Сокрытие космологической постоянной

S. Carlip *
Department of Physics, University of California, Davis, Davis, California 95616, USA

(Получено 20 марта 2019; отредактировано 30 июля 2019; опубликовано 27 сентября 2019)

Возможно, стандартные аргументы эффективной теории поля верны, а флуктуации вакуума действительно генерируют огромную космологическую постоянную. Однако я показываю, что если отказаться от однородности и стреле времени в масштабе планка, то очень большой класс общих релятивистских исходных данных демонстрирует расширения, сдвиги и кривизны, которые огромны в малых масштабах, но макроскопически быстро усредняются до нуля. Последующая эволюция более сложна, но я утверждаю, что квантовые флуктуации могут сохранять эти свойства. Полученная картина является версией "пространственно-временной пены" Уилера, в которой космологическая постоянная создает высокую кривизну в планковском масштабе, но почти невидима в наблюдаемых масштабах.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.123.131302

Проблема космологической постоянной. Квантовые флуктуации вакуума должны генерировать очень высокую плотность энергии, которая должна проявляться как огромная космологическая постоянная. Мы не знаем, как точно вычислить эту величину, но должно быть, она подавляется экспоненциально [1] или иначе [2]. Стандартные аргументы эффективной теории поля предсказывают значение $\Lambda \sim \pm 1/\ell^2$, где параметр отсечения ℓ обычно принимается за планковскую длину ℓ_P [3,4]. Знак Λ зависит от точного соотношения числа частиц во Вселенной – бозонов и фермионов, вносящих свой вклад с противоположными знаками. Но если не происходит какой-либо заметной отмены, предсказанное значение огромно.

Мы действительно наблюдаем ускоренное расширение Вселенной, которое может быть вызвано космологической постоянной. Но космологическая постоянная планковской шкалы слишком велика – на 120 порядков, что делает ее так называемым “худшим теоретическим предсказанием в истории физики” [5]. Широко распространено предположение, что воздействие Λ должно быть отменено либо невероятно точной тонкой настройкой, либо устранено какой-то другой формой специального отбора – антропным отбором [6], нелокальными модификациями гравитационного действия [7] и т. п. Проблема становится особенно неразрешимой из-за смешения масштабов: Λ генерируется вблизи планковских масштабов, а наблюдается на космологических масштабах.

Здесь я предлагаю простую, но радикальную альтернативу. Возможно, наша Вселенная действительно *имеет* космологическую постоянную порядка $1/\ell^2$, причем ℓ, возможно, так же мало, как и ℓ_{P}. В однородной Вселенной это было бы немедленно исключено наблюдением. Однако, если Λ порождается флуктуациями планковского масштаба, то нет никаких оснований ожидать в этом масштабе самой однородности. Эта ситуация была предвосхищена Уилером [8], который назвал возникающую картину “пространственно-временной пеной”. Обратите внимание, что я не рассматриваю флуктуации самой космологической постоянной, хотя они также могут играть свою роль [9]. Скорее, я предполагаю, что эффекты космологической постоянной могут колебаться таким образом, что в среднем они приближаются к нулю.

Для пространства с положительно определенной метрикой легко представить высокие значения кривизны при малых масштабах, усредняющихся до нуля макроскопически. Однако для пространства-времени космологическая постоянная, по-видимому, влечет за собой экспоненциальное расширение (если анизотропия не слишком велика [10]), и неясно, как такое поведение может быть усреднено. Но эта картина на самом деле проста: космологическая постоянная может вызывать либо расширение, либо сжатие, и, как мы увидим, это поведение может изменяться в планковских масштабах. Таким образом, в большей области большая Λ

может быть согласована с малым средним расширением.

Далее я поясню эту идею более конкретно. При формулировке начального значения космологической постоянной с общей теории относительности, я показываю, что очень большой класс исходных данных имеет локальную постоянную Хаббла, которая огромна в планковских масштабах, но мала макроскопически. Для бесконечного подмножества областей макроскопическая пространственная кривизна также очень мала и имеет исчезающую производную первого порядка по времени. Рассматриваемая макроскопическая область здесь не обязательно должна быть очень большой: кубический сантиметр включает 10^{100} планковских областей.

Однако для формулировки недостаточно начальных данных − необходимо также показать, что эти функции сохраняются динамически. Производные по времени более высокого порядка зависят от более мелких деталей и труднее поддаются анализу. Однако если исходные неоднородности порождаются квантовыми флуктуациями, я утверждаю, что эти флуктуации также должны сохранять важнейшие свойства, маскирующие космологическую постоянную.

Эти аргументы не дают полного ответа на проблему космологической постоянной. Они, например, не объясняют кажущееся существование очень малого Λ в макроскопических масштабах. В более общем плане нужно было бы показать, что длинноволновые возбуждения на этом пенообразном фоне подчиняются макроскопической версии уравнений поля Эйнштейна, форме хорошо изученной, но с нерешенной “задачей усреднения” [11]. Но результаты здесь предполагают, по крайней мере, то, что мы, возможно, искали ответы в неправильных масштабах.

Формулировка начального значения. Пусть Σ − компактное трехмерное многообразие, интерпретируемое как поверхность Коши пространства-времени. Исходные данные для общей теории относительности на Σ представляются пространственной метрикой g_{ij} и внешней кривизной $K^i{}_j$. Они не являются произвольными, но должны удовлетворять ряду ограничений. Если вклад материи пренебрежимо мал по сравнению с космологической постоянной, то

$$R + K^2 - K^i{}_j K^j{}_i - 2\Lambda = 0, \tag{1a}$$

$$D_i\left(K^i{}_j - \delta^i{}_j K\right) = 0, \tag{1b}$$

где R −скалярная кривизна в метрике g_{ij}, D_i − ковариантная производная, совместимая с этой метрикой и $K = K^i{}_i$. Это формализм, который наиболее естественно переводит в каноническую квантовую теорию; ограничение (1a) становится уравнением Уилера-ДеВитта (Wheeler-DeWitt), в то время как (1b) накладывает пространственную инвариантность диффеоморфизма. Иногда бывает полезно отделить след от внешней кривизны, написав

$$K^i{}_j = \sigma^i{}_j + \frac{1}{3} K\delta^i{}_j. \tag{2}$$

Здесь K − локальная постоянная Хаббла, логарифмическая производная элемента объема, а $\sigma^i{}_j$ − тензор сдвигов. Скаляр сдвигов определяется как $\sigma^2 = \frac{1}{2}\sigma^i{}_j\sigma^j{}_i$.

Динамическая эволюция этих данных описывается уравнениями

$$\mathcal{L}_n g^i_j = 2g^i_k K^k{}_j, \tag{3a}$$

$$\mathcal{L}_n K^i{}_j = -R^i{}_j - KK^i{}_j + \Lambda\delta^i{}_j + \frac{D^i D_j N}{N}, \tag{3b}$$

где $\mathcal{L}_n$ − производная Ли вдоль единичной нормали к Σ, по существу ковариантная производная по времени, а N − функция отклонения, определяющая позиционно-зависимое разделение последовательных временных срезов (для простоты я принял вектор сдвига равным нулю). N должно быть положительным, в противном случае оно − произвольно, что делает эволюцию неоднородной, но решения с различным выбором N связаны диффеоморфизмами и, таким образом, физически эквивалентны.

Эволюционные уравнения (3a)−(3b) и ограничения (1a−(1b) имеют несколько иной статус в квантовой гравитации. Предполагая гравитационную версию теоремы Эренфеста, эволюционные уравнения должны выполняться для средних, но наблюдаемые значения геометрических величин будут подвержены квантовым флуктуациям, предположительно первого порядка в планковских масштабах. Ограничения различны: в то время как их точная форма может быть изменена квантовыми эффектами, одна из версий ограничений, вероятно, будет точно выполняться. В операторном формализме, например, уравнение Уилера-ДеВитта является утверждением, что в ограничениях физические состояния точно аннигилируют [12], в то время как при типичных подходах интегрирования по путям только те конфигурации, которые удовлетворяют ограничениям, появляются в сумме по историям (хотя и с некоторой двусмысленностью [13]). Ограничения, таким образом, захватывают квантовую структуру в планковских масштабах таким образом, что эволюционные уравнения этого не затрагивают.

Теперь нам понадобятся два свойства для формулировки исходных условий: 1) уравнения инвариантны при обращении времени: если (g, K) допустимые начальные данные для многообразия Σ, то и $(g, -K)$ обладают этим свойством. 2) два многообразия Σ_1 и Σ_2 с начальными данными (g, K_1) и (g, K_2) могут быть "склеены" с образованием многообразия $\Sigma_1 \# \Sigma_2$, для которого исходные данные остаются неизменными вне сколь угодно малых окрестностей точек, где выполняется склеивание [14,15]. Точнее, $\Sigma_1 \# \Sigma_2 -$ это топологически связная сумма Σ_1 и Σ_2, образованная вырезанием шаров из каждого многообразия и определении границ. Геометрически $-$ это открытые множества $U_1 \subset \Sigma_1$ и $\mathrm{U}_2 \subset \Sigma_2$, ограниченные только общим условием, что исходные данные "не слишком симметричны", в том смысле, что области зависимости U_1 и U_2 не содержат векторов Киллинга. Для этого необходимо выбрать точки $p_1 \in U_1$ и $p_2 \in U_2$, разрезать геодезические шары B_1 и B_2 произвольно малого радиуса вокруг каждого и соединить границы. Тогда $\Sigma_1 \# \Sigma_2$ допускает исходные данные, которые точно совпадают с исходными данными снаружи $U_1 \cup U_2$ и близки к исходным данным в подходящей норме внутри $U_1 \cup U_2$ и вне $B_1 \cup B_2$.

Теперь в качестве предварительной конструкции необходимо трехкратно выбрать Σ с фиксированным открытым множеством U и точкой $p \in U$ и указать начальные данные (g, K). Пусть $\bar{\Sigma} -$ идентичная копия Σ, но с начальными данными $(g, -K)$. Два многообразия могут быть склеены симметрично в точке p (см. раздел V в [15]) для формирования связной суммы $\tilde{\Sigma} = \Sigma \# \bar{\Sigma}$. По симметрии, Σ будет иметь изометрию отражения, при которой $(g, K) \to (g, -K)$. Хотя определение усредненного тензора неоднозначно [11], любое среднее, которое подчиняется этой симметрии, явно даст $\langle K^i{}_j \rangle = 0$.

Далее, рассмотрим более обобщенно большую коллекцию многообразий $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_N$, каждое со своими начальными данными (g_α, K_α). Сформируем склеенное многообразие

$$\tilde{\Sigma} = \Sigma_1 \# \Sigma_2 \# \ldots \# \Sigma_N. \tag{4}$$

До тех пор, пока мы не примем микроскопическую стрелу времени, данные (g, K) и $(g, -K)$ для любого конкретного Σ_α будут одинаково вероятны. Таким образом, опять же, любое разумное среднее по достаточно большому числу компонентов должно давать $K^i_j \sim 0$. Более точно о том, как быстро среднее значение достигнет нуля, зависит от количества и распределения многообразий и исходных наборов данных: даже кубический сантиметр содержит около 10^{100} областей планковского размера.

Из этих результатов следует, что $\mathcal{L}_n \sqrt{g} = 0$ и $\langle \sigma^i{}_j \rangle = 0$. Также легко проверить, что $\langle \mathcal{L}_n R \rangle = 0$.Таким образом, в первом порядке усредненная пространственная геометрия является стационарной. Чтобы соответствовать нашей Вселенной, мы также хотели бы, чтобы средняя пространственная кривизна была небольшой. Для исходных данных единственным ограничением является усреднение ограничения (1A):

$$\langle R \rangle = 2\langle \sigma^2 \rangle + 2\Lambda - \frac{2}{3}\langle K^2 \rangle \tag{5}$$

Таким образом, очевидно, что если $\langle K^2 \rangle$ велико (для положительного Λ) или $\langle \sigma^2 \rangle$ велико (для отрицательного Λ), то космологическая постоянная может быть "поглощена" флуктуациями внешней кривизны.

Позвольте подчеркнуть, что я не начинаю с пространства-времени и не ищу специальную гиперповерхность, на которой $K^i{}_j = 0$. Это была бы искусственная процедура и не было бы никаких оснований ожидать, что такая гиперповерхность будет физически интересной. Скорее, я беру произвольную гиперповерхность и даю ей исходные данные, выбранные случайным образом из большой коллекции. Можно добавить дополнительные требования, чтобы сделать эти данные "хорошими". Но до тех пор, пока они допускают неоднородности планковских масштабов и не определяют микроскопическую стрелку времени, выводы не должны меняться.

Эта конструкция позволяет $\tilde{\Sigma}$ иметь сколь угодно сложную топологию. Действительно, любое ориентируемое компактное трехмерное многообразие имеет единственное разложение в виде связанной суммы "простых" многообразий [16,17]. Но Σ также может быть топологически тривиально: если каждая $\Sigma_\alpha -$ это три-сфера, а связанная суммы также есть три-сфера. Таким образом, мы можем получить большой набор исходных данных, начав с любых начальных значений, вырезав коллекцию шаров планковских размеров, изменив данные на шарах и склеив их обратно.

Однако геометрия "шеек" между компонентами довольно специфична и остается открытым вопрос, как много пространственных исходных данных может быть достигнуто таким образом.

Для частного случая локальной сферической симметрии конструкцию можно сделать явной [18]. Этот случай "слишком симметричен", чтобы удовлетворить условию обобщенности теоремы склеивания, но можно построить точные начальные данные на пространстве с топологией $S^2 \times S^1$, состоящем из чередующихся расширяющихся и сжимающихся оболочек с расширением, которое в среднем равно нулю [19].

Эволюция. Мы установили, что на начальной гиперповерхности большой класс исходных данных может проявлять малое среднее расширение, скрывая макроскопически эффект космологической постоянной. Но сохранится ли эта особенность во времени? Это сложный вопрос, ответ на который почти наверняка потребует лучшего понимания квантовой гравитации. В частности, эволюционные уравнения (3a)–(3b) являются классическими приближениями, не включающими квантовые флуктуации, которые предположительно создают интересующую нас сложную микроскопическую структуру. Попросту, мы можем ожидать: 1) расширяющиеся области растут во времени, в то время как сжимающиеся области сжимаются, поэтому при $\Lambda > 0$ расширяющиеся области должны в конечном итоге доминировать в среднем объеме, хотя это может занять сколь угодно долгое время [20]. (Если $\Lambda < 0$, расширяющиеся области будут реколлапсировать, так что это меньшая проблема [21]). 2) но ничто в этой конструкции не выбирает предпочтительного начального времени, поэтому, если пенистая структура генерируется квантовыми флуктуациями, она должна воспроизводить себя: расширяющиеся области должны сами заполняться новыми флуктуациями кривизны.

Без лучшего понимания того, как квантовые флуктуации порождают пространственно-временную пену (или являются), мы вряд ли сможем полностью решить этот вопрос. Тем не менее, мы можем искать намеки в том, *что мы знаем* об эволюции.

Классическая эволюция. Сначала спросим, может ли классическая эволюция (3a)–(3b) сохранить усредненную структуру. Это похоже на вопрос Бухерта (Buchert) в несколько ином контексте [22], о том, может ли неравновесное “космическое уравнение состояния” привести к стационарной усредненной конфигурации.

Это, по крайней мере, хорошо поставленный вопрос, хотя все еще трудный. Во-первых, мы можем только надеяться узнать о кратковременной эволюции. Начальные данные, описанные здесь, обычно приводят к сингулярностям с минимальными сферами в соединительных "шейках", образующих захваченные поверхности, которые ведут себя как горизонты черной дыры [20,23]. Независимые вычисления также показывают, что флуктуации планковского масштаба могут нарушить причинную структуру пространства-времени [24]. Обычно предполагается, что квантовая гравитация разрешают такие сингулярности, но классически они сигнализируют о разрыве эволюции.

Во-вторых, хорошо известны неоднозначности в определении временных производных средних. Чтобы определить производную от среднего $\langle\bullet\rangle$ по области $\mho$, необходимо указать, как $\mho$ изменяется во времени. Если $\mho$ фиксировано в терминах некоторого набора координат, результат не будет инвариантным; если он определен в терминах геометрических величин, он, как правило, зависит от времени. Кроме того, средние часто (хотя и не всегда [25]) определяются в терминах интегралов с динамической мерой интегрирования, обеспечивая дополнительный источник временной зависимости [26].

В-третьих, даже если мы знаем, что мы подразумеваем под “средним”, не так ясно, что мы подразумеваем под “временем". Разделение пространства-времени на пространство и время не является уникальным. В настоящем формализме это отражается в произвольном выборе (lapse[1])-функции N. В принципе, физика может быть захвачена диффеоморфизмо-инвариантными, (lapse)-независимыми от времени наблюдаемыми, но они всегда нелокальны [27] и плохо поняты. На практике мы обычно ссылаемся вместо этого на “предпочтительный” выбор lapse. Для космологии Фридмана–Леметра–Робертсона–Уокера (Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker, FLRW) с однородными и изотропными исходными данными, например, только малый класс функций lapse сохраняет эти характеристики; обычное утверждение

[1]) Термин формализма, связанного с расщеплением многообразия на пространственно-временные компоненты.

однородности и изотропии − это скрытое утверждение о существовании этих специальных функций lapse.

Принимая во внимание эти проблемы и вдохновляясь FLRW-примером, мы можем спросить, сохраняет ли *любой* выбор функции lapse усредненные свойства наших исходных данных. Начнем с условия 〈K〉 =0. Следуя [26], определим пространственные средние как объёмные интегралы

$$\langle X\rangle_{\mho} = \frac{1}{V_{\mho}}\int_{\mho} X\sqrt{g}d^3x \text{ with } V_{\mho} = \int_{\mho}\sqrt{g}\,d^3x, \tag{6}$$

где область ℧ определяется некоторым независимым от времени способом. Затем, из (3a)–(3б)

$$\frac{d}{dt}\langle K\rangle = \frac{1}{V_{\mho}}\int_{\mho} N\mathcal{L}_n(K\sqrt{g})\,d^3x =$$

$$= \frac{1}{V_{\mho}}\int_{\mho} N(-R+3\Lambda)\sqrt{g}\,d^3x = \tag{7}$$

$$= \frac{1}{V_{\mho}}\int_{\mho} N\left(\Lambda + \frac{2}{3}K^2 - 2\sigma^2\right)d^3x$$

Если мы выберем одинаковые временные нарезки $N = 1$, получим $\frac{d\langle K\rangle}{dt} = -\langle R\rangle + 3\Lambda$, что по существу является вторым уравнением Фридмана для усредненных величин. Но учитывая пенистый характер исходной геометрии, нет никаких оснований выбирать постоянную функцию lapse в планковском масштабе. Пока подынтегральное выражение в (7) не имеет определенного знака, то есть, пока сдвиг (для положительного Λ) или расширение (для отрицательного Λ) велики в некоторых областях − существует бесконечное число вариантов N, для которых правая часть (7) исчезает. Для топологически сложного многообразия, в частности, кривизна простых факторов обычно отрицательна, в то время как кривизна соединительных "шеек" велика и положительна, поэтому отмена не должна представлять трудностей.

Далее мы можем выбрать N инвариантным при $(g, K) \to (g, -K)$, что гарантирует, что любое подынтегральное выражение с нечетной степенью K также будет усреднено до нуля. Можно было бы беспокоиться о том, что наши условия могут заставить среднюю кривизну быть большой. Но пока (7) предполагает $\langle NR\rangle \sim \Lambda\langle N\rangle$, для lapse-функция с масштабом планковской структуры еще может быть верно, что $|\langle R\rangle| \ll |\langle NR\rangle/\langle N\rangle| \sim \Lambda$.

Вторая производная также проста:

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle K\rangle = \frac{1}{V_U}\int_U \left[(\dot{N} + NK)\left(\Lambda + \frac{2}{3}K^2 - 2\sigma^2\right) + \right.$$

$$\left. +2N^2K^{ij}R_{ij}\right]\sqrt{g}d^3x \tag{8}$$

Последний член содержит нечетную степень K и стремится к нулю для достаточно большой области ℧. Первый член имеет точно такую же форму как и (7), а N может быть указано независимо, поэтому, если первая производная может быть обращена в нуль, то вторая производная также может быть обращена в нуль.

Высшие производные более сложны. $\mathcal{L}_n^3K$, например, содержит производные члены, такие как $K\Delta K$ и корреляции более высокого порядка, такие как $\langle K^4\rangle - \langle K^2\rangle^2$, которые описывают структуру на более коротких расстояниях. Но каждая новая производная $\langle K\rangle$ приходит со своей производной по времени N, которая может быть определена независимо. Таким образом, нет никакого очевидного препятствия для выбора временного среза, для которого все временные производные $\langle K\rangle$ исчезают.

Это сильное утверждение, подразумевающее то, что, несмотря на наличие очень высокой кривизны в планковском масштабе, должно существовать, по крайней мере на короткое время, слоение пространства-времени срезами исчезающего среднего расширения. Конечно, такое расслоение само по себе будет быстро изменяться в планковском масштабе, но, учитывая пенистую структуру трехмерной геометрии, это не должно удивлять. Можно ли одновременно выбрать lapse-функцию для которой $\langle R\rangle$ остается небольшим − это более сложный вопрос, требующий дальнейшей работы.

Квантовая эволюция. В отсутствие полной квантовой теории гравитации, гораздо меньше можно сказать о квантовой эволюции. Однако как отмечалось ранее, во многих подходах к квантовой теории, здешние ограничения находятся под гораздо лучшим контролем, чем эволюционные уравнения и являются более фундаментальными [12,13]. Действительно, в подходе типа Уилера-ДеВитта решение квантовых ограничений сосредоточено вокруг некоторой суперпозиции связанных сумм (4), что даст *полное* описание состояния.

Конечно, времен***н**а*я эволюция все еще должна быть скрыта где-то в таком решении. Чтобы извлечь её проявление, мы должны обратиться к пресловутой "проблеме времени" в квантовой гравитации [28]. Недавно было предложено, чтобы решения ограничений содержали все возможные "квантовые системы отсчета" в определенных рамках, выбранными с помощью калибровочной фиксации [29]. Это предлагает новый способ постановки вопроса: имеет ли типичное решение уравнения Уилера-ДеВитта пенообразную структуру в планковском масштабе в общей квантовой системе отсчета? Более конкретно, можно было бы ввести конкретный вопрос о "часах" для исследования эволюции времени [30,31]. Коротко говоря, проще всего это может быть решено в сферически симметричной модели мини-пространства, основанной на [18,19].

Было бы интересно связать этот подход с четырехмерной евклидовой пространственно-временной пеной Хокинга [32]. Это потребует лучшего понимания четырехмерной эволюции наших исходных данных. Но "шейки" в связной сумме (4) будут напоминать "глотки" черных дыр Шварцшильда [20,23], для которых евклидово продолжение хорошо понятно, поэтому прогресс вполне возможен. Было бы также целесообразно продолжить рассмотрение случая $\Lambda < 0$ в свете соответствия AdS/CFT. Здесь уже была проведена интересная работа по вопросу о том, какие топологии вносят свой вклад в контексте черных дыр и более слабых измерений [33].

Что делает и чего не делает это предложение. Еще в 1957 году Уилер утверждал, что

> *...необходимо учитывать флуктуации в метрических и гравитационных взаимодействиях при любой трактовке проблемы компенсации — проблемы компенсации "бесконечных" энергий, столь важной для физики полей и частиц [34].*

То, что я предлагаю — это конкретная реализация этого видения. Несколько предыдущих попыток были предприняты для моделирования пространственно-временной пены (см., например, (32), (35) и (36)), но лишь немногие обратились к проблеме космологической постоянной (37—40). Новые компоненты здесь — это способность построить новый большой класс исходных данных и решающее осознание того, что инвариантность обращения времени позволяет и, возможно, даже требует расширения и сдвига в среднем до нуля.

Это предложение касается “старой" проблемы космологической постоянной, проблемы большой энергии вакуума. Но это не говорит нам, вызвано ли наблюдаемое ускоренное расширение Вселенной небольшой остаточной космологической постоянной. Недавно было доказано, что корреляции более высокого порядка флуктуаций вакуума могут генерировать малую космологическую постоянную [9,21,41]. Они предположительно проявились бы здесь в более высоких корреляциях метрической и внешней кривизны, которые появляются в более высоких производных усредненного расширения и кривизны.

Хотя это предложение предлагает естественное объяснение малого макроскопического расширения и сдвига, требование малой пространственной кривизны — менее очевидно. Конечно, можно выбрать данные, для которых $\langle R\rangle$ мала, и есть намеки на то, что это может быть предпочтено функцией гравитационного разбиения, но здесь требуется лучшее понимание. Ответ может быть динамичным. В стандартной замкнутой космологии FLRW, в конце концов, пространственная кривизна изначально очень высока и уменьшается во времени. Есть некоторые доказательства того, что то же самое верно и здесь: вторая производная по времени усредненной кривизны $\langle R\rangle$ может быть вычислена, и хотя результат зависит от функции lapse, большинство членов являются отрицательно определенными.

Это предложение также не пытается объяснить появление макроскопической стрелы времени — важный вопрос, но, вероятно, логически независимый. Я также не показал, что длинноволновые возмущения, сидящие поверх планковской пространственно-временной пены, будут описаны классической общей теорией относительности. Это пресловутая "проблема усреднения" [11, 25, 26] — проблема того, как нелинейности общей теории относительности взаимодействуют с процессом получения средних. Здесь, однако, могут помочь эффективные аргументы теории поля [3]. Ничто в этой конструкции не нарушило пространственную инвариантность диффеоморфизма, поэтому эффективное действие должно включать только термины, инвариантные при этой симметрии. Это подразумевает действие $\mathrm{Hořava-Lifshitz'a}$ [42], частным случаем которого является общая теория относительности. Если, как я утверждал, нет также ничего “предпочтительного” в начальном временн**о**м срезе, то инвариантность репараметризации времени также должна быть симметричной, и в этом случае крупномасштабное эффективное действие должно принимать обычную форму Эйнштейна-Гильберта.

До сих пор я рассматривал квантовую гравитационную проблему полуклассически, апеллируя к квантовой механике для создания структуры планковского масштаба, но полагаясь на классическую общую теорию относительности для описания ограничений и эволюции. Затем мы могли бы рассмотреть когерентные состояния, сосредоточенные на конфигурациях, описанных здесь, и построить более общие волновые функции в виде суперпозиций. Но это заставило бы нас столкнуться с некоторыми стандартными проблемами квантовой гравитации: метрическая и внешняя кривизны не являются истинными наблюдаемыми, и для определения среднего нам пришлось бы выяснить, что означает "в одной и той же точке" в разных компонентах волновой функции.

Остаются и интересные технические вопросы. Конструкция склеивания, которую я использовал, обеспечивает большой набор исходных данных, но неизвестно – сколько всего пространств исходных данных будет покрыто. В более общем плане, склейка, конечно, не единственный способ получения данных без стрелы времени в масштабе Планка, и полное понимание меры таких данных все еще отсутствует. Было бы также полезно продолжить исследование корреляций более высокого порядка или, наоборот, увидеть, в какой степени дальнейшие ограничения (например, $\langle \mathcal{L}_n^3 K \rangle = 0$) лимитируют возможные начальные данные.

Несмотря на все эти ограничения, наше предложение предлагает простое и радикальное решение глубокой проблемы. Если большая космологическая постоянная генерируется флуктуациями вакуума в планковских масштабах, то, возможно, это также есть место для поиска ответов. Я показал, что по, крайней мере, в принципе сокрытие космологической постоянной планковской шкалы в флуктуациях кривизны планковской шкалы не только возможно, но и может быть вполне естественным. Возможно, мы просто искали не в том месте.

Я хотел бы поблагодарить Энди Альбрехта, Шона Кэрролла, Петра Хрущева, Маркуса Люти, Дона Пейджа, Дэниела Поллака, Альберта Шварца и Боба Вальда за полезные обсуждения. Эта работа была частично поддержана грантом Министерства Энергетики №. DE-FG02-91ER40674.

Ссылки

*carlip@physics.ucdavis.edu

[1] J. Holland and S. Hollands, A small cosmological constant due to non-perturbative quantum effects, Classical Quantum Gravity 31, 125006 (2014).

[2] J. Martin, Everything you always wanted to know about the cosmological constant problem (but were afraid to ask), C.R. Phys. 13, 566 (2012).

[3] C. P. Burgess, Quantum gravity in everyday life: General relativity as an effective field theory, Living Rev. Relativity 7, 5 (2004).

[4] S. M. Carroll, The cosmological constant, Living Rev. Relativity 4, 1 (2001).

[5] By M. P. Hobson, G. P. Efstathiou, and A. N. Lasenby, GeneralRelativity: AnIntroduction for Physicists (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2006), p. 187.

[6] S. Weinberg, The cosmological constant problem, Rev. Mod. Phys. 61, 1 (1989).

[7] N. Kaloper and A. Padilla, Sequestering the Standard Model Vacuum Energy, Phys. Rev. Lett. 112, 091304 (2014).

[8] J. A. Wheeler, Geons, Phys. Rev. 97, 511 (1955).

[9] Q. Wang, Z. Zhu, and W. G. Unruh, How the huge energy of quantum vacuum gravitates to drive the slow accelerating expansion of the universe, Phys. Rev. D 95, 103504 (2017).

[10] R. M. Wald, Asymptotic behavior of homogeneous cosmological models in the presence of a positive cosmological constant, Phys. Rev. D 28, 2118 (1983).

[11] C. Clarkson, G. Ellis, J. Larena, and O. Umeh, Does the growth of structure affect our dynamical models of the universe? The averaging, backreaction and fitting problems in cosmology, Rep. Prog. Phys. 74, 112901 (2011).

[12] B. S. DeWitt, Quantum theory of gravity 1. The canonical theory, Phys. Rev. 160, 1113 (1967).

[13] C. Teitelboim, Causality Versus Gauge Invariance in Quantum Gravity and Supergravity, Phys. Rev. Lett. 50, 705 (1983).

[14] P. T. Chrusciel, J. Isenberg, and D. Pollack, Gluing Initial Data Sets for General Relativity, Phys. Rev. Lett. 93, 081101 (2004).

[15] P. T. Chrusciel, J. Isenberg, and D. Pollack, Initial data engineering, Commun. Math. Phys. 257, 29 (2005).

[16] J. Milnor, A unique decomposition theorem for 3-manifolds, Am. J. Math. 84, 1 (1962).

[17] D. Giulini, Properties of three manifolds for relativists, Int. J. Theor. Phys. 33, 913 (1994).

[18] J. Morrow-Jones and D. M.Witt, Inflationary initial data for generic spatial topology, Phys. Rev. D 48, 2516 (1993).

[19] S. Carlip (to be published).

[20] M. Burkhart, M. Lesourd, and D. Pollack, Null geodesic incompleteness of spacetimes with no CMC Cauchy surfaces, arXiv:1902.07411.

[21] Q. Wang and W. G. Unruh, Vacuum fluctuation, microcyclic 'universes' and the cosmological constant problem, arXiv:1904.08599.

[22] T. Buchert, A Cosmic equation of state for the inhomogeneous universe: Can a global far-from-equilibrium state explain dark energy, Classical Quantum Gravity 22, L113 (2005).

[23] M. Burkhart and D. Pollack, Causal geodesic incompleteness of spacetimes arising from IMP gluing, arXiv:1907.00295.

[24] S. Carlip, R. A. Mosna, and J. P. M. Pitelli, Vacuum Fluctuations and the Small Scale Structure of Spacetime, Phys. Rev. Lett. 107, 021303 (2011).

[25] S. R. Green and R. M. Wald, A new framework for analyzing the effects of small scale inhomogeneities in cosmology, Phys. Rev. D 83, 084020 (2011).

[26] T. Buchert, On average properties of inhomogeneous fluids in general relativity: Dust cosmologies, Gen. Relativ. Gravit. 32, 105 (2000).

[27] C. G. Torre, Gravitational observables and local symmetries, Phys. Rev. D 48, R2373 (1993).

[28] K. V. Kuchaˇr, Time and interpretations of quantum gravity, Int. J. Mod. Phys. D 20, 3 (2011).

[29] P. A. Höhn, Switching internal times and a new perspective on the 'wave function of the universe', Universe 5, 116 (2019).

[30] J. D. Brown and K. V. Kuchaˇr, Dust as a standard of space and time in canonical quantum gravity, Phys. Rev. D 51, 5600 (1995).

[31] J. D. Brown and D. Marolf, On relativistic material reference systems, Phys. Rev. D 53, 1835 (1996).

[32] S.W. Hawking, Space-Time Foam, Nucl. Phys. B144, 349 (1978).

[33] R. Dijkgraaf, J. Maldacena, G. Moore, and E. Verlinde, A black hole Farey tail, arXiv:hep-th/0005003.

[34] J. A. Wheeler, On the nature of quantum geometrodynamics, Ann. Phys. (N.Y.) 2, 604 (1957), p. 610.

[35] L. Crane and L. Smolin, Renormalizability of general relativity on a background of space-time foam, Nucl. Phys. B267, 714 (1986).
[36] Y. J. Ng, Space-time foam, Int. J. Mod. Phys. D 11, 1585 (2002).
[37] S. R. Coleman, Why there is nothing rather than something: A theory of the cosmological constant, Nucl. Phys. B310, 643 (1988).
[38] A. A. Kirillov and E. P. Savelova, On the value of the cosmological constant in a gas of virtual wormholes, Gravitation Cosmol. 19, 92 (2013).
[39] R. Garattini, A space-time foam approach to the cosmological constant and entropy, Int. J. Mod. Phys. D 11, 635 (2002).
[40] S. Carlip, Space-Time Foam and the Cosmological Constant, Phys. Rev. Lett. 79, 4071 (1997).
[41] E. Santos, The cosmological constant problem or how the quantum vacuum drives the slow accelerating expansion of the universe, arXiv:1805.03018.
[42] P. Horava, Quantum Gravity at a Lifshitz Point, Phys. Rev. D 79, 084008 (2009).

Hiding the Cosmological Constant

S. Carlip *
Department of Physics, University of California, Davis, Davis, California 95616, USA

(Received 20 March 2019; revised manuscript received 30 July 2019; published 27 September 2019)

Perhaps standard effective field theory arguments are right, and vacuum fluctuations really *do* generate a huge cosmological constant. I show that if one does not assume homogeneity and an arrow of time at the Planck scale, a very large class of general relativistic initial data exhibit expansions, shears, and curvatures that are enormous at small scales, but quickly average to zero macroscopically. Subsequent evolution is more complex, but I argue that quantum fluctuations may preserve these properties. The resulting picture is a version of Wheeler's "spacetime foam," in which the cosmological constant produces high curvature at the Planck scale but is nearly invisible at observable scales.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.123.131302

The cosmological constant problem.—Quantum fluctuations of the vacuum are expected to generate a very high energy density, which should manifest itself as an enormous cosmological constant. We don't know how to calculate this quantity exactly, and it remains possible that it is suppressed, exponentially [1] or otherwise [2]. But standard effective field theory arguments predict a value $\Lambda \sim \pm 1/\ell^2$, where the cut-off length ℓ is usually taken to be the Planck length ℓ_P [3,4]. The sign of Λ depends on the exact particle content of the Universe—bosons and fermions contribute with opposite signs—but unless a remarkable cancellation occurs, the predicted value is huge.

We do, in fact, observe an accelerated expansion of the Universe that could be due to a cosmological constant. But a Planck-scale cosmological constant is some 120 orders of magnitude too large, making it what has been called "the worst theoretical prediction in the history of physics" [5]. It is widely assumed that Λ must either be canceled by incredibly precise fine tuning or eliminated by some other form of special pleading—anthropic selection [6], nonlocal modifications of the gravitational action [7], or the like. The problem is made especially intractable by the mixing of scales: Λ is generated near the Planck scale, but observed at cosmological scales.

Here I propose a simple but radical alternative. Perhaps our universe really *does* have a cosmological constant of order $1/\ell^2$, with ℓ possibly as small as ℓ_P. In a homogeneous universe this would be immediately ruled out by observation. But if Λ is generated by Planck scale fluctuations, there is no reason to expect homogeneity at that scale. This notion was anticipated by Wheeler [8], who called the resulting picture "spacetime foam." Note that I am not considering fluctuations of the cosmological constant itself, though they may also matter [9]. Rather, I am proposing that the *effects* of the cosmological constant may fluctuate in a way that averages to near zero.

For a space with a positive definite metric, it is easy to imagine high curvature at small scales averaging to zero macroscopically. For a spacetime, though, a cosmological constant would seem to entail exponential expansion (if the anisotropy is not too big [10]), and it is not clear how such behavior can be averaged away. But this picture is too simple: a cosmological constant can produce either expansion or contraction, and as we shall see, this behavior can vary at the Planck scale. Over a larger region, a large Λ may thus be consistent with small average expansion.

In what follows, I make this idea more concrete. Starting with the initial value formulation of general relativity with an arbitrary cosmological constant, I show that a very large class of initial data has a local Hubble constant that is huge at the Planck scale but tiny macroscopically. For an infinite subset of data, the macroscopic spatial curvature is also very small, and has a vanishing first time derivative. A "macroscopic" region here need not be very large: a cubic centimeter already contains some 10^{100} Planck-size regions.

An initial value formulation is not enough—one must also show that these features are preserved dynamically. Higher order time derivatives depend on finer details, and are harder to analyze. If the initial inhomogeneities are generated by quantum fluctuations, though, I argue that these fluctuations should also preserve the crucial properties that camouflage the cosmological constant.

These arguments do not provide a complete answer to the cosmological constant problem. They do not, e.g., explain the apparent existence of a very small Λ at macroscopic scales. More generally, one would have to show that long wavelength excitations on this foamlike background obey a macroscopic version of the Einstein field equations, a form of the much-studied but unresolved "averaging problem" [11]. But the results here suggest, at least, that we may have been looking for answers at the wrong scales.

The initial value formulation.—Let Σ be a compact threedimensional manifold, interpreted as a Cauchy surface of a spacetime. The initial data for general relativity on Σ consist of a spatial metric g_{ij} and an extrinsic curvature $K^i{}_j$. These are not arbitrary, but must satisfy a set of constraints. If the contribution of matter is negligible compared to the cosmological constant, these are

$$R + K^2 - K^i{}_j K^j{}_i - 2\Lambda = 0, \qquad \text{(1a)}$$

$$D_i\left(K^i{}_j - \delta^i{}_j K\right) = 0, \qquad \text{(1b)}$$

where R is the scalar curvature of the metric g_{ij}, D_i is the covariant derivative compatible with that metric, and $K = K^i{}_i$. This is the formalism that translates most natural into canonical quantum theory; the constraint Eq. (1a) becomes the Wheeler-DeWitt equation, while Eq. (1b) imposes spatial diffeomorphism invariance. It is sometimes useful to split off the trace of the extrinsic curvature, writing

$$K^i{}_j = \sigma^i{}_j + \frac{1}{3} K\delta^i{}_j. \qquad \text{(2)}$$

K is the expansion—it is the local Hubble constant, the logarithmic derivative of the volume element—while $\sigma^i{}_j$ is the shear tensor. The shear scalar is defined as $\sigma^2 = \frac{1}{2}\sigma^i{}_j\sigma^j{}_i$.

The dynamical evolution of this data is described by the equations

$$\mathcal{L}_n g^i{}_j = 2g^i{}_k K^k{}_j, \qquad \text{(3a)}$$

$$\mathcal{L}_n K^i{}_j = -R^i{}_j - KK^i{}_j + \Lambda\delta^i{}_j + \frac{D^i D_j N}{N}, \qquad \text{(3b)}$$

where $\mathcal{L}_n$ is the Lie derivative along the unit normal to Σ, essentially a covariant time derivative, and N is the lapse function, which determines the position-dependent separation of successive time slices. (For simplicity, I have taken the shift vector to be zero.) N must be positive, but it is otherwise arbitrary, making the evolution appear nonunique, but solutions with different choices of N are related by diffeomorphisms, and are thus physically equivalent.

The evolution equations [Eqs. (3a)–(3b)] and the constraints [Eqs. (1a)–(1b)] have rather different status in quantum gravity. Assuming a gravitational version of Ehrenfest's theorem, the evolution equations should hold for averages, but observed values of geometric quantities will be subject to quantum fluctuations, presumably of order one at the Planck scale. The constraints are different: while their precise form may be modified by quantum effects, some version of the constraints is likely to hold exactly. In an operator formalism, for instance, the Wheeler-DeWitt equation is the statement that the constraints exactly annihilate physical states [12], while in typical path integral approaches, only configurations that satisfy the constraints appear in the sum over histories (though with some ambiguity [13]). The constraints thus capture the quantum structure at the Planck scale in a way the evolution equations do not.

We will now need two properties of the initial value formulation: 1) The equations are time reversal invariant: if (g, K) is allowed initial data for a manifold Σ, so is $(g, -K)$. 2) Two manifolds Σ_1 and Σ_2 with initial data $(g, K_1)$and (g, K_2)can be "glued" to form a manifold $\Sigma_1\#\Sigma_2$ for which the initial data are unchanged outside arbitrarily small neighborhoods of the points where the gluing is performed [14,15].

More precisely, $\Sigma_1\#\Sigma_2$ is topologically the connected sum of Σ_1 and Σ_2, formed by cutting balls out of each manifold and identifying the boundaries. Geometrically, pick open sets $U_1 \subset \Sigma_1$ and $U_2 \subset \Sigma_2$, restricted only by the generic condition that the initial data is "not too symmetric," in the sense that the domains of dependence of U_1 and U_2 contain no Killing vectors. Pick points $p_1 \in U_1$ and $p_2 \in U_2$, cut geodesic balls B_1 and B_2 of arbitrarily small radius around each, and join the boundaries. Then $\Sigma_1 \# \Sigma_2$ admits initial data that exactly coincides with the original data outside $U_1 \cup U_2$ and is close to the original data, in a suitable norm, inside $U_1 \cup U_2$ but outside $B_1 \cup B_2$.

Now, as a preliminary construction, pick a threemanifold Σ with a fixed open set U and a point $p \in U$, and specify initial data (g, K). Let $\bar{\Sigma}$ be an identical copy of Σ, but with initial data $(g, -K)$. The two manifolds can be glued symmetrically at p (see Sec. Vof Ref. [15]) to form a connected sum $\tilde{\Sigma} = \Sigma\#\bar{\Sigma}$. By symmetry, $\tilde{\Sigma}$ will have a reflection isometry, under which $(g, K) \to (g, -K)$. While the definition of an averaged tensor is ambiguous [11], any average that respects this symmetry will clearly give $\langle K^i{}_j\rangle = 0$.

Next, much more generally, consider a large collection of manifolds $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_N$, each with its own initial data (g_α, K_α). Form the glued manifold

$$\tilde{\Sigma} = \Sigma_1 \# \Sigma_2 \# \ldots \# \Sigma_N. \quad (4)$$

As long as we do not assume a microscopic arrow of time, the data (g, K) and $(g, -K)$for any particular Σ_α will be equally likely. Thus, again, any sensible average over a large enough number of components should give $\boldsymbol{K}^i{}_j \sim 0$. Exactly how fast the average will go to zero depends on the number and distribution of manifolds and initial data sets, but even a cubic centimeter contains some 10^{100} Planck-size regions.

These results imply that $\mathcal{L}_n\sqrt{g} = 0$ and $\langle\sigma^i{}_j\rangle = 0$. It is also easy to check that $\langle\mathcal{L}_n R\rangle = 0$. To first order, the averaged spatial geometry is thus stationary. To match our universe, we would also like the average spatial curvature to be small. For the initial data, the only restriction comes from averaging the constraint Eq. (1a):

$$\langle R\rangle = 2\langle\sigma^2\rangle + 2\Lambda - \frac{2}{3}\langle K^2\rangle \quad (5)$$

It is thus evident that if $\langle K^2\rangle$ is large (for positive Λ) or $\langle\sigma^2\rangle$ is large (for negative Λ), the cosmological constant can be "absorbed" in fluctuations of extrinsic curvature.

Let me stress that I am not starting with a spacetime and searching for a special hypersurface on which $K^i{}_j = 0$. That would be an artificial procedure, and there would be no reason to expect such a hypersurface to be physically interesting. Rather, I am taking an arbitrary hypersurface and giving it initial data chosen randomly from a large collection. Further requirements may be added to make this data "nice," but as long as these allow Planck-scale inhomogeneity and do not pick out a microscopic arrow of time, the conclusions should not change.

This construction allows $\tilde{\Sigma}$ to have an arbitrarily complicated topology. Indeed, any orientable compact threemanifold has a unique decomposition as a connected sum of "prime" manifolds [16,17]. But $\tilde{\Sigma}$ may also be topologically trivial: if each Σ_α is a three-sphere, the connected sum is also a three-sphere. We can thus reach a large set of initial data by starting with any initial values, cutting out a collection of Planck-size balls, changing the data on the balls, and gluing them back. The geometry of the "necks" between components is rather special, though, and it is an open question how much of the space of initial data can be reached this way.

For the special case of local spherical symmetry, the construction can be made explicit [18]. This case is "too symmetric" to meet the genericity condition for the gluing theorem, but it is possible to construct exact initial data on a space with topology $S^2 \times S^1$ made up of alternating expanding and contracting shells with an expansion that averages to zero [19].

Evolution.—We have established that on an initial hypersurface, a large class of initial data can exhibit small average expansion, hiding the macroscopic effect of a cosmological constant. But is this feature preserved in time? This is a hard question, whose answer almost certainly requires a better understanding of quantum gravity. In particular, the evolution equations, Eqs. (3a)–(3b), are classical approximations, which do not include the quantum fluctuations that presumably create the complex microscopic structure we are interested in. Naively, we might have two expectations: 1) Expanding regions grow in time, while contracting regions shrink, so if $\Lambda > 0$ the expanding regions should eventually dominate in a volume average, although this may take an arbitrarily long time [20]. (If $\Lambda < 0$, expanding regions will recollapse, so this is less of an issue [21]). 2) But nothing in this construction picks out a preferred initial time, so if the foamy structure is generated by quantum fluctuations, it should replicate itself: expanding regions should themselves fill up with new curvature fluctuations.

Without a better understanding of how (or whether) quantum fluctuations generate spacetime foam, it is unlikely that we can fully resolve this question. Still, we can look for hints from what we *do* know of the evolution.

Classical evolution: Let us first ask whether the classical evolution Eqs. (3a)–(3b) can preserve the averaged structure. This is similar to Buchert's question, in a somewhat different context [22], of whether a nonequilibrium "cosmic equation of state" can lead to a stationary averaged configuration.
This is at least a well posed question, although still a difficult one. First, we can only hope to learn about shorttime evolution. The initial data described here typically develop singularities, with minimal spheres in the connecting necks forming trapped surfaces that behave like black hole horizons [20,23]. Independent computations also indicate that Planck-scale fluctuations can disrupt the causal structure of spacetime [24]. It is generally assumed that quantum gravity will resolve such singularities, but classically they signal a breakdown of evolution.

Second, there are well known ambiguities in defining time derivatives of averages. To determine the derivative of an average $\langle\bullet\rangle$ over a region U, wemust specify how U changes in time. If U is fixed in terms of some set of coordinates, the result will not be invariant; if it is defined in terms of geometric quantities, it will typically be time dependent. Further, averages are often (although not always [25]) defined in term of integrals with a dynamical integration measure, providing an added source of time dependence [26].

Third, even if we know what we mean by "average," it's not so clear what we mean by "time." The splitting of spacetime into space and time is not unique. In the present formalism, this is reflected in the arbitrary choice of lapse function N. In principle, the physics can be captured by diffeomorphism-invariant, lapse-independent observables, but these are necessarily nonlocal [27], and are poorly understood. In practice, we usually refer instead to a "preferred" choice of lapse. For a Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW) cosmology with homogeneous and isotropic initial data, for instance, only a tiny class of lapse functions preserve these characteristics; the usual claim of homogeneity and isotropy is secretly a statement about the existence of these special lapse functions.

In view of these problems, and taking inspiration from the FLRWexample, we can ask whether *any* choice of lapse function preserves the averaged properties of our initial data. Let us start with the condition $\langle K\rangle = 0$. Following Ref. [26], define spatial averages as volume integrals,

$$\langle X\rangle_{\mathrm{U}} = \frac{1}{V_{\mathrm{U}}}\int_{\mathrm{U}} X\sqrt{g}\,d^3x \text{ with } V_{\mathrm{U}} = \int_{\mathrm{U}}\sqrt{g}\,d^3x, \qquad (6)$$

where the region U is defined in some time-independent way. Then, from Eqs. (3a)–(3b),

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle K\rangle &= \frac{1}{V_{\mathrm{U}}}\int_{\mathrm{U}} N\mathcal{L}_n(K\sqrt{g})\,d^3x = \\ &= \frac{1}{V_{\mathrm{U}}}\int_{\mathrm{U}} N(-R+3\Lambda)\sqrt{g}\,d^3x = \qquad (7)\\ &= \frac{1}{V_{\mathrm{U}}}\int_{\mathrm{U}} N(\Lambda + \frac{2}{3}K^2 - 2\sigma^2)\,d^3x\end{aligned}$$

If we choose a uniform time-slicing, $N = 1$, this becomes $\frac{d\langle K\rangle}{dt} = -\langle R\rangle + 3\Lambda$, which is essentially the second Friedmann equation for averaged quantities. But given the foamy nature of the initial geometry, there is no reason to choose a constant lapse function at the Planck scale. As long as the integrand in Eq. (7) doesn't have a definite sign—that is, as long as the shear (for positive Λ) or expansion (for negative Λ) is large in some regions—there will be an infinite number of choices of N for which the right-hand side of Eq. (7) vanishes. For a topologically complicated manifold, in particular, the curvature of the prime factors is typically negative, while that of the connecting necks is large and positive, so cancellation should not be hard to achieve.

We can further choose N to be invariant under $(g, K) \rightarrow (g, -K)$, which will guarantee that any integrand with an odd power of K will also average to zero. One might worry that our conditions could force the average curvature to be large. But while Eq. (7) implies $\langle NR\rangle \sim \Lambda\langle N\rangle$, for a lapse function with Planck scale structure it can still be true that $|\langle R\rangle| \ll |\langle NR\rangle/\langle N\rangle| \sim \Lambda$.

The second derivative is also simple:

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}\langle K\rangle = \frac{1}{V_U}\int_U [(\dot{N}+NK)\left(\Lambda + \frac{2}{3}K^2 - 2\sigma^2\right) + \\ +2N^2K^{ij}R_{ij}]\sqrt{g}\,d^3x\end{aligned} \qquad (8)$$

The last term contains an odd power of K, and goes to zero for a large enough region U. The first term has exactly the same form as Eq. (7), and $\dot{N}$ can be specified independently, so if the first derivative can be made to vanish, the second derivative can as well.

Higher derivatives are more complicated. $\mathcal{L}_n^3K$, for instance, contains derivative terms like $K\Delta K$ and higher order correlations like $\langle K^4\rangle - \langle K^2\rangle^2$, which probe structure at shorter distances. But each new derivative of $\langle K\rangle$ also comes with a new time derivative of N, which can be specified independently. Hence there is thus no obvious obstruction to choosing a time-slicing for which all of the time derivatives of $\langle K\rangle$ vanish.

This is a strong claim, implying that despite the presence of very high curvature at the Planck scale, there should exist—at least for short times—a foliation of spacetime by slices of vanishing average expansion. Of course, such a foliation would itself vary rapidly at the Planck scale, but given the foamy structure of the three-geometry, that should come as no surprise. Whether one can simultaneously choose a lapse function for which $\langle R\rangle$ remains small is a more difficult question, requiring future work.

Quantum evolution: In the absence of a full quantum theory of gravity, much less can be said about quantum evolution. As noted earlier, though, in many approaches to the quantum theory, the constraints—which are under much better control here than the evolution equations—are the fundamental objects [12,13]. Indeed, in a Wheeler-DeWitt-type approach, a solution of the quantum constraints centered around some superposition of connected sums [Eq. (4)] would give a *complete* description of the state.

Of course, time evolution must still be hidden somewhere in such a solution. To extract this behavior, we must address the notorious "problem of time" in quantum gravity [28]. It has recently been proposed that solutions to the constraints contain all possible "quantum reference systems," with particular frames selected by the choice of gauge-fixing [29]. This suggests a new way to pose our question: Does a typical solution of the Wheeler-DeWitt equation have a foamlike structure at the Planck scale in a generic quantum reference system?More concretely, it may be possible to introduce a particular matter "clock" to investigate the time evolution [30,31]. For the short term, this might be easiest in a spherically symmetric minisuperspace model based on Refs. [18,19].

It might be interesting to connect this approach to Hawking's four-dimensional Euclidean spacetime foam [32]. This would require a better understanding of the four-dimensional evolution of our initial data. But the necks in the connected sum [Eq. (4)] resemble throats of Schwarzschild black holes [20,23], for which the Euclidean continuation is well understood, so progress may be possible. It would also be worth looking further at the $\Lambda < 0$ case in light of the AdS/CFT correspondence. Here, there has been interesting work on the question of which topologies contribute, although mainly in the context of black holes and lower dimensions [33].

What this proposal does, and does not, do.— As early as 1957, Wheeler argued that

… it is essential to allow for fluctuations in the metric and gravitational interactions in any proper treatment of the compensation problem—the problem of compensation of "infinite" energies that is so central to the physics of fields and particles [34].

What I am proposing is a concrete realization of this vision. Several previous attempts have been made to model spacetime foam—see, for instance, Refs. [32,35,36]—but only a few have addressed the cosmological constant problem [37–40]. The new ingredients here are the ability to construct a large new class of initial data and the crucial realization that time reversal invariance allows, and perhaps even requires, the expansion and shear to average to zero.

This proposal addresses the "old" cosmological constant problem, the problem of large vacuum energy. It does not tell us whether the observed accelerated expansion of the Universe is caused by a small residual cosmological constant. It has recently been argued that higher order correlations of vacuum fluctuations might generate a small cosmological constant [9,21,41]. These would presumably show up here in higher correlations of the metric and extrinsic curvature, which appear in higher derivatives of averaged expansion and curvature.

While this proposal offers a natural explanation for small macroscopic expansion and shear, the requirement of small spatial curvature is less obvious. It is certainly possible to choose data for which $\langle R\rangle$ is small, and there are hints that this may be preferred by the gravitational partition function, but a better understanding is needed. The answer may be dynamical. In a standard closed FLRW cosmology, after all, the spatial curvature is initially very high and decreases in time. There is some evidence that the same is true here: the second time derivative of the averaged curvature $\langle R\rangle$ can be calculated, and while the result depends on the lapse function, most of the terms are negative definite.

The proposal also does not attempt to explain the emergence of a macroscopic arrow of time, an important question but one that is probably logically independent. Nor have I shown that long wavelength disturbances sitting on top of Planck-scale spacetime foam will be described by classical general relativity. This is the notorious "averaging problem" [11,25,26], the problem of how the nonlinearities of general relativity interact with the process of taking averages. Here, though, effective field theory arguments may help [3]. Nothing in this construction has broken spatial diffeomorphism invariance, so the effective action should involve only terms invariant under that symmetry. This implies a Hořava – Lifshitz action [42], of which general relativity is a special case. If, as I have argued, there is also nothing "preferred" about the initial time slice, then time reparametrization invariance should also be a symmetry, in which case the large scale effective action should take the usual Einstein-Hilbert form.

So far, I have treated a quantum gravitational problem semiclassically, appealing to quantum mechanics to generate Planck-scale structure but relying on classical general relativity to describe constraints and evolution. We might next consider coherent states centered on the configurations described here, and construct more general wave functions as superpositions. But this would force us to confront some of the standard problems of quantum gravity: the metric and extrinsic curvature are not true observables, and to define an average we would have to figure out what "at the same point" means in different components of the wave function.

Interesting technical questions remain as well. The gluing construction I have used provides a large set of initial data, but it is not known just how much of the total space of initial data is covered. More generally, gluing is certainly not the only way to produce data with no arrow of time at the Planck scale, and a full understanding of the measure of such data is still lacking. It would also be useful to further investigate higher order correlations, or, conversely, to see to what extent further restrictions (e.g., $\langle \mathcal{L}_n^3 K \rangle = 0$) limit the possible initial data.

For all these limitations, though, this proposal suggests a simple and radical solution to a deep problem. If a large cosmological constant is generated by vacuum fluctuations at the Planck scale, then perhaps that is also the place to look for answers. I have shown that at least in principle, hiding a Planck scale cosmological constant in Planck scale curvature fluctuations is not only possible, but can be quite natural. We may have simply been looking in the wrong place.

I would like to thank Andy Albrecht, Sean Carroll, Piotr Chrusciel, Markus Luty, Don Page, Daniel Pollack, Albert Schwarz, and Bob Wald for helpful discussions. This work was supported in part by Department of Energy Grant No. DE-FG02-91ER40674.

*carlip@physics.ucdavis.edu

[1] J. Holland and S. Hollands, A small cosmological constant due to non-perturbative quantum effects, Classical Quantum Gravity 31, 125006 (2014).

[2] J. Martin, Everything you always wanted to know about the cosmological constant problem (but were afraid to ask), C.R. Phys. 13, 566 (2012).

[3] C. P. Burgess, Quantum gravity in everyday life: General relativity as an effective field theory, Living Rev. Relativity 7, 5 (2004).

[4] S. M. Carroll, The cosmological constant, Living Rev. Relativity 4, 1 (2001).

[5] By M. P. Hobson, G. P. Efstathiou, and A. N. Lasenby, GeneralRelativity: AnIntroduction for Physicists (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2006), p. 187.

[6] S. Weinberg, The cosmological constant problem, Rev. Mod. Phys. 61, 1 (1989).

[7] N. Kaloper and A. Padilla, Sequestering the Standard Model Vacuum Energy, Phys. Rev. Lett. 112, 091304 (2014).

[8] J. A. Wheeler, Geons, Phys. Rev. 97, 511 (1955).

[9] Q. Wang, Z. Zhu, and W. G. Unruh, How the huge energy of quantum vacuum gravitates to drive the slow accelerating expansion of the universe, Phys. Rev. D 95, 103504 (2017).

[10] R. M. Wald, Asymptotic behavior of homogeneous cosmological models in the presence of a positive cosmological constant, Phys. Rev. D 28, 2118 (1983).

[11] C. Clarkson, G. Ellis, J. Larena, and O. Umeh, Does the growth of structure affect our dynamical models of the universe? The averaging, backreaction and fitting problems in cosmology, Rep. Prog. Phys. 74, 112901 (2011).

[12] B. S. DeWitt, Quantum theory of gravity 1. The canonical theory, Phys. Rev. 160, 1113 (1967).

[13] C. Teitelboim, Causality Versus Gauge Invariance in Quantum Gravity and Supergravity, Phys. Rev. Lett. 50, 705 (1983).

[14] P. T. Chrusciel, J. Isenberg, and D. Pollack, Gluing Initial Data Sets for General Relativity, Phys. Rev. Lett. 93, 081101 (2004).

[15] P. T. Chrusciel, J. Isenberg, and D. Pollack, Initial data engineering, Commun. Math. Phys. 257, 29 (2005).

[16] J. Milnor, A unique decomposition theorem for 3-manifolds, Am. J. Math. 84, 1 (1962).

[17] D. Giulini, Properties of three manifolds for relativists, Int. J. Theor. Phys. 33, 913 (1994).

[18] J. Morrow-Jones and D. M.Witt, Inflationary initial data for generic spatial topology, Phys. Rev. D 48, 2516 (1993).

[19] S. Carlip (to be published).

[20] M. Burkhart, M. Lesourd, and D. Pollack, Null geodesic incompleteness of spacetimes with no CMC Cauchy surfaces, arXiv:1902.07411.

[21] Q. Wang and W. G. Unruh, Vacuum fluctuation, microcyclic 'universes' and the cosmological constant problem, arXiv:1904.08599.

[22] T. Buchert, A Cosmic equation of state for the inhomogeneous universe: Can a global far-from-equilibrium state explain dark energy, Classical Quantum Gravity 22, L113 (2005).

[23] M. Burkhart and D. Pollack, Causal geodesic incompleteness of spacetimes arising from IMP gluing, arXiv:1907.00295.

[24] S. Carlip, R. A. Mosna, and J. P. M. Pitelli, Vacuum Fluctuations and the Small Scale Structure of Spacetime, Phys. Rev. Lett. 107, 021303 (2011).

[25] S. R. Green and R. M. Wald, A new framework for analyzing the effects of small scale inhomogeneities in cosmology, Phys. Rev. D 83, 084020 (2011).

[26] T. Buchert, On average properties of inhomogeneous fluids in general relativity: Dust cosmologies, Gen. Relativ. Gravit. 32, 105 (2000).

[27] C. G. Torre, Gravitational observables and local symmetries, Phys. Rev. D 48, R2373 (1993).

[28] K. V. Kuchaˇr, Time and interpretations of quantum gravity, Int. J. Mod. Phys. D 20, 3 (2011).

[29] P. A. Höhn, Switching internal times and a new perspective on the 'wave function of the universe', Universe 5, 116 (2019).

[30] J. D. Brown and K. V. Kuchaˇr, Dust as a standard of space and time in canonical quantum gravity, Phys. Rev. D 51, 5600 (1995).

[31] J. D. Brown and D. Marolf, On relativistic material reference systems, Phys. Rev. D 53, 1835 (1996).

[32] S.W. Hawking, Space-Time Foam, Nucl. Phys. B144, 349 (1978).

[33] R. Dijkgraaf, J. Maldacena, G. Moore, and E. Verlinde, A black hole Farey tail, arXiv:hep-th/0005003.

[34] J. A. Wheeler, On the nature of quantum geometrodynamics, Ann. Phys. (N.Y.) 2, 604 (1957), p. 610.

[35] L. Crane and L. Smolin, Renormalizability of general relativity on a background of space-time foam, Nucl. Phys. B267, 714 (1986).

[36] Y. J. Ng, Space-time foam, Int. J. Mod. Phys. D 11, 1585 (2002).

[37] S. R. Coleman, Why there is nothing rather than something: A theory of the cosmological constant, Nucl. Phys. B310, 643 (1988).

[38] A. A. Kirillov and E. P. Savelova, On the value of the cosmological constant in a gas of virtual wormholes, Gravitation Cosmol. 19, 92 (2013).

[39] R. Garattini, A space-time foam approach to the cosmological constant and entropy, Int. J. Mod. Phys. D 11, 635 (2002).

[40] S. Carlip, Space-Time Foam and the Cosmological Constant, Phys. Rev. Lett. 79, 4071 (1997).

[41] E. Santos, The cosmological constant problem or how the quantum vacuum drives the slow accelerating expansion of the universe, arXiv:1805.03018.

[42] P. Horava, Quantum Gravity at a Lifshitz Point, Phys. Rev. D 79, 084008 (2009).

PHYSICAL REVIEW LETTERS 123, 131302 (2019)
S. Carlip * Hiding the Cosmological Constant

https://www.researchgate.net/publication/336112912_Hiding_the_Cosmological_Constant/fulltext/5d8eae2692851c33e942faa5/336112912_Hiding_the_Cosmological_Constant.pdf?origin=publication_detail