Un Espace des Modules
en
Géométrie Riemannienne

A.Balan

October 15, 2019

Abstract

Une équation aux dérivées partielles est présentée pour toute variété riemannienne. On montre l'action d'un groupe de jauge qui permet de définir un espace des modules.

1 L'équation aux dérivées partielles

On se donne une variété riemannienne (M, g), ce qui permet de définir la connexion de Levi-Civita ∇. On considère l'équation (E) suivante portant sur un champ de vecteurs X :

$$(E): \quad \nabla_Y(X) = \frac{1}{2}\frac{Y(g(X,X))}{g(X,X)}.X$$

Pour tout champ de vecteurs Y. L'ensemble des solutions est noté $\mathcal{S}$.

2 L'action du groupe de jauge

On définit un groupe de jauge $\mathcal{G} = \mathcal{C}^\infty(M, \mathbf{R}^*)$. Il agit sur les solutions $\mathcal{S}$,

$$(f, X) \in (\mathcal{G}, \mathcal{S}) \mapsto f.X$$

On a en effet :

$$\nabla_Y(f.X) = Y(f).X + f.\nabla_Y(X)$$

3 L'espace des modules

L'action du groupe de jauge $\mathcal{G}$ sur les solutions $\mathcal{S}$ permet de définir par quotient un espace des module $\mathcal{M}(M)$:

$$\mathcal{M}(M) = \mathcal{S}/\mathcal{G}$$

4 Pour un fibré hermitien

Dans le cadre d'un fibré hermitien (E, h), il existe aussi une équation avec la connexion de Chern ∇^C :

$$(E') : \ \nabla^C_X(s) = \frac{1}{2}\frac{X(h(s,s))}{h(s,s)}.s$$

avec s une section du fibré E.

References

[A] D.Auroux, "Invariants de Seiberg-Witten et Variétés Symplectiques", mémoire de DEA, 1995.

[B] D.Bennequin, "Monopôles de Seiberg-Witten et conjecture de Thom d'après Kronheimer, Mrowka et Witten, séminaire Bourbaki, 807, 1997.

[Be] N.Berline, E.Getzler, M.Vergne, "Heat kernels and Dirac operators", Springer-Verlag, 1992.

[F] T.Friedrich, "Dirac operators in Riemannian Geometry", Graduate Studies in Mathematics vol 25, AMS, 2000.

[J] J.Jost, "Riemannian Geometry and Geometric Analysis", Springer Verlag, 2008.

[K] M.Karoubi, "Algèbres de Clifford et K-théorie", Ann.Scient.Ec.Norm.Sup. 4 ser. 1 (1968), 161-270.

[M] J.Morgan, "The Seiberg-Witten equations and applications to the topology of smooth four-manifolds", Princeton University Press, New Jersey, 1996.

[W] E.Witten, "Monopoles and four-manifolds", Math.Res.Lett. 1(1994), 769-796.