Galilean transformations of tenzors

Преобразования галилеевых тензоров

Valery Timin

(19 December 2020)

Russia

This paper deals with the orthonormal transformation of the vectors and tensors of the 4-dimensional Galilean space. Such transformations are transformations of rotation and transition to a moving coordinate system. Formulas and matrices of these transformations are given.

The transition from one coordinate system to another, moving relative to the first, did long before the theory of relativity. The natural space for "transitions from one coordinate system to another" is the Galilean space. It is the space of classical mechanics. This paper focuses on the 4-dimensional interpretation of such transformations.

PS: added materials related to metric tensors in Galilean space.

В данной работе рассмотрены вопросы ортонормированного преобразования векторов и тензоров 4-мерного галилеева пространства. Такими преобразованиями являются преобразования поворота и перехода в движущуюся систему координат. Даны формулы и матрицы этих преобразований.

ЗЫ: добавлены материалы, связанные с метрическими тензорами в галилеевом пространстве.

Галилеевы преобразования векторов

Переход от одной системы координат к другой, движущейся относительно первой, делали задолго до появления теории относительности. Естественным пространством для "переходов от одной системы координат к другой" является галилеево пространство. Именно оно является пространством классической механики. В данной работе сделан упор на 4-мерной интерпретации таких преобразований.

Оглавление

1. Преобразования координат галилеева пространства

В тензорном 4–х мерном виде координаты и время ведут себя как контравариантные векторы и в общем случае преобразуются следующим образом:

$$q'^i = g^i{}_j q^j - q_{(0)}{}^i, \tag{1}$$

где $g^i{}_j$ – тензор произвольного линейного преобразования,

$q_{(0)}{}^i$ – смещение начала координат.

Галилеевы преобразования (даже со смещениями) представляют только часть преобразований (1):

$$\begin{cases} t' = t - t_{(0)}, \\ r'^i = \omega^i{}_j r^j - v^i{}_0 t - r_{(0)}{}^i, \end{cases} \tag{2}$$

Особенностью общих преобразований координат галилеева пространства является то, что координаты, строго говоря, не являются векторами. Хотя бы потому, что преобразованиями (1) и (2) любой координатный "вектор" q^i можно обнулить. Для этого достаточно перейти (сместить начало координат) в точку с этими координатами. Но: любой связанный вектор $A = (q_{(2)}, q_{(1)})$ будет представлять собой вектор, т.к. любые смещения при этом компенсируются.

При отсутствии смещений координат все упрощается:

$$q'^i = g^i{}_j q^j, \tag{1*}$$

$$\begin{cases} t' = t, \\ r'^i = \omega^i{}_j r^j - v^i{}_0 t, \end{cases} \tag{2*}$$

где $v^i{}_0$ – векторный параметр галилеева преобразования, физически соответствующая скорости новой с.о. в старой – с учетом знака этой скорости,

$\omega^i{}_j$ – тензор ортонормированного поворота пространственного слоя новой с.о. в старой.

В этом случае (при отсутствии смещений) уже любой координатный вектор q^i будет реальным вектором и при преобразованиях координат гарантированно не обнулится.

При смешанном матрично-тензорном (далее – матричном) способе представления тензоров вектор будет соответствовать матрице–столбцу, тензор 2–го ранга – квадратной матрице, где строки будут соответствовать 1–му индексу, столбцы – 2–му индексу. Матрица преобразования координат $g^i{}_j$ (2)* будет определяться следующим выражением:

$$g^i_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v^i_0 & \omega^i_j \end{pmatrix}. \tag{3}$$

где $v^i{}_0 \sim v^i$ – скорость новой системы отсчета относительно старой. Здесь $v^i{}_0$, v^i (а также далее еще $v^i{}_{(0)}$) численно соответствуют друг другу, поэтому в дальнейшем изложении мы в записях подобного вида будем иметь в виду, что при параметре v^i (v^j) по контексту может иметься еще ковариантный индекс со значением 0.

Таким образом, преобразование координат с помощью тензора (2)* можно записать в матричном виде:

$$q'^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v^i_0 & \omega^i_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^0 \\ r^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^0 \\ \omega^i_j r^j - v^i_0 1^0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Из этих преобразований видно, что в координатах при наличий только галилеевых преобразований изменяется только ее пространственная часть, а временная часть не изменяется.

2. Преобразования контравариантных векторных параметров скорости и ускорения

Координаты q^i не являются единственными представителями класса векторов галилеева пространства. Векторными параметрами галилеева пространства являются (с ограничением, описанным выше) также скорость и ускорение. Рассмотрим галилеевы преобразования скорости и ускорения в дифференциальной и тензорной формах.

Для скорости в дифференциальной форме имеем:

$$\frac{dq'^i}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} t \\ r^i - v^i_0 t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} t \\ \frac{d}{dt}(r^i - v^i_0 t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ v^i - v^i_{(0)} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Отдельно заметим, что $v_0 = dt/dt \equiv 1$.

Уравнение (19) фактически описывает закон сложения (или вычитания?) скоростей. Применив 4–х мерные преобразования в тензорной форме к вектору скорости непосредственно, получим то же самое:

$$v'^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v^i_0 & \delta^i_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^0 \\ v^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^0 \\ v^i - v^i_0 1^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ v^i - v^i_{(0)} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Кроме преобразования равномерного прямолинейного движения новой с.о. возможен также поворот системы координат. При отсутствии евклидовой составляющей преобразования координат и наличии только поворота пространственная часть вектора координаты, скорости и ускорения преобразуются как тензоры, а временная составляющая остается прежней. Например, для скорости:

$$v'^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega^i_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^0 \\ v^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^0 \\ \omega^i_j v^j \end{pmatrix}. \tag{6}$$

При наличии обеих видов (поворотов и галилеевых) преобразований координат результат будет следующий:

$$v'^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v_0^i & \omega_j^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^0 \\ v^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^0 \\ \omega_j^i v^j - v_0^i 1^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_j^i v^j - v_{(0)}^i \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Для вектора ускорения аналогично. Для ускорения в дифференциальной форме имеем:

$$\frac{d^2 q'^i}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} t \\ r^i - v_0^i t \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 1 \\ v^i - v_{(0)}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ w^j \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Заметим: $w_0 = d^2t/dt^2 = dv/dt \equiv 0$. Применим 4–х мерные преобразования в тензорной форме к вектору ускорения:

$$w'^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v_0^i & \delta_j^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ w^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_j^i w^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ w^j \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Из вида этих преобразований видно, что координата, скорость и ускорение при 4–х мерных 3-мерных евклидовых преобразованиях координат ведут себя одинаково – как контравариантные тензорные величины (векторы), и нет необходимости делить их на векторы разной природы при преобразованиях координат в четырехмерном виде, но при этом $v^0 \equiv 1$, $w^0 \equiv 0$.

Запишем в общем виде преобразования для произвольного контравариантного вектора евклидова пространства A^i:

$$A'^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v_0^i & \omega_j^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^0 \\ A^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^0 \\ -v_0^i A^0 + \omega_j^i A^j \end{pmatrix}. \tag{10}$$

В контравариантном векторе при наличий только 3-мерных евклидовых преобразований изменяется только пространственная часть вектора, временная часть не изменяется.

$$A'^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v_0^i & \delta_j^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^0 \\ A^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^0 \\ -v_0^i A^0 + A^j \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Если временная часть равна 0, то вектор только поворачивается (25):

$$A'^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v_0^i & \omega_j^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ A^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_j^i A^j \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Если временная часть вектора нулевая и нет поворота с.о., то при любой скорости новой с.о. вектор вообще не изменяется:

$$A'^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v_0^i & \delta_j^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ A^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_j^i A^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ A^i \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Сопряженные векторы галилеева пространства

3. Рассмотрим скалярные произведения каждой из частей преобразованных векторов A'_i и B'^j:

$$A'_i = (A_0 + v_0{}^i A_i, A_i),$$

$$B'^j = (B^0, B^i - v^i{}_0 B^0).$$

Произведение временных частей:

$$A'_0 B'^0 = (A_0 + v_0{}^i A_i)B^0 = A_0 B^0 + v_0{}^i A_i B^0. \quad (14)$$

Для пространственной части:

$$A'_i B'^i = A_i(B^i - v^i{}_0 B^0) = A_i B^i - A_i v^i{}_0 B^0. \quad (15)$$

Найдем сумму этих частей и сравним ее с произведением AB:

$$\begin{aligned} &A'B' = \\ &= ((A_0 + A_j v_0{}^j)B^0 + A_j(B^j - B^0 v_0{}^j)) = \\ &= (A_0 B^0 + A_j v_0{}^j B^0 + A_j B^j - A_j v_0{}^j B^0) = \\ &= (A_0 B^0 + A_j B^j) = \\ &= A'_0 B'^0 + A'_i B'^i. \end{aligned} \quad (16)$$

т.е. для любых двух векторов A_i и B^i их прямое "скалярное" произведение является инвариантом при галилеевых преобразованиях. Это следовало ожидать из тензорных свойств векторов и тензорного характера галилеевых преобразований координат (см. далее). Это верно также при любых значениях метрического тензора классической механики, потому что оно относится непосредственно к любым контравариантным и ковариантным векторам.

Из него невозможно сделать какие либо выводы относительно 4–метрики пространства: формулы (22) не используют какую либо определенную метрику 4-мерного галилеева пространства.

Соответствующие друг другу контравариантный и ковариантный векторы называются сопряженными. Именно через сопряженные векторы определяется скалярное произведение векторов:

$$A \cdot B = A^i B_i. \quad (17)$$

В галилеевом пространстве такое скалярное произведение двух векторов можно определить в соответствии с формулами (17).

В тензорной алгебре сопряженный вектор может быть получен операцией опускания индексов для контравариантных и операцией поднятия индексов для ковариантных векторов. Операция поднятия-опускания индексов осуществляется с помощью невырожденного, а в ортонормированном метрическом пространстве еще и диагонального метрического тензора s_{ij} и s^{ij}:

$$\begin{aligned} &s_{ij}A^j = A_j \text{ – опускание индекса,} \\ &s^{ij}A_j = A^j \text{ – поднятие индекса.} \end{aligned} \quad (18)$$

Но в галилеевом пространстве такого общепринятого тензора не имеется. Поэтому операция скалярного произведения возможна только между уже определенными каким либо образом парами контра- и ковариантных векторов. Следовательно, невозможно стандартно определить сопряженный к уже известному вектор. Но все же

3. Преобразования контравариантных векторных параметров

Векторными параметрами галилеева пространства являются, кроме координат (с ограничением, описанным выше), также скорость и ускорение. Рассмотрим галилеевы преобразования скорости и ускорения в дифференциальной и тензорной формах.

Для скорости в дифференциальной форме имеем:

$$\frac{dq'^i}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} t \\ r^i - v_0^i t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ v^i - v_{(0)}^i \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Отдельно заметим, что $v_0 = dt/dt \equiv 1$.

Уравнение (19) фактически описывает закон сложения (или вычитания?) скоростей. Применив 4–х мерные преобразования в тензорной форме к вектору скорости непосредственно, получим то же самое:

$$v'^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v_0^i & \delta_j^i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^0 \\ v^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^0 \\ v^i - v_0^i 1^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ v^i - v_{(0)}^i \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Кроме преобразования равномерного прямолинейного движения новой с.о. возможен также поворот системы координат. При отсутствии галилеевой составляющей преобразования координат и наличии только поворота пространственная часть вектора координаты, скорости и ускорения преобразуются как тензоры, а временная составляющая остается прежней. Например, для скорости:

$$v'^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega_j^i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^0 \\ v^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^0 \\ \omega_j^i v^j \end{pmatrix}. \tag{21}$$

При наличии обеих видов преобразований результат будет следующий:

$$v'^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v_0^i & \omega_j^i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^0 \\ v^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^0 \\ \omega_j^i v^j - v_0^i 1^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_j^i v^j - v_{(0)}^i \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Для вектора ускорения аналогично. Для ускорения в дифференциальной форме имеем:

$$\frac{d^2q'^i}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} t \\ r^i - v_0^i t \end{pmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} 1 \\ v^i - v_{(0)}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ w^j \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Заметим: $w_0 = d^2t/dt^2 = dv/dt \equiv 0$. Применим 4–х мерные преобразования в тензорной форме к вектору ускорения:

$$w'^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v_0^i & \delta_j^i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ w^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_j^i w^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ w^j \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Из вида этих преобразований видно, что координата, скорость и ускорение при 4–х мерных галилеевых преобразованиях координат ведут себя одинаково – как контравариантные тензорные величины (векторы), и нет необходимости делить их на векторы разной природы при преобразованиях координат в четырехмерном виде, но при этом $v^0 \equiv 1$, $w^0 \equiv 0$.

4. Преобразования произвольных контравариантных векторов галилеева пространства

Запишем в общем виде преобразования для произвольного контравариантного вектора галилеева пространства A^i по аналогии с преобразованиями координат:

$$A'^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v_0^i & \omega_j^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^0 \\ A^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^0 \\ -v_0^i A^0 + \omega_j^i A^j \end{pmatrix}. \tag{25}$$

В контравариантном векторе при наличий только галилеевых преобразований изменяется только пространственная часть вектора, временная часть не изменяется.

$$A'^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v_0^i & \delta_j^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^0 \\ A^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^0 \\ -v_0^i A^0 + A^j \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Если временная часть равна 0, то вектор только поворачивается (25):

$$A'^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v_0^i & \omega_j^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ A^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_j^i A^j \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Если временная часть вектора нулевая и нет поворота с.о., то при любой скорости новой с.о. вектор вообще не изменяется:

$$A'^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v_0^i & \delta_j^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ A^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_j^i A^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ A^i \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Хочу отметить, что преобразования (25) … (28) не столь уж и бесспорны. В классической механике, бесспорно использующей галилеево пространство в качестве модели пространства, в которой происходят все физические события, и координаты, в т.ч. и скорости и ускорения, преобразуются по законам, описанным выше, то другие – "материальные" – объекты, которые считаются векторами и тензорами (чаще – как будто бы "скалярные", но не только), преобразуются совсем не так, как описано выше. Они преобразуются не как 4-мерные тензорные объекты галилеева пространства. Можно сказать – преобразуются пор законам преобразования "материальных" параметров "материального" пространства. Именно поэтому ньютонову механику невозможно втиснуть в галилееву 4-мерную тензорную парадигму. За исключением пространственно-временных параметров – координаты, скорости, ускорения.

5. Обоснование получения преобразования ковариантных векторных параметров

Для получения этой формулы в качестве примера рассмотрим, как ведет себя градиентное поле $A = \partial\varphi(x,t)/\partial q = \{\partial\varphi/\partial t,\ \partial\varphi/\partial x\}$ при галилеевых преобразованиях системы координат. Пусть новая система координат движется в направлении оси x со скоростью v_x. Тогда:

$$\begin{gathered} A'_x = \frac{\partial\varphi'}{\partial x'} = \\ = \frac{\varphi(x' + v^x dt + dx, t') - \varphi(x' + v^x dt, t')}{x' + v^x dt + dx - (x' + v^x dt)} = \\ = \frac{\varphi(x' + v^x dt + dx, t') - \varphi(x' + v^x dt, t')}{dx} = \end{gathered} \tag{29}$$

$$= \frac{\varphi(x' + v^x dt, t') + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx - \varphi(x' + v^x dt, t')}{dx} =$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = A_x.$$

т.е. пространственная часть градиентного поля не меняется. Для временной составляющей:

$$\begin{gathered} A'_0 = \frac{\partial \varphi'}{\partial t'} = \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = \\ = \frac{\varphi(x' + v_0 dt, t' + dt) - \varphi(x', t')}{dt} = \\ = \frac{\varphi(x', t') + \frac{\partial \varphi}{\partial x} v_0 dt + \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt - \varphi(x', t')}{dt} = \\ = \frac{\partial \varphi}{\partial x} v_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = A_0 + v^x A_x. \end{gathered} \tag{30}$$

т.е. временная часть градиентного поля изменяется. В векторной форме формула преобразования градиента скалярной функции будет следующей:

$$\operatorname{grad} \varphi' = \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial t'}, \frac{\partial \varphi'}{\partial x'} \right) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v_0^x \frac{\partial \varphi'}{\partial r^i}, \frac{\partial \varphi'}{\partial r^i} \right). \tag{31}$$

В тензорно-матричном виде это запишем в виде:

$$\operatorname{grad} \varphi' = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v_0^x \frac{\partial \varphi}{\partial r^i}, \frac{\partial \varphi}{\partial r^i} \right) = \begin{pmatrix} 1 & v_0^x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial t} & \frac{\partial \varphi}{\partial r^i} \end{pmatrix}. \tag{32}$$

При наличии еще и поворота с.о.:

$$\operatorname{grad} \varphi' = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v_0^x \frac{\partial \varphi}{\partial r^i}, \frac{\partial \varphi}{\partial r^i} \right) = \begin{pmatrix} 1 & v_0^x \\ 0 & \omega_i^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial t} & \frac{\partial \varphi}{\partial r^j} \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Матрица преобразования g_i^j (32) и (33) отличается от случая преобразования контравариантных векторов тем, что она подверглась диагональному переворачиванию с изменением знаков элементов g_0^j: с $-v_0^j$ поменялась на $+ v_0^j$. Это соответствует поднятию ковариантных и опусканию контравариантных индексов соответствующего тензора: при этой операции временные элементы с индексом 0 не изменяют своего знака, а с пространственными индексами изменяют свой знак.

Обобщая формулу преобразования градиента скалярной функции на любые вектора, имеем:

$$A'_i = \begin{pmatrix} 1 & v_0^j \\ 0 & \omega_i^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 + v_0^j A_j \\ \omega_i^j A_j \end{pmatrix}. \tag{34}$$

В ковариантном векторе при наличий только галилеевых преобразований изменяется только временная часть вектора, пространственная часть не изменяется. Если пространственная часть равна 0, то вектор не изменяется:

$$A'_i = \begin{pmatrix} 1 & v_0^j \\ 0 & \omega_i^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Элементы $g^i{}_j$ и $g_i{}^j$ тензора также численно совпадают между собой. Это связано с тем, что вектора A^i и A_i должны поворачиваться в одну и ту же сторону, с тем, чтобы их скалярное произведение было равно единице.

6. Некоторые следствия и выводы по галилеевым преобразованиям векторов

Преобразование контравариантного вектора A_i осуществляется по формуле:

$$A'^i = v_j^i A'^i;$$
$$v_j^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v_0^i & \omega_j^i \end{pmatrix} = G_u. \quad (36)$$

Преобразование ковариантного вектора B_i осуществляется по формуле:

$$B'_i = v_i^j B_j;$$
$$v_i^j = \begin{pmatrix} 1 & v_0^j \\ 0 & \omega_i^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ 0 \end{pmatrix} = G_d. \quad (37)$$

1. Из анализа выражения преобразований векторов видно, что в ковариантном векторе при наличий только галилеевых преобразований изменяется только временная часть вектора A_t, пространственная часть A_r не изменяется. Если пространственная часть равна 0, то вектор не изменяется. В контравариантном векторе при наличий только галилеевых преобразований изменяется только пространственная часть вектора, временная часть не изменяется. Если временная часть равна 0, то вектор не изменяется.

2. Из этих выражений также видно, что значения ковариантного и контравариантного векторов классической механики должны отличаться друг от друга своими значениями, потому что преобразуются по разным выражениям с разными знаками приращения при разных частях выражения. В результате таких преобразований даже можно обнулить временную часть ковариантного вектора и пространственную часть контравариантного вектора, но нельзя обнулить весь вектор.

Метрики галилеева пространства

В метрическом пространстве возможны четыре "метрики".

1. Инвариантная не изотропная абсолютная метрика "промежуток времени":

$$d\tau = dt. \quad (38)$$

2. Инвариантная изотропная абсолютная метрика "промежуток времени":

$$d\tau = \sqrt{dt_0 dt^0}. \quad (39)$$

3. Инвариантная пространственная метрика "расстояние" на "плоскости" t = const:

$$dl = \sqrt{dr_i dr^i} \colon dr_i = dr^i \tag{40}$$

И четвертая метрика, через которую можно определить "сопряжение" векторов:

Сопряженные векторы АИСО галилеева пространства

4. Инвариантная метрика "интервал" в выделенной АИСО:

$$\begin{gathered} ds = \sqrt{dt_0 dt^0 - dr_i dr^i} \colon dr_i = dr^i \rightarrow \\ ds = \sqrt{dt_0 dt^0 + dr_i dr^i} \colon dr_i = -dr^i. \end{gathered} \tag{41}$$

Или в тензорной форме:

$$\begin{gathered} g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0_{0j} \\ 0_{i0} & -\delta_{ij} \coloneqq \begin{Bmatrix} -1 \colon i = j \\ 0 \colon i \neq j \end{Bmatrix} \end{pmatrix}, \\ ds^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0_{0j} \\ 0_{i0} & -\delta_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dt \\ dr^i \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{42}$$

См. также (74), (75) – с т.з. ИСО (учитывающие возможное наличие ИСО).

Преобразования галилеевых тензоров ранга 2

Переход от одной системы координат к другой, движущейся относительно первой, делали задолго до появления теории относительности. Естественным пространством для "переходов от одной системы координат к другой" является галилеево пространство. Именно оно являлось первым рассматриваемым типом пространства как модели реального физического пространства. И именно оно является пространством классической механики. В данной работе сделан упор на 4-мерной интерпретации таких преобразований.

Рассмотрим галилеевы преобразования тензоров ранга 2 как произведения преобразованных соответствующих типов (ковариантного или контравариантного) векторов A_i, A^i, B_j или B^j:

$$\begin{gathered} A'^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v^i{}_0 & \omega^i{}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^0 \\ A^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^0 \\ \omega^i{}_n A^n - v^i{}_0 A^0 \end{pmatrix}. \\ A'_i = \begin{pmatrix} 1 & v_0{}^n \\ 0 & \omega_i{}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 + v_0{}^n A_n \\ \omega_i{}^n A_n \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{43}$$

$$\begin{gathered} B'^j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v^j{}_0 & \omega^j{}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^0 \\ B^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^0 \\ \omega^j{}_m B^m - v^j{}_0 B^0 \end{pmatrix}. \\ B'_j = \begin{pmatrix} 1 & v_0{}^m \\ 0 & \omega_j{}^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 \\ B_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0 + v_0{}^m B_m \\ \omega_j{}^m B_m \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{44}$$

7. Преобразования контравариантных тензоров ранга 2

Проведем это преобразование как произведение двух преобразованных контравариантных векторов – A^i и B^j . В тензорных обозначениях контравариантный тензор ранга 2 $C^{ij} = A^i B^j$ при смене системы отсчета преобразуется следующим образом:

$$C'^{ij} \Leftrightarrow (g^i{}_n A^n)\,(g^j{}_m B^m) = A'^i B'^j \to C'^{ij}. \tag{45}$$

И уже затем произведем ее приведение к преобразованию тензора C^{ij} ранга 2. Пусть

$$\begin{gathered} A'^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v^i{}_0 & \omega^i{}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^0 \\ A^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^0 \\ \omega^i{}_n A^n - v^i{}_0 A^0 \end{pmatrix}. \\ B'^j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v^j{}_0 & \omega^j{}_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B^0 \\ B^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^0 \\ \omega^j{}_m B^m - v^j{}_0 B^0 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{46}$$

Умножим эти два вектора друг на друга:

$$\begin{gathered} A'^i B'^j = \begin{pmatrix} A^0 \\ \omega^i{}_n A^n - v^i{}_0 A^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^0 & \omega^j{}_m B^m - v^j{}_0 B^0 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} A^0 B^0 & A^0\left(\omega^j{}_m B^m - v^j{}_0 B^0\right) \\ \left(\omega^i{}_n A^n - v^i{}_0 A^0\right) B^0 & \left(\omega^i{}_n A^n - v^i{}_0 A^0\right)\left(\omega^j{}_m B^m - v^j{}_0 B^0\right) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} A^0 B^0 & A^0 \omega^j{}_n B^m - A^0 v^j{}_0 B^0 \\ \omega^i{}_n A^n B^0 - v^i{}_0 A^0 B^0 & \omega^i{}_n A^n \omega^j{}_m B^m - \omega^i{}_n A^n v^j{}_0 B^0 + v^i{}_0 A^0 v^j{}_0 B^0 - v^i{}_0 A^0 \omega^j{}_m B^m \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{47}$$

Переведем этот результат по аналогии на преобразование контравариантного тензора:

$$C'^{ij} = \begin{pmatrix} A^{00} & \omega^j{}_n A^{0m} - v^j{}_0 A^{00} \\ \omega^i{}_n A^{n0} - v^i{}_0 A^{00} & \omega^i{}_n \omega^j{}_m A^{nm} - \left(\omega^i{}_n v^j{}_0 A^{n0} + v^i{}_0 \omega^j{}_n A^{0m}\right) + v^i{}_0 v^j{}_0 A^{00} \end{pmatrix}. \tag{48}$$

Из (48) видно, что "временная" часть тензора A^{00} при ГПТК не изменяется. При ограничении преобразований очень малыми скоростями: $v^i_0 = v^j_0 << 1$, преобразование (48) запишется в более упрощенном виде:

$$C'^{ij} = \begin{pmatrix} A^{00} & \omega^j{}_n A^{0m} - v^j{}_0 A^{00} \\ \omega^i{}_n A^{n0} - v^i{}_0 A^{00} & \omega^i{}_n \omega^j{}_m A^{nm} - \omega^i{}_n v^j{}_0 A^{n0} - v^i{}_0 \omega^j{}_n A^{0m} \end{pmatrix}. \tag{49}$$

Если нет поворота с.о., то преобразование еще упростится:

$$C'^{ij} = \begin{pmatrix} A^{00} & A^{0j} - v^j{}_0 A^{00} \\ A^{i0} - v^i{}_0 A^{00} & A^{ij} - \left(v^j{}_0 A^{i0} + v^i{}_0 A^{0j}\right) + v^i{}_0 v^j{}_0 A^{00} \end{pmatrix}. \tag{50}$$

При антисимметричной смешанной части формула еще более упрощается:

$$C'^{ij} = \begin{pmatrix} A^{00} & A^{0j} - v^j{}_0 A^{00} \\ A^{i0} - v^i{}_0 A^{00} & A^{ij} + v^i{}_0 v^j{}_0 A^{00} \end{pmatrix}. \tag{51}$$

В общем случае насчет галилеева преобразования контравариантного тензора можно сказать, что она не теряет свойство симметричности и/или антисимметричности.

При наличии только вращения пространственных координат ($v^i_0 = 0$) пространственно-временные (смешанные) элементы получают одинарное вращение, а пространственная часть тензора получает двойное вращение (в отличие от одинарного вращения вектора):

$$C'^{ij} = \begin{pmatrix} A^{00} & \omega^j{}_n A^{0m} \\ \omega^j{}_n A^{n0} & \omega^i{}_n \omega^j{}_m A^{nm} \end{pmatrix}. \tag{52}$$

Следствия.

1). Пространственный тензор (в т.ч. метрический) сохраняет свою структуру:

$$A'^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A^{ij} \end{pmatrix} \to A'_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A^{ij} \end{pmatrix}. \tag{53}$$

2). Временной тензор (в т.ч. метрический) существенно изменяется:

$$A^{ij} = \begin{pmatrix} A^{00} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to g'_{ij} = \begin{pmatrix} A^{00} & -v^j{}_0 A^{00} \\ -v^i{}_0 A^{00} & v^i{}_0 v^j{}_0 A^{00} \end{pmatrix}. \tag{54}$$

При ограничении преобразований очень малыми скоростями: $v^i_0 = v^j_0 << 1$, преобразование **Ошибка! Источник ссылки не найден.** запишется в несколько упрощенном виде:

$$A^{ij} = \begin{pmatrix} A^{00} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to A'_{ij} = \begin{pmatrix} A^{00} & -v^j{}_0 A^{00} \\ -v^i{}_0 A^{00} & 0 \end{pmatrix}. \tag{55}$$

3). Единичный диагональный ковариантный тензор A^{ij} также не сохраняет свою структуру:

$$A'^{ij} = \begin{pmatrix} A^{00} & -v^j{}_0 A^{00} \\ -v^i{}_0 A^{00} & A^{ij} + v^i{}_0 v^j{}_0 A^{00} \end{pmatrix}.$$
$$E'^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -v^j{}_0 1^{00} \\ -v^i{}_0 & \delta^{ij} + v^i{}_0 v^j{}_0 1^{00} \end{pmatrix}. \tag{56}$$

А это означает, что в движущейся с.о. в галиеевом пространстве евклидова и псевдометрики, определенные в одной из ИСО – эквиваленте АСО – изменяют значения своих элементов. Но это не означает переход в не ортонормированную с.о. из изначально ортонормированной с.о. Это всего лишь преобразование определенного "единичного диагонального" тензора:

$$E'^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -v^j{}_0 1^0 \\ -v^i{}_0 & \delta^{ij} + v^i v^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -v^j{}_{(0)} \\ -v^i{}_0 & \delta^{ij} + v^i v^j \end{pmatrix}. \tag{57}$$

4). Псевдоединичный диагональный ковариантный тензор также не сохраняет свою структуру, кроме своей симметрии:

$$E'^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -v^j{}_0 1^{00} \\ -v^i{}_0 & -\delta^{ij} + v^i{}_0 v^j{}_0 1^{00} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -v^j{}_{(0)} \\ -v^i{}_0 & -\delta^{ij} + v^i v^j \end{pmatrix}. \tag{58}$$

А это означает, что в движущейся с.о. в галиеевом пространстве псевдометрика, определенная в одной из ИСО – эквиваленте АСО – изменяет значения своих элементов. Замечание то же.

Тензор (58) выполняет роль специального контравариантного псевдометрического тензора. На основе этого тензора в ИСО галилеева АИСО возможно получить операцию поднятия (опускания) индекса у вектора.

$$A^i = \begin{pmatrix} 1 & -v^j{}_{(0)} \\ -v^i{}_0 & -\delta^{ij} + v^i v^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 - v^j{}_{(0)} A_j \\ -v^{i0} A_0 - \left(\delta^{ij} - v^i v^j\right) A_j \end{pmatrix}. \tag{59}$$

(см. также (74) - (76)).

8. Преобразования ковариантных тензоров ранга 2

В тензорных обозначениях контравариантный тензор ранга 2 A_{ij} при смене системы отсчета преобразуется следующим образом:

$$C'_{i\,j} \Leftrightarrow (g_i{}^n A_n)\,(g_i{}^m B_m) \;= A'_i B'_j \rightarrow C'_{i\,j}. \tag{60}$$

Проведем это преобразование как произведение двух ковариантных векторов:

$$A'_i = \begin{pmatrix} 1 & v_0{}^n \\ 0 & \omega_i{}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 + v_0{}^n A_n \\ \omega_i{}^n A_n \end{pmatrix}.$$
$$B'_j = \begin{pmatrix} 1 & v_0{}^m \\ 0 & \omega_j{}^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 \\ B_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0 + v_0{}^m B_m \\ \omega_j{}^m B_m \end{pmatrix}. \tag{61}$$

Здесь $v_0{}^n = v_0{}^m$ численно равен скорости v^i ИСО. Умножим эти два вектора друг на друга:

$$A'_i B'_j = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 & B_m \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} A_0 + v_0{}^n A_n \\ \omega_i{}^n A_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 + v_0{}^m B_m & \omega^m{}_j B_m \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} (A_0 + v_0{}^n A_n)(B_0 + v_0{}^m B_m) & (A_0 + v_0{}^n A_n)\omega_j{}^m B_m \\ \omega_i{}^n A_n (B_0 + v_0{}^m B_m) & \omega_i{}^n A_n \omega_j{}^m B_m \end{pmatrix} = \tag{62}$$
$$= \begin{pmatrix} A_0 B_0 + v_0{}^n A_n B_0 + A_0 v_0{}^m B_m + v_0{}^n A_n v_0{}^m B_m & A_0 \omega_j{}^m B_j + v_0{}^n A_n \omega_j{}^m B_m \\ \omega_i{}^n A_n B_0 + \omega_i{}^n A_n v_0{}^m B_m & \omega_i{}^n A_n \omega_j{}^m B_m \end{pmatrix} =$$

Переведем этот результат по аналогии на преобразование ковариантного тензора:

$$C'_{ij} = \begin{pmatrix} A_{00} + v_0{}^n A_{n0} + v_0{}^m A_{0m} + v_0{}^n v_0{}^m A_{nm} & \omega_j{}^m A_{0m} + v_0{}^n \omega_j{}^m A_{nm} \\ \omega_i{}^n A_{n0} + \omega_i{}^n v_0{}^m A_{nm} & \omega_i{}^n \omega_j{}^m A_{nm} \end{pmatrix}. \tag{63}$$

При ограничении преобразований очень малыми скоростями: $v_0{}^i = v_0{}^j << 1$, преобразование (63) запишется в несколько упрощенном виде:

$$C'_{ij} = \begin{pmatrix} A_{00} + v_0{}^n A_{n0} + v_0{}^m A_{0m} & \omega_j{}^m A_{0m} + v_0{}^n \omega_j{}^m A_{nm} \\ \omega_i{}^n A_{n0} + \omega_i{}^n v_0{}^m A_{nm} & \omega_i{}^n \omega_j{}^m A_{nm} \end{pmatrix}. \tag{64}$$

Если нет поворота с.о., то преобразование еще упростится:

$$C'_{ij} = \begin{pmatrix} A_{00} + (v_0{}^n A_{n0} + v_0{}^m A_{0m}) + v_0{}^n v_0{}^m A_{nm} & A_{0j} + v_0{}^n A_{nj} \\ A_{i0} + v_0{}^m A_{im} & A_{ij} \end{pmatrix}. \tag{65}$$

Из (65) видно, что пространственная часть A_{ij} тензора при ГПТК без поворота не изменяется, а остальные изменяются.

При наличии только вращения пространственных координат ($v^i_0 = 0$) пространственно-временные (смешанные) элементы получают одинарное вращение, а пространственная часть тензора получает двойное вращение:

$$C'_{ij} = \begin{pmatrix} A_{00} & \omega_j{}^m A_{0m} \\ \omega_i{}^n A_{n0} & \omega_i{}^n \omega_j{}^m A_{nm} \end{pmatrix}. \tag{66}$$

При антисимметричной смешанной части формула упрощается:

$$C'_{ij} = \begin{pmatrix} A_{00} + v_0{}^n v_0{}^m A_{nm} & A_{0j} + v_0{}^n A_{nj} \\ A_{i0} + v_0{}^m A_{im} & A_{ij} \end{pmatrix}. \tag{67}$$

В общем случае насчет галилеева преобразования ковариантного тензора можно сказать, что она не теряет свойство симметричности и/или антисимметричности.

Следствия:

1). Метрический и любой чисто "временной" тензор не изменяются:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{00} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow g'_{ij} = \begin{pmatrix} g_{00} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{68}$$

2). Пространственный тензор не сохраняет свою структуру:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{ij} \end{pmatrix} \rightarrow A'_{ij} = \begin{pmatrix} v_0{}^n v_0{}^m A_{nm} & v_0{}^n A_{nj} \\ v_0{}^m A_{im} & A_{ij} \end{pmatrix}. \tag{69}$$

При ограничении преобразований очень малыми скоростями: $v_0{}^i = v_0{}^j << 1$, преобразование (69) запишется в несколько упрощенном виде:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{ij} \end{pmatrix} \rightarrow A'_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & v_0{}^n A_{nj} \\ v_0{}^m A_{im} & A_{ij} \end{pmatrix}. \tag{70}$$

3). Метрический пространственный тензор также не сохраняет свою структуру:

$$\begin{gathered} E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \pm\delta_{ij} \end{pmatrix} \rightarrow E'_{ij} = \pm \begin{pmatrix} v_0{}^n v_0{}^m \delta_{nm} & v_0{}^n \delta_{nj} \\ v_0{}^m \delta_{im} & \delta_{ij} \end{pmatrix} = \\ = \pm \begin{pmatrix} v_0{}^n v_{0n} & v_{0j} \\ v_{i0} & \delta_{ij} \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} v^2 & v_{0j} \\ v_{i0} & \delta_{ij} \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{71}$$

Соответственно, при ограничении преобразований очень малыми скоростями, преобразование (71) также запишется в более упрощенном виде:

$$E_{ij} = \pm \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta_{ij} \end{pmatrix} \rightarrow E'_{ij} = \pm \begin{pmatrix} 0 & v_{0j} \\ v_{i0} & \delta_{ij} \end{pmatrix}. \tag{72}$$

4). Единичный диагональный ковариантный тензор также не сохраняет свою структуру:

$$E'_{ij} = \begin{pmatrix} 1 + v_0{}^n v_0{}^m \delta_{nm} & +v_0{}^n \delta_{nj} \\ +\delta_{im} v_0{}^m & +\delta_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + v^2 & v_{0j} \\ v_{i0} & \delta_{ij} \end{pmatrix}. \tag{73}$$

А это означает, что в движущейся с.о. в галиеевом пространстве псевдометрика, определенная в одной из ИСО – эквиваленте АСО – изменяет значения своих элементов, что означает переход в не ортонормированную с.о. из изначально ортонормированной с.о.

9. Псевдометрический тензор в галилеевом пространстве

5). Псевдоединичный диагональный ковариантный тензор также не сохраняет свою структуру, кроме своей симметрии:

$$g'_{ij} = \begin{pmatrix} 1 - v_0{}^n v_0{}^m \delta_{nm} & v_0{}^n \delta_{nj} \\ \delta_{im} v_0{}^m & -\delta_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - v^2 & v_{0j} \\ v_{i0} & -\delta_{ij} \end{pmatrix}. \quad (74)$$

А это означает, что в движущейся с.о. в галиеевом пространстве псевдометрика, определенная в одной из ИСО – эквиваленте АСО – изменяет значения своих элементов, что означает переход в не ортонормированную с.о. из изначально ортонормированной с.о. Параметрами, полностью определяющими метрику, являются три значения элементов вектора скорости связанной ИСО. Обратите внимание: пространственные элементы тензора при этом не изменяются.

6) На основе этого тензора в АИСО галилеева пространства с "релятивистской" метрикой возможно получить операцию опускания индекса у контравариантного вектора:

$$A_i = \begin{pmatrix} 1 - v^2 & v_{0j} \\ v_{i0} & -\delta_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^0 \\ A^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - v^2)A^0 + v_{0j} A^j \\ v_{i0} A^0 - A^j \end{pmatrix}. \quad (75)$$

Сопряженным к ней тензором является тензор (58), на основе которого возможно получить операцию поднятия индекса у вектора:

$$A^i = \begin{pmatrix} 1 & -v^{0j} \\ -v^{i0} & -\delta^{ij} + v^i{}_0 v^j{}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 - v^{0j} A_j \\ -v^{i0} A_0 - \left(\delta^{ij} - v^i{}_0 v^j{}_0\right) A_j \end{pmatrix}. \quad (58)$$

(см. также (58), (59)).

10. Преобразования смешанных тензоров $C^i{}_j$

$$C'^i{}_j \Leftrightarrow (g^j{}_n A^n)\,(g_i{}^m B_m) = A'^i B'_j \to C'_i{}^j. \quad (76)$$

где $g^j{}_n$ и $g_i{}^m$ – взаимно обратные галилеевы преобразования соответственно для контравариантного и ковариантного векторов.

$$A'^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v^i{}_0 & \omega^i{}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^0 \\ A^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^0 \\ \omega^i{}_n A^n - v^i{}_0 A^0 \end{pmatrix}.$$
$$B'_j = \begin{pmatrix} 1 & v_0{}^m \\ 0 & \omega_j{}^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 \\ B_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0 + v_0{}^m B_m \\ \omega_j{}^m B_m \end{pmatrix}. \quad (77)$$

Умножим эти два вектора друг на друга:

$$C'^i{}_j = A'^i B'_j = \begin{pmatrix} A^0 \\ \omega^i{}_n A^n - v^i{}_0 A^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 + v_0{}^m B_m & \omega_j{}^m B_m \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} A^0 (B_0 + v_0{}^m B_m) & A^0 \omega_j{}^m B_m \\ (\omega^i{}_n A^n - v^i{}_0 A^0)(B_0 + v_0{}^m B_m) & (\omega^i{}_n A^n - v^i{}_0 A^0)\omega_j{}^m B_m \end{pmatrix} = \quad (78)$$

$$= \begin{pmatrix} (A^0 B_0 + v_0{}^m A^0 B_m) & A^0 \omega_j{}^m B_m \\ \omega^i{}_n A^n B_0 - v^i{}_0 v_0{}^m A^0 B_m - v^i{}_0 A^0 B_0 + \omega^i{}_n A^n v_0{}^m B_m & \omega^i{}_n \omega_j{}^m A^n B_m - v^i{}_0 \omega_j{}^m A^0 B_m \end{pmatrix}.$$

Переведем этот результат по аналогии на преобразование смешанного тензора:

$$C'^i{}_j = \begin{pmatrix} A^0{}_0 + v_0{}^m A^0{}_m & \omega_j{}^m A^0{}_m \\ \omega^i{}_n A^n{}_0 - v^i{}_0 A^0{}_0 + \omega^i{}_n v_0{}^m A^n{}_m - v^i{}_0 v_0{}^m A^0{}_m & \omega^i{}_n \omega_j{}^m A^n{}_m - v^i{}_0 \omega_j{}^m A^0{}_m \end{pmatrix}. \quad (79)$$

При ограничении преобразований очень малыми скоростями, преобразование (15) запишется в несколько упрощенном виде:

$$C'^i{}_j = \begin{pmatrix} A^0{}_0 + v_0{}^m A^0{}_m & \omega_j{}^m A^0{}_m \\ \omega^i{}_n A^n{}_0 - v^i{}_0 A^0{}_0 + \omega^i{}_n v_0{}^m A^n{}_m & \omega^i{}_n \omega_j{}^m A^n{}_m - v^i{}_0 \omega_j{}^m A^0{}_m \end{pmatrix}. \quad (80)$$

При наличии только вращения для смешанного тензора формула преобразования значительно упрощается:

$$C'^i = \begin{pmatrix} A^0{}_0 & \omega_j{}^m A^0{}_m \\ \omega^i{}_n A^n{}_0 & \omega^i{}_n \omega_j{}^m A^n{}_m \end{pmatrix}. \quad (81)$$

При наличии только галилеевых преобразований смешанного тензора элемент $A^0{}_j$ не изменяется:

$$C'^i{}_j = \begin{pmatrix} A^0{}_0 + v_0{}^m A^0{}_m & A^0{}_j \\ A^i{}_0 - (v^i{}_0 A^0{}_0 - v_0{}^m A^i{}_m) - v^i{}_0 v_0{}^m A^0{}_m & A^i{}_j - v^i{}_0 A^0{}_j \end{pmatrix}. \quad (82)$$

Если оба тензора являются тензорами преобразования координат ($A^0{}_0 = 1$, $A^0{}_j = 0$),то имеем:

$$C'^i{}_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A^i{}_0 - v^i{}_0 & A^i{}_j \end{pmatrix}. \quad (83)$$

По сути это закон сложения скоростей. Если тензор является единичным тензором преобразования координат ($A^i_j = E^i_j$),то имеем:

$$C'^i{}_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v^i{}_0 & E^i{}_j \end{pmatrix}. \quad (84)$$

Следствия:

1). Метрический временной смешанный тензор изменяется:

$$A^i{}_j = \begin{pmatrix} A^0{}_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A'^i{}_j = \begin{pmatrix} A^0{}_0 & 0 \\ -v^i{}_0 A^0{}_0 & A^i{}_j \end{pmatrix}. \quad (85)$$

2). Пространственный смешанный тензор не сохраняет свою структуру:

$$C^i{}_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A^i{}_j \end{pmatrix} \rightarrow C'^i{}_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_0{}^m A^i{}_m & A_{ij} \end{pmatrix}. \quad (86)$$

3). Метрический пространственный смешанный тензор не сохраняет свою структуру:

$$A^i{}_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta^i{}_j \end{pmatrix} \to A'^i{}_j = \pm \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_0{}^m \delta^i{}_m & \delta^i{}_j \end{pmatrix}. \tag{87}$$

4). Единичный диагональный смешанный тензор сохраняет свою структуру:

$$E'^i{}_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v^i{}_0 + v_0{}^i & \delta^i{}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta^i{}_j \end{pmatrix} = E. \tag{88}$$

11. Преобразования смешанных тензоров $C_i{}^j$

$$C'_i{}^j \Leftrightarrow (g_i{}^m A_m)\,(g^j{}_n B^n) = A'_i B'^j. \tag{89}$$

где $g^j{}_n$ и $g_i{}^m$ – взаимно обратные галилеевы преобразования соответственно для контравариантного и ковариантного векторов.

$$\begin{gathered} A'_i = \begin{pmatrix} 1 & v_0{}^n \\ 0 & \omega_i{}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 + v_0{}^n A_n \\ \omega_i{}^n A_n \end{pmatrix}. \\ B'^j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v^j{}_0 & \omega^j{}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^0 \\ B^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^0 \\ \omega^j{}_m B^m - v^j{}_0 B^0 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{90}$$

Умножим эти два вектора друг на друга:

$$\begin{gathered} C'_i{}^j = A'_i B'^j = \begin{pmatrix} A_0 + v_0{}^n A_n \\ \omega_i{}^n A_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^0 & \omega^j{}_m B^m - v^j{}_0 B^0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} (A_0 + v_0{}^n A_n) B^0 & (A_0 + v_0{}^n A_n)(\omega^j{}_m B^m - v^j{}_0 B^0) \\ \omega_i{}^n A_n B^0 & \omega_i{}^n A_n (\omega^j{}_m B^m - v^j{}_0 B^0) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} A_0 B^0 + v_0{}^n A_n B^0 & \omega^j{}_m A_0 B^m - v^j{}_0 A_0 B^0 + v_0{}^n A_n \omega^j{}_m B^m - v_0{}^n A_n v^j{}_0 B^0 \\ \omega_i{}^n A_n B^0 & \omega_i{}^n A_n \omega^j{}_m B^m - \omega_i{}^n A_n v^j{}_0 B^0 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{91}$$

Переведем этот результат по аналогии на преобразование смешанного тензора:

$$C'_i{}^j = \begin{pmatrix} A_0{}^0 + v_0{}^n A_n{}^0 & \omega^j{}_m A_0{}^m - v^j{}_0 A_0{}^0 + v_0{}^n \omega^j{}_m A_n{}^m - v_0{}^n v^j{}_0 A_n{}^0 \\ \omega_i{}^n A_n{}^0 & \omega_i{}^n \omega^j{}_m A_n{}^m - \omega_i{}^n v^j{}_0 A_n{}^0 \end{pmatrix}. \tag{92}$$

При ограничении преобразований очень малыми скоростями, преобразование (19) запишется в несколько упрощенном виде:

$$C'_i{}^j = \begin{pmatrix} A_0{}^0 + v_0{}^n A_n{}^0 & \omega^j{}_m A_0{}^m - v^j{}_0 A_0{}^0 + v_0{}^n \omega^j{}_m A_n{}^m \\ \omega_i{}^n A_n{}^0 & \omega_i{}^n \omega^j{}_m A_n{}^m - \omega_i{}^n v^j{}_0 A_n{}^0 \end{pmatrix}. \tag{93}$$

При наличии только вращения для смешанного тензора формула преобразования значительно упрощается:

$$C'_i{}^j = \begin{pmatrix} A_0{}^0 & \omega^j{}_m A_0{}^m \\ \omega_i{}^n A_n{}^0 & \omega_i{}^n \omega^j{}_m A_n{}^m \end{pmatrix}. \tag{94}$$

При наличии только галилеевых преобразований смешанного тензора элемент $A_i{}^0$ не изменяется:

$$C'_i{}^j = \begin{pmatrix} A_0{}^0 + v_0{}^n A_n{}^0 & A_0{}^j - v^j{}_0 A_0{}^0 + v_0{}^n A_n{}^j - v_0{}^n v^j{}_0 A_n{}^0 \\ A_i{}^0 & A_i{}^j - A_i{}^0 v^j{}_0 \end{pmatrix}. \tag{95}$$

Если оба тензора являются тензорами преобразования координат ($A_0{}^0 = 1$, $A_i{}^0 = 0$),то имеем:

$$C'_i{}^j = \begin{pmatrix} 1 & A_0{}^j + v_0{}^j \\ 0 & A_i{}^j \end{pmatrix}. \tag{96}$$

По сути это закон сложения скоростей.

Следствия:

1). Метрический временной смешанный тензор изменяется:

$$A_i{}^j = \begin{pmatrix} A_0{}^0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to A'_i{}^j = \begin{pmatrix} A_0{}^0 & -v^j{}_0 A_0{}^0 \\ 0 & A_i{}^j \end{pmatrix}. \tag{97}$$

$$C'_i{}^j = \begin{pmatrix} A_0{}^0 + v_0{}^n A_n{}^0 & A_0{}^j - v^j{}_0 A_0{}^0 + v_0{}^n A_n{}^j - v_0{}^n v^j{}_0 A_n{}^0 \\ A_i{}^0 & A_i{}^j - A_i{}^0 v^j{}_0 \end{pmatrix}. \tag{98}$$

2). Пространственный смешанный тензор не сохраняет свою структуру:

$$C^i{}_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A^i{}_j \end{pmatrix} \to C'^i{}_j = \begin{pmatrix} 0 & v_0{}^n A_n{}^j \\ 0 & A_i{}^j \end{pmatrix}. \tag{99}$$

3). Метрический пространственный смешанный тензор не сохраняет свою структуру:

$$C^i{}_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta_i{}^j \end{pmatrix} \to g'^i{}_j = \pm \begin{pmatrix} 0 & v_0{}^j \\ 0 & \delta_i{}^j \end{pmatrix}. \tag{100}$$

4). Единичный диагональный смешанный тензор сохраняет свою структуру:

$$E'_i{}^j = \begin{pmatrix} 1 & -v^j{}_0 + v_0{}^j \\ 0 & \delta^i{}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta^i{}_j \end{pmatrix} = E. \tag{101}$$

Литература

1. Акивис М. А., Гольдберг В. В. Тензорное исчисление. – М. : Наука, 1972. – 351 с.
2. Димитриенко Ю. И. Тензорное исчисление: Учеб. пособие для вузов. – М. : Высш. шк., 2001. – 575 с. 74

Мои работы

3. http://vixra.org/author/valery_timin