Un Espace des Modules en Géométrie Spinorielle

A.Balan

October 9, 2019

Abstract

Sur une variété spinorielle, on définit une équation différentielle portant sur un spineur et utilisant l'opérateur de Dirac. Cette équation permet de construire un espace des modules dont on montre la dimension finie et la compacité.

1 L'équation différentielle

On se donne une variété spin (M, g) avec un fibré des spineurs Σ et un opérateur de Dirac $\mathcal{D}$, l'équation différentielle que l'on considère porte sur un spineur ψ :

$$(E): \ \ \mathcal{D}(\psi) = \frac{1}{2}\left(\frac{d < \psi, \psi >}{< \psi, \psi >}\right)^*.\psi$$

On utilise la multiplication de Clifford. L'espace des solutions est noté $\mathcal{S}$

2 L'action du groupe de jauges

Le groupe de jauges est $\mathcal{G} = \mathcal{C}^\infty(M, \mathbf{R}^*)$ il agit sur les solutions de l'équation car on a l'équation suivante :

$$\mathcal{D}(f\psi) = f\mathcal{D}(\psi) + (df)^*.\psi$$

3 L'espace des modules

On définit l'espace des modules par le quotient des solutions par le groupe de jauges.

$$\mathcal{M} = \mathcal{S}/\mathcal{G}$$

4 La dimension de l'espace des modules

Pour calculer la dimension, on se place en un point et on calcule le tangent en linéarisant l'équation (E).

$$\tilde{\psi} = \psi + \phi$$

avec ϕ petit.

$$\mathcal{D}(\phi) = \left(\frac{d\Re(<\psi,\phi>)}{<\psi,\psi>}\right)^*.\psi + \frac{-\Re(<\psi,\phi>)}{<\psi,\psi>^2}(d<\psi,\psi>)^*.\psi +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{d<\psi,\psi>}{<\psi,\psi>}\right)^*.\phi$$

On a donc un complexe elliptique :

$$0 \to L^2_3(M,\mathbf{R}) \to L^2_2(M,S) \to L^2_1(M,S) \to 0$$

La première flêche est donnée par $f \mapsto f\psi$ et la seconde est donnée par :

$$\phi \mapsto \mathcal{D}(\psi+\phi) - \left(\frac{d\Re(<\psi,\psi+\phi>)}{<\psi,\psi>}\right)^*.\psi -$$

$$-\frac{-\Re(<\psi,\psi+\phi>)}{<\psi,\psi>^2}(d<\psi,\psi>)^*.\psi -$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{d<\psi,\psi>}{<\psi,\psi>}\right)^*.(\psi+\phi)$$

On doit donc calculer la dimension par la caractéristique d'Euler du complexe qui est donné par l'index de l'opérateur de Dirac.

5 La compacité de l'espace des modules

On considère un spineur ψ vérifiant l'équation (E). On se sert de la formule de Lichnerowicz.

$$\mathcal{D}^2 = \Delta + \frac{r}{4}$$

Ce qui donne :

$$\Delta(\psi) + \frac{r}{4}\psi = \mathcal{D}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d<\psi,\psi>}{<\psi,\psi>}\right)^*.\psi\right)$$

On a pour la connexion spinorielle :

$$\nabla(X.\psi) = (\nabla(X)).\psi + X.(\nabla(\psi))$$

de sorte que :

$$\mathcal{D}\left(\left(\frac{d<\psi,\psi>}{<\psi,\psi>}\right)^*.\psi\right) = \sum_i e_i.\nabla_{e_i}\left(\left(\frac{d<\psi,\psi>}{<\psi,\psi>}\right)^*\right).\psi +$$

$$+\sum_i e_i.\left(\frac{d<\psi,\psi>}{<\psi,\psi>}\right)^*.\nabla_{e_i}(\psi)$$

On a $\sum_i e_i.\nabla_{e_i}(df^*) = \Delta(f)$, on en déduit :

References

[A] D.Auroux, ”Invariants de Seiberg-Witten et Variétés Symplectiques”, mémoire de DEA, 1995.

[B] D.Bennequin, ”Monopôles de Seiberg-Witten et conjecture de Thom d'après Kronheimer, Mrowka et Witten, séminaire Bourbaki, 807, 1997.

[Be] N.Berline, E.Getzler, M.Vergne, ”Heat kernels and Dirac operators”, Springer-Verlag, 1992.

[F] T.Friedrich, ”Dirac operators in Riemannian Geometry”, Graduate Studies in Mathematics vol 25, AMS, 2000.

[J] J.Jost, ”Riemannian Geometry and Geometric Analysis”, Springer Verlag, 2008.

[K] M.Karoubi, ”Algèbres de Clifford et K-théorie”, Ann.Scient.Ec.Norm.Sup. 4 ser. 1 (1968), 161-270.

[M] J.Morgan, ”The Seiberg-Witten equations and applications to the topology of smooth four-manifolds”, Princeton University Press, New Jersey, 1996.

[W] E.Witten, ”Monopoles and four-manifolds”, Math.Res.Lett. 1(1994), 769-796.