Le Flot de Yang-Mills pour les connexions

A.Balan

October 7, 2019

Abstract

En prenant un fibré muni de connexions, un flot de Yang-Mills est défini.

1 Le flot de Ricci

Le flot de Ricci a été défini par Hamilton en comparant avec l'équation de la chaleur [B] :

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2Ricc(g)$$

$Ricc(g)$ étant la courbure de Ricci de la métrique g.

2 Le flot de Yang-Mills pour les connexions

Pour un espace de connexions sur un fibré au-dessus d'une variété riemannienne, on définit un flot au moyen de la courbure.

Une codifférentielle est définie par l'opérateur de Hodge $*$ [J] :

$$\delta_\nabla = * \circ d_\nabla \circ *$$

La courbure d'une connexion ∇ est une 2-forme à valeurs dans les endomorphismes :

$$R_\nabla(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$$

On définit un flot sur l'espace des connexions par la formule suivante :

$$\frac{\partial \nabla^t}{\partial t} = \delta_{\nabla^t}(R_{\nabla^t})$$

Le flot est bien défini car ce sont de chaque côté de l'égalité une 1-forme à valeurs dans les endomorphismes du fibré.

3 Les points fixes du flot

Les points fixes du flot pour des connexions métriques sont définis par les connexions dont la courbure vérifie :

$$\delta_\triangledown(R_\triangledown) = 0$$

ce qui équivaut à, $\Delta_\triangledown = d_\triangledown \circ \delta_\triangledown + \delta_\triangledown \circ d_\triangledown$ étant le Laplacien :

$$\Delta_\triangledown(R_\triangledown) = 0$$

vu que la courbure est fermée ; ce sont donc les connexions dont la courbure est une 2-forme harmonique.

References

[B] M.Boileau, G.Besson, C.Sinestrari, G.Tian, ”Ricci Flow and Geometric Applications”, Springer, 2010.

[GHL] S.Gallot, D.Hulin, J.Lafontaine, ”Riemannian Geometry”, Springer, 2004.

[J] J.Jost, ”Riemannian Geometry and Geometric Analysis”, Springer, 2008.