

где  $R$  означает величину компонент тензора Римана для гравитационных волн, а  $h$  — безразмерные возмущения метрики, соответствующие этим волнам. Поскольку волны являются в нашем случае слабыми возмущениями колебательного типа, координаты частиц меняются также в весьма малой степени; поэтому мы можем проинтегрировать уравнение движения и получить решение вида

$$x(t) - x_0 = x_0 h(t) + \alpha t + \beta + \mathcal{O}(h^2),$$

где  $x_0$  — координата начального положения.

Если пренебречь поправками второго и высших порядков по амплитуде, то легко видеть, что  $\alpha$  и  $\beta$  должны быть равны нулю, так как перед приходом всплеска гравитационного излучения частицы по условию задачи покоились в своих первоначальных положениях. После прохождения волн  $h=0$  и частицы должны вновь оказаться покоящимися в своих первоначальных положениях.

**Решение 18.12.** Нормальные моды колебаний стержня (ориентированного для определенности вдоль оси  $x$ ) находятся из уравнения

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \xi}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0. \quad (1)$$

Здесь  $\xi(x, t)$  — смещение некоторого элемента стержня,  $\tau$  — постоянная времени затухания, а  $a$  — скорость звука в веществе стержня. Эти моды имеют вид

$$\xi = e^{-i\omega t} e^{-t/2\tau} u(x), \quad (2)$$

где  $u(x)$  — решение уравнения

$$a^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + \left( \omega^2 + \frac{1}{4\tau^2} \right) u = 0. \quad (3)$$

Поскольку концы стержня не закреплены, граничное условие есть

$$\left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{x=\pm L/2} = 0, \quad (4)$$

где  $L$  — длина стержня. Решения уравнения (3), удовлетворяющие условию (4), суть

$$u_n = \begin{cases} \sin n\pi x/L & \text{для нечетных } n, \\ \cos n\pi x/L & \text{для четных } n, \end{cases} \quad (5)$$

а собственные частоты

$$\omega_n = n\pi a/L,$$

если предположить, что  $\omega_n \gg 1/\tau$ .

Рассмотрим гравитационную волну, распространяющуюся в направлении оси  $z$ . Она порождает силовое поле вида

$$F_j = -x^k R_{j0k0}(t-z). \quad (6)$$

Тогда, если считать, что стержень расположен в точке  $z=0$ , к правой части уравнения (1) необходимо добавить вынуждающую силу

$$F(t, x) = -x R_{x0x0}(t). \quad (7)$$

Результирующее смещение можно выразить в виде суперпозиции нормальных мод

$$\xi = \sum_n B_n(t) u_n(x). \quad (8)$$

Величины  $u_n$  ортогональны, поэтому из уравнения (1) следует

$$\ddot{B}_n + \frac{1}{\tau} \dot{B}_n + \omega_n^2 B_n = \frac{\int_{-L/2}^{L/2} F u_n dx}{\int_{-L/2}^{L/2} u_n^2 dx}. \quad (9)$$

Поскольку сила  $F$  антисимметрична относительно  $x=0$ , вклад в интегралы дают только нечетные значения  $n$ . Для нечетных  $n$  правая часть уравнения (9) имеет вид

$$-R_{x0x0}(t) L/(2\pi^2 n^2).$$

Если стержень возбуждается на резонансной частоте, т. е.

$$R_{x0x0} \sim e^{-i\omega_n t},$$

то, подставляя в уравнение (9)

$$B_n \sim e^{-i\omega_n t},$$

получаем

$$|B_n| \sim \left| \frac{\tau}{\omega_n n^2} \right| \sim \frac{1}{n^3}. \quad (10)$$

Поток энергии  $F$  гравитационной волны зависит от  $n$  как

$$|R_{x_0x_0}/\omega_n|^2 \sim 1/n^2,$$

так что

$$\text{чувствительность} \sim \frac{|B_n|^2}{1/n^2} \sim \frac{1}{n^4}. \quad (11)$$

**Решение 18.13.** Внутри вещества имеем

$$T_{GW,\mu}^{0\mu} = T_{GW,t}^{0t} = F^0,$$

где  $F^0$  — скорость, с которой внешние силы в единице объема совершают работу над гравитационными волнами. Изолируем глыбу цемента с поперечным сечением  $A$  и окружим ее некоторой замкнутой поверхностью. Тогда из теоремы Гаусса в 3-мерном пространстве следует

$$\int T_{GW}^{0\alpha} d\Sigma_\alpha = \int T^{0\alpha}_{,t} dV,$$

или

$$\begin{aligned} (T_{GW}^{0x}|_{\text{out}} - T_{GW}^{0x}|_{\text{in}}) A &= \int F^0 dV = \\ &= \text{скорость возрастания энергии волн} \\ &\quad \text{внутри гауссова «ящика»} = \\ &= \text{— скорость поглощения энергии волн} \\ &\quad \text{цементом.} \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left( \begin{array}{l} \text{скорость поглощения} \\ \text{импульса на единицу} \\ \text{поверхности за единицу} \\ \text{времени} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} \text{скорость поглощения} \\ \text{энергии на единицу} \\ \text{поверхности за единицу} \\ \text{времени} \end{array} \right).$$

**Решение 18.14.** Пусть волна распространяется в направлении оси  $z$ , а молекулы смещаются в направлении оси  $x$ . Динамическое уравнение движения молекулы есть не что иное, как уравнение расхождения геодезических. Если  $\xi$  — смещение молекулы, то это уравнение представляет собой действительную часть записанного в комплексном виде уравнения

$$\ddot{\xi} + \Gamma \dot{\xi} + \omega_0^2 \xi = -R^x_{0x0} X_0 = \frac{1}{2} \ddot{h}_{xx} X_0,$$

или

$$\xi (-\omega^2 - i\omega\Gamma + \omega_0^2) = -\frac{\omega^2}{2} h_{xx} X_0 = -\frac{\omega^2}{2} A_+ X_0 e^{-i\omega t}.$$

Здесь  $\omega$  — частота волны,  $\Gamma$  — величина, обратная времени затухания, и  $X_0$  — расстояние вдоль оси  $x$  от равновесного положения молекулы до центра масс. Уравнение легко решается относительно  $\xi$ :

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2} \omega^2 A_+ X_0 e^{-i\omega t} [(\omega^2 - \omega_0^2) - i\omega\Gamma] / \Delta, \\ \Delta &\equiv (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2 \end{aligned}$$

и относительно  $\dot{\xi}$ :

$$\dot{\xi} = -\frac{1}{2} \omega^3 A_+ X_0 e^{-i\omega t} [\omega \Gamma + i(\omega^2 - \omega_0^2)] / \Delta.$$

Из этих соотношений можно сразу определить скорость, с которой молекула массы  $m$  поглощает энергию:

$$\begin{aligned} \langle \dot{x} F^x \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ (\dot{\xi}) (F^x)^* \} = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ (\dot{\xi}) \left( -\frac{1}{2} m \omega^2 A_+^* X_0 e^{i\omega t} \right) \right\} = \frac{m \omega^6}{8} \Gamma |A_+|^2 X_0^2. \end{aligned}$$

Чтобы найти скорость поглощения импульса, нам придется вспомнить, что существует еще и *продольное* расхождение геодезических, хотя оно и меньше поперечного в  $c/v$  раз:

$$F^z = -m R_{xx}^2 X_0 \dot{\xi} = \frac{m}{2} \ddot{h}_{xx} X_0 \dot{\xi} = -\frac{1}{2} m \omega^2 X_0 \operatorname{Re} \{ A_+ e^{-i\omega t} \} \operatorname{Re} \{ \dot{\xi} \}.$$

Тогда усредненное по времени значение силы, действующей в направлении распространения волны, есть

$$\langle F^z \rangle = \frac{1}{4} m \omega^6 X_0^2 \Gamma \langle \operatorname{Re} (A_+ e^{-i\omega t}) \cdot \operatorname{Re} (A_+ e^{-i\omega t}) \rangle = \frac{1}{8} m \omega^6 \Gamma |A_+|^2 X_0^2,$$

что и дает на микроскопическом уровне объяснение результата задачи 18.13.

**Решение 18.15.** Рассмотрим две частицы, находящиеся на расстоянии  $d$  друг от друга. Их относительная скорость под воздействием волны флуктуирует так, что  $\Delta v \approx h\omega d$ . Если в течение данного периода волны две частицы соударяются друг с другом, то это значит, что по порядку величины расстояние между ними  $d \sim v/\omega$ , откуда  $\Delta v \sim hv$ . Тогда в среднем при наличии волны частицы будут соударяться с энергиями, в  $(\Delta v/v)^2$  раз большими, чем в ее отсутствие. Поскольку в процессе соударения направления движения частиц меняются случайным образом, эта энергия *не будет* вычитаться во время следующего полупериода, когда амплитуда волны противоположна. Энергия участвующих в соударении частиц возрастает также в  $(\Delta v/v)^2$  раз в результате еще одного эффекта: дело в том, что частицы, движущиеся навстречу друг другу со скоростью  $v + \Delta v$ , обладают большей вероятностью столкнуться, чем частицы, движущиеся со скоростью  $v - \Delta v$ . Мы заключаем поэтому, что при температуре  $T$  энергия каждого соударения в среднем возрастает на величину порядка  $(\Delta v/v)^2 kT \sim h^2 kT$ . Число столкновений на единицу объема в единицу времени есть

$$n_0 v / \ell \sim (n_0 / \ell) (kT/m)^{1/2},$$

где  $n_0$  — плотность числа частиц, а  $m$  — масса частицы. Следовательно, внутренняя энергия, поглощенная единицей объема за единицу времени, примерно равна

$$\frac{dE_{\text{внутр}}}{dt} \sim \frac{\hbar^2}{n_0^{1/2} m^{1/2} \ell} (n_0 kT)^{3/2} \sim \frac{\hbar^2}{n_0^{1/2} m^{1/2} \ell} E_{\text{внутр}}^{3/2}. \quad (1)$$

Интегрируя это соотношение, получаем

$$E_{\text{внутр}}^{1/2}(t) \sim \frac{t_0 E_{\text{внутр}}^{1/2}(t=0)}{t_0 - t}, \quad (2)$$

где  $(t_0 \sim (\ell/\hbar^2)(m/kT)^{1/2})$ . Таким образом,  $E_{\text{внутр}}$  возрастает до бесконечности за конечный промежуток времени  $t_0$ . На самом деле, разумеется, этого не происходит: при  $t \approx t_0$ , когда газ становится релятивистским, наш «ньютоновский» подход перестает быть применимым.

Фронт волны теряет энергию со скоростью, определяемой уравнением (1). Поскольку плотность ее внутренней энергии порядка  $\omega^2 \hbar^2 c^2 / G$ , волна затухает на расстоянии

$$\begin{aligned} \ell_{\text{затух}} \sim c \tau_{\text{затух}} &\sim \frac{\omega^2 \hbar^2 c^3 / G}{\hbar^2 (n_0 kT)^{3/2} / (n_0^{1/2} m^{1/2} \ell)} \sim \\ &\sim \ell \left( \frac{c}{v_{\text{теплов}}} \right)^3 \left( \frac{\omega^2}{G m n_0} \right). \end{aligned}$$

Значение первого множителя в скобках приближается к единице для релятивистского газа; второй множитель становится равным единице для волны, частота которой равна «гравитационной плазменной частоте» данного газа.

**Решение 18.16.** Характерная для некоторого физического процесса мощность квадрупольного гравитационного излучения есть

$$(G/c^5) |\ddot{Q}|^2 \sim (G/c^5) M^2 v^4 / T^2,$$

где  $M$ ,  $v$  и  $T$  — соответственно масса, скорость и время, характерные для этого процесса. Удобно переписать это выражение в виде

$$P_{GW} \sim \frac{G}{c^5} \left( \frac{Mv^2}{T} \right)^2 \sim \frac{P^2}{3 \cdot 10^{59} \text{ эрг/с}},$$

где  $P \sim Mv^2/T$  — характерная «мощность» потока внутренней энергии.

Для взрыва с энергией  $E$  и характерным временем  $\tau$  «внутренний поток мощности» есть  $E/\tau$ . Если предположить, что этот «внутренний поток мощности» связан с достаточно эффективными механизмами гравитационного излучения, тогда в системе единиц,

где  $c = G = 1$ , имеем <sup>1)</sup>

$$P_{GW} \sim (E/\tau)^2$$

и

$$E_{GW} \sim P_{GW}\tau \sim E^2/\tau.$$

Типичный гравитон, излучаемый при таком взрыве, будет обладать энергией  $\hbar\omega \sim \hbar/\tau$ , так что число таких гравитонов будет порядка

$$N \sim \frac{E^2/\tau}{\hbar/\tau} = \frac{E^2}{\hbar} \sim \left( \frac{E}{10^{16} \text{ эрг}} \right)^2.$$

**Решение 18.17.** В данном случае движениями масс, порождающими гравитационные волны, являются соударения электронов с узлами решетки, рассеяние фотонов и т. п. Поскольку тепловые скорости электронов намного превосходят их дрейфовые скорости, характерная энергия одного соударения равна по порядку величины  $kT$ . В соответствии с результатами анализа, проведенного в предыдущей задаче, мощность гравитационного излучения, генерируемого одним электроном, должна быть величиной порядка  $(kT/\tau)^2$ , где  $\tau$  — среднее значение временного интервала между соударениями электрона с решеткой. Тогда полная энергия, излучаемая в виде гравитационных волн на протяжении номинального срока службы лампочки, должна быть равна

$$E_{GW} \sim N \left( \frac{kT}{\tau} \right)^2 T_L / (10^{59} \text{ эрг/с}),$$

где  $N$  — число электронов проводимости в нити накала, а  $T_L$  — номинальное «время жизни» лампочки, составляющее приблизительно  $4 \cdot 10^6$  с.

Частота типичного излучаемого гравитона должна быть равна примерно  $\tau^{-1}$ , так что полное число таких гравитонов по порядку величины есть

$$n \sim \frac{E_{GW}\tau}{\hbar} \sim \frac{N}{\tau\hbar} \frac{(kT)^2 T_L}{10^{59} \text{ эрг/с}}.$$

Для электрической лампочки накаливания  $kT$  должно быть порядка 1 эВ, так как тепловое излучение приходится главным образом на видимый диапазон спектра, а примерные значения  $N$  и  $\tau$  составляют соответственно  $10^{17}$  электронов и  $10^{-13}$  с. Подставляя эти значения, получаем, что полное число гравитонов, излученных за время номинального срока службы лампочки, порядка  $10^{-19}$ .

Чтобы оценить число гравитонов, испускаемых разбивающейся лампочкой, мы предположим, что энергия падающей лампочки

<sup>1)</sup> Напомним, что в геометрических единицах мощность — величина безразмерная. — *Прим. перев.*



преобразуется в кинетическую энергию сотрясения, а затем вычислим результирующую мощность генерации гравитационных волн по формуле, приведенной в задаче 18.16. Если лампочка весит 20 г и падает с высоты 1 м, то приобретенная ею энергия составляет около  $10^6$  эрг. Предположим, что характерное время сотрясения составляет 0,1 с, так что в процессе сотрясения выделяется полная мощность  $10^7$  эрг/с. Если 10% этой величины связано с механизмом квадрупольных колебаний, то

$$P_{GW} \sim \frac{(10^6 \text{ эрг/с})^2}{10^{39} \text{ эрг/с}} \approx 10^{-47} \text{ эрг/с}$$

и

$$E_{GW} \sim P_{GW} \cdot 0,1 \text{ с} \approx 10^{-48} \text{ эрг.}$$

Тогда число гравитонов с энергией  $\hbar\omega \sim \hbar/0,1 \text{ с} \sim 10^{-26}$  эрг будет порядка  $10^{-22}$ .

**Решение 18.18.** С точностью до первого члена линеаризованного приближения по гравитационному полю гамильтониан взаимодействия поля с системой, обладающей тензором энергии-импульса  $T_{\mu\nu}$ , есть

$$H = (8\pi G)^{1/2} T_{\mu\nu} h^{\mu\nu}. \quad (1)$$

Мы будем использовать систему единиц, где  $c = \hbar = 1$ , так что  $G^{1/2} = 1,616 \cdot 10^{-33}$ . Для электрона в атоме водорода

$$T_{\mu\nu} = m_e u_\mu u_\nu = \frac{p_\mu p_\nu}{m_e}; \quad (2)$$

далее, поскольку мы работаем с  $h^{\mu\nu}$  в поперечно-бесследовой калибровке,

$$h_{0\mu} = 0, \quad h^i{}_j = 0 \quad (3)$$

и, следовательно,

$$H = (8\pi G)^{1/2} \frac{p_i p_j h^{ij}}{m_e}. \quad (4)$$

Так как гравитон обладает спином 2, распад обязан происходить в  $s$ -состояние. Матричный элемент для перехода из  $3d$ -состояния в  $1s$ -состояние с испусканием гравитона с волновым вектором  $\vec{k}$  и поляризацией  $\lambda$  (для право-циркулярной поляризации  $\lambda = 1$ , а для лево-циркулярной поляризации  $\lambda = -1$ ) есть

$$T = \langle 1s; \vec{k}, \lambda | H | 3d; 0 \rangle. \quad (5)$$

Теперь разложим  $h^{ij}$  в ряд:

$$h^{ij} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{(2\omega)^{1/2}} \sum_{\lambda} (e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} e_{\vec{k},\lambda}^{ij} a_{\vec{k},\lambda} + e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} e_{\vec{k},\lambda}^{ij*} a_{\vec{k},\lambda}^\dagger). \quad (6)$$

Здесь  $\omega$  — частота волны, а  $e^{ij}$  — поляризационный тензор. Операторы рождения и уничтожения, взятые в один и тот же момент

времени, удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[a_{k,\lambda}, a_{k',\lambda'}^\dagger] = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \delta_{\lambda\lambda'},$$

откуда следует

$$a_{k,\lambda}|0\rangle = 0$$

и

$$\langle \vec{k}, \lambda | a_{k',\lambda'}^\dagger | 0 \rangle = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (7)$$

Подставляя соотношения (4), (6) и (7) в выражение для матричного элемента (5), получаем

$$T = \frac{(8\pi G)^{\frac{1}{2}}}{m_e} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{(2\omega)^{1/2}} \langle 1s | e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} p_i p_j e_{k,\lambda}^{ij*} | 3d \rangle. \quad (8)$$

Поскольку  $kr \approx (1 \text{ эВ}) \cdot 10^{-8} \text{ см} \approx 10^{-4}$ , мы можем положить приближенно  $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = 1$  (ср. так называемое дипольное приближение, используемое при рассмотрении электромагнитных переходов). Тогда интенсивность перехода есть

$$\begin{aligned} d\Gamma &= 2\pi |T|^2 \times \text{плотность конечных состояний для гравитона} = \\ &= 2\pi |T|^2 \omega^2 d\Omega, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $d\Omega$  — элемент телесного угла, в который испускается гравитон. Следовательно,

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega} = \frac{G\omega}{\pi m_e^2} |\langle 1s | p_i p_j e_{k,\lambda}^{ij*} | 3d \rangle|^2. \quad (10)$$

Матричный элемент в этом уравнении можно вычислить, если использовать явный вид волновых функций. Далее, так как спины электронов в начальном и конечном состояниях атома не наблюдаемы, мы возьмем сумму по конечным спиновым состояниям и усредним по начальным спиновым состояниям. Проще всего это можно проделать, если ввести чисто спиновый оператор для спина 2:

$$Q_{ij} = p_i p_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} p^2. \quad (11)$$

Так как  $e^i_t = 0$ , мы можем заменить в уравнении (10)  $p_i p_j$  на  $Q_{ij}$ . Сферические компоненты  $Q_{ij}$  имеют вид

$$\begin{aligned} Q_2 &\equiv \frac{1}{2} (Q_{xx} - Q_{yy} + 2iQ_{xy}), \\ Q_1 &\equiv Q_{zx} + iQ_{zy}, \\ Q_0 &\equiv \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \left( Q_{zz} - \frac{1}{2} Q_{xx} - \frac{1}{2} Q_{yy} \right), \\ Q_{-1} &\equiv Q_{zx} - iQ_{zy}, \\ Q_{-2} &\equiv \frac{1}{2} (Q_{xx} - Q_{yy} - 2iQ_{xy}). \end{aligned} \quad (12)$$

Поскольку  $x$ - и  $y$ -компоненты  $e_{\lambda}^{ij}$  равны (для  $\lambda = \pm 1$ )

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & \pm i \\ \pm i & -1 \end{bmatrix},$$

находим

$$Q_{ij} e_{\lambda}^{ij*} = \sqrt{2} Q_{-2\lambda}. \quad (13)$$

Так как  $Q_{\sigma}$  обладает спином 2, то из теоремы Вигнера — Экарта вытекает

$$\langle j_j m_j | Q_{\sigma} | j_i m_i \rangle = \langle j_j \| Q \| j_j \rangle \langle 2\sigma j_i m_i | j_j m_j \rangle, \quad (14)$$

где «приведенная» матрица определяется следующим соотношением:

$$\langle j_j \| Q \| j_i \rangle = \sum_{m_j m_i \sigma} \frac{1}{2j_j+1} \langle 2\sigma j_i m_i | j_j m_j \rangle \langle j_j m_j | Q_{\sigma} | j_i m_i \rangle. \quad (15)$$

Здесь  $\langle j_i m_i | j_j m_j \rangle$  — коэффициент Клебша — Гордона. Таким образом, из уравнений (13) и (14), добавляя квантовое число  $n$ , получаем

$$|\langle n_j j_j m_j | Q_{ij} e^{ij*} | n_i j_i m_i \rangle|^2 = 2 |\langle n_j j_j \| Q \| n_i j_i \rangle|^2 |\langle 2 - 2\lambda j_i m_i | j_j m_j \rangle|^2.$$

Теперь возьмем сумму по  $m_j$  и усредним по  $m_i$ , воспользовавшись соотношением

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2j_i+1} \sum_{m_i m_j} |\langle 2 - 2\lambda j_i m_i | j_j m_j \rangle|^2 = \\ & = \frac{1}{2j_i+1} \sum_{m_i m_j} \frac{2j_j+1}{5} |\langle j_j - m_j j_i m_i | 2 - 2\lambda \rangle|^2 = \frac{1}{5} \frac{2j_j+1}{2j_i+1}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega} = \frac{G_{\omega}}{\pi m_e^2} \frac{2}{5} \frac{2j_j+1}{2j_i+1} |\langle n_j j_j \| Q \| n_i j_i \rangle|^2. \quad (16)$$

В этом выражении не учитываются поляризация гравитона и угол испускания; следовательно, полная интенсивность перехода получается путем умножения выражения (16) на 2 (для двух состояний поляризации) и на  $4\pi$  (полный телесный угол). В результате находим

$$\Gamma = \frac{G_{\omega}}{m_e^2} \frac{16}{5} \frac{2j_j+1}{2j_i+1} |\langle n_j j_j \| Q \| n_i j_i \rangle|^2. \quad (17)$$

Приведенный матричный элемент можно вычислить из уравнения (14), выбрав  $m_i$  и  $m_j$  любым удобным для нас образом. Например,

$$\langle 1s \| Q \| 3d \rangle = \frac{\langle 100 | Q_0 | 320 \rangle}{\langle 2020 | 00 \rangle}. \quad (18)$$

В уравнении (18) коэффициент Клебша — Гордона равен единице. Из определений (11) и (12) следует

$$Q_0 = \sqrt{\frac{3}{2}} \left( p_x p_x - \frac{1}{3} p^2 \right).$$

Член с  $p^2$  не дает вклада в матричный элемент в правой части (18), так как не описывает связи между состояниями с  $j=0$  и  $j=2$ . Поэтому

$$\langle 1s | Q | 3d \rangle = \sqrt{\frac{3}{2}} \langle 100 | p_x p_x | 320 \rangle. \quad (19)$$

Вообще говоря, для вычисления матричного элемента в (19) нужно было бы ввести полное множество состояний, а затем представить его как сумму членов вида

$$\langle 100 | p_x | n \rangle \langle n | p_x | 320 \rangle.$$

Однако можно воспользоваться тем фактом, что волновая функция  $|100\rangle$  чрезвычайно проста, и, произведя замену

$$p_x \rightarrow -i\partial/\partial z,$$

непосредственно подействовать оператором

$$\begin{aligned} p_x^2 \rightarrow -\partial^2/\partial z^2 &= -\left( \cos\vartheta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\vartheta}{r} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \right) \left( \cos\vartheta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\vartheta}{r} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \right) = \\ &= -\left( \cos^2\vartheta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \end{aligned}$$

на сферически-симметричное  $|100\rangle$ -состояние. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \langle 320 | p_x^2 | 100 \rangle &= - \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \sin\vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \sqrt{\frac{5}{16\pi} \frac{(3\cos^2\vartheta - 1)}{a^2}} \times \\ &\times \frac{2(30)^{\frac{1}{2}}}{955} \left( \frac{r}{a} \right)^3 e^{-r/3a} \left( \cos^2\vartheta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{2}{a^{\frac{3}{2}}} e^{-r/a} = \\ &= - \frac{\sqrt{6}}{191a^6} \int_0^\infty dr r^5 e^{-\frac{4r}{3a}} \int_0^\pi \sin\vartheta d\vartheta (3\cos^2\vartheta - 1) \left( \frac{\cos^2\vartheta}{a^2} - \frac{\sin^2\vartheta}{ra} \right) = \\ &= - \frac{\sqrt{6}}{191a^6} \frac{8}{15} \int_0^\infty dr e^{-\frac{4r}{3a}} \left( \frac{r^5}{a^2} + \frac{r^4}{a} \right) = - \frac{1}{a^2} \frac{\sqrt{6} \cdot 8 \cdot 243 \cdot 57}{191 \cdot 15 \cdot 2 \cdot 25} = - \frac{0,19}{a^2}, \end{aligned}$$

где  $a = (m_e \alpha)^{-1}$  — боровский радиус, а  $\alpha = 1/137$  — постоянная тонкой структуры. Окончательно получаем

$$\Gamma = \frac{G\omega}{m_e^3} \cdot \frac{16}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{(0,19)^2}{a^4} = 0,36 G m_e^2 \omega \alpha^4.$$

Для перехода  $3p \rightarrow 1s$  имеем  $Gm_e^2 = 1,75 \cdot 10^{-45}$  и  $\omega = 12$  эВ, откуда и находим искомое время жизни  $\Gamma^{-1} = 1,9 \cdot 10^{38}$  с.

**Решение 18.19.** Звезда и испускаемый ею поток тепловых гравитонов являются сферически-симметричными только в смысле усреднения по времени. Поскольку вещество внутри звезды состоит из субатомных частиц, ясно, что в данный момент времени звезда может быть сферически-симметричной с точки зрения астронома, но не с точки зрения математика, предъявляющего к понятию симметрии гораздо более строгие требования. По мнению последнего, звезда обладает на уровне атомных масштабов тонкозернистой структурой, поэтому любые теоремы о симметрии неприменимы. Разумеется, эти мелкомасштабные неоднородности в распределении частиц зависят от времени, что и приводит к генерации гравитационного (и электромагнитного!) излучения.

Мультипольность потока связана с масштабом угловой асимметрии потока. (Это утверждение нельзя смешивать ни с тем фактом, что генерация гравитационных волн является *локально* квадрупольной, ни с тем, что усредненный по времени поток является монопольным, т. е. изотропным.) Для такой звезды, как наше Солнце, большая часть потока гравитонов генерируется в плотном ( $50 \text{ г/см}^3$ ) высокотемпературном ( $10^7 \text{ К}$ ) ядре звезды. Если принять, что характерный радиус этого ядра составляет четверть радиуса Солнца, т. е. около  $2 \cdot 10^{10}$  см, а среднее расстояние между частицами вещества (как показывают оценки плотности) порядка  $10^{-8}$  см, то получится, что угловой масштаб асимметрии составляет по порядку величины  $\sim 10^{-18}$  радиан. При разложении в ряд по сферическим гармоникам для структуры, характеризующейся «зернистостью» по углу порядка  $10^{-18}$  радиан, требуется, чтобы число значений  $l$  также было порядка  $10^{18}$ . Следовательно, в смысле существования подобной мелкозернистости поток гравитационного излучения характеризуется мультипольностью порядка  $2^{10^{18}}$ .

**Решение 18.20.** В почти инерциальной системе координат, начало которой помещено в центр масс, влияние тензора Римана, как следует из уравнения расхождения геодезических, сводится к ускорению свободных пробных частиц таким образом, что

$$\frac{d^2 x^j}{dt^2} = -R_{j0k0} x^k.$$

Мы опустили здесь зависящие от скорости члены типа «магнитного поля», меньшие по величине в  $c/v$  раз (см. решение задачи 18.14). Из этого уравнения видно, что тензор Римана приводит к появлению продольных эффектов в том и только в том случае, если один из пространственных индексов в  $R_{j0k0}$  есть  $z$  (направ-

ление распространения волны). Отсюда следует, что  $\Psi_2$ ,  $\Psi_3$ ,  $\bar{\Psi}_3$  обладают продольными эффектами, а  $\Psi_4$ ,  $\bar{\Psi}_4$  и  $\Phi_{22}$  являются чисто поперечными.

Чтобы исследовать спин волн, выполним преобразование от координат  $x$ ,  $y$  к координатам  $x'$ ,  $y'$ , повернутым относительно оси  $z$  в положительном направлении на угол  $\varphi$ . При этом компоненты тензора Римана преобразовываются следующим образом:

$$R_{x'o'z'o'} = R_{xoz0} \cos \varphi + R_{yoz0} \sin \varphi,$$

$$R_{x'o'x'o'} = R_{x0x0} \cos^2 \varphi + R_{y0y0} \sin^2 \varphi + 2 \sin \varphi \cos \varphi R_{x0y0}$$

и т. п. Из вида преобразования компонент тензора Римана легко получить законы преобразования для определенных в нашей задаче типов волн:

$$\Psi_{2'} \equiv -\frac{1}{6} R_{z'o'z'o'} = -\frac{1}{6} R_{z0z0} = \Psi_2,$$

$$\Psi_{3'} = e^{i\varphi} \Psi_3, \quad \bar{\Psi}_{3'} = e^{-i\varphi} \bar{\Psi}_3,$$

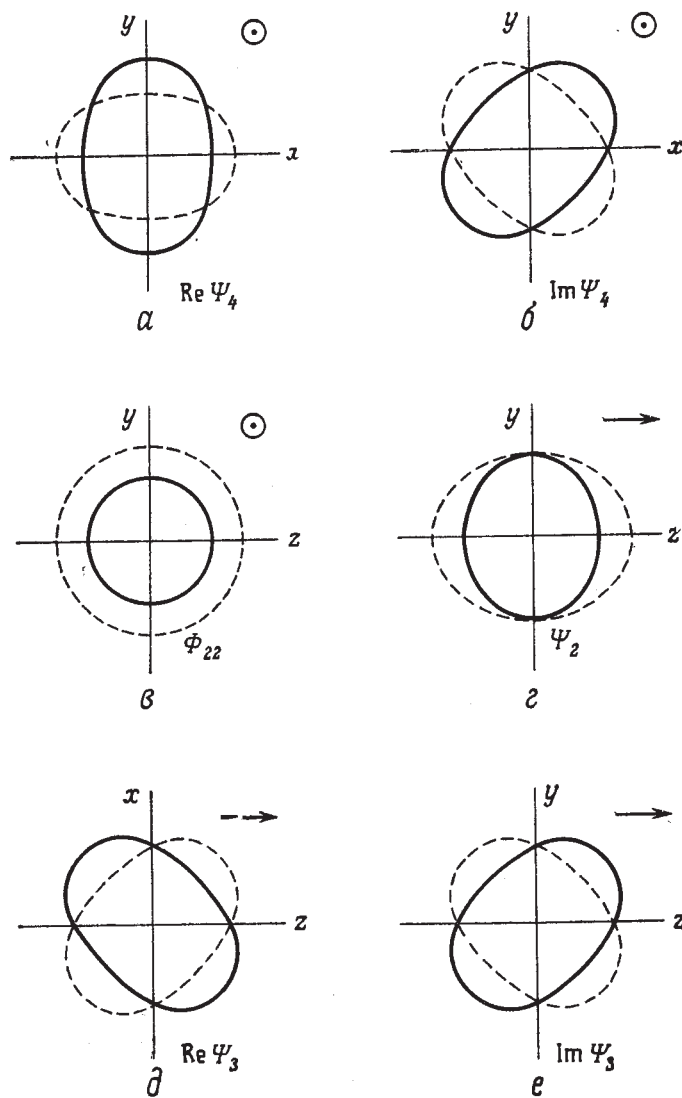
$$\Psi_{4'} = e^{2i\varphi} \Psi_4, \quad \bar{\Psi}_{4'} = e^{-2i\varphi} \bar{\Psi}_4,$$

$$\Phi_{2'2'} = \Phi_{22}.$$

Поскольку  $\Psi_2$  и  $\Phi_{22}$  не меняются при поворотах относительно оси  $z$ , эти волны являются скалярными (спин 0). Для  $\Psi_3$  и  $\bar{\Psi}_3$  поворот на  $180^\circ$  возвращает волну в прежнее состояние поляризации (например, чисто действительное), так что этим символам должны соответствовать волны со спином 1. Чтобы вернуть волны  $\Psi_4$  и  $\bar{\Psi}_4$  в прежнее состояние поляризации, необходимо повернуть их всего лишь на  $90^\circ$ , отсюда следует, что этим волнам соответствует спин 2. Фактически все рассматриваемые нами типы волн соответствуют в общей теории относительности волнам, поляризованным по кругу.

**Решение 18.21.** На фиг. 33 изображены шесть типов поляризации слабых, плоских, распространяющихся в пустоте гравитационных волн, допустимых в классе метрических теорий тяготения. Там же представим смещение, которое каждый тип волн вызывает в сфере пробных частиц. Волна распространяется в положительном направлении оси  $+z$  (что показано стрелкой в правом верхнем углу графиков) и обладает зависимостью от времени вида  $\cos \omega t$ . Сплошные линии соответствуют моменту времени  $\omega t = 0$ , пунктирные линии — моменту  $\omega t = \pi$ ; смещения, перпендикулярные к плоскости фигуры, отсутствуют. Все приведенные схематические изображения получены с помощью уравнения расхождения геодезических

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} \approx x^j R^k_{\ 0j0}.$$



Фиг. 33.

**Решение 18.22.** Вид функции  $H$  определяется уравнениями поля в пустоте

$$R_{\alpha\beta} = 0.$$

Мы вычислим вначале символы Кристоффеля из лагранжиана для геодезических (см. задачу 7.25):

$$L = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \dot{v}^2 + 2H\dot{u}^2.$$

Из уравнения Эйлера — Лагранжа

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

находим

$$\ddot{x} + H_{,x} \dot{u}^2 = 0,$$

откуда

$$\Gamma^x_{uu} = H_{,x}.$$

Аналогично из

$$\ddot{y} + H_{,y} \dot{u}^2 = 0$$

следует

$$\Gamma^y_{uu} = H_{,y},$$

а из  $u = 0$  вытекает

$$\Gamma^u_{\alpha\beta} = 0.$$

Из

$$\ddot{v} - 2H_{,u} \dot{u}^2 - 4H_{,x} \dot{x} \dot{u} - 4H_{,y} \dot{y} \dot{u} = 0$$

получаем

$$\Gamma^v_{uu} = -2H_{,u}; \quad \Gamma^v_{xu} = -2H_{,x}; \quad \Gamma^v_{yu} = -2H_{,y}.$$

Все остальные коэффициенты связности равны нулю. Таким образом, в выражение для тензора Риччи (см. [1], уравнение 8.516)

$$R_{\alpha\beta} = \Gamma^\mu_{\alpha\beta,\mu} - (\ln \sqrt{-g})_{,\alpha\beta} + (\ln \sqrt{-g})_{,\mu} \Gamma^\mu_{\alpha\beta} - \Gamma^\mu_{\sigma\beta} \Gamma^\sigma_{\alpha\mu}$$

вклад дает только первый член (обратите внимание, что  $\sqrt{-g} = 1$ ). В результате находим, что единственная не равная нулю компонента  $R_{\alpha\beta}$  есть

$$R_{uu} = H_{,xx} + H_{,yy}.$$

Следовательно, уравнениям поля будет удовлетворять любая функция, гармоническая по  $x$  и  $y$ . Для плоской волны функция  $H$  квадратична по  $x$  и  $y$ , так что (покажите это в качестве упражнения!) тензор Римана есть функция только от  $u$  и не обладает особенностями на плоскости  $xy$ .



## ГЛАВА 19

**Решение 19.1.** Рассматриваемые в задаче ньютоновские уравнения имеют вид

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho \text{ (уравнение для гравитационного потенциала), (1)}$$

$$\partial\rho/\partial t + \nabla \cdot (\rho\vec{v}) = 0 \text{ (уравнение непрерывности), (2)}$$

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla\Phi \text{ (уравнение движения). (3)}$$

Если Вселенная статична и однородна, то  $\vec{v}=0$ , а  $\rho$  и  $p$  постоянны во времени и пространстве. Тогда решение уравнения (1) есть

$$\Phi = \frac{2}{3}\pi G\rho(\vec{r} \cdot \vec{r}) + \vec{C} \cdot \vec{r} + K,$$

где  $\vec{C}$  и  $K$  — произвольные постоянные интегрирования, а  $\vec{r}$  — радиус-вектор, проведенный из произвольно выбранного начала координат. Левая часть уравнения (2) равна нулю тождественно. Однако уравнение (3) не удовлетворяется: левая его часть равна нулю в силу того, что  $\vec{v}=0$ , а в правой части  $\nabla p$  равно нулю из-за условия однородности, но  $\nabla\Phi$  не может быть тождественно обращено в нуль никаким выбором  $\vec{C}$  и  $K$ . Следовательно, данная система уравнений не имеет решений, обладающих требуемыми свойствами.

**Решение 19.2.** Поскольку пространство-время является всюду изотропным, оно, в частности, сферически-симметрично относительно некоторого несингулярного наблюдателя. Но по теореме Биркгофа (задача 16.3) единственным сферически-симметричным вакуумным решением является метрика Шварцшильда, а единственным случаем, когда метрика этого типа регулярна в начале координат — где и находится наш наблюдатель, — является случай  $M=0$ , т. е. плоское пространство Минковского.

**Решение 19.3.** По теореме Лиувилля плотность числа фотонов в фазовом пространстве  $I_\nu/\nu^3$  постоянна вдоль траектории светового луча и является также (см. задачу 5.10) лоренц-инвариантной величиной. Тогда, воспользовавшись определением

$$(v_{\text{изл}}/v_{\text{набл}}) = 1 + z,$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \text{Наблюдаемый поток} &= \Omega \int I_{\nu}^{\text{набл}} d\nu_{\text{набл}} = \Omega \int \left( \frac{I_{\nu}^{\text{набл}}}{\nu_{\text{набл}}^3} \right) \nu_{\text{набл}}^3 d\nu_{\text{набл}} = \\ &= \Omega \int \frac{I_{\nu}^{\text{изл}}}{\nu_{\text{изл}}^3} \frac{\nu_{\text{изл}}^3}{(1+z)^4} d\nu_{\text{изл}} = \\ &= \frac{\Omega}{(1+z)^4} \int I_{\nu}^{\text{изл}} d\nu_{\text{изл}} = \frac{\Omega}{(1+z)^4} \frac{1}{\pi} \sigma T^4, \end{aligned}$$

где  $\sigma$  — постоянная Стефана — Больцмана. Обратите внимание, что, так как испытывший красное смещение чернотельный спектр также является некоторым чернотельным спектром, наблюдаемые нами спектр и поток излучения выглядят так, как будто они приходят к нам от расположенного поблизости стационарного объекта, температура которого есть  $T/(1+z)$ , а излучение заполняет телесный угол  $\Omega$  для земного наблюдателя.

Все сказанное выше не зависит от того, является ли красное смещение гравитационным, космологическим или обусловленным эффектом Доплера, так как теорема Лиувилля справедлива в общем случае.

**Решение 19.4.** Из условия однородности следует, что скалярная кривизна  $R$  гиперповерхности должна быть постоянной. Величину  $R$  можно найти, либо подставляя конкретные значения в формулы задачи 9.20, либо же из формулы

$$R_{ij} = \Gamma^k_{ij,k} - (\ln |g|^{1/2})_{,ij} + \Gamma^k_{ij} (\ln |g|^{1/2})_{,k} - \Gamma^k_{im} \Gamma^m_{jk},$$

где  $|g|^{1/2} = a^3 f r^2 \sin \vartheta$ , а символы Кристоффеля  $\Gamma$  находятся или из лагранжиана для геодезических, или так, как в задаче 7.6. В результате получаем

$$\begin{aligned} R_{\vartheta\vartheta} &= \Gamma^r_{\vartheta\vartheta,r} - (\ln(\sin \vartheta))_{,\vartheta\vartheta} + \Gamma^r_{\vartheta\vartheta} (\ln f r^2)_{,r} - \Gamma^{\varphi}_{\vartheta\varphi} \Gamma^{\varphi}_{\vartheta\varphi} - 2\Gamma^{\varphi}_{\vartheta r} \Gamma^r_{\vartheta\varphi} = \\ &= -(r f^{-2})_{,r} + \operatorname{cosec}^2 \vartheta - r^{-1} f^{-3} (r^2 f)_{,r} - \operatorname{ctg}^2 \vartheta + 2f^{-2} = \\ &= [r^2 (1 - f^{-2})]_{,r} (2r)^{-1}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$R_{\hat{\vartheta}\hat{\vartheta}} = R_{\vartheta\vartheta} (a^2 r^2)^{-1},$$

а в силу изотропии

$$R_{\hat{r}\hat{r}} = R_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = R_{\hat{\vartheta}\hat{\vartheta}},$$

получаем

$$R = R_{\hat{r}\hat{r}} + R_{\hat{\vartheta}\hat{\vartheta}} + R_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = 3[r^2 (1 - f^{-2})]_{,r} (2a^2 r^3)^{-1} \equiv A,$$

откуда

$$r^2 (1 - f^{-2}) = Br^4 + C.$$

Так как  $f \rightarrow 1$  при  $r \rightarrow 0$ , имеем  $C = 0$ . Следовательно,

$$f^2 = (1 - Br^2)^{-1}.$$

Если  $B \neq 0$ , мы можем выбрать масштаб  $r$ , полагая  $r' = = |B|^{-\frac{1}{2}} r$ . Тогда метрика с радиальной координатой  $r'$  примет как раз требующийся нам вид.

**Решение 19.5.**

а) Пусть

$$r = \begin{cases} \sin \chi, & k = +1, \\ \chi, & k = 0, \\ \text{sh } \chi, & k = -1. \end{cases}$$

Тогда

$$dr = \begin{cases} \cos \chi d\chi, \\ d\chi, \\ \text{ch } \chi d\chi \end{cases}$$

и

$$\frac{dr^2}{1-kr^2} = \begin{cases} d\chi^2, \\ d\chi^2, \\ d\chi^2. \end{cases}$$

Окончательно имеем

$$\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2 = d\chi^2 + \Sigma^2(\chi) d\Omega^2,$$

где

$$\Sigma^2(\chi) = \begin{cases} \sin^2 \chi, & k = +1, \\ \chi^2, & k = 0, \\ \text{sh}^2 \chi, & k = -1. \end{cases}$$

б) Определим преобразование от переменной  $t$  к переменной  $\eta$  с помощью соотношения

$$dt = R(\eta) d\eta.$$

Тогда

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + R^2(t) (d\chi^2 + \Sigma^2 d\Omega^2) = \\ &= R^2(\eta) (-d\eta^2 + d\chi^2 + \Sigma^2 d\Omega^2). \end{aligned}$$

**Решение 19.6.** Из метрики Робертсона — Уокера, записанной в «тригонометрическом» виде, следует, что метрика для пространственно-подобных 3-поверхностей имеет вид

$$d\sigma^2 = a^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)].$$

По аналогии с метрикой для 2-сфер легко догадаться, что эту метрику можно представить как 3-сферу, погруженную в евклидово 4-пространство с декартовыми координатами  $W, X, Y, Z$ .

В частности, если мы положим

$$\begin{aligned} W &= a \cos \chi, \\ Z &= a \sin \chi \cos \vartheta, \\ X &= a \sin \chi \sin \vartheta \cos \varphi, \\ Y &= a \sin \chi \sin \vartheta \sin \varphi \end{aligned}$$

(что удовлетворяет соотношению  $A^2 = W^2 + Z^2 + X^2 + Y^2$ ), то метрика примет вид

$$d\sigma^2 = dW^2 + dZ^2 + dX^2 + dY^2.$$

В евклидовом 4-пространстве можно найти две плоскости (например,  $XY$  и  $WZ$ ), которые пересекаются только в начале координат ( $a=0$ ). Следовательно, поворот плоскости  $XY$  меняет все координаты  $X$  и  $Y$ , за исключением начала координат, и оставляет неподвижными все координаты  $W$  и  $Z$ ; для поворотов в плоскости  $WZ$  дело обстоит наоборот. Таким образом, комбинация двух таких поворотов не оставляет ни одной неподвижной точки, за исключением начала координат, и (для ненулевого  $a$ ) переводит все точки 3-сферы в отличные от них точки.

**Решение 19.7.** Предположим, что пуля пролетает мимо наблюдателя в некоторой локальной собственной системе отсчета с собственной скоростью  $V$ . После того как она продвинулась еще на собственное расстояние  $dr$ , пуля пролетает мимо космологического наблюдателя, чья скорость относительно первой собственной системы равна

$$\delta V = H dr = H V dt = \frac{\dot{R}}{R} V dt = V \frac{dR}{R}.$$

Этот наблюдатель, измеряя скорость пули, получает (в соответствии с формулой сложения скоростей) значение

$$V' = \frac{V - \delta V}{1 - V \delta V} = V - (1 - V^2) \delta V + \mathcal{O}(\delta V)^2 = V - (1 - V^2) V \frac{dR}{R} + \mathcal{O}(\delta V)^2.$$

Отсюда имеем уравнение

$$dV/dR = -(1 - V^2) V/R;$$

проинтегрировав его, находим ответ:

$$\gamma V \equiv (1 - V^2)^{-\frac{1}{2}} V = \text{const}/R = \text{const} \cdot (1 + z).$$

Следовательно,  $V_1$  и  $V_2$  связаны соотношением

$$\gamma_2 V_2 / \gamma_1 V_1 = (1 + z)^{-1}.$$

Для частицы с ненулевой массой покоя этот результат означает, что релятивистский импульс по мере расширения Вселенной убывает (испытывает «красное смещение») обратно пропорционально  $(1+z)$ . Для фотона в пределе  $V \rightarrow 1$  имеем  $\gamma V \rightarrow h\nu$ , и наш результат сводится к обычной формуле для красного смещения. Обратите внимание, что мы не учли эффект замедления пули, обусловленный гравитационным притяжением космологического вещества, покоящегося в собственной системе отсчета. Читатель может самостоятельно проверить, что это эффект более высокого порядка и для него  $dV \sim dr^2$ , так что он не влияет на вид дифференциального уравнения для  $dV/dR$ .

**Решение 19.8.** Запишем сначала метрику в координатах  $\eta, \chi$  (третий вариант записи в задаче 19.5):

$$ds^2 = R^2(\eta) [-d\eta^2 + d\chi^2 + \Sigma^2(\chi) d\Omega^2], \quad (1)$$

где  $\Sigma(\chi) = \text{sh } \chi, \chi, \sin \chi$  для  $k = -1, 0, +1$  соответственно. Поскольку при конформных преобразованиях сохраняются неизменными световые конусы, представляется естественным перейти в качестве первого шага к изотропным координатам, например

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}(\eta + \chi), \\ v &= \frac{1}{2}(\eta - \chi). \end{aligned} \quad (2)$$

Тогда метрика приобретает вид

$$ds^2 = R^2(u+v) [-4dudv + \Sigma^2(u-v) d\Omega^2]. \quad (3)$$

Воспользуемся теперь преобразованием, которое сохраняло бы, во-первых, «изотропность» координат, а во-вторых, симметрию между  $u$  и  $v$ :

$$\begin{aligned} \alpha &= g(u), \quad u = f(\alpha), \\ \beta &= g(v), \quad v = f(\beta), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $g$  — функция, обратная  $f$ . После такого преобразования выражения для интервала (3) получаем

$$\begin{aligned} ds^2 &= R^2(u+v) [-4f'(\alpha)f'(\beta) d\alpha d\beta + \Sigma^2(u-v) d\Omega^2] = \\ &= R^2(u+v) f'(\alpha)f'(\beta) \left[ -4d\alpha d\beta + \frac{\Sigma^2(u-v)}{f'(\alpha)f'(\beta)} d\Omega^2 \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Если метрика должна быть конформно-плоской, член в квадратных скобках должен иметь такой же вид, как для плоского пространства, т. е.  $[-4d\alpha d\beta + (\alpha - \beta)^2 d\Omega^2]$ . Если воспользоваться функцией

$$f'(\alpha) = du/d\alpha = (d\alpha/du)^{-1} = [g'(u)]^{-1},$$

то условие это можно записать:

$$g'(u)g'(v)[\Sigma(u-v)]^2 = [g(u) - g(v)]^2. \quad (6)$$

Для  $k=0$  имеем

$$\Sigma(u-v) = u - v,$$

так что путем непосредственной подстановки можно убедиться, что функция  $g(x) = x$  удовлетворяет условию (6). Для двух других случаев из уравнения (6) можно найти сначала решение для координаты  $v$ , мало отличающейся от  $u$ , т. е. для  $v = u + \varepsilon$ . Разлагая уравнение (6) в ряд Тейлора, получаем

$$\begin{aligned} (g')^2 [1 + \varepsilon g''/g' + \varepsilon^2 g'''/(2g') \dots] \varepsilon^2 (1 - k\varepsilon^2/6 \dots)^2 = \\ = \varepsilon^2 (g')^2 [1 + \varepsilon g''/(2g') + \varepsilon^2 g'''/(6g') \dots]^2, \end{aligned} \quad (7)$$

так что, полагая  $p = g'$  и  $q = p'$ , для случая  $k = +1$  мы приходим к уравнению

$$2qdq/dp - 4p = 3q^2/p.$$

Это дифференциальное уравнение есть уравнение Бернулли; его решение имеет вид

$$q = p(Ap - 4)^{1/2}, \quad A = \text{const.}$$

Интегрируя дважды, получаем

$$\begin{aligned} u + B &= \text{arctg}(Ap/4 - 1)^{1/2}, \\ g(u) &= C \text{tg}(u + B) + D. \end{aligned}$$

Непосредственно подставляя в уравнение (6) это решение, можно проверить, что фактически оно представляет собой общее решение уравнения (6). Не теряя общности, мы можем положить  $g = \text{th} u$ . Для случая  $k = -1$  аналогично можно найти  $g = \text{th} u$ . Если подставить эти решения, то уравнение (6) превращается в два тригонометрических тождества:

$$\begin{aligned} \sec u \sec v \sin(u - v) &= \text{tg} u - \text{tg} v, \\ \text{sech} u \text{sech} v \text{sh}(u - v) &= \text{th} u - \text{th} v, \end{aligned}$$

а метрика (5) приобретает вид

$$ds^2 = \frac{R^2 [\text{arctg} \alpha + \text{arctg} \beta]}{(1 + \alpha^2)(1 + \beta^2)} [-4d\alpha d\beta + (\alpha - \beta)^2 d\Omega^2],$$

или

$$ds^2 = \frac{R^2 [\text{Arth} \alpha + \text{Arth} \beta]}{(1 - \alpha^2)(1 - \beta^2)} [-4d\alpha d\beta + (\alpha - \beta)^2 d\Omega^2].$$

В такой записи ясно видно, что она является конформно-плоской. Для конформно-плоской метрики тензор Вейля тождественно равен нулю, так что тензор Римана состоит только из тензора Риччи

и скалярной кривизны (см. введение к гл. 9):

$$R^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} = 2\delta^{[\alpha}_{[\gamma}R^{\beta]\delta]} - \frac{1}{3}\delta^{[\alpha}_{[\gamma}\delta^{\beta]\delta]}R. \quad (8)$$

Эта формула совместно с уравнением Эйнштейна

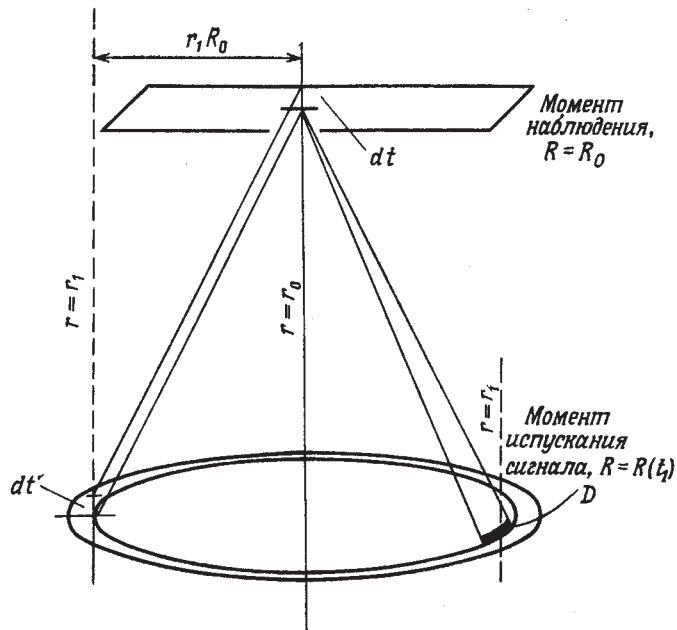
$$R^{\alpha}_{\beta} = 8\pi \left( T^{\alpha}_{\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha}_{\beta}T \right)$$

и выражением для тензора энергии-импульса

$$T^{\alpha}_{\beta} = (\rho + p)u^{\alpha}u_{\beta} + pg^{\alpha}_{\beta}$$

дает искомое выражение  $R^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}$  через  $g_{\mu\nu}$ ,  $u^{\mu}$ ,  $\rho$  и  $p$ .

**Решение 19.9.** Если физический размер объекта есть  $D$ , а стягиваемый им с точки зрения земного наблюдателя плоский



Фиг. 34.

угол равен  $\delta$ , то  $d_A \equiv D/\delta$ . Если воспользоваться метрикой Робертсона — Уокера, то из фиг. 34 видно, что  $D = R(t)r_1\delta$ , откуда

$$d_A = r_1 R(t_1).$$

Если объект движется перпендикулярно лучу зрения с собственной скоростью  $V$ , а видимая скорость углового движения есть

$d\delta/dt$ , то

$$d_M \equiv V/(d\delta/dt).$$

Пусть  $t'$  — промежутки времени, измеряемые в момент испускания фотонов. Так как  $V = d(R(t_1)r_1\delta)/dt'$ , а  $dt'/dt = R(t_1)/R_0$  из-за космологического красного смещения и, кроме того,  $R(t_1)$  можно рассматривать как постоянную величину, поскольку ее изменение не приводит к появлению движений, поперечных к лучу зрения, мы получаем

$$d_M = R_0 r_1.$$

Если объект обладает истинной светимостью  $L$ , а мы наблюдаем поток  $\ell$ , то

$$d_L \equiv (L/4\pi\ell)^{1/2}.$$

За время  $dt'$  объект излучает энергию  $L dt'$ . К настоящему времени это излучение испытало красное смещение, описываемое отношением  $R(t_1)/R_0$ , и в момент наблюдения распределено по сфере, собственная площадь поверхности которой есть  $4\pi(r_1 R_0)^2$  (см. фиг. 34). Следовательно,

$$\ell = (L dt' R/R_0) (4\pi r_1 R_0)^{-2} / dt$$

и

$$d_L = R_0^2 r_1 / R(t_1).$$

Используя соотношение

$$R_0/R(t_1) = 1 + z,$$

приходим к искомому результату

$$(1+z)^2 d_A = (1+z) d_M = d_L.$$

**Решение 19.10.** При решении задачи 19.19 мы нашли

$$d_L = R_0^2 r_1 / R(t_1),$$

где  $r_1$  — радиальная координата объекта, а  $R(t_1)$  — масштабный фактор в момент испускания света  $t_1$ . Так как  $H_0 \equiv \dot{R}/R$ , а  $q_0 \equiv -\ddot{R}R/\dot{R}^2$ , первые члены в разложении  $R(t)$  в степенной ряд имеют вид

$$R(t) = R_0 \left( 1 + H_0(t-t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t-t_0)^2 + \dots \right). \quad (1)$$

Мы можем исключить  $R(t_1)$  из выражения для  $d_L$ , используя соотношение  $R_0/R(t_1) = 1 + z$ , но нам нужно будет еще найти выражения для  $R_0$  и  $r_1$ . Чтобы получить траекторию световых лучей в метрике Робертсона — Уокера, положим  $ds^2 = 0$ . Тогда



получим

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{R(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{(1-kr^2)^{1/2}}. \quad (2)$$

Используя для  $R(t)$  выражение (1) [с точностью до двух низших порядков по  $(t_0 - t_1)$ ] при выполнении интегрирования в уравнении (2), имеем

$$r_1 = \frac{1}{R_0} \left[ (t_0 - t_1) + \frac{1}{2} H_0 (t_0 - t_1)^2 + \dots \right]. \quad (3)$$

Определяя  $(t - t_0)$  из уравнения (1) и выражая через  $1 + z = R_0/R(t)$ , окончательно находим

$$R_0 r_1 = \frac{1}{H_0} \left[ z - \frac{1}{2} (1 + q_0) z^2 + \dots \right],$$

откуда

$$d_L = (1 + z) R_0 r_1 = \frac{1}{H_0} \left[ z + \frac{1}{2} (1 - q_0) z^2 + \dots \right],$$

или в эквивалентной записи

$$d = \frac{L}{4\pi d_L^2} = \frac{LH_0^2}{4\pi z^2} [1 + (q_0 - 1)z + \dots].$$

### Решение 19.11.

а) Пусть  $n(t_1)$  — число источников в единице объема в момент времени  $t_1$ . Элемент объема записывается в виде

$$|^{(3)}g|^{1/2} dr_1 d\theta_1 d\varphi_1 = R^3(t_1) (1 - kr_1^2)^{-1/2} r_1^2 dr_1 \sin \theta_1 d\theta_1 d\varphi_1.$$

Следовательно, число источников в слое между  $r_1$  и  $r_1 + dr_1$  в момент времени  $t_1$  есть

$$dN = 4\pi R^3(t_1) (1 - kr_1^2)^{-1/2} r_1^2 n(t_1) dr_1.$$

Величины  $r_1$  и  $t_1$  связаны друг с другом уравнением распространения световых лучей в метрике Робертсона — Уокера [уравнение (2) в решении задачи 19.10], т. е.  $r_1 = r(t_1)$ , где

$$dr_1 = (1 - kr_1^2)^{-1/2} dt_1 / R(t_1).$$

Таким образом, имеем

$$dN = 4\pi R^3(t_1) r^2(t_1) n(t_1) |dt_1|$$

и

$$N(z) = \int_{t_z}^{t_0} 4\pi R^3(t_1) r^2(t_1) n(t_1) dt_1,$$

где  $t_z$  — космологическое время, соответствующее красному смещению  $z$ ; оно определяется в неявном виде с помощью соотношения

$$\frac{R(t_z)}{R(t_0)} = \frac{1}{1+z}. \quad (1)$$

Поскольку плотность числа источников сохраняется, имеем

$$n(t)R^3(t) = \text{const}$$

[это равенство вытекает из  $(nu^\mu)_{;\mu} = 0$ ]. Следовательно,

$$N(z) = 4\pi n(t_0)R^3(t_0) \int_{t_z}^{t_0} R^{-1}(t_1)r^2(t_1)dt_1.$$

Если  $z$  мало, то  $t_0 \approx t_z$ , и мы можем воспользоваться разложениями

$$R(t_1) = R(t_0)[1 - H_0(t_0 - t_1) + \dots], \quad (2)$$

$$r(t_1) = \frac{t_0 - t_1}{R(t_0)} \left[ 1 + \frac{1}{2} H_0(t_0 - t_1) + \dots \right]$$

[см. решение задачи 19.10, уравнения (1) и (3)]. Таким образом, для малых  $z$

$$\begin{aligned} N(z) &= 4\pi n(t_0) \int_{t_z}^{t_0} (t_0 - t_1)^2 [1 + 2H_0(t_0 - t_1) + \dots] dt_1 = \\ &= \frac{4\pi}{3} n(t_0) (t_0 - t_z)^3 \left[ 1 + \frac{3}{2} H_0(t_0 - t_z) + \dots \right]. \end{aligned}$$

Чтобы из уравнения (1) определить  $t_0 - t_z$  с точностью до  $\mathcal{O}(z^2)$ , нам необходим следующий член в уравнении (2):

$$R(t_z) = R(t_0) \left[ 1 - H_0(t_0 - t_z) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2(t_0 - t_z)^2 + \dots \right].$$

В результате получим

$$H_0(t_0 - t_z) = z \left[ 1 - z \left( 1 + \frac{q_0}{2} \right) + \dots \right]$$

и, наконец,

$$N(z) = \frac{4\pi}{3} \frac{n(t_0)}{H_0^3} z^3 \left[ 1 - \frac{3}{2} z (1 + q_0) + \dots \right].$$

Заметьте, что с точностью до данного порядка по  $z$  оказалось возможным обойтись без уравнений поля.

б) Регистрируемый на Земле поток излучения есть

$$S = \frac{LR^2(t_1)}{4\pi r_1^2 R^4(t_0)} \quad (3)$$

(см. задачу 19.9, где  $S$  обозначалось через  $l$ ). Следовательно, как и в п. «а», имеем

$$N(S) = \int_{t_S}^{t_0} 4\pi R^2(t_1) r^2(t_1) n(t_1) dt_1, \quad (4)$$

где при подстановке нижнего предела интегрирования справедливо соотношение

$$\frac{r^2(t_S)}{R^2(t_S)} = \frac{L}{4\pi S R^2(t_0)}, \quad (5)$$

получающееся из формулы (3). Когда излучение  $S$  велико, то разность  $t_0 - t_S$  мала, и разложение интеграла (4), как и в п. «а», дает

$$N(S) = \frac{4\pi}{3} n(t_0) (t_0 - t_S)^3 \left[ 1 + \frac{3}{2} H_0 (t_0 - t_S) + \dots \right].$$

Подставляя разложения для  $r(t_S)$  и  $R(t_S)$  в уравнение (5), получаем

$$t_0 - t_S = \left( \frac{L}{4\pi S} \right)^{1/2} \left[ 1 - \frac{3}{2} H_0 \left( \frac{L}{4\pi S} \right)^{1/2} + \dots \right],$$

откуда

$$N(S) = \frac{4\pi}{3} n(t_0) \left( \frac{L}{4\pi S} \right)^{3/2} \left[ 1 - 3H_0 \left( \frac{L}{4\pi S} \right)^{1/2} + \dots \right].$$

**Решение 19.12.** Выберем новую радиальную координату  $\chi$ , определяемую соотношением

$$d\chi^2 = dr^2 / (1 - kr^2).$$

Тогда для фотона, распространяющегося вдоль радиуса,  $d\theta = d\varphi = 0$ , а метрические коэффициенты вдоль траектории не зависят от  $\chi$ . Следовательно,  $\chi$  — циклическая координата и  $p_\chi = \text{const}$  вдоль траектории луча (см. задачу 7.13). Поднимая этот индекс с помощью метрического тензора, получаем

$$p^\chi = C/R^2(t),$$

где  $C$  — некоторая постоянная. Но

$$p^\chi = d\chi/d\lambda,$$

откуда

$$d\lambda = C^{-1} R^2(t) d\chi = C^{-1} \frac{R^2(t) dr}{(1 - kr^2)^{1/2}}.$$

Обратите внимание, что, поскольку  $R$  — функция  $t$ , она является также функцией  $r$  вдоль световой линии прошлого.

**Решение 19.13.** В сопутствующей ортонормированной системе координат имеем

$$T^{\hat{0}}_{\hat{0}} = -\rho \text{ и } T^{\hat{r}}_{\hat{r}} = T^{\hat{\phi}}_{\hat{\phi}} = T^{\hat{\theta}}_{\hat{\theta}} = p.$$

Следовательно, тензор энергии-импульса «с обратным следом»  $\bar{T}$  обладает компонентами (см. задачу 13.14)

$$\bar{T}^{\hat{0}}_{\hat{0}} = -\frac{1}{2}(\rho + 3p) \text{ и } \bar{T}^{\hat{r}}_{\hat{r}} = \frac{1}{2}(\rho - p).$$

Приравняем его тензору Риччи, умноженному на  $1/8\pi G$ . Компоненты тензора Риччи можно вычислить, например, из результатов задачи 9.20 (сферически-симметричная метрика общего вида). Они равны

$$R^{\hat{0}}_{\hat{0}} = 3\ddot{R}/R, \\ R^{\hat{r}}_{\hat{r}} = \frac{1}{R^2}(R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k).$$

Отсюда немедленно следуют искомые уравнения. Если бы мы воспользовались другим, эквивалентным методом и приравняли  $8\pi T_{\mu\nu}$  тензору Эйнштейна  $G_{\mu\nu}$  (представляющему собой тензор Риччи с обратным следом), то получили бы две линейные комбинации выписанных выше уравнений.

**Решение 19.14.** Первое уравнение получается просто путем исключения  $\ddot{R}$  из системы уравнений задачи 19.13. Второе искомое уравнение получается из него после использования тождества

$$\frac{1}{2} d [(\dot{R})^2] / dR = \dot{R}$$

и уравнения (1) из задачи 19.13:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dR} \left( \frac{8\pi G}{3} \rho R^2 \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dR} (\dot{R})^2 = \dot{R} = -\frac{4}{3} \pi G (\rho + 3p) R, \\ \frac{d}{dR} (\rho R^2) = -(\rho + 3p) R, \\ \frac{d}{dR} (\rho R^3) = -3p R^2.$$

**Решение 19.15.** Уравнение (1) следует непосредственно из определения

$$H \equiv \dot{R}/R$$

и фридмановского уравнения первого порядка (задача 19.14)

$$\dot{R}^2 + k = \frac{8\pi G}{3} \rho R^2.$$

Если мы теперь продифференцируем это уравнение по  $R$ , используем тождество

$$\ddot{R} \equiv \frac{1}{2} d[(\dot{R})^2]/dR,$$

а также другое уравнение первого порядка

$$d(\rho R^3)/dR = -3\rho R^2$$

и определение

$$q \equiv -\dot{R}R/\dot{R}^2,$$

мы приходим к уравнению (2). Если  $\rho \gg p$ , то левой частью уравнения (2) можно пренебречь по сравнению с правой, и мы получаем уравнение (3). Подставляя уравнение (3) в уравнение (1), находим уравнение (4). Если  $p = 1/3\rho$ , то, исключая  $\rho$  из уравнений (1) и (2), мы получаем уравнение (5), а исключая член  $k/R^2$ , приходим к уравнению (6).

**Решение 19.16.** Подставляя в уравнение сохранения энергии с  $\mu = j$  соотношения

$$T^0_0 = -\rho \quad \text{и} \quad T^j_j \text{ (нет суммирования по индексам)} = p,$$

а также используя условие однородности  $\rho_{,j} = 0$ , получаем

$$\begin{aligned} 0 &= T_{j;v}^v = T_{j,v}^v - T_{\alpha}^v \Gamma^{\alpha}_{jv} + T_j^{\alpha} \Gamma_{\alpha v}^v = \\ &= \rho_{,j} + \rho \Gamma^0_{j0} - \rho \Gamma^k_{jk} + \rho \Gamma^v_{jv} = (\rho + p) \Gamma^0_{j0} = 0, \end{aligned}$$

т. е. тривиальное тождество. Компонента  $\mu = 0$  дает

$$\begin{aligned} 0 &= T_{0;v}^v = T_{0,v}^v - T_{\alpha}^v \Gamma^{\alpha}_{0v} + T_0^{\alpha} \Gamma_{\alpha v}^v = \\ &= -\frac{d\rho}{dt} + \rho \Gamma^0_{00} - (\rho + p) (\ln |g|^{1/2})_{,0}, \end{aligned}$$

где мы воспользовались (см. задачу 7.7) формулой

$$\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta} = \left( \ln |g|^{1/2} \right)_{,\beta}.$$

Отсюда следует

$$d\rho/dt = -\frac{\rho+p}{R^3} \frac{d}{dt} (R^3)$$

и

$$d(\rho R^3) = -3\rho R^2 dR,$$

что и представляет собой одно из фридмановских уравнений первого порядка (см. задачу 19.14).

**Решение 19.17.** Для  $\rho = \rho_0 = 0$  и  $k = -1$  фридмановское уравнение первого порядка

$$\dot{R}^2 + k = \frac{8\pi G}{3} \rho R^2$$

сводится к уравнению  $\dot{R} = 1$ , откуда следует, что  $R = t$ , т. е. заданное выражение для линейного элемента действительно представляет собой метрику Фридмана. Поскольку метрика сферически-симметрична, радиальная координата кривизны есть

$$r = t \operatorname{sh} \chi.$$

Нетрудно догадаться, что искомым преобразованием временной координаты является

$$T = t \operatorname{ch} \chi,$$

а затем можно вычислить преобразованное выражение для интервала

$$ds^2 = -dT^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$

соответствующего пустому пространству Минковского.

**Решение 19.18.**

а) Когда преобладает вещество, мы можем пренебречь давлением, и тогда плотность массы-энергии будет убывать по мере возрастания объема Вселенной:

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^3. \quad (1)$$

Определим новую временную координату («угол развертки») в помощью соотношения

$$d\eta = dt/R.$$

Тогда фридмановское уравнение переписывается в виде

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \left(\frac{dR/d\eta}{R^2}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^3 - \frac{k}{R^2}, \quad (2)$$

или

$$R^{-1/2} \frac{dR}{d\eta} = 2 \frac{d}{d\eta} R^{1/2} = \left(\frac{8\pi G}{3} \rho_0 R_0^3 - kR\right)^{1/2}.$$

Принтегрировав его, получим

$$\frac{1}{2} \eta = \int_0^{R^{1/2}} \frac{dR^{1/2}}{\left(\frac{8}{3} \pi \rho_0 R_0^3 - kR\right)^{1/2}} = \begin{cases} \operatorname{arcsin} \frac{R^{1/2}}{\left(\frac{8}{3} \pi G \rho_0 R_0^3\right)^{1/2}} & \text{для } k = +1, \\ \frac{R^{1/2}}{\left(\frac{8}{3} \pi G \rho_0 R_0^3\right)^{1/2}} & \text{для } k = 0, \\ \operatorname{Arsh} \frac{R^{1/2}}{\left(\frac{8}{3} \pi G \rho_0 R_0^3\right)^{1/2}} & \text{для } k = -1. \end{cases} \quad (3)$$

Из задачи 19.15 мы знаем, что

$$q_0 = \frac{4\pi G}{3} \frac{\rho_0}{H_0^2} \quad (4)$$

и

$$R_0^2 = \frac{k}{(2q_0 - 1) H_0^2} \quad (k = \pm 1). \quad (5)$$

Так как левая часть (5) положительна, ясно, что  $k = \text{sign}(2q_0 - 1)$ . Следовательно, в уравнении (3) имеем

$$\frac{8\pi}{3} \rho_0 R_0^2 = \frac{2q_0}{H_0 |2q_0 - 1|^{3/2}} \quad (k = \pm 1).$$

Разрешая уравнение (3) относительно  $R$ , получаем

$$R = \begin{cases} \frac{q_0}{H_0 (2q_0 - 1)^{3/2}} (1 - \cos \eta) & \text{для } k = +1, \\ \frac{1}{4} H_0^2 R_0^2 \eta^2 & \text{для } k = 0, \\ \frac{q_0}{H_0 (1 - 2q_0)^{3/2}} (\text{ch } \eta - 1) & \text{для } k = -1. \end{cases}$$

Наконец, интегрируя соотношение  $dt = R d\eta$ , находим

$$t = \begin{cases} \frac{q_0}{H_0 (2q_0 - 1)^{3/2}} (\eta - \sin \eta) & \text{для } k = +1, \\ \frac{1}{12} H_0^2 R_0^2 \eta^3 & \text{для } k = 0, \\ \frac{q_0}{H_0 (1 - 2q_0)^{3/2}} (\text{sh } \eta - \eta) & \text{для } k = -1. \end{cases}$$

При  $k = 0$  невозможно исключить из ответа  $R_0$ ; это отражает всего лишь тот факт, что Вселенная в данном случае обладает произвольным масштабом пространственных расстояний и ее геометрия «выглядит» одинаково во все моменты времени. Значение  $R_0$  не будет входить в вычисления любой физически измеримой величины.

б) Когда преобладает излучение, масса-энергия, содержащаяся в данном объеме сопутствующего пространства, не будет постоянной. В этом случае существует дополнительный эффект убывания плотности за счет красного смещения фотонов, и поэтому

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^4.$$

Аналогом уравнения (2) является уравнение

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \left(\frac{dR/d\eta}{R^2}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^4 - \frac{k}{R^2},$$

или

$$\frac{dR}{\left(\frac{8}{3}\pi G\rho_0 R_0^4 - kR^2\right)^{1/2}} = d\eta;$$

решение этого уравнения имеет вид

$$R = \left(\frac{8\pi}{3} G\rho_0 R_0^4\right)^{1/2} \times \begin{cases} \sin \eta & \text{для } k = +1, \\ \eta & \text{для } k = 0, \\ \operatorname{sh} \eta & \text{для } k = -1. \end{cases} \quad (6)$$

Вместо уравнения (4) мы получаем теперь (см. задачу 19.15)

$$q_0 = \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_0}{H_0^2},$$

а вместо уравнения (5) имеем

$$R_0^2 = \frac{k}{(q_0 - 1) H_0^2} \quad (k = \pm 1).$$

Следовательно, уравнение (6) заменяется на

$$\frac{8\pi}{3} G\rho_0 R_0^4 = \begin{cases} \frac{q_0}{(q_0 - 1)^2 H_0^2} & \text{для } k = \pm 1, \\ H_0^2 R_0^4 & \text{для } k = 0, \end{cases}$$

а интегрирование соотношения  $dt = R d\eta$  дает

$$t = \begin{cases} \frac{1}{H_0} \left[ \frac{q_0^{1/2}}{q_0 - 1} \right] (1 - \cos \eta) & \text{для } k = +1, \\ \frac{1}{2} H_0 R_0^2 \eta^2 & \text{для } k = 0, \\ \frac{1}{H_0} \left[ \frac{q_0^{1/2}}{q_0 - 1} \right] (\operatorname{ch} \eta - 1) & \text{для } k = -1. \end{cases}$$

**Решение 19.19.** После того как пуля достигла нерелятивистской скорости, мы имеем (из результатов задачи 19.7).

$$\frac{\operatorname{const}}{R} = \frac{dr_p}{dt} = \frac{dr_p}{dr} \frac{dr}{dR} \frac{dR}{dt} = \frac{dr}{dR} \dot{R}, \quad (1)$$

где  $r$  — координата Робертсона — Уокера, связанная с собственными расстояниями  $r_p$  посредством соотношения  $dr_p = R dr$  (из него и следует последнее из написанных выше равенств). Для фридмановской Вселенной с  $k = 0$  имеем

$$R \sim t^{2/3},$$

откуда

$$\dot{R} \sim R^{-1/3}.$$



Тогда из уравнения (1) следует

$$dr/dR \sim R^{-3/2},$$

и мы получаем

$$r = A + B/R^{1/2}.$$

При  $t \rightarrow \infty$  координата пули  $r_{\text{пули}}$  приближается к значению  $r = A$ . Собственное расстояние между наблюдателем, находящимся в точке  $r = A$ , и пулей равно

$$R \Delta r = BR^{1/2}.$$

Следовательно, *собственное* расстояние стремится к бесконечности, даже если скорость пули [согласно уравнению (1)] приближается к скорости космологического наблюдателя.

Если  $k = -1$ , то при больших временах величина  $\dot{R}$  становится постоянной, и из уравнения (1) следует

$$dr/dR \sim R^{-2},$$

откуда

$$r = A + B/R.$$

При  $t \rightarrow \infty$  координата пули  $r$  достигает значения  $A$ , но собственное расстояние  $R \Delta r$  между пулей и наблюдателем, находящимся в точке  $r = A$ , достигает некоторого постоянного значения  $B$ .

**Решение 19.20.** Если во фридмановской метрике время выражается через «угол развертки»  $\eta$ , определяемый соотношением

$$d\eta = dt/R(t),$$

то выражение интервала для фотона, распространяющегося по радиусу ( $d\theta = d\phi = 0$ ), принимает вид

$$0 = ds^2 = R^2(\eta) (-d\eta^2 + d\chi^2),$$

где  $d\chi^2 = dr^2/(1-r^2)$  — «тригонометрическая» радиальная координата на 3-сфере (см. задачу 19.5). Из задачи 19.18 следует, что время жизни Вселенной (промежуток между двумя нулями функции  $R$ ) соответствует промежутку  $\Delta\eta = 2\pi$ . За это время фотон пройдет расстояние  $\Delta\chi = 2\pi$ , т. е. обожит Вселенную в точности один раз.

**Решение 19.21.** Для фридмановской Вселенной с  $k = 0$  имеем

$$R(t)/R_0 = \left(\frac{3}{2} H_0 t\right)^{2/3}.$$

Энергия, излучаемая источником за единицу собственного времени, есть  $L$ . Она уменьшается за счет красного смещения в  $R(t)/R_0$  раз.

так что наблюдаемая нами в *современную эпоху* полная энергия на одну звезду есть

$$\mathcal{E} = \int_0^{t_0} L \frac{R(t)}{R_0} dt = \frac{3}{5} L \left( \frac{3}{2} H_0 \right)^{2/3} t_0^{5/3},$$

или

$$\mathcal{E} = 2L/5H_0,$$

так как  $t_0 = 2/3H_0$ . Тогда энергия на единицу объема,  $u$ , равна в настоящее время  $2/5H_0^{-1}Ln$ . Так как энергия излучения заполняет Вселенную изотропно, она соответствует потоку излучения

$$B = \frac{c}{4\pi} u = \frac{c}{10\pi} H_0^{-1}Ln.$$

Для сравнения укажем, что в ньютоновской Вселенной, в которой все звезды «зажглись» бы в момент времени  $t_0 = (3/2H_0)^{-1}$ , мы имели бы

$$\mathcal{E} = \int_0^{t_0} L dt = \frac{2}{3} H_0^{-1}L$$

и

$$B = \frac{c}{6\pi} H_0^{-1}Ln.$$

**Решение 19.22.** Из решения задачи 19.18 мы знаем, что параметру замедления  $q_0 > 0,5$  соответствует космологическая модель с  $k = +1$ , которая расширяется по закону

$$R(t)/R_0 = \frac{q_0}{2q_0 - 1} (1 - \cos \eta). \quad (1)$$

Подставляя  $R(t) = R_0$  и соответственно  $\eta = \eta_0$ , мы получаем формулу, связывающую  $\eta_0$  со значением  $q_0$  в «современную» эпоху. Так как выбор «современной» эпохи, очевидно, является произвольным, эта формула связывает  $\eta$  и  $q$  для любой эпохи. Полагая  $q = 0,5002$ , мы получаем, что  $1 - \cos \eta = 0,0008$  при  $z = 1500$ . Подставляя это значение обратно в уравнение (1) и полагая  $R_0/R(t) = 1 + z = 1501$ , мы можем решить уравнение (1) относительно  $q_0$ . Получим

$$q_0 = [2 - (1 + z)(1 - \cos \eta)]^{-1} = 1,25.$$

Если параметр замедления  $q_0 < 0,5$ , то  $k = -1$ , и уравнение (1) заменяется на следующее:

$$R(t)/R_0 = \frac{q_0}{1 - 2q_0} (\operatorname{ch} \eta - 1). \quad (2)$$

Полагая  $q = 0,4998$ , получаем, что  $\operatorname{ch} \eta - 1 = 0,0008$  при  $z = 1500$ .

Отсюда для  $q_0$  находим

$$q_0 = [2 + (1+z)(\text{ch } \eta - 1)]^{-1} = 0,312.$$

**Решение 19.23.**

а) В современную эпоху  $t = t_0$  пространственноподобная 3-поверхность обладает метрикой

$$d\sigma^2 = R_0^2 \left( \frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \right).$$

Замечая, что промежуток  $0 \leq r \leq 1$  соответствует половине 3-сферы, имеем

$$V = \int_{3\text{-сфера}} |^{(3)}g|^{1/2} d^3x = 2 \int_0^1 dr \int_{-1}^1 d(\cos \vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{R_0^3 r^2}{(1-r^2)^{1/2}} = 2\pi^2 R_0^3.$$

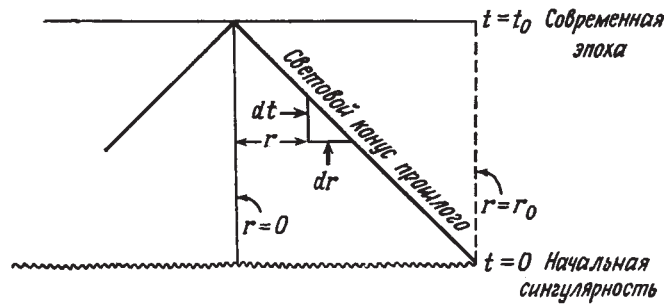
Для Вселенной, в которой преобладает вещество (см. задачу 19.15),

$$R_0 = H_0^{-1} (2q_0 - 1)^{-1/2}, \quad (1)$$

откуда

$$V = 2\pi^2 (2q_0 - 1)^{-3/2} H_0^{-3}. \quad (2)$$

б) Наш световой конус прошлого за время  $dt$  распространяется на собственное радиальное расстояние  $c dt$  (см. фиг. 35). Зная



Фиг. 35.

метрику, находим, что собственная площадь поверхности 2-сферы есть  $4\pi r^2 R^2$ , где  $r$  и  $R$  — функции  $t$  вдоль светового конуса. Следовательно, видимый нами объем есть ( $c = 1$ )

$$V = \int_0^{t_0} dt 4\pi r^2(t) R^2(t). \quad (3)$$

Дифференциальное уравнение для  $r(t)$  следует из определения

этой функции как светового конуса:

$$-dt = \frac{R(t)}{(1-r^2)^{1/2}} dr \quad (4)$$

и

$$r=0 \quad \text{при} \quad t=t_0.$$

Чтобы решить уравнение (4) и найти интеграл (3), мы воспользуемся решением для  $R(t)$ , параметризованным с помощью «угла развертки»  $\eta$  (см. решение задачи 19.18):

$$R = A(1 - \cos \eta), \quad t = A(\eta - \sin \eta), \quad (5)$$

где

$$A = \frac{q_0}{(2q_0 - 1)^{3/2} H_0}, \quad (6)$$

а современное значение  $\eta$  есть

$$\eta_0 = \arccos\left(\frac{1-q_0}{q_0}\right). \quad (7)$$

Теперь уравнение (4) приобретает вид

$$d(\arcsin r) = d\eta,$$

откуда

$$r = \sin(\eta_0 - \eta), \quad (8)$$

и выражение (3) переписывается как

$$V = \int_0^{\eta_0} A(1 - \cos \eta) d\eta 4\pi \sin^2(\eta_0 - \eta) A^2 (1 - \cos \eta)^2.$$

Непосредственное интегрирование приводит к выражению

$$V = 4\pi A^3 \left( \frac{61}{80} \sin 2\eta_0 + \frac{5}{4} \eta_0 - \frac{5}{2} \sin \eta_0 - \frac{3}{8} \eta_0 \cos 2\eta_0 + \frac{1}{30} \sin 3\eta_0 \right),$$

которое с помощью соотношений (6) и (7) можно свести к функции от  $q_0$  и  $H_0$ .

в) Согласно уравнению (8), радиальная координата для самых удаленных областей пространства, которые мы в состоянии увидеть в современную эпоху, есть

$$r_0 = \sin(\eta_0) = (2q_0 - 1)^{1/2}/q_0,$$

где мы использовали также соотношение (7). Объем, ограниченный этим значением радиальной координаты в современную эпоху,

составляет (вычисления аналогичны вычислениям в п. «а»)

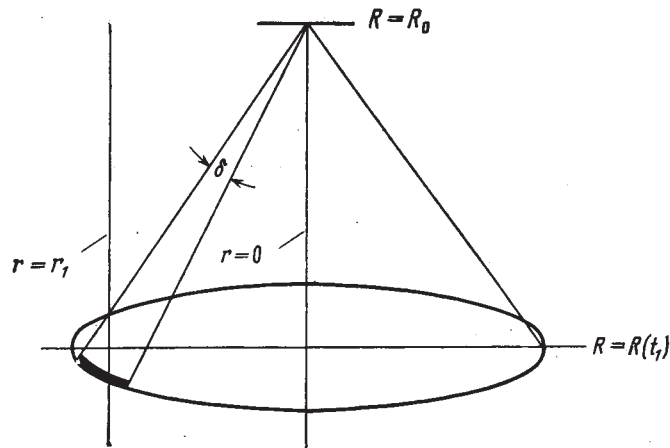
$$V = 4\pi \int_0^{r_0} \frac{R_0^3 r^2 dr}{(1-r^2)^2} = 2\pi R_0^3 [\arcsin r_0 - r_0 (1-r_0^2)^{1/2}] =$$

$$= \frac{2\pi}{H_0^3 (2q_0 - 1)^2} \left[ \arccos \left( \frac{1-q_0}{q_0} \right) - \frac{(1-q_0)(2q_0-1)^{1/2}}{q_0^2} \right].$$

**Решение 19.24.** Из фиг. 36 и вида линейного элемента метрики Робертсона—Уокера следует

$$t = [r_1 R(t_1)] \delta.$$

Функцию  $R(t_1)$  можно заменить на  $R_0/(1+z)$ ; трудность состоит



Фиг. 36.

теперь только в вычислении  $r_1$ . Возьмем метрику, записанную в координатах  $\eta, \chi$  (из задачи 19.5). Тогда

$$r_1 = \Sigma(\chi_1).$$

Траектория фотона описывается уравнением

$$0 = R^2 (d\chi^2 - d\eta^2),$$

так что

$$\chi_1 = \eta(t_0) - \eta(t_1).$$

Применяя формулу для синуса (или гиперболического синуса) разности двух аргументов, получаем

$$r_1 = \Sigma(\eta_0) C(\eta_1) - \Sigma(\eta_1) C(\eta_0). \quad (1)$$

Здесь  $C$  означает  $\cos$ ,  $1$  или  $\operatorname{ch}$  для  $k=1, 0, -1$  соответственно. Воспользуемся теперь формулой, связывающей значение  $\eta$  для некоторой эпохи с соответствующим ей значением красного смещения и современным значением  $q$  (см. задачу 19.18):

$$1 - C(\eta) = \frac{2q_0 - 1}{q_0} \frac{1}{1+z},$$

или

$$C(\eta) = \frac{q_0 z - q_0 + 1}{q_0 (1+z)}$$

(эта формула верна для всех трех значений  $k$ ). Отсюда получим

$$\Sigma(\eta) = \frac{|2q_0 - 1|^{1/2} (2q_0 z + 1)^{1/2}}{q_0 (1+z)}$$

и

$$r_1 = \frac{|2q_0 - 1|^{1/2}}{q_0^2 (1+z)} [1 - q_0 + q_0 z - (1 - q_0) (1 + 2q_0 z)^{1/2}].$$

Следовательно, видимый угловой размер есть

$$\delta = \ell / r_1 R(t_1) = \ell (1+z) / r_1 R_0.$$

Используя для исключения  $R_0$  уравнение (3) из задачи 9.15, окончательно получаем

$$\delta = \frac{\ell H_0 (1+z)^2 q_0^2}{\left[ 1 - q_0 + q_0 z - (1 - q_0) (1 + 2q_0 z)^{1/2} \right]}.$$

**Решение 19.25.** Мы будем работать в системе единиц, где  $c = k = 1$ . Плотность вещества есть

$$\rho_{\text{вещ}} = m_p n;$$

здесь  $m_p$  — средняя масса бариона. Плотность излучения дается формулой

$$\rho_{\text{изл}} = KaT^4,$$

где  $a$  — постоянная Стефана — Больцмана, равная  $8\pi^5 k^4 / 15h^3$ , а  $K=1$  (если мы рассматриваем только фотоны) или  $K=1 + \frac{7}{4} \left(\frac{4}{11}\right)^{4/3} = 1,454$  (если мы рассматриваем фотоны и нейтрино; см. [2], стр. 575). Приравнявая  $\rho_{\text{вещ}}$  и  $\rho_{\text{изл}}$ , получаем

$$1 = \frac{\rho_{\text{изл}}}{\rho_{\text{вещ}}} = \frac{KaT^4}{nm_p}. \quad (1)$$

Уравнение Саха для степени ионизации  $x$  водорода гласит:

$$\frac{x^2}{1-x} = \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \alpha^2 m_e / kT\right)}{nh^3},$$

где  $m_e$  — масса электрона, а  $\alpha = \frac{1}{137}$ . Если считать, что рекомбинация соответствует тому моменту, когда левая часть уравнения Саха примерно равна единице, то, используя уравнение (1), получаем

$$\exp\left(\frac{1}{2}\alpha^2 m_e/kT\right) = \frac{15(2\pi m_e T)^{3/2} m_p}{8\pi^5 K T^4}.$$

Разумеется, вид решения определяется экспонентой:

$$T \sim \alpha^2 m_e.$$

Если мы теперь попытаемся подобрать некоторое значение коэффициента, а затем вычислим правую часть и один раз проинтегрируем, то придем к более точному виду решения (ср. задачу 19.26):

$$T \approx \frac{1}{80}\alpha^2 m_e.$$

Если же, наконец, начало преобладания вещества и рекомбинация водорода происходят при одной и той же температуре  $T$ , мы имеем

$$\sigma = \frac{4}{3} \frac{aT^3}{n} = \frac{4}{3} \frac{m_p}{TK} \left(\frac{KaT^4}{m_p n}\right) = \frac{4}{3} \frac{m_p}{K \left(\frac{1}{80}\alpha^2 m_e\right)} = \frac{320}{3K} (137)^2 (1836) \approx 4 \cdot 10^9.$$

**Решение 19.26.** Уравнение Саха для степени ионизации водорода в условиях термодинамического равновесия имеет вид (в системе единиц, где  $k=c=1$ )

$$\frac{x^2}{1-x} = \frac{(2\pi m_e T)^{3/2} e^{-B/T}}{n h^3}, \quad (1)$$

где  $B$  — энергия ионизации, равная  $\frac{1}{2}\alpha^2 m_e$  ( $\alpha = 1/137$ ), а  $n$  — суммарная плотность числа протонов и атомов. Величина  $n$  связана с  $\sigma$ , т. е. энтропией на барион, соотношением

$$\sigma = \frac{4}{3} \frac{aT^3}{a},$$

так что если мы положим  $x = 1/2$  и примем для  $a$  значение  $8\pi^5/15h^3$ , уравнение (1) запишется в виде

$$\frac{2^{1/2} 4\pi^{3/2}}{45} \frac{1}{\sigma} \left(\frac{T}{m_e}\right)^{3/2} = \exp\left[-\frac{m_e/T}{2(137)^2}\right].$$

Это уравнение легко решается методом итераций. Например, про-

делав процедуру итераций дважды, получим

$$\frac{m_e}{T} = 2(137)^2 \left( \ln \frac{\sigma}{6,908} + \frac{3}{2} \ln \frac{m_e}{T} \right)$$

и

$$T \approx \frac{m_e}{2(137)^2} \left[ \ln \frac{\sigma}{6,908} + \frac{3}{2} \left( 10,53 + \ln \ln \frac{\sigma}{6,908} \right) \right]^{-1} =$$

$$= \begin{cases} 4330 \text{ К для } \sigma = 10^8, \\ 4050 \text{ К для } \sigma = 10^9. \end{cases}$$

**Решение 19.27.** Из задачи 19.18 известно, что в радиационно-доминированном режиме вблизи сингулярности

$$R = \left( \frac{8\pi}{3} \rho_0 R_0^4 \right)^{1/2} \eta, \quad t = \left( \frac{8\pi}{3} \rho_0 R_0^4 \right)^{1/2} \frac{\eta^2}{2}. \quad (1)$$

Эти формулы справедливы для любого значения  $k$  в пределе  $\eta \rightarrow 0$ . Отсюда имеем

$$t^2 = \frac{3R^4}{32\pi\rho_0 R_0^4} = \frac{3}{32\pi a}, \quad (2)$$

где мы использовали тот факт, что в радиационно-доминированную эпоху

$$\rho \sim R^{-4}.$$

Плотность энергии фотонов есть

$$\rho_\gamma = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^\infty \frac{q^3 dq}{\exp(q/kT) - 1} = aT^4,$$

где  $a$  — постоянная Стефана — Больцмана, равная  $8\pi^5 k^4 / 15h^3$ . Для ультрарелятивистских электронов и позитронов (подчиняющихся статистике Ферми — Дирака) имеем

$$\rho_{e^+} = \rho_{e^-} = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^\infty \frac{q^3 dq}{\exp(q/kT) + 1} = \frac{7}{8} aT^4.$$

Следовательно, суммарная плотность массы-энергии равна

$$\rho = \rho_\gamma + \rho_{e^+} + \rho_{e^-} = \frac{11}{4} aT^4,$$

откуда

$$T = \left( \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{32\pi a} \right)^{1/4} t^{-1/2}.$$

Если мы включим в рассмотрение нейтрино и предположим, что они обладают химическим потенциалом, равным нулю (см. [2], раздел 15.6), то, поскольку им соответствует только одно спино-



вое состояние, получим

$$\rho_{\nu_e} = \rho_{\bar{\nu}_e} = \rho_{\nu_\mu} = \rho_{\bar{\nu}_\mu} = \frac{7}{16} aT^4.$$

Тогда суммарная плотность есть

$$\rho = \frac{11}{4} aT^4 + \frac{7}{4} aT^4 = \frac{9}{2} aT^4$$

и

$$T = \left( \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{32\pi a} \right)^{\frac{1}{4}} t^{-1/4}.$$

**Решение 19.28.** Для релятивистских частиц с  $E \approx p$  равновесное значение плотности при температуре  $T$  есть (см. решение задачи 19.27)

$$\rho(T) = \int E n(p) dp = \begin{cases} aT^4 & \text{для фотонов,} \\ \frac{7}{16} aT^4 & \text{для каждой разновидности нейтрино,} \\ \frac{7}{8} aT^4 & \text{для каждой разновидности электронов и мюонов.} \end{cases}$$

Здесь  $a$  — постоянная Стефана — Больцмана, равная  $8\pi^5 k^4/15h^3$ . Для нашей задачи имеем

$$\rho(T) = \begin{cases} \left( 1 + 4 \cdot \frac{7}{16} + 4 \cdot \frac{7}{8} \right) aT^4 & \text{при } R_1 \\ \left( 1 + 4 \cdot \frac{7}{16} + 2 \cdot \frac{7}{8} \right) aT^4 & \text{при } R_2 \end{cases} \equiv KaT^4,$$

т. е.

$$K_1 = 25/4, \quad K_2 = 18/4.$$

Воспользуемся теперь тем фактом, что расширение Вселенной является изэнтропическим. Из первого начала термодинамики следует, что энтропия на единицу объема для такого релятивистского газа определяется формулой

$$\frac{S}{V} = \frac{4}{3} KaT^3.$$

Поскольку объем  $V$  меняется как куб масштабного фактора, имеем

$$\text{const} = S \sim \frac{4}{3} Ka(RT)^3,$$

т. е. при изэнтропическом расширении

$$K_1 R_1^3 T_1^3 = K_2 R_2^3 T_2^3$$

и

$$T_2 = T_1 \left( \frac{R_1}{R_2} \right) \left( \frac{25}{18} \right)^{1/3}.$$

Физически этот результат означает, что при аннигиляции мюоны передают свою энергию (точнее, энтропию) остающимся частицам, повышая за счет этого их температуру в  $(25/18)^{1/2}$  раз по сравнению с ожидаемым значением, следующим из закона линейного убывания  $T$  при возрастании  $R$ .

**Решение 19.29.** В стандартной модели горячей Вселенной гелий и дейтерий образуются, если говорить упрощенно, за счет следующих процессов: 1) «вымораживание» неравновесного значения отношения концентрации нейтронов к концентрации протонов<sup>1)</sup> в тот момент, когда слабые процессы распада  $n \rightarrow p$  начинают протекать медленнее, чем падает температура при расширении; 2) образование дейтерия в реакции  $n + p \rightarrow D + \gamma$  в то время, когда большинство свободных нейтронов еще не распалось; 3) выгорание почти всего дейтерия в реакциях образования гелия:  $D + D \leftarrow He^3 + n \rightarrow H^3 + p$  или  $D + D \rightarrow H^3 + p$ , а затем  $H^3 + D \rightarrow He^4 + n$ .

Теперь мы можем дать ответ на вопросы задачи

а) «Вымороженное» значение отношения нейтронных и протонных концентраций не изменяется, но при любой данной температуре для более высокой концентрации барионов реакции протекают более интенсивно. Следовательно, превращение легких ядер в гелий будет происходить более полно, и в результате образуется больше  $He^4$  и меньше  $D$ .

б) Реакции  $n \rightarrow p$  идут медленнее, и поэтому после закалки остается больше «вымороженных» нейтронов. Скорости других реакций не меняются, и в итоге образуется больше  $He^4$  и больше  $D$ .

в) Направление реакции  $n + \nu \leftrightarrow p + e^-$  смещается вправо за счет энергии вырождения (ферми-энергии) нейтрино; меньшее количество нейтронов даст меньше  $He^4$  и меньше  $D$ .

г) Тот же случай, что и предыдущий, но для реакции  $\nu + p \leftrightarrow n + e^+$ , поэтому образуется больше  $He^4$  и больше  $D$ .

д) Время расширения связано с плотностью соотношением

$$t = \left( \frac{3}{32\pi G\rho} \right)^{1/2} + \text{const.}$$

Следовательно, увеличение  $G$  означает, что каждая стадия с различной плотностью будет занимать меньшее время. Это приводит к более высокому значению отношения концентраций нейтронов и протонов. Малые изменения  $G$  не оказывают существенного влияния на тот факт, что почти все нейтроны идут на образование дейтерия, так как время их распада по-прежнему велико. В итоге образуется больше дейтерия и больше  $He^4$ .

<sup>1)</sup> В ряде работ советских авторов этот процесс называется «закалкой». — Прим. перев.

**Решение 19.30.** Введение космологической постоянной эквивалентно предположению о наличии во Вселенной равномерно распределенной идеальной жидкости с эффективной плотностью и давлением

$$\rho_{эфф} = (8\pi)^{-1}\Lambda, \quad p_{эфф} = - (8\pi)^{-1}\Lambda.$$

Динамические уравнения задачи 19.14 сводятся к одному

$$\dot{R}^2 = 1/3\Lambda R^2;$$

запишем решение этого уравнения:

$$R = R_0 e^{t/T_0}, \quad T_0^{-1} = 1/3\Lambda.$$

Метрика тогда приобретает вид

$$ds^2 = - dt^2 + R_0^2 e^{2t/T_0} (dr^2 + r^2 d\Omega^2). \quad (1)$$

Чтобы преобразовать ее к явно статическому виду, введем «координату кривизны»

$$r' = R_0 e^{t/T_0} r$$

и получим

$$ds^2 = - dt^2 + (dr' - r' dt/T_0)^2 + r'^2 d\Omega^2.$$

Исключим теперь  $g_{r't}$  с помощью преобразования

$$t = t' + \frac{1}{2} T_0 \ln\left(\frac{r'^2}{T_0^2} - 1\right)$$

и найдем окончательно

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r'^2}{T_0^2}\right) dt'^2 + \left(1 - \frac{r'^2}{T_0^2}\right)^{-1} dr'^2 + r'^2 d\Omega^2. \quad (2)$$

Интерпретация метрики (1) как нестатической космологической модели основана на предположении, что координаты являются сопутствующими по отношению к галактикам, плотностью которых в динамических уравнениях можно пренебречь.

**Решение 19.31.** Полная система уравнений, описывающих однородные изотропные модели, имеет вид (см. задачи 19.13 или 19.14)

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{-k}{R^2} + \frac{8\pi\rho}{3}, \quad (1a)$$

$$2\left(\frac{\ddot{R}}{R}\right) = -\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 - \frac{k}{R^2} - 8\pi p. \quad (16)$$

Поскольку наша модель характеризуется только плотностью массы-энергии пыли  $\rho_0$  и плотностью массы-энергии, обусловленной «поляризацией вакуума»  $\Lambda$ , имеем

$$\rho = \rho_0 + \Lambda/8\pi, \quad (2a)$$

$$p = -\Lambda/8\pi. \quad (26)$$

Так как все производные по времени выше второго порядка можно выразить как линейные комбинации  $\dot{R}$  и  $\ddot{R}$  с помощью уравнений (1), необходимым и достаточное условие того, что решение является статическим, запишем в виде

$$\dot{R} = \ddot{R} = 0. \quad (3)$$

Если подставить в (1) условия (2) и (3), система примет вид

$$k/R^2 = (8\pi\rho_0 + \Lambda)/3, \quad (4a)$$

$$k/R^2 = \Lambda, \quad (4b)$$

откуда следует

$$\rho_0 = \Lambda/4\pi, \quad (5a)$$

$$R = \Lambda^{-1/2}. \quad (5b)$$

Поскольку  $\rho_0 > 0$ , из уравнения (4b) следует, что  $k = +1$ . Чтобы исследовать «Вселенную Эйнштейна» на устойчивость, объединим сначала уравнения (1), что даст нам

$$\frac{2\ddot{R}}{R} = -\frac{8\pi}{3}\rho - 8\pi\rho = -\frac{8\pi}{3}\rho_0 + \frac{2}{3}\Lambda, \quad (6)$$

а затем положим

$$R = \Lambda^{-1/2} + \delta R, \quad (7a)$$

$$\rho_0 = \frac{\Lambda}{4\pi} + \delta\rho_0. \quad (7b)$$

Тогда уравнение (6) с точностью до  $\delta R$  примет вид

$$2\Lambda^{1/2}(\delta\ddot{R}) = -\frac{8\pi}{3}\delta\rho_0. \quad (8)$$

Далее, поскольку полное количество пылевой материи сохраняется, ее тензор энергии-импульса подчиняется условию

$$\rho_0 R^3 = \text{const},$$

откуда

$$\frac{\delta\rho_0}{\rho_0} = -3\frac{\delta R}{R}. \quad (9)$$

Тогда из уравнения (8) следует

$$(\delta\ddot{R}) - \Lambda\delta R = 0, \quad (10)$$

т. е. возмущение  $\delta R$  со временем экспоненциально растет. Следовательно, данная модель неустойчива.

**Решение 19.32.** Линейный элемент «Вселенной Эйнштейна» с  $k = +1$  имеет вид (см. задачу 19.5)

$$ds^2 = R^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)], \quad (1)$$

где

$$0 \leq \chi \leq \pi, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Следовательно, объем  $V$  есть

$$V = \int_0^\pi 4\pi R^3 \sin^2 \chi d\chi = 2\pi^2 R^3. \quad (2)$$

В задаче 19.31 мы нашли, что в этой модели

$$R = (4\pi\rho_0)^{-1/2}, \quad (3)$$

где  $\rho_0$  — плотность массы-энергии пылевидной материи. Подставляя это соотношение в интеграл (2), получаем

$$V = 2\pi^2 \left( \frac{c^2}{4\pi G \rho_0} \right)^{3/2}, \quad (4)$$

где мы на этот раз ввели в явном виде фундаментальные константы  $c$  и  $G$ .

**Решение 19.33.** Пусть  $\Lambda_E$  — эйнштейновское значение космологической постоянной, так что для эйнштейновской Вселенной (см. задачу 19.31)

$$\rho_0 = \Lambda_E/4\pi \quad \text{и} \quad R = \Lambda_E^{-1/2}.$$

Для всех космологических моделей, заполненных пылью, даже с  $\Lambda \neq 0$ , справедливо условие

$$\rho R^3 = \text{const.}$$

Запишем его в виде

$$\rho R^3 = \frac{1+\varepsilon}{4\pi\Lambda^{1/2}}, \quad (1)$$

что эквивалентно записи

$$\Lambda = \Lambda_E (1 + \varepsilon)^2.$$

Тогда единственное остающееся в данной модели динамическое уравнение задачи 19.14 принимает вид

$$\dot{R}^2 = V(R) \equiv \frac{\Lambda R^3}{3} - 1 + \frac{2(1+\varepsilon)}{3\Lambda^{1/2}R}. \quad (2)$$

Для малых  $R$  имеем  $\dot{R}^2 \sim 1/R$ , т. е.  $R \sim t^{2/3}$ . Расширение максимально замедляется, когда  $\dot{R}$  достигает минимума. Полагая  $dV/dR$  равным нулю, находим, что это происходит при

$$R = R_m = (1 + \varepsilon)^{1/3} \Lambda^{-1/2}. \quad (3)$$

Когда  $R$  близко к  $R_m$ ,

$$\begin{aligned}\dot{R}^2 &\approx V(R_m) + \frac{1}{2}(R - R_m)^2 V''(R_m) + \dots = \\ &= (1 + \epsilon)^{2/3} - 1 + [\Lambda^{1/2} R - (1 + \epsilon)^{1/3}]^2.\end{aligned}$$

По таблице интегралов находим

$$R = \frac{(1 + \epsilon)^{1/3}}{\Lambda^{1/2}} \{1 + [1 - (1 + \epsilon)^{-2/3}]^{1/2} \operatorname{sh} \Lambda^{1/2}(t - t_m)\}, \quad (4)$$

где  $R = R_m$  при  $t = t_m$ . Для малых  $\epsilon$  имеем приближенно

$$R \approx R_m \left[ 1 + \frac{\epsilon}{3} \operatorname{sh} \Lambda^{1/2}(t - t_m) \right].$$

Таким образом,  $R$  остается приблизительно равным  $R_m$  в области, где

$$\epsilon \operatorname{sh} \Lambda^{1/2}(t - t_m) \approx 1,$$

т. е. для промежутка времени

$$(t - t_m) \approx \Lambda^{-1/2} \ln \left( \frac{1}{\epsilon} \right).$$

Если выбрать достаточно малое  $\epsilon$ , то этот промежуток можно сделать произвольно большим. В конце концов, однако,  $R$  вновь начинает возрастать так, что

$$H^2 = \frac{\dot{R}^2}{R^2} \rightarrow \frac{1}{3} \Lambda,$$

и в пределе мы приходим к Вселенной де Ситтера из задачи 19.30.

Если образование квазаров происходит при  $z = 2$ , то  $R = R_m$  при  $z = 2$ , т. е.

$$R_0 = R_m(1 + z) = 3R_m = 3\Lambda^{-1/2}.$$

Если это так, то (при  $\epsilon \ll 1$ ) плотность вещества в современную эпоху должна быть равна

$$\rho_0 = (4\pi R_0^3 \Lambda^{1/2})^{-1} = (108\pi)^{-1} \Lambda.$$

С другой стороны,

$$H_0 = \left( \frac{\dot{R}}{R_0} \right) = \left( \frac{1}{3} \Lambda - \frac{1}{R_0^2} + \frac{2}{3\Lambda^{1/2} R_0^3} \right)^{1/2} = \frac{(20\Lambda)^{1/2}}{9}.$$

Полагая  $H_0 = 10^{-28} \text{ см}^{-1}$ , получаем  $\Lambda = 4 \cdot 10^{-56} \text{ см}^2$ , откуда  $\rho_0 = 1,2 \cdot 10^{58} \text{ см}^{-3} = 1,6 \cdot 10^{-30} \text{ г/см}^3$ .

**Решение 19.34.** Соответствующая данному значению  $\Lambda$  эффективная плотность есть

$$\rho_c = \frac{\Lambda}{8\pi} = \frac{10^{-57} \text{ см}^{-2}}{8\pi} \approx 4 \cdot 10^{-31} \text{ г/см}^3.$$

Характерные плотности в Солнечной системе равны

$$\begin{aligned} \rho_{\text{тел}} &\sim 1 \text{ г/см}^3, \\ \rho_{\text{Солн. сист}} &\sim 10^{33} \text{ г}/(10^{15} \text{ см})^3 \sim 10^{-12} \text{ г/см}^3. \end{aligned}$$

Следовательно, влияние  $\Lambda$  на механику Солнечной системы по порядку величины равно

$$\frac{\rho_c}{\rho_{\text{Солн. сист}}} \sim 10^{-19}.$$

**Решение 19.35.** Уравнения Фридмана (задача 19.15) имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{R} &= -\frac{4}{3} \pi G (\rho + 3p) R, \\ R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k &= 4\pi G (\rho - p) R^2. \end{aligned}$$

Для статического решения все производные по времени должны обращаться в нуль, откуда следуют два условия:

$$\rho + 3p = 0 \quad \text{и} \quad \rho = 3k/8\pi GR^2.$$

Эта система не имеет решений, соответствующих жидкости, для которой плотность массы-энергии и давление положительны (т. е. любой известной жидкости).

**Решения 19.36 и 19.37.** Рассмотрим сначала более «легкие» случаи. Если метрика инвариантна во времени и симметрична относительно его обращения, то  $g_{0i} = 0$  и ее можно записать в виде

$$ds^2 = -g_{00}(x^i) dt^2 + g_{ij}(x^k) dx^i dx^j.$$

Если соответствующая ей модель однородна (задача 19.37), то скорость хода часов во всех точках постоянна и  $g_{00} = \text{const}$ ; если модель неоднородна, но давление отсутствует (задача 19.36), то можно найти такое локальное преобразование временной координаты, которое привело бы к  $g_{00} = \text{const}$  (как было показано в задаче 16.25). В этом случае из обычной формулы для  $\Gamma_{\mu\nu\sigma}$  видно, что единственными не равными нулю компонентами являются  $\Gamma_{ijk}$ . (Действительно, любая компонента с индексом 0 является либо производной по времени от компоненты  $g_{0j}$ , либо производной от  $g_{00}$ .) Теперь мы можем вычислить  $R_{00}$  по стандартной формуле, включающей символы  $\Gamma$ ; так как при этом каждый член формулы

содержит  $\Gamma$  с нулевым индексом, очевидно, что  $R_{00} = 0$  и, следовательно,

$$T^{\hat{0}}_{\hat{0}} - \frac{1}{2} T^{\hat{\alpha}}_{\hat{\alpha}} = 0,$$

откуда  $\rho + 3p = 0$ . Это, однако, невозможно для жидкости без давления или для любой физически разумной идеальной жидкости (т. е. обладающей положительными  $p$  и  $\rho$ ).

Перейдем теперь к более «трудным» случаям. Пусть  $\xi$  — вектор Киллинга симметрии по времени, а  $u$  — 4-скорость жидкости. Так как  $u$  параллельно  $\xi$  (задача 13.9), а  $\xi$  ортогонально к гиперповерхности,  $u$  также ортогонально к гиперповерхности, и, следовательно,  $\omega_{\alpha\beta} = 0$ . В уравнении Рейчаудхури (задача 14.10)

$$\frac{d\theta}{d\tau} \sim \frac{d\theta}{dt} = 0,$$

где  $\xi = \partial/\partial t$ . Таким образом, уравнение Рейчаудхури принимает вид

$$0 = a^{\alpha}{}_{;\alpha} - 2\sigma^2 - \frac{1}{3} \theta^2 - 8\pi \left( T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} T \right) u^{\alpha} u^{\beta}. \quad (1)$$

Для случая  $p = 0$  (задача 19.36) из уравнения Эйлера (задача 14.3) следует, что  $a = 0$ , и уравнение (1) сводится к уравнению

$$0 = -2\sigma^2 - \frac{1}{3} \theta^2 - 4\pi\rho,$$

которое не имеет решений для положительных  $\rho$ .

Когда присутствует давление, тогда, вообще говоря,  $a$  не равно нулю, именно:

$$a = \nabla \ln |\xi \cdot \xi|^{\frac{1}{2}}.$$

Если же мы предполагаем однородность (задача 19.37), то  $a = 0$  и мы приходим к уравнению

$$0 = -2\sigma^2 - \frac{1}{3} \theta^2 - 4\pi(\rho + 3p),$$

которое опять-таки не имеет решений для  $\rho + 3p > 0$ .

### **Решение 19.38.**

а) Из того факта, что при движении галактики

$$x^i = \text{const},$$

вытекает

$$dx^i = 0$$

и, следовательно,

$$ds^2 = -d\tau^2.$$



б) Если  $d\tau = 0$ , то

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j.$$

в) Если  $g_{0i}$  и  $g_{ij}$  не зависят от всех  $x^i$ , то на гиперповерхности  $\tau = \text{const}$  вообще ничего не зависит от  $x^i$  и, следовательно, пространство однородно. Однако неудачный выбор координат и обусловленное им кажущееся искажение пространственноподобной гиперповерхности могут приводить к зависимости метрических функций однородного пространства от пространственных координат.

г) В задаче 14.9 мы показали, что если пространственный вектор, связывающий две соседние геодезические, обладает постоянной длиной, то для поля геодезических  $\sigma_{\alpha\beta} = \vartheta = 0$ . Если  $g_{0i}$  и  $g_{ij}$  не зависят от  $\tau$ , то связывающий вектор будет обладать постоянной длиной.

д) Так как  $u^0 = +1$  и  $u^i = 0$ , мы имеем

$$u_{i;j} = -u^{\nu}\Gamma_{\nu ij} = -\Gamma_{0ij} = -\frac{1}{2}(g_{i0,j} + g_{0j,i} - g_{ij,0}) = \frac{1}{2}g_{ij,0} = \frac{1}{2}\dot{g}_{ij}, \quad (1)$$

$$\vartheta \equiv u^{\alpha}{}_{;\alpha} = |g|^{-1/2}(|g|^{1/2}u^{\alpha})_{;\alpha} = f^{-1/2}(f^{3/2})_{,0} = \frac{3}{2}\frac{\dot{f}}{f}. \quad (2)$$

Далее из уравнений (1) и (2), а также из формулы

$$\sigma_{\alpha;\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha;\mu}P^{\mu}_{\beta} + u_{\beta;\mu}P^{\mu}_{\alpha}) - \frac{1}{3}\vartheta P_{\alpha\beta} \quad (3)$$

(см. задачу 5.18) получаем

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i;j} + u_{j;i}) - \frac{1}{3}\vartheta g_{ij} = \frac{1}{2}\dot{g}_{ij} - \frac{1}{2}\dot{g}_{ij} = 0. \quad (4)$$

е) Имеем

$$a^{\alpha} = u^{\alpha}{}_{;\beta}u^{\beta} = u^{\alpha}{}_{;0} = \Gamma^{\alpha}_{00},$$

$$a_{\alpha} = \Gamma_{\alpha 00} = \frac{1}{2}(g_{\alpha 0,0} + g_{\alpha 0,0} - g_{00,\alpha}) = g_{\alpha 0,0}.$$

Если  $a_{\alpha} = 0$ , то  $g_{\alpha 0,0} = 0$ , и галактики движутся по геодезическим в том и только в том случае, если  $g_{0i,0} = 0$ .

ж) В задаче 7.23 мы показали, что  $\omega_{\alpha\beta} = 0$  есть необходимое условие для того, чтобы семейство гиперповерхностей было ортогонально  $u$ . Поскольку  $u = \partial/\partial\tau$ , а гиперповерхности  $\tau = \text{const}$  «скреплены» (как перемычками) векторами  $\partial/\partial x^i$ , то из  $\omega_{\alpha\beta} \neq 0$  вытекает

$$(\partial/\partial t) \cdot (\partial/\partial x^i) \neq 0,$$

и, следовательно,

$$g_{0i} \neq 0.$$

Если

$$\omega_{\alpha\beta,0} \neq 0,$$

то и

$$g_{\alpha\beta,0} \neq 0,$$

а это означает в соответствии с п. «е» настоящей задачи, что галактики не движутся по геодезическим.

**Решение 19.39.** Из решения 14.9 мы знаем, что пространственный вектор  $\xi$ , связывающий две соседние мировые линии, подчиняется уравнению

$$\nabla_u \xi = \nabla_{\xi} u + (\xi \cdot a) u. \quad (1)$$

Подставляя  $\xi \equiv Rn$  в уравнение (1), получаем

$$Rn^{\alpha; \beta} u^{\beta} + n^{\alpha} \dot{R} = Rn^{\beta} u^{\alpha; \beta} + Ru^{\alpha} n^{\gamma} a_{\gamma}, \quad (2)$$

где  $\dot{R} \equiv dR/dt = u^{\alpha} R_{,\alpha}$ . Если мы теперь скалярно умножим уравнение (2) на  $n^{\alpha}$ , а затем воспользуемся уравнением разложения для  $u_{\alpha; \beta}$  (см. задачу 5.18):

$$u_{\alpha; \beta} = \omega_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} \vartheta (g_{\alpha\beta} + u_{\alpha} u_{\beta}) - a_{\alpha} u_{\beta},$$

то получим

$$\dot{R} = Rn^{\alpha} n^{\beta} \left[ \omega_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} \vartheta (g_{\alpha\beta} + u_{\alpha} u_{\beta}) - a_{\alpha} u_{\beta} \right] + Ru^{\alpha} n^{\gamma} n_{\alpha} a_{\gamma}. \quad (3)$$

Далее, так как величина  $\omega_{\alpha\beta}$  антисимметрична, а вектор  $n^{\alpha}$  в уравнении (3) — пространственный единичный вектор ( $n^{\alpha} u_{\alpha} = 0$ ), имеем

$$\frac{\dot{R}}{R} = \sigma_{\alpha\beta} n^{\alpha} n^{\beta} + \frac{1}{3} \vartheta.$$

Усреднение  $\sigma_{\alpha\beta} n^{\alpha} n^{\beta}$  по всем направлениям приводит к появлению члена, пропорционального следу  $\sigma_{\alpha\beta}$ . Так как след  $\sigma_{\alpha\beta}$  равен нулю, окончательно получаем

$$\left\langle \frac{\dot{R}}{R} \right\rangle = \frac{1}{3} \vartheta.$$

**Решение 19.40.** Так как  $u = e_0$ , имеем

$$u_{\alpha; \beta} = u_{\alpha, \beta} - \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} u_{\gamma} = 0 + \Gamma^0_{\alpha\beta},$$

откуда

$$\vartheta = u_{\alpha; \beta} g^{\alpha\beta} = \Gamma^0_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} = -(-g)^{-1/2} [g^{0\alpha} (-g)^{1/2}]_{,\alpha} \quad (1)$$

(см. п. «е» в задаче 7.7). Следовательно, для метрики Робертсона — Уокера

$$\vartheta = (-g)^{-\frac{1}{2}} (-g)^{\frac{1}{2}}{}_{,0} = 3\dot{R}/R.$$

Вращение равно нулю в силу симметрии символов  $\Gamma^0_{\alpha\beta}$ :

$$\omega_{\alpha\beta} = P_{\beta}^{\gamma} u_{[\alpha; \gamma]} = 0.$$

Для сдвига имеем

$$\sigma_{\alpha\beta} = P_{\beta}^{\gamma} u_{(\alpha; \gamma)} - \frac{1}{3} \vartheta P_{\alpha\beta},$$

$$\sigma_{0\alpha} = 0,$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= u_{(i, j)} - \frac{1}{3} \vartheta g_{ij} = -\frac{1}{2} (g_{0i, j} + g_{0j, i} - g_{ij, 0}) - \frac{\dot{R}}{R} g_{ij} = \\ &= \frac{1}{2} g_{ij, 0} - \frac{\dot{R}}{R} g_{ij} = 0. \end{aligned}$$

Для анизотропной метрики уравнение (1) по-прежнему справедливо, так что

$$\vartheta = (-g)^{-1/2} (-g)_{,0}^{1/2} = \dot{a} + \dot{b} + \dot{c},$$

$$\omega_{\alpha\beta} = 0,$$

$$\sigma_{0\alpha} = 0,$$

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{3} g_{ij, 0} - \frac{1}{3} \vartheta g_{ij} = \frac{1}{3} A g_{ij},$$

где

$$A = \begin{cases} 2\dot{a} - \dot{b} - \dot{c} & \text{для } i = j = x, \\ 2\dot{b} - \dot{a} - \dot{c} & \text{для } i = j = y, \\ 2\dot{c} - \dot{a} - \dot{b} & \text{для } i = j = z. \end{cases}$$

**Решение 19.41.** Проще всего можно вычислить тензор Риччи для этой метрики, если воспользоваться формулами из задачи 9.33. Имеем

$$K_{ij} = -\frac{1}{2} \dot{g}_{ij}, \quad (1)$$

$$0 = R^t_t = K_{ij} K^{ij} - \dot{K}, \quad (2)$$

$$0 = R^i_j = K^i_{j, i} - K_{, j}, \quad (3)$$

$$0 = R^i_j = K^i_j K - \dot{K}^i_j, \quad (4)$$

где точка означает производную  $d/dt$ . В уравнении (4) мы приравнивали пространственные компоненты  $R_{ij}$  нулю, так как 3-геометрия является плоской, а в уравнении (3) заменили ковариантные производные частными.

Сворачивая уравнение (4), получаем  $\dot{K} = K^2$ , откуда

$$K = -1/t, \quad (5)$$

если соответствующим образом выбрать постоянную интегрирования. Подставляя решение (5) обратно в уравнение (4), получаем

$$K^i_j = -K^i_j/t,$$

откуда

$$K^i_j = A^i_j/t, \quad (6)$$

где  $A^i_j$  — некоторая постоянная матрица. Теперь выберем координаты таким образом, чтобы матрица  $K^i_j$  была диагональной в некоторый момент времени  $t = t_0$ . Тогда, согласно уравнению (6), матрица  $K^i_j$  остается диагональной и ее можно записать в виде

$$K^i_j = -\delta^i_j P_j/t, \quad (7)$$

где  $P_j = \text{const}$ . Чтобы это уравнение было совместно с уравнением (5), должно выполняться условие

$$\sum_i P_i = 1. \quad (8)$$

Уравнение (3) удовлетворяется автоматически, а из уравнения (2) следует условие

$$\sum_i P_i^2 = 1. \quad (9)$$

Тогда уравнение (1) принимает вид

$$\dot{g}_{ij} = -2g_{im}K^m_j = 2g_{ij}P_j/t,$$

откуда вытекает

$$g_{ij} = \delta_{ij}t^{2P_i}.$$

Таким образом, окончательный вид метрики (называемой «метрикой Казнера») есть

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2P_1} dx^2 + t^{2P_2} dy^2 + t^{2P_3} dz^2, \quad (10)$$

где  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$  должны удовлетворять условиям (8) и (9).

Объем этой Вселенной пропорционален  $t$ :

$$[{}^{(3)}g_{ij}]^{1/2} = (t^{2\sum P_i})^{1/2} = t$$

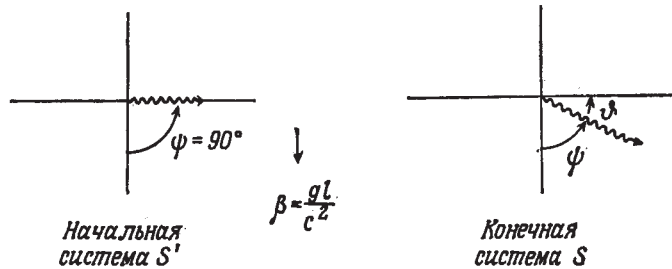
в отличие от радиационно-доминированной фридмановской Вселенной, где эта зависимость имеет вид  $t^{3/2}$ .

Довольно удобно можно изобразить связи между  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$ , налагаемые уравнениями (8) и (9), если начертить окружность радиусом  $2/3$  с центром в точке  $y = 1/3$  и вписать в нее равносторонний треугольник. Тогда координаты  $y$  вершин треугольника будут удовлетворять уравнениям (8) и (9). Отсюда становится ясно, что значения двух параметров  $P$  лежат в интервале  $(0, 1)$ , а значение третьего — в интервале  $(0, -1/3)$ . Вырожденный случай  $(1, 0, 0)$ , как легко показать, соответствует плоскому пространству. Таким образом, пространство должно сжиматься вдоль одной из осей, одновременно расширяясь вдоль двух других.

## ГЛАВА 20

**Решение 20.1.** Заметим, что в данном случае «реальные» (приливные) гравитационные силы отсутствуют; свет распространяется по прямой в любой инерциальной системе, но в ускоренной системе, связанной с трубкой, его траектория кажется искривленной.

Рассмотрим две инерциальные системы — одну, сопутствующую трубке в тот момент, когда свет поступает в нее, и другую, сопутствующую трубке в тот момент, когда свет достигает ее конца.



Фиг. 37.

Поскольку длина трубки, измеряемая в обеих системах, равна  $l$ , а угол отклонения  $\vartheta$  всегда мал, время распространения света по трубке с точки зрения наблюдателей в обеих системах равно  $l/c$ . В момент выхода света из трубки относительная скорость этих наблюдателей равна  $\beta = g l / c^2$  (по отношению к наблюдателю во второй системе первая система движется вверх со скоростью  $\beta$ ). Направляющие углы траекторий фотонов связаны между собой соотношением

$$\cos \psi = \sin \vartheta \approx \vartheta = \frac{\cos \psi' + \beta}{1 + \beta \cos \psi'} = \beta$$

(см. фиг. 37 и задачу 1.8). Отсюда

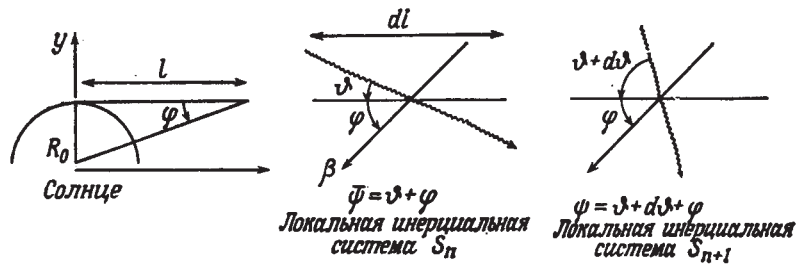
$$\vartheta = g l / c^2, \text{ где } g / c^2 = 10^{-16} \text{ м}^{-1}.$$

Таким образом, если длина трубки составляет 10 м, то  $\vartheta = 10^{-15}$  рад, а полное отклонение равно

$$\frac{1}{2} (g / c^2) l^2 \approx 10^{-14} \text{ м}.$$

Эта величина чрезвычайно мала по сравнению с длиной волны света; трудно вообразить себе, каким интерферометрическим (или каким-либо другим) методом можно было бы обнаружить такое смещение. Поэтому в тех случаях, когда лазеры используются для юстировки (как, например, в Стэнфордском линейном ускорителе), они предназначаются для коррекции искажений, обусловленных кривизной поверхности Земли. Разумеется, это гораздо более заметный эффект, ибо световой луч у поверхности Земли не искривляется настолько сильно, чтобы начать двигаться по «околоземной круговой орбите».

**Решение 20.2.** Рассмотрим последовательность свободно падающих наблюдателей; каждый из них занимает локальную инерциальную систему длиной  $dl$ . Пусть  $n$ -й свободно падающий наблюдатель покоится относительно Солнца в тот момент, когда



фотон проходит через левую границу его инерциальной системы  $S_n$ , и пусть он наблюдает фотон, движущийся под углом  $\psi$  относительно направления инерциального движения системы (см. фиг. 38). Когда фотон покидает его систему и влетает в следующую,  $S_{n+1}$ , которая в этот момент покоится, наш наблюдатель находится в состоянии свободного падения в направлении угла  $\psi$  со скоростью

$$\beta = g \, dl = \frac{GM}{R^2}.$$

Фотон входит в систему  $S_{n+1}$ , двигаясь при этом в направлении  $\psi + d\psi$ ; закон преобразования направляющих углов траектории фотона (см. задачу 1.8) есть

$$\cos \psi = \frac{\cos \bar{\psi} - \beta}{1 - \beta \cos \bar{\psi}} = \cos \bar{\psi} - \beta \sin^2 \bar{\psi} + \mathcal{O}(\beta^2),$$

откуда

$$\cos \psi - \cos \bar{\psi} = -\beta \sin^2 \bar{\psi}$$

и

$$d\vartheta = \beta \sin \psi \approx \beta \sin \varphi = \left( \frac{GM}{R_0^2 + \ell^2} \right) \frac{R_0}{(R_0^2 + \ell^2)^{\frac{1}{2}}} d\ell. \quad (1)$$

Таким образом, полный угол отклонения  $\delta$  есть

$$\delta = \int d\vartheta = GM R_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\ell}{(R_0^2 + \ell^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2GM}{R_0}, \quad (2)$$

что составляет лишь половину наблюдаемого значения! В чем же дело?

В процессе вычислений мы предположили, что последовательность «жестких линеек» с наблюдателями размещена вдоль линии  $y = R_0$ , параллельной линии  $y = 0$ , причем  $(n + 1)$ -я линейка локально параллельна  $n$ -й линейке. Отклонение фотона по отношению к этой последовательности линеек мы и вычисляли. Однако мы не приняли во внимание тот факт, что пространство-время вблизи Солнца искривлено (приливные силы!), и на самом деле последовательность локально параллельных линеек является кривой линией по отношению к линии  $y = 0$ . Таким образом, мы фактически рассчитывали отклонение фотона относительно этой кривой линии. Итак, реальное отклонение, измеряемое удаленным наблюдателем, должно быть результатом обоих эффектов: как отклонения фотона по отношению к системе локально параллельных линеек, так и искривления (по отношению к  $y = 0$ ) линейной конфигурации последовательности этих линеек.

**Решение 20.3.** Не теряя общности, мы можем рассматривать чисто экваториальное движение. Тогда метрику в гравитационном поле Солнца можно приближенно записать следующим образом:

$$ds^2 \approx - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left( 1 + \frac{2M}{r} \right) (dr^2 + r^2 d\varphi^2). \quad (1)$$

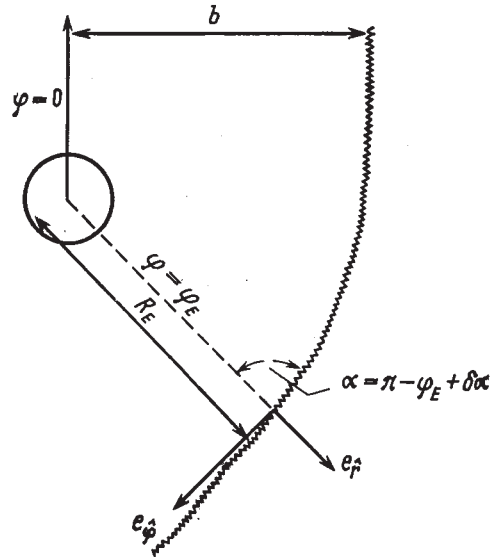
Изотропные геодезические для этой метрики имеют вид

$$\frac{b}{r} = \sin \varphi + \frac{2M}{r} (1 - \cos \varphi). \quad (2)$$

Для угла  $\alpha$  между Солнцем и звездой (фиг. 39), измеряемого земным астрономом, справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \operatorname{tg} (\pi - \varphi_E + \delta\alpha) \approx - \operatorname{tg} \varphi_E + \frac{\delta\alpha}{\cos^2 \varphi_E} = \\ &= \frac{u^{\hat{\varphi}}}{u^{\hat{r}}} = \left[ \frac{\left( 1 + \frac{M}{r} \right) r d\varphi/d\lambda}{\left( 1 + \frac{M}{r} \right) dr/d\lambda} \right]_{\mathcal{E}} = \left[ r \frac{d\varphi}{dr} \right]_{\mathcal{E}}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $u^{\hat{\phi}}$  и  $u^{\hat{r}}$  — ортонормированные компоненты 4-скорости фотона, а для определения углов мы воспользовались изотропным видом



Фиг. 39.

метрики (1) Если теперь обратиться к уравнению (2), уравнение (3) примет вид

$$\operatorname{tg} \varphi_E - \frac{\delta\alpha}{\cos^2 \varphi_E} = \frac{\sin \varphi_E \cdot \frac{2M}{b} (1 - \cos \varphi_E)}{\cos \varphi_E + \frac{2M}{b} \sin \varphi_E} \approx \operatorname{tg} \varphi_E - \frac{2M}{b} \frac{(1 - \cos \varphi_E)}{\cos^2 \varphi_E}, \quad (4)$$

откуда

$$\delta\alpha \approx \frac{2M}{b} (1 + \cos \alpha) \approx \frac{2M}{R_E} \left( \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} \right)^{1/2}. \quad (5)$$

Этот угол  $\delta\alpha$  и представляет собой угол отклонения фотона, измеряемый земным наблюдателем (см. также [1], раздел 40.3 и приводимую там литературу).

**Решение 20.4.** Так как мы собираемся вычислить только низший порядок отклонения, обусловленного  $\vec{J}$ , мы можем ограничиться рассмотрением лишь членов, линейных по  $\vec{J}$ , а в выражении для линейного элемента положить  $M=0$ . Тогда полное отклонение первого порядка будет представлять собой сумму обычного линейного по  $M$  члена и некоторого члена, линейного



по  $\vec{J}$ . Итак, если записать (для наших целей) метрику в виде (см. задачу 17.1)

$$ds^2 = -dt^2 - \frac{4\vec{J}}{r} \sin^2 \vartheta dt d\varphi + dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (1)$$

где вектор  $\vec{J}$  направлен вдоль оси  $z$ , то уравнения движения можно найти из вариационного принципа (см. задачу 7.25)

$$\delta \int \left( -\dot{t}^2 - \frac{4J}{r} \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} + \dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\phi}^2 \right) d\lambda = 0, \quad (2)$$

где точки означают производные по аффинному параметру  $\lambda$  (например,  $\dot{t} \equiv dt/d\lambda$  и т. д.). Уравнения Эйлера для вариационного принципа (2) в первом порядке по  $J$  имеют вид

$$\frac{d}{d\lambda} \left( 2\dot{t} + \frac{4J}{r} \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} \right) = 0, \quad (3a)$$

$$\frac{d}{d\lambda} \left( 2\dot{\varphi} r^2 \sin^2 \vartheta - \frac{4J}{r} \sin^2 \vartheta \dot{t} \right) = 0, \quad (3б)$$

откуда следует, что величины

$$P_0 \equiv \dot{t} + \frac{4J}{r} \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}, \quad (3в)$$

$$P_\varphi \equiv \dot{\varphi} r^2 \sin^2 \vartheta - \frac{2J}{r} \sin^2 \vartheta P_0 \quad (3г)$$

являются постоянными и

$$\dot{r} = r \dot{\vartheta}^2 + r \sin^2 \vartheta \dot{\phi}^2 + \frac{4J}{r^2} \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} P_0, \quad (3д)$$

$$\frac{d}{d\lambda} (r^2 \dot{\vartheta}) = P_\varphi^2 \cos \vartheta / r^2 \sin^3 \vartheta. \quad (3е)$$

Третий интеграл движения (в добавление к  $P_0$  и  $P_\varphi$ ) можно найти из уравнения (3е):

$$P_\varphi^2 + \frac{P_0^2}{\sin^2 \vartheta} \equiv L^2 = \text{const} \quad (P_\varphi \equiv r^2 \dot{\vartheta}). \quad (4)$$

Мы разобьем теперь полное искривление на три вклада, каждый из которых определяется различным взаимным расположением (см. фиг. 40) траектории светового луча (которая в низшем порядке представляет собой прямую линию) и направления момента количества движения  $\vec{J}$  Солнца. Поскольку мы работаем с точностью лишь до линейного порядка, полное отклонение обязано быть суммой этих вкладов.

В обоих случаях, показанных на фиг. 40, *a* и *б*, проекция момента количества движения светового пучка относительно центра Солнца на  $\vec{J}$  равна нулю, а в случае, представленном на фиг. 40, *в*, эта проекция равна единице.

Рассмотрим сначала фиг. 40, *a* и *б*. В обоих случаях  $P_\varphi = 0$  (поскольку  $P_\varphi$  есть интеграл движения). Нам необходимо теперь получить функцию  $r(\vartheta)$ . Из уравнения (3г) имеем

$$\dot{\varphi} = \frac{2JP_0}{r^3} = \mathcal{O}(J), \quad (5a)$$

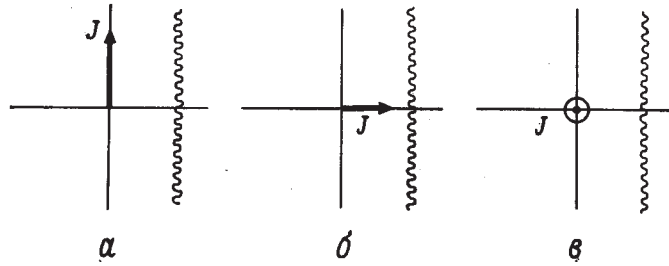
а из уравнения (4)

$$P_\vartheta = r^2 \dot{\vartheta} = L = \text{const.} \quad (5б)$$

Тогда из уравнений (3д) и (5а) следует

$$r = r\dot{\vartheta}^2, \quad (5в)$$

но этот результат совместно с уравнением (5б) означает, что свет будет двигаться по прямой! Таким образом, в случаях, представленных на фиг. 40, *a* и *б*,  $\vec{J}$  не дает вклада в отклонение.



Фиг. 40.

Рассмотрим теперь фиг. 40, *в*. В этом случае мы можем положить  $\vartheta = \pi/2$  и  $\dot{\vartheta} = 0$  (тогда в силу уравнения (3е)  $\ddot{\vartheta}$  всегда будет равно нулю) и соответственно этому решать наши уравнения. Используя соотношение

$$\frac{d}{d\lambda} = \frac{d\varphi}{d\lambda} \frac{d}{d\varphi} = \left( \frac{P_\varphi}{r^2} + \frac{2JP_0}{r^3} \right) \frac{d}{d\varphi}$$

и вводя определения

$$u \equiv 1/r, \quad \ell \equiv P_0/P_\varphi,$$

мы можем записать уравнение (3д) в виде

$$u'' + u = -6u^2 J \ell - 2J \ell u'^2 - 4J \ell u u'', \quad (6)$$

где  $u' \equiv du/d\varphi$ . Будем решать уравнение (6) методом возмущений; пусть

$$u = u_0 + u_1, \quad (7)$$

где  $u_1 = \mathcal{O}(J)$ . Тогда с точностью до нулевого порядка по малому параметру разложения уравнение (6) принимает вид  $u_0'' + u_0 = 0$ , откуда следует

$$u_0 = \frac{1}{b} \cos \varphi, \quad (8)$$

где  $b$  — прицельный параметр, и мы выбрали систему координат таким образом, что свет распространяется параллельно оси  $y$ . В следующем порядке  $u_1$  должно удовлетворять уравнению

$$u_1'' + u_1 = -\frac{2J\ell}{b^2} (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = -\frac{2J\ell}{b^2}, \quad (9a)$$

откуда

$$u_1 = -\frac{2J\ell}{b^2}. \quad (9b)$$

Таким образом, из (7), (8) и (9б) получаем, что искомое решение имеет вид

$$u \approx \frac{1}{b} \cos \varphi - \frac{2J\ell}{b^2}, \quad (10)$$

Отклонение траектории  $\alpha$  на каждой асимптоте находим, полагая  $u = 0$  ( $r = \infty$ ). Для одной асимптоты  $\varphi \approx (\pi/2) + \alpha$ , так что  $\cos \varphi \approx \approx -\alpha$  и

$$\alpha \approx -\frac{2J\ell}{b}. \quad (11)$$

Для другой асимптоты вклад в отклонение точно такой же, и в результате полное отклонение есть

$$\delta\varphi = 2\alpha = -\frac{4J}{b^2} \quad (12)$$

(здесь мы использовали тот факт, что  $\ell = P_0/P_\varphi \approx b^{-1}$ ).

Исходя из формулы (12) и результатов для случаев, представленных на фиг. 40,  $a$  и  $b$ , мы можем записать полное отклонение света, обусловленное наличием количества движения момента  $\vec{J}$ , в виде

$$\delta\varphi = -\frac{4\vec{J} \cdot \vec{n}}{b^2}, \quad (13)$$

где  $\vec{n}$  — единичный вектор в направлении момента количества движения фотонов относительно центра Солнца.

Отметим, что безразмерный малый параметр, по которому мы проводили разложение в ряд теории возмущений, есть

$$\left(\frac{J}{b^2}\right)_\odot = \frac{1,7 \cdot 10^{48} \text{ г} \cdot \text{см}^2/\text{с}}{(7 \cdot 10^{10} \text{ см})^2} \approx 10^{-12} \approx 2 \cdot 10^{-7} \text{ дуговых сек.}$$

**Решение 20.5.** Показатель преломления плазмы есть

$$n = (1 - v_p^2/v^2)^{1/2},$$

где  $v_p$  — плазменная частота ( $v_p \equiv n_e e^2 / \pi m_e$ ). Известное уравнение, определяющее форму траектории луча при распространении света в неоднородной среде [см., например, книгу Росси *Rossi B., Optics* (Addison — Wesley, 1957), р. 54]<sup>1)</sup>, имеет вид

$$d(n\vec{m})/dt = \vec{\nabla}n, \quad (1)$$

где  $\vec{m}$  — единичный вектор, касательный к лучу, а  $t$  — расстояние вдоль луча. Поскольку вычисляемый нами угол отклонения мал, мы можем вполне корректно найти первый порядок изменения  $\vec{m}$ , проинтегрировав уравнение (1) вдоль невозмущенной траектории  $y = b$ ,  $-\infty < x < +\infty$ . Из приведенной в условии формулы для  $n_e$  имеем

$$n \approx 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{v_p}{v} \right)^2 \approx 1 - 0,0101 \left( \frac{r}{R_\odot} \right)^{-6,5} \left( \frac{v}{10^9 \text{ Гц}} \right)^{-2},$$

откуда

$$\vec{\nabla}n \approx \frac{0,0657}{R_\odot} \left( \frac{r}{R_\odot} \right)^{-7,5} \left( \frac{v}{10^9 \text{ Гц}} \right)^{-2} \hat{r}. \quad (2)$$

Тогда, используя

$$n(\pm\infty) = 1 \quad \text{и} \quad r = (x^2 + y^2)^{1/2},$$

получаем

$$\begin{aligned} \vec{m}|_{+\infty} - \vec{m}|_{-\infty} &\approx \frac{0,0657}{R_\odot} \left( \frac{v}{10^9 \text{ Гц}} \right)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{r}{R_\odot} \right)^{-7,5} \times \\ &\times \left[ \hat{x} \left( \frac{x}{r} \right) + \hat{y} \left( \frac{y}{r} \right) \right] dx. \end{aligned} \quad (3)$$

Член, содержащий  $\hat{x}$ , обращается в нуль в силу симметрии относительно обращения знака  $x$ , в то время как член, содержащий  $\hat{y}$ , можно представить в виде  $2 \int_{-\infty}^{+\infty}$ . Так как  $\vec{m}$  — единичный вектор,

то при малых углах выражение  $(\vec{m}|_{+\infty} - \vec{m}|_{-\infty}) \cdot \hat{y}$  дает угол отклонения, который требуется найти. Полагая

$$\eta \equiv b/R_\odot, \quad z \equiv r/b$$

и используя соотношения

$$y = b, \quad x^2 = b^2(z^2 - 1), \quad dx = bz(z^2 - 1)^{-1/2} dz,$$

<sup>1)</sup> См. также Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Гостехиздат, 1957, стр. 343. — Прим. перев.

получаем

$$v_{\text{корон}} \approx 0,131 \left( \frac{v}{10^9 \text{ Гц}} \right)^{-2} \eta^{-6,5} \int_1^{\infty} z^{-7,5} (z^2 - 1)^{-1/2} dz. \quad (4)$$

Подставляя  $t = 1/z^2$ , преобразуем интеграл из (4) в бета-функцию Эйлера  $(1/2) B(3,75; 0,5) = 0,158$ . Таким образом, угол коронального отклонения можно записать в виде

$$\vartheta_{\text{корон}} \approx 0,021 \left( \frac{v}{10^9 \text{ Гц}} \right)^{-2} \eta^{-6,5}. \quad (5)$$

Общерелятивистское выражение для угла отклонения  $\vartheta_{GR}$  представимо в виде

$$\vartheta_{GR} \approx \frac{8,5 \cdot 10^{-6}}{\eta} \quad (6)$$

(см. задачу 15.6). Приравнивая оба отклонения, получаем

$$\frac{8,5 \cdot 10^{-6}}{\eta} \approx 0,021 \left( \frac{v}{10^9 \text{ Гц}} \right)^{-2} \eta^{-6,5}$$

или

$$\eta \equiv \frac{b}{R_{\odot}} \approx 4,1 \left( \frac{v}{10^9 \text{ Вц}} \right)^{-0,36}$$

При меньших прицельных параметрах  $b$  доминирует корональное отклонение.

**Решение 20.6.** Связь между  $\varphi$  и  $\vartheta$  (см. фиг. 41) дается законом преломления Снеллиуса («закон синусов»):

$$n = \varphi / \vartheta. \quad (1)$$

Чтобы линза могла моделировать гравитационное отклонение света, требуется, чтобы выполнялось соотношение

$$\delta \equiv \varphi - \vartheta = 1,75''/b. \quad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) следует

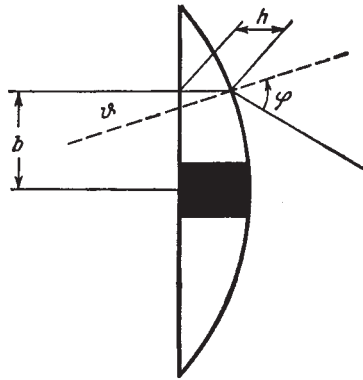
$$\vartheta = 1,75''/b (n - 1) = 1,6 \cdot 10^{-5}/b. \quad (3)$$

Из геометрических соображений ясно, что  $\vartheta = -dh/db$ , так что мы приходим к уравнению

$$\frac{dh}{db} = - \frac{1,6 \cdot 10^{-5}}{b},$$

откуда

$$h = h_0 - 1,6 \cdot 10^{-5} \ln b.$$



Фиг. 41.

**Решение 20.7.** В метрике Шварцшильда, записанной в координатах кривизны, уравнение для некруговых орбит можно представить в виде (см., например, решение задачи 15.9)

$$u'' + u = \frac{M}{\bar{L}^2} + 3Mu^2 \equiv a + bu^2, \quad (1)$$

где  $u \equiv 1/r$ ,  $u'' \equiv d^2u/d\varphi^2$ , а  $\bar{L}$  — момент количества движения на единицу массы движущейся по орбите частицы ( $\bar{L} = \text{const}$ ). Решение в нулевом порядке, соответствующее линейной части уравнения (1), есть

$$u_0 = a + A \cos \varphi, \quad (2)$$

где  $A$  — некоторая постоянная. Тогда в следующем порядке решение уравнения (1),  $u_1$ , должно удовлетворять уравнению

$$\begin{aligned} u_1'' + u_1 &\approx bu_0^2 = b(a^2 + 2aA \cos \varphi + A^2 \cos^2 \varphi) = \\ &= ba^2 + \frac{1}{2} bA^2 + 2abA \cos \varphi + \frac{1}{2} bA^2 \cos 2\varphi. \end{aligned} \quad (3)$$

Решение неоднородного уравнения (3) есть

$$u_1 = b \left( a^2 + \frac{1}{2} A^2 \right) + abA\varphi \sin \varphi - (bA^2/6) \cos 2\varphi, \quad (4)$$

и, таким образом,

$$u = \frac{1}{r} \approx u_0 + u_1. \quad (5)$$

Вековые изменения обусловлены вторым членом в выражении (4) для  $u_1$ ; мы можем представить его в более удобном виде, если воспользуемся тождеством

$$e\varphi \sin \varphi \equiv \cos(\varphi - e\varphi) - \cos \varphi + \mathcal{O}(e^2). \quad (6)$$

Поскольку, согласно уравнению (1),  $ab$  есть малая величина, уравнение (4) с помощью тождества (6) можно привести к виду

$$u_1 \approx b \left( a^2 + \frac{1}{2} A^2 \right) + A \cos(\varphi - ab\varphi) - A \cos \varphi - (bA^2/6) \cos 2\varphi, \quad (7)$$

откуда следует, что смещение перигелия за период одного обращения по орбите равно

$$\delta\varphi = 2\pi ab = 6\pi M^2/L^2. \quad (8)$$

Мы можем выразить  $\bar{L}$  через большую полуось  $a$  и эксцентриситет  $e$  орбиты с помощью стандартной формулы классической механики

$$\bar{L}^2 = Ma(1 - e^2). \quad (9)$$

Тогда уравнение (8) примет вид

$$\delta\varphi = \frac{6\pi M}{a(1 - e^2)}; \quad (10)$$

в пределе малых  $e$  оно переходит в решение задачи 15.7.

**Решение 20.8.**

а) Да. Заметим сначала, что масса частицы постоянна:

$$\frac{dm^2}{d\tau} = - \frac{d\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}}{d\tau} = - 2\mathbf{p} \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = 0.$$

Поскольку  $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$  и  $m = \text{const}$ , множитель  $m$  можно опустить в каждом члене уравнения для действующей на частицу силы. Тогда это уравнение сведется к уравнению

$$du^\mu/d\tau = - (\eta^{\mu\nu}\Phi_{,\nu} + u^\alpha\Phi_{,\alpha}u^\mu),$$

которое ясно показывает, что движение частицы не зависит от массы.

б) Да. Вблизи поверхности Земли эту поверхность можно считать плоской. Направим ось  $z$  вертикально вверх; тогда  $\Phi = \Phi(z)$ , и «уравнение источников» для  $\Phi$  имеет вид

$$\partial^2\Phi/\partial z^2 = 0.$$

У земной поверхности потенциал можно записать как

$$\Phi = az + b.$$

Постоянную  $a$  можно определить, рассматривая падение массивной частицы из состояния покоя и полагая начальное значение ее ускорения равным  $g$ . Если в уравнении для силы положить  $u^0 = 1$ ,  $u^i = 0$ , мы будем иметь

$$-mg = dp^z/d\tau = -m\Phi_{,z} = -ma,$$

откуда следует, что  $a = g$ .

Рассмотрим теперь фотон, движущийся вертикально вверх. За время  $dt = dz$  он теряет энергию

$$dp^0 = -p^\alpha \Phi_{,\alpha} dx^0 = -p^z \Phi_{,z} dt.$$

Поскольку для фотона  $p^z = p^0$ , потеря энергии составляет

$$dp^0 = -p^0 g dz.$$

Для наземного эксперимента  $g \Delta z \ll 1$ , и мы получаем

$$\Delta p^0/p^0 = \Delta v/v = -g \Delta z$$

в полном согласии с результатами эксперимента Паунда — Ребки.

в) Нет. Поскольку для фотона  $p_\beta dx^\beta = 0$ , его траектория описывается уравнением

$$dp^\mu = -p^\alpha \Phi_{,\alpha} dx^\mu = -dx^\alpha \Phi_{,\alpha} p^\mu.$$

Так как  $dp$  пропорционально  $p$ , фотон должен распространяться по прямой линии; искривление траектории отсутствует.

(Примечание. Более того, в противоречии с наблюдениями эта теория предсказывает *отстающее*, а не опережающее смещение перигелия планетных орбит, равное

$$\delta = 2\pi M_\odot^2/J^2,$$

где  $\delta$  — смещение перигелия за одно обращение по орбите,  $J$  — момент количества движения планеты на единицу массы. Для почти круговых орбит эта формула предсказывает смещение, равное

$$\delta = 2\pi M_\odot/r,$$

что составляет примерно  $\approx 13''$  за столетие для орбиты Меркурия.)

**Решение 20.9.** Любые эталонные часы можно прокалибровать по отношению к часам, находящимся на бесконечности, которые измеряют время  $t$ . Тогда отношение скорости хода часов, расположенных в точке с координатами  $(r, \vartheta)$  и обладающих 4-скоростью  $u$ , к скорости хода часов на бесконечности равно

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{u^0(r, \vartheta)}. \quad (1)$$

В решении задачи 16.19 мы показали, что на поверхности жестко вращающейся равновесной конфигурации идеальной жидкости  $u^0 = \text{const}$ . Следовательно,

$$d\tau/dt = \text{const},$$

и все часы на поверхности Земли имеют одну и ту же скорость хода! Дело здесь в том, что доплеровский эффект в точности компенсирует эффект красного смещения.



## ГЛАВА 21

### Решение 21.1.

а) Формулу для производной от определителя можно найти, например, из тождества

$$\det A = e^{\text{Sp} \{\ln A\}};$$

оно справедливо для любой неособенной матрицы  $A$ . (Здесь  $\ln A$  понимается как обратная функция от  $e^A$ , где экспонента определяется в виде степенного ряда.) Тогда мы имеем

$$\delta(\det A) = e^{\text{Sp} \{\ln A\}} \delta(\text{Sp} \{\ln A\}) = (\det A) \text{Sp} (A^{-1} \delta A),$$

откуда для  $g \equiv \det (g_{\alpha\beta})$  получаем

$$\delta g = g g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta};$$

здесь мы воспользовались симметрией тензора  $g_{\alpha\beta}$ . Искомый результат получается непосредственно

$$\delta (-g)^{1/2} = -\frac{1}{2} (-g)^{-1/2} \delta g = \frac{1}{2} (-g)^{1/2} g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta}.$$

б) Из определения  $g^{\alpha\beta}$ ,

$$g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma},$$

имеем

$$\delta g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} + g^{\alpha\beta} \delta g_{\beta\gamma} = 0.$$

Умножая на  $g^{\gamma\delta}$ , получаем

$$\delta g^{\alpha\beta} \delta_{\beta}^{\delta} + g^{\gamma\delta} g^{\alpha\beta} \delta g_{\beta\gamma} = 0,$$

откуда и следует ответ:

$$\delta g^{\alpha\delta} = -g^{\gamma\delta} g^{\alpha\beta} \delta g_{\beta\gamma}.$$

**Решение 21.2.** Вариация  $L$ , получающаяся в результате вариации переменных поля  $\Phi^A$ , дается формулой

$$(-g)^{\frac{1}{2}} \delta L (\Phi^A, \Phi^A_{,\mu}, g_{\mu\nu}) = \left( \frac{\partial L}{\partial \Phi^A} \delta \Phi^A + \frac{\partial L}{\partial \Phi^A_{,\mu}} \delta \Phi^A_{,\mu} \right) (-g)^{\frac{1}{2}}.$$

Операция варьирования  $\Phi^A$  коммутирует с частным дифференцированием:

$$\delta (\Phi^A_{,\mu}) = (\delta \Phi^A)_{,\mu},$$

так что уравнение (1) можно переписать в виде

$$(-g)^{1/2} \delta L = (-g)^{1/2} \frac{\partial L}{\partial \Phi^A} \delta \Phi^A + \left( \frac{\partial L (-g)^{1/2}}{\partial \Phi^A{}_{,\mu}} \delta \Phi^A \right)_{,\mu} - \\ - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial L (-g)^{1/2}}{\partial \Phi^A{}_{,\mu}} \right) \delta \Phi^A.$$

Второй член представляет собой полную дивергенцию, приводящую к появлению в  $\delta S$  члена, имеющего вид интеграла по поверхности. Следовательно, он равен нулю, так как мы полагаем  $\delta \Phi^A = 0$  на поверхности. Таким образом,

$$0 = \frac{\delta L}{\delta \Phi^A} = \frac{\partial L}{\partial \Phi^A} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial L (-g)^{1/2}}{\partial \Phi^A{}_{,\mu}} \right) \frac{1}{(-g)^{1/2}}.$$

**Решение 21.3.** Поскольку  $L(-g)^{1/2} d^4x$  — скаляр, он не изменяется при инфинитезимальном преобразовании координат:

$$x^\mu = x^\mu + \xi^\mu.$$

Переобозначая постоянную интегрирования, условно записанную в виде переменной, мы можем вновь вернуться от  $d^4x$  к  $d^4x$ . Следовательно, результирующее изменение  $L(-g)^{1/2}$  есть производная Ли (см. задачу 8.17), так что мы можем записать

$$0 = \delta S = \int \mathcal{L}_\xi (L(-g)^{1/2}) d^4x = \\ = \int \left[ \frac{\delta L}{\delta \Phi^A} (\mathcal{L}_\xi \Phi^A) (-g)^{1/2} + \frac{\delta (L(-g)^{1/2})}{\delta g_{\mu\nu}} \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} \right] d^4x. \quad (1)$$

Первый член в подынтегральном выражении обращается в нуль в силу уравнений движения (задача 21.2), и уравнение (1) сводится к уравнению

$$0 = \frac{1}{2} \int T^{\mu\nu} \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} (-g)^{1/2} d^4x.$$

Поскольку

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu},$$

мы получаем

$$0 = \int T^{\mu\nu} \xi_{\mu;\nu} (-g)^{1/2} d^4x = \int (T^{\mu\nu} \xi_\mu)_{;\nu} (-g)^{1/2} d^4x - \int T^{\mu\nu}{}_{;\nu} \xi_\mu (-g)^{1/2} d^4x. \quad (2)$$

Первый член имеет вид

$$\int (T^{\mu\nu} \xi_\mu)_{;\nu} (-g)^{1/2} d^4x = \int ((-g)^{1/2} T^{\mu\nu} \xi_\mu)_{;\nu} d^4x$$

и сводится к поверхностному интегралу, который обращается в нуль. Поскольку  $\xi_\mu$  — произвольная величина, из уравнения (2) следует

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0.$$

**Решение 21.4.**

а) При независимом варьировании

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &\rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}, \\ \Gamma^\alpha_{\mu\nu} &\rightarrow \Gamma^\alpha_{\mu\nu} + \delta \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \end{aligned}$$

мы получаем

$$\delta((-g)^{1/2} R) = (-g)^{1/2} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + R \delta(-g)^{1/2} + (-g)^{1/2} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (1)$$

Так как

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^\alpha_{\alpha\sigma} \Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} \Gamma^\sigma_{\mu\alpha}, \quad (2)$$

первый член в правой части уравнения (1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} (-g)^{1/2} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= ((-g)^{1/2} g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\alpha_{\mu\nu})_{,\alpha} - ((-g)^{1/2} g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\alpha_{\mu\alpha})_{,\nu} - \\ &\quad - ((-g)^{1/2} g^{\mu\nu})_{,\alpha} \delta \Gamma^\alpha_{\mu\nu} + ((-g)^{1/2} g^{\mu\nu})_{,\nu} \delta \Gamma^\alpha_{\mu\alpha} + \\ &\quad + (-g)^{1/2} g^{\mu\nu} (\delta \Gamma^\alpha_{\alpha\sigma} \Gamma^\sigma_{\mu\nu} + \Gamma^\alpha_{\alpha\sigma} \delta \Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \delta \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} \Gamma^\sigma_{\mu\alpha} - \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} \delta \Gamma^\sigma_{\mu\alpha}). \quad (3) \end{aligned}$$

Первые два члена в правой части выражения (3) представляют собой полные дивергенции и поэтому не дают вклада в  $\delta S$ , так как интеграл от дивергенции можно записать в виде интеграла по поверхности, а на поверхности области интегрирования  $\delta \Gamma = 0$ . Соответствующим образом переименовывая немые индексы, мы можем переписать выражение (3) в виде

$$(-g)^{1/2} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = (-g)^{1/2} (A^\mu_\sigma + \delta^\nu_\sigma B^\mu) \delta \Gamma^\sigma_{\mu\nu}, \quad (4)$$

где

$$A^\mu_\sigma \equiv g^{\mu\nu} \Gamma^\alpha_{\alpha\sigma} - (-g)^{-1/2} [(-g)^{1/2} g^{\mu\nu}]_{,\sigma} - g^{\alpha\nu} \Gamma^\mu_{\alpha\sigma} - g^{\alpha\mu} \Gamma^\nu_{\alpha\sigma}, \quad (5)$$

$$B^\mu \equiv (-g)^{-1/2} [(-g)^{1/2} g^{\mu\beta}]_{,\beta} + g^{\alpha\beta} \Gamma^\mu_{\alpha\beta}. \quad (6)$$

Из задачи 21.1 мы знаем, что

$$\delta[(-g)^{1/2}] = -\frac{1}{2} (-g)^{1/2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (7)$$

откуда

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= (16\pi)^{-1} \int (-g)^{1/2} d^4x (A^\mu_\sigma + \delta^\nu_\sigma B^\mu) \delta \Gamma^\sigma_{\mu\nu} + \\ &+ (16\pi)^{-1} \int (-g)^{1/2} d^4x \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} + \int \frac{\delta(L_{\text{вещ}}(-g)^{1/2})}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (8) \end{aligned}$$

Поскольку вариация  $\delta \Gamma^\sigma_{\mu\nu}$  симметрична, из рассмотрения первого члена в уравнении (8) получаем

$$A^\mu_\sigma + \frac{1}{2} \delta^\nu_\sigma B^\mu + \frac{1}{2} \delta^\mu_\sigma B^\nu = 0, \quad (9)$$

Умножая уравнение (9) на  $\delta^\sigma_\nu$  и сворачивая индексы, находим

$$A_\sigma^{\mu\sigma} + 2B^\mu + \frac{1}{2} B^\mu = 0. \quad (10)$$

Производя ту же операцию с тождеством (5) и сравнивая его с (6), приходим к равенству

$$A_\sigma^{\mu\sigma} = -B^\mu. \quad (11)$$

Из уравнений (10) и (11) следует

$$B^\mu = 0,$$

поэтому уравнение (9) сводится к уравнению

$$A_\sigma^{\mu\nu} = 0. \quad (12)$$

Если записать  $A_\sigma^{\mu\nu}$  в явном виде с помощью тождества (5), то уравнение (12) можно записать следующим образом:

$$g^{\mu\nu} C_\sigma = g^{\mu\nu}{}_{,\sigma} + g^{\alpha\nu} \Gamma^\mu_{\alpha\sigma} + g^{\alpha\mu} \Gamma^\nu_{\alpha\sigma}, \quad (13)$$

где

$$C_\sigma \equiv (-g)^{-1/2} (-g)_{,\sigma}^{1/2} - \Gamma^\alpha_{\alpha\sigma}. \quad (14)$$

Умножая уравнение (13) на  $g_{\mu\nu}$ , находим

$$4C_\sigma = g^{\mu\nu}{}_{,\sigma} g_{\mu\nu} + 2\Gamma^\alpha_{\alpha\sigma} = -2(-g)^{-1/2} (-g)_{,\sigma}^{1/2} + 2\Gamma^\alpha_{\alpha\sigma} \equiv -2C_\sigma$$

(где для получения второго равенства мы воспользовались результатом задачи 21.1). Отсюда следует, что  $C_\sigma = 0$ . Если мы введем определение

$$\Gamma_{\lambda\alpha\sigma} \equiv g_{\lambda\mu} \Gamma^\mu_{\alpha\sigma} \quad (15)$$

и умножим уравнение (13) на  $g_{\lambda\mu} g_{\nu\sigma}$ , то получим

$$0 = -g_{\nu\lambda, \sigma} + \Gamma_{\lambda\nu\sigma} + \Gamma_{\nu\lambda\sigma}, \quad (16)$$

откуда

$$\frac{1}{2} (g_{\nu\lambda, \sigma} + g_{\nu\sigma, \lambda} - g_{\sigma\lambda, \nu}) = \Gamma_{\nu\lambda\sigma}, \quad (17)$$

что и дает нам один из требуемых результатов.

Если вернуться теперь к уравнению (8) и воспользоваться результатами задачи 21.3, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\delta(L_{\text{вещ}}(-g)^{1/2})}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} &= \frac{\delta(L_{\text{вещ}}(-g)^{1/2})}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (-g)^{1/2} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = \\ &= -\frac{1}{2} (-g)^{1/2} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (18)$$

Отсюда заключаем, что

$$(16\pi)^{-1} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) - \frac{1}{2} T_{\mu\nu} = 0,$$

или

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (19)$$

б) Хотя символ  $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$  (понимаемый теперь как символ Кристоффеля, образованный из  $g_{\alpha\beta}$ ) и не является тензором,  $\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$  есть тензор (см. задачу 8.26). Следовательно, мы можем упростить вычисление  $\delta R_{\mu\nu}$ , работая в локальной инерциальной системе отсчета, где символы  $\Gamma$  обращаются в нуль. В этой системе уравнение (2) сводится к уравнению

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta\Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} - \delta\Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} = \delta\Gamma_{\mu\nu;\alpha}^{\alpha} - \delta\Gamma_{\mu\alpha;\nu}^{\alpha}. \quad (20)$$

Так как это тензорное уравнение, оно справедливо в любой системе координат. Так как  $\Gamma$  суть символы Кристоффеля,  $g_{\mu\nu;\alpha} = 0$  и

$$\begin{aligned} (-g)^{1/2} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= (-g)^{1/2} [(g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha})_{;\alpha} - (\delta\Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha} g^{\mu\nu})_{;\nu}] = \\ &= ((-g)^{1/2} g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha})_{;\alpha} - (\delta\Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha} g^{\mu\nu} (-g)^{1/2})_{;\nu} \end{aligned}$$

[здесь мы для получения второго равенства воспользовались результатом задачи 7.7 (ж)]. Поскольку это выражение есть полная дивергенция, оно не дает вклада в  $\delta S$ . Остающиеся в уравнениях (1) и (18) члены приводят к уравнению (19), как и в п. «а»].

**Решение 21.5.** Беря вариацию от действия

$$S = - (8\pi)^{-1} \int (\Phi_{;\alpha} \Phi^{;\alpha} + m^2 \Phi^2) (-g)^{1/2} d^4x,$$

получаем

$$0 = \frac{\delta L}{\delta \Phi} = [2m^2 \Phi - 2(-g)^{-1/2} [(-g)^{1/2} \Phi_{;\alpha}]_{;\alpha}] (-g)^{1/2}$$

или

$$\square \Phi - m^2 \Phi = 0. \quad (1)$$

Из задачи 21.3 следует, что тензор энергии-импульса есть

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &\equiv -2(-g)^{-1/2} \frac{\delta [(-g)^{1/2} L]}{\delta g^{\mu\nu}} = \\ &= \frac{1}{4\pi} (-g)^{-1/2} \left[ \Phi_{;\mu} \Phi_{;\nu} (-g)^{1/2} - \frac{1}{2} (\Phi_{;\alpha} \Phi^{;\alpha} + m^2 \Phi^2) (-g)^{1/2} g_{\mu\nu} \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[ \Phi_{;\mu} \Phi_{;\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\Phi_{;\alpha} \Phi^{;\alpha} + m^2 \Phi^2) \right], \quad (2) \end{aligned}$$

и, следовательно, его дивергенция равна

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = \frac{1}{4\pi} (\Phi^{;\mu}_{;\nu} \Phi^{;\nu} + \Phi^{;\mu} \square \Phi - \Phi_{;\alpha}^{;\mu} \Phi^{;\alpha} - m^2 \Phi \Phi^{;\mu}). \quad (3)$$

Для скалярного поля  $\Phi$  справедливо также соотношение

$$\Phi^{;\mu}_{;\nu} = \Phi_{;\nu}^{;\mu}, \quad (4)$$

в силу которого уравнение (3) принимает вид

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = \frac{\Phi^{;\mu}}{4\pi} (\square\Phi - m^2\Phi) = 0. \quad (5)$$

Последнее равенство следует из уравнения (1).

**Решение 21.6.** Вариация интеграла действия дает

$$\begin{aligned} \frac{\delta(L(-g)^{1/2})}{\delta A_\mu} &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\delta(A_{[\mu;\nu]} A^{[\mu;\nu]} (-g)^{1/2})}{\delta A_\mu} = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\delta(A_{[\mu;\nu]} A^{[\mu;\nu]} (-g)^{1/2})}{\delta A_\mu} = -\frac{1}{4\pi} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\partial}{\partial x^\mu} (A^{[\mu;\nu]} (-g)^{1/2}) = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (F^{\nu\mu} (-g)^{1/2}) = -\frac{(-g)^{1/2}}{2\pi} F^{\nu\mu}_{;\mu}, \end{aligned} \quad (1)$$

где мы воспользовались результатом задачи 7.7 (и).

Используя формулу, выражающую тензор энергии-импульса через плотность лагранжиана, получаем

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} &\equiv -2 \frac{\delta L}{\delta g^{\alpha\beta}} + L g_{\alpha\beta} = \frac{1}{8\pi} \frac{\delta(F_{\mu\nu} F_{\sigma\tau} g^{\mu\sigma} g^{\nu\tau})}{\delta g^{\alpha\beta}} - \frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} g_{\alpha\beta} = \\ &= \frac{1}{4\pi} F_{\alpha\nu} F_{\beta\nu} - \frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} g_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (2)$$

Рассмотрим теперь плотность лагранжиана вида

$$L = \left( -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} A_{\mu;\nu} \right) (-g)^{1/2}. \quad (3)$$

Вариация  $L$  по  $A_\mu$  дает уравнения Максвелла:

$$F^{\mu\nu}_{;\nu} = 0, \quad (4)$$

а варьирование  $L$  по  $F^{\mu\nu}$  приводит к соотношению

$$F^{\mu\nu} = 2A^{[\nu;\mu]}. \quad (5)$$

**Решение 21.7.** Варьируя лагранжиан по  $\Phi$ , получаем

$$(-g)^{1/2} \left( R + \frac{\omega}{\Phi^2} \Phi_{;\alpha} \Phi^{;\alpha} \right) = -2\omega \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( \frac{\Phi_{;\alpha} (-g)^{1/2}}{\Phi} \right),$$

откуда

$$2\omega\Phi^{-1} \square\Phi - \omega\Phi^{-2} \Phi_{;\alpha} \Phi^{;\alpha} + R = 0; \quad (1)$$

здесь мы использовали равенство

$$\square \Phi \equiv \Phi_{;\alpha}{}^{\alpha} = \frac{1}{(-g)^{\frac{1}{2}}} (\Phi^{;\alpha} (-g)^{1/2})_{;\alpha}$$

Вариация  $L$  по  $g_{\alpha\beta}$  содержит три члена:

$$(I) \quad \frac{\delta (-\omega \Phi^{;\alpha} \Phi_{;\beta} g_{\alpha\beta} \Phi^{-1} (-g)^{1/2})}{\delta g_{\alpha\beta}} =$$

$$= -\frac{\omega}{\Phi} \left[ \Phi^{;\alpha} \Phi^{;\beta} (-g)^{1/2} - \frac{1}{2} \Phi^{;\mu} \Phi_{;\mu} g^{\alpha\beta} (-g)^{1/2} \right], \quad (2a)$$

а также

$$(II) \quad \delta (\Phi R (-g)^{1/2}) = (-g)^{1/2} \Phi G^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} + \Phi (-g)^{1/2} g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta}, \quad (2б)$$

где

$$(-g)^{1/2} g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} [(-g)^{1/2} (g^{\alpha\beta} \delta \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} - g^{\alpha\gamma} \delta \Gamma^{\nu}_{\alpha\tau})] \quad (2в)$$

(см. задачу 21.4). Кроме того, из выражения для символов  $\Gamma$  через производные от  $g$  имеем

$$\delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = -g^{\lambda\rho} \delta g_{\rho\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} [(\delta g_{\rho\mu})_{;\nu} + (\delta g_{\rho\nu})_{;\mu} - (\delta g_{\mu\nu})_{;\rho}] =$$

$$= \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} [(\delta g_{\rho\mu})_{;\nu} + (\delta g_{\rho\nu})_{;\mu} - (\delta g_{\mu\nu})_{;\rho}]. \quad (2г)$$

Далее, используя уравнения (2в) и (2г), можно записать

$$\Phi (-g)^{1/2} g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta} \rightarrow \delta g^{\alpha\beta} (-\Phi_{;\alpha}{}_{;\beta} + g_{\alpha\beta} \square \Phi) (-g)^{1/2}, \quad (2д)$$

где стрелка обозначает операцию отбрасывания всех полных дивергенций (они обращаются в нуль при интегрировании). Объединяя уравнения (2б) и (2д), получаем

$$\delta (\Phi R (-g)^{1/2}) = (-g)^{1/2} \delta g^{\alpha\beta} [-\Phi_{;\alpha}{}_{;\beta} + g_{\alpha\beta} \square \Phi + \Phi G_{\alpha\beta}]. \quad (2е)$$

Оставшийся третий член имеет вид

$$(III) \quad 16\pi \frac{\delta (L_{\text{вещ}} (-g)^{1/2})}{\delta g_{\alpha\beta}} = -8\pi (-g)^{1/2} T^{\alpha\beta}. \quad (2ж)$$

И, наконец, используя уравнения (2а), (2е) и (2ж), мы приходим к уравнениям поля, полученным путем варьирования по  $g^{\alpha\beta}$ :

$$G_{\alpha\beta} + \Phi^{-1} (g_{\alpha\beta} \square \Phi - \Phi_{;\alpha}{}_{;\beta}) -$$

$$- \omega \Phi^{-2} \left( \Phi_{;\alpha} \Phi_{;\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \Phi_{;\mu} \Phi^{;\mu} \right) - 8\pi \Phi^{-1} T_{\alpha\beta} = 0. \quad (3)$$

**Решение 21.8.** Выберем для простоты такие координаты (они называются гауссовыми нормальными координатами, см. задачу 8.25), в которых метрика принимает вид

$$ds^2 = dn^2 + {}^{(3)}g_{ij} dx^i dx^j.$$

Координаты  $x^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) играют роль «жестких перемычек» внутри поверхностного слоя, который расположен, как мы будем считать, при  $n = 0$ . Из уравнений для начальных значений имеем

$$G^i_j = {}^{(3)}G^i_j + (K^i_j - \delta^i_j \text{Sp } K)_{,n} - (\text{Sp } K) K^i_j + \\ + \frac{1}{2} \delta^i_j (\text{Sp } K)^2 + \frac{1}{2} \delta^i_j \text{Sp } (K)^2 = 8\pi T^i_j.$$

Проинтегрируем теперь по  $n$  от  $-\varepsilon$  до  $+\varepsilon$ , используя тот факт, что  $n$  представляет собой собственное расстояние, перпендикулярное 3-поверхности, а затем устремим  $\varepsilon$  к нулю. Поскольку внутренняя геометрия 3-поверхности вполне определена, единственным остающимся после этого «предельного» интегрирования членом является член, включающий производные внешней кривизны. Отсюда, обозначая «скачок»  $K$  через  $[K]$ , находим

$$[K^i_j - \delta^i_j \text{Sp } K] = 8\pi S^i_j,$$

или

$$\text{Sp } [K] = -4\pi S^i_i = -4\pi {}^{(3)}g_{ij} S^{ij},$$

откуда

$$[K^i_j] = 3\pi \left( S^i_j - \frac{1}{2} \delta^i_j S^k_k \right).$$

**Решение 21.9.** Из уравнений для начальных значений имеем

$$G^n_i = -\{K^m_{,m} - (\text{Sp } K)_{,i}\} = -\{K^m_{,m} - \delta^m_i \text{Sp } (K)\}_{,m} = 8\pi T^n_i.$$

«Скачок»  $G^n_i$  при пересечении 3-поверхности есть

$$\{[K^m_{,m} - \delta^m_i \text{Sp } K]\}_{,m} = -8\pi T^n_i.$$

Совместно с результатом задачи 21.8 это дает

$$S^m_{,m} = -[T^n_i].$$

**Решение 21.10.** «Поверхностный тензор энергии-импульса» тонкой пылевой оболочки имеет вид

$$S^{\alpha\beta} = \sigma u^\alpha u^\beta.$$

Из решения задачи 21.8 имеем

$$[K^i_j] = 8\pi \left\{ \sigma u^i u_j - \frac{1}{2} \delta^i_j (-\sigma) \right\},$$

или

$$[K_{ij}] = 8\pi \sigma \left\{ u_i u_j + \frac{1}{2} {}^{(3)}g_{ij} \right\}. \quad (1)$$

Так как вне оболочки энергия-импульс отсутствует,  $[T^n_i] = 0$



и из уравнений движения (см. задачу 21.9) получаем

$$\begin{aligned} 0 &= S_i^m{}_{;m} = \sigma_{;m} u^m u_i + \sigma u^m{}_{;m} u_i + \sigma u_i{}_{;m} u^m = \\ &= \frac{d\sigma}{d\tau} u_i + \sigma u_i u^m{}_{;m} + \sigma u_i{}_{;m} u^m. \end{aligned} \quad (2)$$

Свертывая это выражение с  $\mathbf{u}$ , мы проверяем второе из приведенных в условии соотношений:

$$\frac{d\sigma}{d\tau} + \sigma u^m{}_{;m} = 0. \quad (3)$$

Сравнивая с уравнением (2), мы видим, что

$$u_i{}_{;m} u^m = 0.$$

Следовательно,

$$\mathbf{a} = \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u} = u^i \nabla_i (u^j \mathbf{e}_j) = u^i (u^j{}_{;i} \mathbf{e}_j + u^j K_{ij} \mathbf{n}) = u^i u^j K_{ij} \mathbf{n}. \quad (4)$$

[Для получения второго от конца равенства мы воспользовались уравнением (2) из решения 9.32.] Третье искомое соотношение следует теперь из уравнений (1) и (4):

$$\mathbf{a}^+ - \mathbf{a}^- = u^i u^j [K_{ij}] \mathbf{n} = 4\pi \sigma \mathbf{n}.$$

Чтобы проверить четвертое соотношение, нам необходимо показать, что

$$(K_{ij}^+ + K_{ij}^-) u^i u^j = 0.$$

Сделаем это с помощью уравнения для начальных значений

$$[G^n{}_n] = 8\pi [T^n{}_n] = 0.$$

Так как кривизна  ${}^{(3)}R$  непрерывна, отсюда получаем

$$\begin{aligned} 0 &= [\text{Sp}(K^2) - (\text{Sp} K)^2] = K_j^+ K_j^+ - K_j^- K_j^- - (K_i^+)^2 + (K_i^-)^2 = \\ &= (K_j^+ + K_j^-) \{K_j^+ - K_j^- - {}^{(3)}g^{ij} (K_a^+ - K_a^-)\} = \\ &= (K_j^+ + K_j^-) \{[K_j^+] - \delta_j^i \text{Sp}[K]\}, \end{aligned}$$

где мы воспользовались также легко проверяемым фактом — тем, что  $K_j^{i+}$  и  $K_j^{i-}$  коммутируют. Поскольку

$$[K^i{}_i] = 8\pi \sigma \left( u^i u_i + \frac{1}{2} {}^{(3)}\delta^j{}_j \right),$$

отсюда следует

$$[K^i{}_i] = 4\pi \sigma$$

и

$$[K^i{}_i] - \delta^j{}_i [K^i{}_i] = 8\pi \sigma (u^j u_i),$$

откуда, наконец, получаем

$$(K_j^{i+} + K_j^{i-}) u^i u_i = 0.$$

**Решение 21.11.** Если  $\tau$  — собственное время, измеряемое наблюдателем, покоящимся относительно пыли, то движение оболочки описывается функцией  $r(\tau)$ , где  $r$  — радиальная координата оболочки либо во внешней, либо во внутренней метрике. Метрику оболочки можно записать в виде

$$ds^2 = -d\tau^2 + R^2(\tau)(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2).$$

Здесь  $4\pi R^2$  — площадь поверхности оболочки в момент времени  $\tau$ , откуда ясно, что  $R(\tau) = r(\tau)$ . Из второго соотношения задачи 21.10 следует

$$0 = \frac{d\sigma}{d\tau} + \sigma u^i{}_{;i} = (\sigma u^i)_{;i} = (\sigma ({}^{(3)}g)^{1/2} u^i)_{;i} / ({}^{(3)}g)^{1/2}.$$

Но  $u^\tau = 1$  и  ${}^{(3)}g = R^4(\tau)$ , так что  $(\sigma R^2)_{;\tau} = 0$ . Отсюда вытекает, что величина  $4\pi R^2\sigma = \mu$ , которую мы отождествляем с массой покоя оболочки, является постоянной.

Чтобы найти уравнение движения, воспользуемся условием сшивки из задачи 21.10:

$$[K_{\vartheta\vartheta}] = 8\pi\sigma \left( u_\vartheta u_\vartheta + \frac{1}{2} {}^{(3)}g_{\vartheta\vartheta} \right) = 4\pi\sigma {}^{(3)}g_{\vartheta\vartheta} = \mu.$$

Непосредственно находя  $K_{\vartheta\vartheta}$ , получаем

$$K_{\vartheta\vartheta} = -n_{\vartheta;\vartheta} = n_\alpha \Gamma^\alpha{}_{\vartheta\vartheta} = -\frac{1}{2} n^r g_{\vartheta\vartheta,r} = -r n^r,$$

откуда

$$[K_{\vartheta\vartheta}] = -r(n^{r+} - n^{r-}) = \mu,$$

где  $n^{r+}$  и  $n^{r-}$  — значения радиальной компоненты нормали во внешней и внутренней геометрии.

Используя соотношения  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  и  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1$ , мы можем найти компоненты  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{n}$ . Вне оболочки имеем

$$\begin{aligned} 1 &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (u^t)^2 - (u^r)^2 / \left(1 - \frac{2M}{r}\right), \\ 0 &= n_r u^r + n_t u^t, \\ 1 &= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} (n_t)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (n_r)^2. \end{aligned}$$

Исключая  $u^t$  и  $n_t$ , находим

$$n_r^+ = \left[ \frac{1 + (u^r)^2 / \left(1 - \frac{2M}{r}\right)}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} \right]^{1/2}.$$

На оболочке  $r = R(\tau)$  и  $u^r = dR/d\tau \equiv \dot{R}$ , так что контравариантная компонента  $\mathbf{n}$  вне оболочки имеет вид

$$n^{r+} = \left(1 - \frac{2M}{R} + \dot{R}^2\right)^{1/2}.$$

Вычисления  $n^r$  абсолютно идентичны, а полученный ответ отличается лишь отсутствием члена с  $M$ . Таким образом, получаем уравнение

$$\mu = -R(n^{r+} - n^{r-}) = -R\left\{\left[1 - \frac{2M}{r} + \dot{R}^2\right]^{1/2} - [1 + \dot{R}^2]^{1/2}\right\}.$$

Решая его относительно  $M$ , приходим к уравнению движения

$$M = \mu(1 + \dot{R}^2)^{1/2} - \mu^2/2R.$$

Если  $\dot{R} = 0$  при  $R = \infty$  (случай падения на центр из состояния покоя на бесконечности), то  $M = \mu$ , и мы имеем

$$\dot{R} = -\frac{\mu}{2R}\left(1 + \frac{4R}{\mu}\right)^{1/2}.$$

Это уравнение легко проинтегрировать и получить

$$\frac{4}{\mu}\tau = -\frac{1}{3}\left(1 + \frac{4R}{\mu}\right)^{3/2} + \left(1 + \frac{4R}{\mu}\right)^{1/2} - \frac{2}{3},$$

где мы приняли, что  $R = 0$  соответствует момент времени  $\tau = 0$ .

**Решение 21.12.** Чтобы найти мгновенную пространственную метрику, нам нужно лишь рассмотреть метрику и уравнения поля на пространственноподобной поверхности Коши  $S$ , являющейся поверхностью симметрии по времени. Шесть из десяти уравнений Эйнштейна определяют метрику вне  $S$  и нас здесь интересовать не будут. Остающиеся четыре уравнения представляют собой уравнения для начальных значений, и их можно переписать в виде [см. уравнения (6) и (7) из задачи 9.33]

$$\frac{1}{2}({}^3R - \frac{1}{2}(K^i_i)^2 + \frac{1}{2}K^m_m K^i_i) = 0, \quad (1a)$$

$$K^m_{i;m} - K^m_{m;i} = 0, \quad (1b)$$

где  ${}^3R$  — скаляр кривизны на поверхности  $S$ ,  $K^i_m$  — внешняя кривизна, а вертикальная черточка означает ковариантное дифференцирование по отношению к 3-геометрии  ${}^3g_{ij}$  на поверхности  $S$ ; кроме того, мы использовали вакуумные уравнения для начальных значений.

В некоторый момент симметрии по времени времениподобная нормаль к  $S$ , через которую выражается  $K_{ij}$ , сама меняет знак на минус при обращении времени. Следовательно,  $K_{ij} = -K_{ij}$ , и поэтому внешняя кривизна  $S$  должна быть равна нулю. Для случая  $K_{ij} = 0$  на  $S$  уравнение (1b) удовлетворяется тождественно, а уравнение (1a) принимает вид

$${}^3R = 0. \quad (2)$$

Начнем с того, что выберем в качестве решения уравнения (2) «пробную функцию» вида

$$g_{ij} = \Phi^4 \eta_{ij} \quad (3)$$

и посмотрим, можно ли подобрать такое  $\Phi$ , чтобы уравнение (2) удовлетворялось. Имеем

$${}^{(3)}R = g^{ij} (\Gamma^m_{im,j} - \Gamma^m_{ij,m} + \Gamma^m_{ii} \Gamma^l_{jm} - \Gamma^l_{mi} \Gamma^m_{ij}). \quad (4)$$

Для пробной функции вида (3) символы Кристоффеля принимают вид

$$\Gamma^m_{ii} = 2\Phi^{-1} (\Phi_{,i} \delta^m_i + \Phi_{,i} \delta^m_i - \Phi^{,m} \eta_{ii}), \quad (5a)$$

$$g^{ij} \Gamma^m_{im,j} = -6\Phi^{-6} (\nabla\Phi)^2 + 6\Phi^{-5} \nabla^2\Phi, \quad (5б)$$

$$g^{ij} \Gamma^m_{ij,m} = 2\Phi^{-6} (\nabla\Phi)^2 - 2\Phi^{-5} \nabla^2\Phi, \quad (5в)$$

$$g^{ij} \Gamma^m_{ii} \Gamma^l_{jm} = -4\Phi^{-6} (\nabla\Phi)^2, \quad (5г)$$

$$g^{ij} \Gamma^l_{mi} \Gamma^m_{lj} = -12\Phi^{-6} (\nabla\Phi)^2, \quad (5д)$$

где мы ввели следующие обозначения:

$$(\nabla\Phi)^2 \equiv \Phi_{,i} \Phi_{,j} \eta^{ij}, \quad (5е)$$

$$\nabla^2\Phi \equiv \Phi_{,i,i} \eta^{ii}. \quad (5ж)$$

Если подставить значения (5) в уравнение (4), то уравнение (2) сведется к уравнению

$${}^{(3)}R = 0 = 8\Phi^{-5} \nabla^2\Phi, \quad (6)$$

которое удовлетворяется любым решением уравнения Лапласа. Одно из таких решений есть

$$\Phi = 1 + \sum_i \frac{M_i}{2r_i}, \quad (7)$$

а соответствующая ему метрика имеет вид

$$g_{ij} = \left(1 + \sum_i \frac{M_i}{2r_i}\right)^4 \eta_{ij}. \quad (8)$$

С точностью до членов низшего порядка по  $M/r$  метрику (8) можно записать следующим образом:

$$g_{ij} \approx \left(1 + \sum_i \frac{2M_i}{r_i}\right) \eta_{ij};$$

она представляет собой «пост-ньютоновское» приближение к пространственной части метрики, генерируемой точечными массами  $M_i$ , расположенными в точках  $r_i$ . Следовательно, метрика (8) действительно является мгновенной пространственной метрикой, соответствующей произвольному пространственному распределению конечного числа точечных масс в некоторый момент симметрии по времени.

**Решение 21.13.** Заметим с самого начала, что квадрат  $U^\alpha$ , являющийся лоренц-инвариантным, как раз и представляет собой определитель  $U^{AA'}$ . Следовательно, аналогом метрики Минковского будет являться система матриц, служащих для поднятия и опускания индексов при конструировании определителя  $U^{AA'}$ :

$$\delta_D^C \det(U^{AB}) = U^{FC} U^{EG} \varepsilon_{FE} \varepsilon_{DG},$$

где

$$\varepsilon_{FE} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \delta_D^C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что пара матриц  $\varepsilon$  играет роль метрики Минковского.

Чтобы найти аналог преобразований Лоренца, обозначим матрицу такого преобразования через  $L$ :

$$U^{F'C'} = L_{FC}^{F'C'} U^{FC}.$$

Требование инвариантности скалярного произведения двух векторов  $U$  и  $V$  приводит к условию

$$U^{AB} V^{CD} \varepsilon_{AC} \varepsilon_{BD} = L_{EF}^{E'F'} U^{EF} L_{GH}^{G'H'} V^{GH} \varepsilon_{E'G'} \varepsilon_{F'H'}.$$

Это означает, что должно выполняться равенство

$$\varepsilon_{EG} \varepsilon_{FH} = L_{EF}^{E'F'} L_{GH}^{G'H'} \varepsilon_{E'G'} \varepsilon_{F'H'},$$

откуда вытекает

$$\delta_E^M \delta_H^K = L_{EF}^{E'F'} L_{GH}^{G'H'} \varepsilon_{E'G'} \varepsilon_{F'H'} \varepsilon^{GM} \varepsilon^{FK}$$

и, следовательно,

$$\det(L_{EF}^{E'F'}) = 1.$$

Таким образом, матрицы преобразований Лоренца должны быть унимодулярными (т. е. определители их должны быть равны единице).

**Решение 21.14.**

а) Результат следует из того факта, что индексы  $B$ ,  $C$  и  $D$  пробегает всего лишь два значения и поэтому не могут все быть различными.

б) Записав результат п. «а» и воспользовавшись антисимметрией  $\varepsilon_{AB}$ , получим

$$\varepsilon_{AB} \varepsilon_{CD} + \varepsilon_{AC} \varepsilon_{DB} + \varepsilon_{AD} \varepsilon_{BC} = 0.$$

Свертывая это уравнение с  $\xi^{CD}$ , находим (будьте внимательными со знаками!)

$$-\varepsilon_{AB} \xi_C^C + \xi_{AB} - \xi_{BA} = 0.$$

Отсюда имеем

$$\xi_{AB} = \xi_{(AB)} + \xi_{[AB]} = \xi_{(AB)} + \frac{1}{2} \epsilon_{AB} \xi^C_C.$$

**Решение 21.15.** Результат получается немедленно из соотношений

$$\epsilon^{cd} = i (\delta^C_A \delta^D_B \delta^{C'}_{B'} \delta^{D'}_{A'} - \delta^C_B \delta^D_A \delta^{C'}_{A'} \delta^{D'}_{B'})$$

[см., например, книгу Пирани (*Pirani F. A. E., Lectures on General Relativity, 1965*) стр. 315] и

$$*T_{ab} = \frac{i}{2} \epsilon_{ab} T^c_d.$$

**Решение 21.16.** Поскольку «штрихованные» и «нештрихованные» индексы коммутируют, мы имеем

$$\begin{aligned} T_{(ab)} &= \frac{1}{2} (T_{ABA'B'} + T_{BAA'B'}) = \\ &= \frac{1}{4} (T_{ABA'B'} - T_{BAA'B'} + T_{BAA'B'} - T_{ABB'A'}) + \frac{1}{2} T_{(ab)} + \\ &\quad + \frac{1}{4} (T_{BAA'B'} + T_{ABB'A'}). \end{aligned}$$

Воспользовавшись результатом задачи 21.14, это соотношение можно переписать в виде

$$\begin{aligned} T_{(ab)} &= 2T_{|AB||A'B'|} + \frac{1}{2} (T_{BAA'B'} + T_{ABB'A'}) = \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{AB} \epsilon_{A'B'} T^C_C{}^{C'}_{C'} + \frac{1}{2} (T_{BAA'B'} + T_{ABB'A'}). \end{aligned}$$

И, наконец, используя результат задачи 21.15, получаем

$$\begin{aligned} T_{BAA'B'} &= T_{(ab)} - \frac{1}{2} \epsilon_{AB} \epsilon_{A'B'} T^C_C{}^{C'}_{C'} + *T_{(ab)} = \\ &= T_{(ab)} - \frac{1}{2} g_{ab} T^c_c + i *T_{ab}. \end{aligned}$$

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Цифры указывают номера задач, а не страниц. Цифра 0 после точки относится к вводной части главы, номер которой стоит перед точкой.

- Аберрация света или гравитационного поля 12.4  
 Автомобилист из Массачусетса 18.1  
 Аккреция газа в геометрии Шварцшильда 15.8  
 — — идеального 15.18  
 Аналитическое продолжение метрического тензора 6.9  
 Анизотропная космологическая модель 19.41  
 Антисимметризованное прямое произведение 3.24  
 Антисимметрия 3.14—3.18  
 Аффинная связность *см.* Коэффициенты связности  
 Аффинный параметр 7.0, 7.11
- Базис взаимный (дуальный) 8.0  
 — связанный со свободно падающим наблюдателем 8.0  
 Базисные векторы или 1-формы 8.1  
 Безындексные обозначения 7.20  
 Бивектор 3.29  
 Боровский радиус «Гравитационного атома» 12.19  
 Бусты 1.0  
 — действие на тензор Римана 15.14
- Вариационные методы 7.25, 21.0—21.7  
 Вариационный метод Палатини 21.4  
 Вектор времениподобный 1.0, 3.4  
 — единичный 1.10  
 — изотропный 1.0, 3.2—3.4  
 — касательный 7.0  
 — Киллинга 10.0 и далее, 14.11  
 — — в пространстве евклидовом 10.4  
 — — — Минковского 10.9  
 — — 2-сферы 10.1  
 — — для электромагнитного поля 10.16  
 — — и статичность 10.8  
 — — — 4-ускорение 10.14  
 — — как векторный потенциал 10.6  
 — ковариантный 8.0  
 — Поинтинга 4.0, 4.4  
 — пространственноподобный 1.0, 3.4  
 — сохраняющийся 3.35  
 — спина 11.3, 11.4, 11.6, 11.7
- Векторное поле, ортогональное гиперповерхности 7.23 и далее, 10.8  
 Векторный анализ (в 3-пространстве) 8.22, 8.23  
 Векторы Киллинга, вариационный принцип 10.6  
 — — и интегралы движения 10.10  
 — — — сохраняющиеся величины 10.11—10.13  
 — — коммутатор 10.3, 10.5  
 — — линейные комбинации 10.3  
 — — тождество 10.6, 10.7  
 Вес нагретого сосуда 12.7  
 Внешнее антисимметризованное произведение 3.24  
 Внешние дифференциальные формы 8.0  
 Внешний дифференциал 8.3, 8.5, 8.6, 8.24  
 «Внутреннее» решение Шварцшильда 16.12  
 Возможность гладкого сшивания метрик Фридмана и Шварцшильда 16.30  
 Вращение в космологических моделях 19.38, 19.40  
 — потока жидкости 5.18  
 Времениподобный интервал 3.1  
 Время собственное 1.0  
 Вселенная де Ситтера 19.30  
 — Казнера 19.41  
 — Леметра *см.* Вселенная Фридмана  
 — Фридмана 19.0  
 — — с преобладанием вещества 19.18  
 — — — излучения 19.18  
 — — температура 19.27, 19.28  
 — — яркость неба 19.21  
 — Эйнштейна 19.31, 19.32
- Встречные пучки 2.6  
 Вторая вязкость 14.10  
 Выталкивающая сила 16.2  
 Вязкая жидкость 5.30, 5.31
- Газ Бозе—Эйнштейна 5.34  
 — Максвелла—Больцмана 5.32—5.35  
 — Ферми—Дирака 5.24, 5.34  
 Гамильтониан заряженной частицы 14.19  
 Геодезическая 7.0, 7.4, 7.9

- изотропная 1.13
- уравнение 7.0, 7.10—7.12
- для черной дыры Керра 17.0
- Геодезическая прецессия 11.11
- Геодезические, расхождение 9.13, 9.14
- в плоском 2-пространстве 7.3
- — пространстве скоростей 7.15
- Геометризованные единицы 12.17
- Геометрия Шварцшильда 15.0 и далее
- Гигантские лягушки 1.24
- Гидростатическое равновесие 12.9, 12.10, 14.4, 14.5
- Гиперповерхность Коши 13.10
- Гирискосп 11.4, 11.10, 11.11
- Главные направления 9.34, 9.35
- Горизонт Киллингера 17.12
- черной дыры 17.0
- «Горячая» модель расширяющейся Вселенной 19.0
- Гравитационное излучение аксиально-симметричной системы 18.9
- Гравитационные волны 13.16, 18.0 и далее
- — сильные 18.22
- Гравитационный распад атома водорода 18.18
- Гравитоны 18.16—18.19
- Градиент 8.0
- Группа вращений 1.25, 10.1, 10.4
- Лоренца 1.25, 1.26, 1.28
  
- Движение заряженной частицы 4.10—4.14, 5.9
- «жесткое» 14.9
- частиц по геодезическим 7.12
- Дельта-символ Кронекера 3.19, 3.27, 3.28
- Динамика частицы 2.3, 2.4, 2.6—2.12, 2.14
- Доплеровское смещение 1.18, 1.19, 1.21, 1.22, 15.8, 20.9
- Дуальный поворот электромагнитного поля 4.20
- тензор 3.25, 3.26, 4.9
  
- Зависимость веса от напряжений 14.6
- светимость—красное смещение 19.10
- Задача Коши 13.10, 21.12
- Закон Кеплера 12.1, 17.4
- Ома 4.18
- Звезда вращающаяся 10.5, 16.0, 16.17—16.19, 16.22, 16.23
- двойная 18.2, 18.6, 18.7
- из газа Ферми 16.13
- коллапсирующая 16.25—16.31
- с однородным распределением плотности 16.12
- сферическая 16.0
- Зеркало 1.18, 1.19
- Знак скаляра кривизны 13.5
  
- Идеальная жидкость 5.20, 5.21, 14.3
- — в статической метрике 13.9
- Излучение 5.11—5.14 *см.* также Гравитационные волны
- абсолютно черного тела 5.13
- — — красное смещение потока 19.3
- Измерение расстояний в космологии 19.9, 19.24
- Изотропная кривая 1.13, 6.7
- — в метрике Робертсона—Уокера 19.12
- поверхность 8.8
- Изотропное пустое пространство — время 19.4
  
- Изотропность *см.* Однородность
- Изэнтропическое течение 5.20
- — идеальной жидкости 14.3
- Интеграл движения заряженной частицы 14.20
- Интегрирование по поверхности 8.9
- Интенсивность излучения 5.10
- Использование черной дыры как пресса для металлолома 17.2
  
- Калибровка лоренцевская 13.14, 13.15, 18.0
- поперечно-бесследовая 18.0
- Калибровочное преобразование 13.12, 13.14, 18.8
- Квазары 19.33
- Квантовые эффекты в черных дырах 17.20
- Кинематика частицы 2.5
- Кинетическая энергия 2.0
- Ковариантная производная *см.* Коэффициенты связности
- — определителя 7.8
- Ковариантное дифференцирование 7.0 и далее
- Ковариантные компоненты 4-вектора 1.0
- Коллапс *см.* Звезда коллапсирующая
- Коллапсирующая оболочка 21.11
- Коммутатор векторных полей 8.0
- производных 9.8—9.10
- Комптоновское рассеяние 2.1, 5.14
- обратное 2.2
- Координатные базисные векторы или 1-формы 8.0
- Координаты Буайе — Линдквиста 17.0
- гауссовы нормальные 8.25, 9.32, 9.33
- изотропные 15.13
- криволинейные 3.0
- Крускала 15.15
- Леметра 15.16
- циклические 7.13
- Шварцшильда 15.13
- Эддингтона—Финкельштейна 16.11
- Космический корабль 2.13, 7.15
- Космологическая постоянная 13.4, 19.0, 19.30—19.34
- Космология 19.0 и далее
- Коэффициенты связности 7.0, 7.4
- — в полярных координатах 7.2
- — — сферической метрике 8.27
- — диагональной метрики 7.6
- — метрических тензоров с одними и теми же геодезическими 8.26
- — симметрин 8.12
- — суть не тензоры 7.1, 8.11
- — тождества 7.7
- Красное смещение 8.28, 15.10, 19.0, 20.9
- Кривизна 9.0 и далее. *См.* также Тензор Римана и Тензор Вейля
- внешняя 9.0, 9.26—9.34
- главная 9.34
- 2-сферы 9.1
- средняя 9.31
  
- Линеаризованная теория тяготения 13.0, 13.13, 13.14, 13.17, 13.18, 13.20, 18.0
- — — гравитационное притяжение между световыми пучками 13.17
- — — плоские гравитационные волны 13.16
- Линеаризованные уравнения поля 13.15
- Линза, моделирующая отклонение света вблизи Солнца 20.6
- Лоренцевский буст 1.12, 1.27



- Магнитное поле прямой 4.1  
 Магнитный монополь 4.21  
 Малая группа 1.23  
 Масса инертная 5.17  
 — отрицательная 13.20  
 Мгновенная симметрия 21.12  
 Метрика Вайдья 16.11  
 — Керра 17.0 и далее  
 — конформное преобразование 6.7  
 — конформно-плоская 9.18, 9.27, 13.2  
 — пространства скоростей 6.8, 7.15  
 — Робертсона—Уокера 19.0, 19.5, 19.6  
 — — конформно-плоская форма 19.8  
 — — красное смещение 19.7  
 — статическая 10.8  
 — сферически-симметричная 6.10, 16.0 и далее  
 Метрический тензор 3.0, 3.8, 3.9, 6.0 и далее  
 — — евклидовой гиперсферы 6.2  
 — — картографических проекций 6.3, 6.4  
 — — определитель 3.9  
 — — плоского 2-пространства 6.1  
 — — пространства скоростей 6.8  
 Минимальное значение энергии частицы 10.15  
 Мировая линия наблюдателя 1.0  
 Момент количества движения 11.1, 11.3, 11.4, 11.6, 20.4  
 — — в метрике Шварцшильда 15.1  
 Мыльная пленка 9.31
- Наблюдатель с нулевым моментом количества движения 17.18  
 Напряженная среда 5.17  
 Некоординатный базис 8.2  
 Неоднозначная размерность метрического тензора 6.5  
 Ньютоновская космология 19.1  
 — теория тяготения 12.0, 12.8, 12.11—12.13
- Образование дейтерия во Вселенной Фридмана 19.29  
 Объем Вселенной Фридмана 19.23  
 Ограничения на компоненты поля 2.15  
 1-форма 8.0  
 Одновременность 1.24, 3.1  
 Однородность 19.15  
 — и изотропность 9.26, 19.4, 19.35  
 Определение компонент магнитного поля по результатам измерений 9.22  
 Орбиты в геометрии Шварцшильда 15.2—15.5, 15.7, 15.11  
 Ортонормированная система базисных векторов 8.0  
 Отклонение световых лучей 13.2, 20.1, 20.3—20.6
- Парадокс близнецов 1.11, 15.12  
 — Ольберса 19.21  
 Параметр быстроты 1.0  
 — замедления 19.0, 19.15, 19.22  
 Параметры Стокса для гравитационной волны 18.10  
 Первое начало термодинамики 5.19, 14.3  
 Перенос Ли 8.18—8.20  
 — параллельный 7.0, 7.19, 8.18—8.20  
 — на 2-сфере 7.16  
 — по замкнутому контуру 9.11  
 — Ферми-Уокера 7.0, 7.17—7.19, 8.18, 8.20, 11.4, 11.7
- Планковские единицы 12.18  
 Плотность в фазовом пространстве 3.34, 5.10  
 — импульса 5.0  
 — тока 4.0, 4.7  
 — энергии 5.0  
 — — электромагнитного поля 4.0  
 Поверхностный слой 21.8—21.11  
 Погружение в евклидово 3-пространство 15.15  
 Показатель адиабаты 5.23  
 — — газа Максвелла—Больцмана 5.32  
 — преломления статического изотропного пространства-времени 7.21  
 Полая сфера 16.4  
 Положение Солнца, определенное по гравиметру 12.4  
 Постоянная Хаббла 19.0  
 Потенциал гравитационного поля 12.0  
 Потеря устойчивости в политропных звездах 16.8  
 Поток энергии 5.16  
 — энтропии 5.27  
 Поперечное сечение светового пучка 3.5  
 Поперечный сдвиг в космологии 19.38—19.40  
 — — — потоке жидкости 5.18  
 — — — световом пучке 9.18  
 Правило «запятая переходит в точку с запятой» 14.0  
 Предел прочности веревки 5.6  
 — статичности черной дыры 17.0  
 — Чандрасекара 16.9  
 Предельное значение массы белых карликов см Предел Чандрасекара  
 — — — нейтронных звезд 16.9  
 Преобразования векторов 1.0, 3.0  
 — координат 3.8, 3.10  
 — Лоренца 1.2, 1.23  
 — — кажущаяся длина движущегося предмета 1.5  
 — — потока излучения 5.11  
 — — светового пучка 3.5  
 — — телесного угла 1.9  
 — — углов 1.7, 1.8  
 — — электромагнитного поля 4.5, 4.6  
 Прецессия геодезическая 11.11  
 — Земли 11.9  
 Приливные силы 12.0  
 Приливы сизигийные и квадратурные 12.2  
 — упругие 12.3  
 Принцип Маха 13.18  
 — Ферма 7.14  
 — эквивалентности 12.4, 14.14  
 Причинность 12.13  
 Проекция Меркатора 6.4  
 — стереографическая 6.3  
 — цилиндрическая 6.3  
 Произведение внешних дифференциальных форм 8.0, 8.4  
 Производная ковариантная см. Коэффициенты связности  
 — Ли 8.13—8.17, 8.21, 9.30  
 — — метрического тензора 10.2  
 — по направлению 7.0, 8.0  
 Производство энтропии 5.28  
 Пространственноподобная поверхность 8.8  
 Пространственноподобный интервал 3.1  
 Противоречивость линеаризованной теории тяготения 13.19  
 Прямое произведение 3.0, 3.11, 3.12  
 Псевдотензор энергии-импульса Ландау—Лифшица 13.11  
 Пуля во Вселенной Фридмана 19.19  
 Пьяный астроном 7.22

- Равноускоренно движущийся наблюдатель 1.17  
 Распад частиц 2.5, 2.10  
 Рассеяние 2.8, 2.9, 2.11  
 «Расхождение» мировых линий жидкости 5.18. См. также Вторая вязкость  
 расширение в космологии 19.38—19.40  
 Рекомбинация водорода 19.22, 19.25, 19.26  
 Реликтовое излучение 19.0  
 Релятивистская аэродинамическая труба 5.25  
 Релятивистские модели строения звезд 16.0 и далее  
 Риманова кривизна 2-поверхности 9.23, 9.24
- Самогравитирующая сферическая оболочка 16.14—16.16  
 Свертка 3.0  
 Связь определителя и полностью антисимметричного тензора 3.23  
 Символ Кристоффеля см. Коэффициенты связности 7.0, 8.0  
 Симметризация 3.14—3.18  
 Синхронизация часов 1.11, 1.17, 1.24  
 Система центра масс 2.11  
 Скаляр Риччи 9.0  
 Скалярное поле 21.5  
 — в геометрии Керра 17.16  
 — — — Шварцшильда 15.19  
 Скорость звука 5.22, 5.23  
 — в газе Ферми 5.24  
 Сложение скоростей 1.3, 1.4  
 Смещение перигелия 15.7, 20.7  
 Сохранение 4 импульса 2.0  
 — сопряженного циклической координате 7.13  
 — энергии в модели Фридмана 19.16  
 Спин поля с нулевой массой покоя 12.15, 12.16, 18.20, 18.21  
 Спирное представление группы Лоренца 1.25, 1.26, 1.28  
 Спиноры 21.0, 21.14—21.16  
 — отождествленные с 4-векторами 21.13  
 Плюсиутость Солнца 15.7
- Тахионы 1.6, 12.13  
 Тензор Вейля 9.0, 9.18  
 — конформный 9.0  
 — Максвелла 4.0  
 — метрический, аналитическое продолжение 6.9  
 — — ковариантно постоянный 7.5  
 — — конформно-плоский 9.0  
 — синхронный 8.25  
 — статический 10.8  
 — — порожденный идеальной жидкостью 13.9  
 — — стационарный 10.8  
 — — сферически-симметричный 6.10  
 — момента количества движения 11.2  
 — полностью антисимметричный 3.20—3.24, 3.28  
 — приведенного квадрупольного момента 18.0  
 — проекционный 6.6  
 — Римана 9.0  
 — — восстановление по результатам измерений 9.22  
 — — в линеаризованной теории тяготения 13.13  
 — — — пространстве размерности 1, 2 и 3 9.7
- — — —  $N$  9.2  
 — — 2-пространства Минковского 9.5  
 — — 2-сферы 9.4  
 — — действие бустов 15.14  
 — — для тора 9.6  
 — — изотропного пространства 9.25  
 — — конформно-плоской метрики 9.19  
 — — нулевой 9.17  
 — — плоского пространства-времени 9.17  
 — — плоской гравитационной волны 9.21  
 — — программа для вычисления на ЭВМ 9.3  
 — — симметрии 9.0  
 — — сферически-симметричной метрики 9.20  
 — — тождества 9.15  
 — Риччи 9.0  
 — с обратным следом 13.14  
 — Эйнштейна 9.16, 13.0  
 — электромагнитного поля 4.0, 4.8, 4.9  
 — энергии-импульса 5.0  
 — — вакуума 13.4  
 — — вращающегося стержня 5.7  
 — — вязкой жидкости 5.30  
 — — группы частиц 5.1  
 — — идеальной жидкости 5.3  
 — — изотропного газа 5.2  
 — — конденсатора 5.8  
 — — магнитного поля 5.4  
 — — ньютоновского гравитационного поля 12.8  
 — — отдельной частицы 14.1  
 — — потока тепла 5.26  
 — — растянутого стержня 5.5  
 — — системы с теплопроводностью 5.28  
 — — скалярного поля 14.13  
 — — скачком изменяющийся от нулевого значения 13.8  
 — — собственные векторы 5.16  
 — — электромагнитного поля 4.0, 4.15—4.17, 5.9, 5.30  
 Тензорная теорема вриала 5.15  
 Тензоры 3.0  
 Температура 5.13, 5.14  
 — в равноускоренной системе 5.29  
 — — статическом гравитационном поле 14.2  
 Теорема Биркгофа 16.3  
 — Гаусса—Бонне 17.19  
 — Стокса 8.10  
 — Фробениуса 7.23  
 — Хокинга 17.14, 17.15  
 — Шура 9.26  
 Теории тяготения, отличные от общей теории относительности 13.1—13.3 См. также Теория тяготения Бранса — Дикке  
 Теория тяготения Бранса — Дикке 13.8, 15.20, 16.5, 21.7  
 — — Лайтмана — Ли 17.21  
 — — Нордстрёма 13.2  
 Тепловое равновесие в равноускоренно движущейся системе 5.29  
 Тождества Бианки 9.15, 9.16  
 Томасова прецессия 11.7  
 Тонкие оболочки 21.0  
 Траектории световых лучей в геометрии Шварцшильда 15.6
- Увлечение инерциальных систем отсчета 13.18, 20.4  
 Угловая скорость лабораторной системы отсчета 14.12  
 Угол рассеяния 2.7, 2.14

- Уравнение Бернулли релятивистское 14.7, 14.8  
 — для силы Лоренца 4.0, 4.10—4.12, 4.19  
 — Киллинга 10.0, 10.2  
 — Оппенгеймера — Волкова 16  
 — Рейчаудхурн 14.10  
 — скалярного поля 14.13  
 — — — в искривленном пространстве 14.14  
 — Эйлера для идеальной жидкости 14.3  
 Уравнения Гаусса—Кодацци 9.32, 9.33, 9.35  
 — движения 5.0, 13.0, 14.0  
 — Максвелла 4.0, 4.8, 4.9, 14.15, 14.18, 21.6  
 — — в виде 2-формы 8.7  
 — — в искривленном пространстве 14.16, 14.17  
 — — конформная инвариантность 14.21  
 — Навье — Стокса 5.31  
 — Фридмана 19.13, 19.14, 19.16  
 — Эйнштейна 13.0  
 — — статические решения 19.35—19.37  
 Ускорение 1.0, 1.14—1.16, 2.13, 10.14, 14.12  
 Устойчивость конвективная 16.21
- Фотон, облетающий Вселенную Фридмана 19.20  
 Функция распределения релятивистского газа 5.34
- Циклотрон 2.14
- Черная дыра Керра — Ньюмана 17.0  
 — — Рейсснера — Нордстрема 17.0, 17.5, 17.17  
 Черные дыры 15.10, 15.11, 17.0 и далее  
 4-импульс 1.0, 1.20, 2.0  
 — фотона 1.0  
 4-скорость 1.0, 1.1  
 Число источников 19.11
- Эддингтоновский предел светимости 12.5  
 Эйнштейновское правило суммирования 1.0, 3.6, 3.7  
 Эксперимент Паунда — Ребки — Снайдера 13.2, 20.8  
 — Этвеша 20.8  
 Экспериментальная проверка теории относительности 20.0 и далее  
 Электромагнитное поле 4.0  
 — — дуальный поворот 4.20  
 — — инварианты 4.2—4.4  
 — — функция Грина 4.22  
 Электрон в замкнутом идеально проводящем сосуде 12.6  
 Элемент объема 3.30—3.32  
 — — в импульсном пространстве 3.33  
 Энергетическое условие слабое 5.6, 13.6  
 — — энергодоминантности 13.7  
 Энергия инжекции 16.22  
 Энтропия на бариион 19.0, 19.25, 19.26  
 Эргоповерхность 17.12  
 Эргосфера 17.0  
 Эффект Лензе — Тирринга 11.10, 11.11  
 — Мессбауэра 2.10  
 — Пойнтинга — Робертсона 5.12

## СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА .....		5
ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРОВ .....		7
ОБОЗНАЧЕНИЯ .....		10
	<b>Задачи</b>	<b>Решения</b>
1. КИНЕМАТИКА СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ .....	13	135
2. ДИНАМИКА СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ .....	21	158
3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ, ИНВАРИАНТЫ И ТЕНЗОРЫ В СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ .....	25	169
4. ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ .....	32	186
5. ВЕЩЕСТВО И ИЗЛУЧЕНИЕ .....	37	198
6. МЕТРИКА .....	46	222
7. КОВАРИАНТНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ .....	49	231
8. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ (НОВЫЕ ПОНЯТИЯ) .....	56	249
9. КРИВИЗНА .....	64	267
10. ВЕКТОРЫ КИЛЛИНГА И СИММЕТРИИ .....	72	293
11. МОМЕНТ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ .....	75	303
12. ФИЗИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ ГРАВИТАЦИИ .....	79	318
13. УРАВНЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ И ЛИНЕАРИЗОВАННАЯ ТЕОРИЯ .....	83	335
14. ФИЗИКА В ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ .....	89	354
15. ГЕОМЕТРИЯ ШВАРЦШИЛЬДА .....	94	370
16. СФЕРИЧЕСКАЯ СИММЕТРИЯ И РЕЛЯТИВИСТСКИЕ МОДЕЛИ СТРОЕНИЯ ЗВЕЗД .....	99	395
17. ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ .....	106	423
18. ГРАВИТАЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ .....	112	444
19. КОСМОЛОГИЯ .....	117	469
20. ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО ПРОВЕРКЕ ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ .....	127	505
21. РАЗНОЕ .....	130	517
22. ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ .....		531