

Квантование сверхпроводящей цепи черного ящика

Simon E. Nigg, Hanhee Paik, Brian Vlastakis, Gerhard Kirchmair, Shyam Shankar,
Luigi Frunzio, Michel Devoret, Robert Schoelkopf and Steven Girvin
Departments of Physics and Applied Physics, Yale University, New Haven, CT 06520, USA
(Dated: April 4, 2012)

Представлен полуклассический метод определения эффективного низкоэнергетического квантового гамильтониана слабоангармонических сверхпроводящих цепей, содержащих мезоскопические джозефсоновские переходы, связанные с электромагнитными средами, выполненными из произвольной комбинации распределенных и сосредоточенных элементов. Удобный базис, улавливающий многомодовую физику, задается квантованными собственными модами линейаризованной схемы и полностью определяется классической линейной функцией отклика. Метод используется для численного расчета низкоэнергетического спектра 3D-трансмонной системы и нахождения количественного согласия с измерениями.

Сверхпроводящие электронные схемы, содержащие нелинейные элементы, такие как джозефсоновские переходы (JJ), представляют интерес для квантовой обработки информации [1, 2], что обусловлено их нелинейностью и слабой собственной диссипацией. Дискретный низкоэнергетический спектр таких схем теперь может быть измерен с точностью более одной миллионной [3]. Вполне естественно возникает вопрос о том, насколько хорошо можно теоретически моделировать искусственные атомы, созданные человеком. Действительно, все больше свидетельств указывает на то, что из-за увеличения силы связи [4] сегодняшние модели достигли своих пределов [5-9] и для того, чтобы повысить нашу способность проектировать, оптимизировать и манипулировать этими системами, разработка моделей за этими пределами становится всё более необходимой. В этом и состоит цель настоящей работы.

Изолированный идеальный JJ имеет только одну коллективную степень свободы: параметр порядка разности фаз ϕ по переходу. Нулевая температура, физика субзвора этой системы с энергией Джозефсона E_J и энергией заряда E_C описывается Гамильтонианом куперовской пары

$$H_{\text{CPV}} = 4E_C(\hat{N} - N_g)^2 - E_J \cos(\hat{\phi}), \quad (1)$$

где \hat{N} – оператор числа куперовских пар, сопряженный с $\hat{\phi}$ и смещенным зарядом N_g . Эта модель точно разрешима в терминах функций Матье (Mathieu) [10, 11]. Важнейшая особенность, вытекающая из этого решения, заключается в том, что дисперсия заряда, т. е. максимальное изменение собственных энергий N_g , экспоненциально подавляется с помощью E_J/E_C , а относительная ангармоничность уменьшается только алгебраически с более

медленным степенным законом по E_J/E_C . Как следствие, существует режим с $E_J \gg E_C$ (режим трансмона), где ангармоничность намного больше ширины линии (например, из-за флуктуации смещенного заряда N_g), что удовлетворяет условию работоспособности кубита [12]. Это режим и представляет интерес.

Чтобы быть полезным для задач квантовой обработки информации, несколько кубитов Джозефсона должны быть сделаны управляемо взаимодействующими друг с другом, а паразитные взаимодействия с неконтролируемыми степенями свободы (воздействия среды) должны быть сведены к минимуму. В схемной квантовой электродинамике [2, 11, 13] (сQED) это достигается путем связывания JJs с общей микроволновой средой с требуемой дискретной модовой структурой. До сих пор такие системы в основном описывались теоретически моделями, хорошо известными из квантовой оптики, такими как одномодовая модель Джейнса-Каммингса и ее расширениями [14].

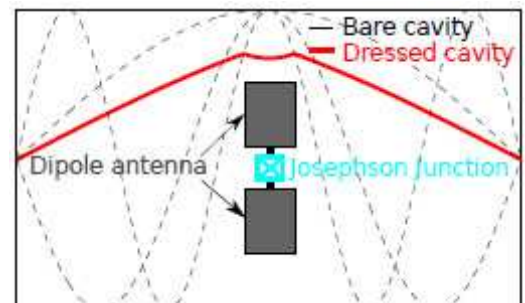


Рис. 1 (цветной в онлайн). JJ внутри 3D-микроволнового резонатора, в центре широкополосная дипольная антенна. Наличие антенны изменяет геометрию кавитационного режима (полная (красная) кривая). Точное описание требует включения многих "голых" режимов (пунктирные кривые).

При применении к сверхпроводящим схемам с многоуровневыми искусственными атомами, многомодовыми полостями и повышенными прочностями связи [4, 6, 7] возникает ряд технических и практических трудностей, связанных с этими подходами. Например, проявление значимых эффектов невычислимых состояний кубита требует перехода к высоким порядкам теории возмущений [15]. Кроме того, определение параметров *голого* гамильтониана, в терминах которых определяются эти модели, является громоздким и требует итераций между экспериментом и теорией. Возможно, еще более важными являются недостатки традиционных подходов в работе с несколькими режимами полости. Действительно, были измерены высокоэнергетические нерезонансные моды резонатора, что показало существенный вклад в силу межкубитного взаимодействия [8, 15], а через многомодовый эффект Перселла влияет на когерентные свойства (релаксация и дефазирование) кубитов [5]. Однако попытки включить эту многомодовую физику в стандартные модели приводят к трудностям с расходящимися рядами и проблемами перенормировки КЭД [8, 16], которые, насколько нам известно, остаются нерешенными. Рис. 1 иллюстрирует происхождение проблемы на примере JJ внутри трехмерной полости (3D-трансмон) [3]. Наличие относительно большой металлической дипольной антенны [17] может сильно изменить геометрию мод резонатора. Этот, по существу, классический эффект, может быть точно объяснен только включением достаточно большого количества "голых" мод.

Напротив, чтобы найти базис, который включает основные эффекты связи между многоуровневыми кубитами и многомодовым резонатором мы предлагаем начать с рассмотрения связанной, но линейризованной задачи, а затем учитывать слабую ангармоничность потенциала Джозефсона с помощью теории возмущений. Решающее предположение, сделанное здесь, заключается в том, что эффектами дисперсии заряда можно безопасно пренебречь. Это разумно, учитывая, что в современных реализациях трансмонных кубитов [3, 18] дисперсия заряда вносит лишь незначительную величину в измеренные ширины линий. В предыдущей работе обсуждалась нелинейная динамика JJ, встроенного во внешнюю цепь классически [19]. Здесь мы идем

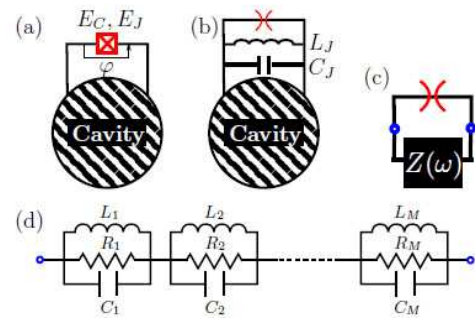


Рис. 2 (цветной в онлайн). (а) схема JJ (красный крест в прямоугольнике), связанная с произвольной линейной схемой (полосатый диск). (б) элемент Джозефсона заменяется параллельной комбинацией: линейной индуктивности L_J , линейной емкости C_J и чисто нелинейным элементом с энергией $E_J(1 - \cos(\varphi)) - (E_J/2)\varphi^2$, представленным символом "паук" (spider). (с) линейная часть схемы, показанной в (б), сосредоточена в импеданс $Z(\omega)$ с видимым нелинейным элементом. (д) схема замещения Фостера (полное разложение) импеданса $Z(\omega)$.

на один шаг дальше и показываем, как знание классической, в принципе измеримой линейной функции отклика, позволяет нам квантовать схему, обрабатывая кубиты и резонатор на равных основаниях.

Случай одиночного соединения. Мы рассматриваем систему JJ с *голой* джозефсоновской энергией E_J и зарядовой энергией E_C , параллельно с линейной, но в остальном в произвольной электромагнитной среде, как показано на рис. 2(а). Пренебрегая диссипацией, несмещенный переход описывается гамильтонианом (1). При низких энергиях, когда $E_J \gg E_C$, квантовые флуктуации фазы φ через переход малы по сравнению с π и, как подчеркивалось во введении, вероятность квантового туннелирования фазы между минимумами косинусного потенциала пренебрежимо мала. Целесообразно расширить интервал в степенях φ , получив таким образом приближенное схематическое представление на рис. 2(б), в котором символ "паука" [19] представляет чисто нелинейную часть и $L_J = \phi_0^2/E_J$ и $C_J = e^2/(2E_C)$ линейную части элемента Джозефсона. Здесь $\phi_0 = \hbar/(2e)$ — уменьшенный квант потока. Для главного порядка энергия элемента "паук" задается выражением $E_{nl} = -\phi_0^2\varphi^4/(24L_J)$.

Величиной, имеющей центральное значение в нижеследующем, является импеданс $Z(\omega)$ линейной части схемы, изображенной на фиг. 2 с). Последняя является комплексной мероморфной функцией и в силу теоремы Фостера [20, 21] может быть воспроизведена с помощью

эквивалентной схемы параллельных LCR осцилляторов, последовательно показанных на фиг. 2 (d). Явно:

$$Z(\omega) = \sum_{p=1}^M \left(j\omega C_p + \frac{1}{j\omega L_p} + \frac{1}{R_p} \right)^{-1}, \quad (2)$$

где M – число мод [22]. Мы приняли электротехническое соглашение о записи мнимой единицы как $j = -i$. Такое отображение эквивалентной схемы соответствует на языке электротехники диагонализации линеаризованной системы связанных гармонических осцилляторов. Резонансные частоты линейного контура определяются вещественными частями полюсов Z или, что более удобно, вещественными частями нулей проводимости, определяемых как $Y(\omega) = Z(\omega)^{-1}$, а для слабой диссипации, т. е. $R_p \gg \sqrt{L_p/C_p}$, задаются выражением $\omega_p = (L_p C_p)^{-\frac{1}{2}}$. Мнимые части корней $(2R_p C_p)^{-1}$ дают резонансы конечной ширины. Эффективные сопротивления задаются формулой $R_p = 1/\text{Re}Y(\omega_p)$, а эффективные емкости определяются производной частоты по резонансу проводимости как $C_p = (1/2)\text{Im}Y'(\omega_p)$. Здесь и далее первыми стоят производную по частоте. Заметим, что $\text{Im}Y'(\omega) > 0$ [20]. Вместе с этим получаем компактное выражение для фактора моды p :

$$Q_p = \frac{\omega_p \text{Im}Y'(\omega_p)}{2 \text{Re}Y(\omega_p)}. \quad (3)$$

Применение к режиму представляющему кубит, (3) дает оценку предела Перселла на время жизни кубита $T_1 = Q_{\text{qb}}/\omega_{\text{qb}}$ из-за фотонов, "вытекающих" из полости.

Чтобы получить эффективный низкоэнергетический квантовый гамильтониан схемы, мы пренебрегаем диссипацией ($R_p \rightarrow \infty$) и вводим нормальные (плавающие) координаты $\phi_p(t) = f_p e^{j\omega_p t} + (f_p)^* e^{-j\omega_p t}$, связанные с каждым осциллятором LC в эквивалентной схеме. Мы можем тогда сразу написать классический гамильтониан эквивалентной схемы как $\mathcal{H}_0 = 2 \sum_{p=1}^M (f_p)^* (L_p)^{-1} f_p$, где индекс 0 указывает на то, что мы рассматриваем линейную часть схемы. Закон Кирхгофа подразумевает, что с точностью до произвольной постоянной $\phi(t) = \sum_{p=1}^M \phi_p(t)$, где $\phi(t) = \int_{-\infty}^t V(\tau) d\tau$ – плавающая координата пересечения с напряжением $V(t)$. Заметим, что по второму соотношению Джозефсона разность фаз параметра порядка связана с последним через $\varphi(t) = \phi(t)/\Phi_0$ (по модулю 2π).

Квантование достигается каноническим способом [23, 24] путем замены амплитуд потока эквивалентных осцилляторов операторами в виде

$$f_p^{(*)} \rightarrow \sim \sqrt{\frac{\hbar}{2}} Z_p^{\text{eff}} a_p^{(\dagger)}, \quad Z_p^{\text{eff}} = \frac{2}{\omega_p \text{Im}Y'(\omega_p)} \quad (4)$$

с безразмерными бозонными операторами уничтожения (рождения) a_p (a_p^\dagger). Прямая подстановка дает гамильтониан $H_0 = \sum_p \hbar \omega_p a_p^\dagger a_p$ из M несвязанных гармонических осцилляторов (опуская энергии нулевого уровня) и шредингеровского оператора потока через переход

$$\hat{\Phi} = \sum_{p=1}^M \sqrt{\frac{\hbar}{2}} Z_p^{\text{eff}} (a_p + a_p^\dagger). \quad (5)$$

Подчеркнем, что гармонические моды a_p представляют собой коллективные возбуждения линейного контура и их частоты ω_p – "одетые" эквиваленты частот генератора. Связь в линейной цепи обрабатывается точно и, в частности, не используется приближение вращающейся волны. Гамильтониан контура, включая JJ, тогда принимает вид: $H = H_0 + H_{\text{nl}}$, где $H_{\text{nl}} = -(\hat{\Phi})^4/(24\Phi_0^2 L_J) + \mathcal{O}((\hat{\Phi}/\Phi_0)^6)$. Физическое понимание может быть получено, рассматривая нелинейные члены как возмущение поверх H_0 , предполагая собственные состояния $|n_1, n_2, \dots, n_M\rangle$ последних с невырожденными энергиями $E_{n_1, n_2, \dots, n_M}^{(0)} = \sum_i n_i \hbar \omega_i$. Рассматривая только первый порядок нелинейности ϕ^4 , получаем приведённый гамильтониан

$$H_4 = H_0' + \frac{1}{2} \sum_{pp'} \chi_{pp'} \hat{n}_p \hat{n}_{p'}. \quad (6)$$

Здесь $\hat{n}_p = a_p^\dagger a_p$ и $H_0' = H_0 + \sum_p \Delta_p \hat{n}_p$ включают в себя поправку к сдвигу Лэмба $\Delta_p = -\frac{e^2}{2L_J} (Z_p^{\text{eff}} \sum_q Z_q^{\text{eff}} - (Z_p^{\text{eff}})^2/2)$. Далее мы ввели обобщенный χ -сдвиг $\chi_{pp'}$ между модами p и p' . Ясно, что $\alpha_p \equiv \chi_{pp}$ – это ангармоничность первого возбужденного состояния (авто-Керра) моды p , в то время как $\chi_{pp'} = \chi_{p'p}$ с $p \neq p'$ – зависимый от состояния сдвиг частоты возбуждения (кросс-Керра) моды p из-за наличия возбуждения с модой p' . Находим

$$\chi_{pp} = -\frac{L_p C_J}{L_i C_n} E_C, \quad \chi_{pp'} = -2\sqrt{\chi_{pp} \chi_{p'p'}}. \quad (7)$$

Заметим, что все моды приобретают некоторую ангармоничность из-за наличия нелинейного JJ. Таким образом, строгого разделения кубита и полости больше нет. Проще говоря, режим с сильной (слабой) ангармоничностью будет называться кубитоподобным (полость-подобным). Интересно, что в приближении

самого низкого порядка, ангармоничность моды p — она видится пропорциональной индуктивному отношению [19] $i_p \equiv L_p/L_J$ и обратно пропорциональной емкостному отношению $c_p \equiv C_p/C_J$. При отсутствии гальванически короткого соединения в цепи резонатора, как в случае трансмона, кубит емкостно соединен с полостью, что следует из правила суммы: $\lim_{\omega \rightarrow 0} [Z(\omega)/(j\omega)] = \sum_p L_p = L_J$ that $i_p \leq 1$. Аналогичным образом, в отсутствии какой-либо емкости в сериях с C_J , следует, что $c_p \geq 1$, потому что $\lim_{\omega \rightarrow 0} [j\omega Z(\omega)] = \sum_p L_p C_p^{-1} = C_{\Sigma}^{-1}$, где $C_{\Sigma} = C_J + C_{\parallel}$ и C_{\parallel} — общая емкость параллельная с C_J . Следовательно, мы видим, что в экспериментально-релевантном случае эффективная ангармоничность кубитоподобной моды всегда уменьшается по сравнению с ангармоничностью "голого" кубита, заданной $-E_C$ [11]. Примечательно, что в этом приближении мы находим (см. (7)), что кросс-керровский сдвиг между двумя модами в два раза больше геометрического среднего ангармоничностей этих двух мод.

Подчеркнем, что вышеприведенные выражения, однако, не учитывают эффекты более высоких порядков ангармоничности, таких как изменение знака поперечного сдвига Керра, наблюдаемого в режиме оседлости [11, 25]. Однако такие эффекты полностью захватываются полной моделью $H = H_0 + H_{nl}$, которая может быть решена численно. Примечательно, что поскольку *одетые* моды уже повторяют все *голые* гармонические моды, обычно для хорошей сходимости необходимо включить только несколько одетых мод $M^* \ll M$, что значительно уменьшает размер эффективного гильбертова пространства, которое масштабируется как $\prod_{p=1}^{M^*} (N_p + 1)$, где N_p — максимально допустимое число возбуждений в режиме p (например, $N_p = 1$ в двухуровневом приближении).

Рассеяние заряда. По предположению эффекты дисперсии заряда игнорируются в приведенном выше подходе. Однако можно спросить, как влияет дисперсия заряда изолированного JJ, когда последний связан с полостью. Как и в модели Кальдейра-Леггетта (Caldeira-Leggett) [26], связь между JJ и гармоническими осцилляторами подавляет вероятность туннелирования потока и, следовательно, дополнительно уменьшает дисперсию заряда кубита. Простая оценка коэффициента подавления обеспечивается вероятностью P_0 выхода схемы в основное

состояние после события туннелирования потока и определяется коэффициентом "Лэмба-Мессбауэра" (Lamb-Mössbauer) $P_0 \approx e^{-\frac{1}{2} \sum_{p \neq q} b \frac{\delta q^2}{2C_p}} / (h\omega_p)$, где сумма исключает кубитную моду и $\delta q = C_{J\phi_0/\tau}$ — заряд (импульс), порожденный проскальзыванием потока ϕ_0 через JJ длительностью τ и $C_p = (1/2) \text{Im} Y'(\omega_p)$. Таким образом, наше предположение о пренебрежении дисперсией заряда кубита хорошо обосновано.

Интересно, однако, что каждая собственная мода системы наследует некоторую дисперсию заряда. Этот эффект, по существу являющийся следствием гибридизации, имеет особое значение для таких приложений, как хранение квантовой информации в полостях с высокой добротностью, связанных с JJ, и является предметом незавершенной работы.

Обобщение на n -переходы. Подход может быть распространен на схемы с несколькими JJ, подключенными параллельно к общей линейной схеме. Подробности приведены в дополнительном материале [27], и здесь мы излагаем только результаты. Для N кубитов резонансные частоты линейной части контура определяются нулями $Y_k(\omega) \equiv Z_{kk}(\omega)^{-1}$ при любом выборе опорного порта $k = 1, \dots, N$, где Z -матрица импеданса $N \times N$ линейной части схемы с портом, связанным с каждым переходом. Операторы потока N переходов с опорным портом k , задаются формулой ($l = 1, \dots, N$)

$$\hat{\Phi}_l^{(k)} = \sum_{p=1}^M \frac{Z_{lk}(\omega_p)}{Z_{kk}(\omega_p)} \sqrt{\frac{\hbar}{2}} Z_{kp}^{\text{eff}} (a_p + a_p^\dagger), \quad (8)$$

где $Z_{kp}^{\text{eff}} = 2/[\omega_p \text{Im} Y'_k(\omega_p)]$. Обратим внимание на то, что резонансные частоты не зависят от выбора опорного порта, в то время как собственные моды зависят от него. В самом низком порядке РТ и в приближении ϕ^4 находим:

$$\alpha_p = -12\beta_{pppp}, \quad \chi_{qp} = -24\beta_{qqpp}, \quad q \neq p, \quad (9)$$

а также коррекцию на лэмбовский сдвиг $\Delta_p = 6\beta_{pppp} - 12\sum_q \beta_{qqpp}$. Здесь $\beta_{qq'pp'} = \sum_{s=1}^N \frac{e^2}{24L_j(s)} \xi_{sq} \xi_{sq'} \xi_{sp} \xi_{sp'}$ и выбран первый порт в качестве опорного ($k = 1$), $\xi_{sp} = \frac{Z_{s1}(\omega_p)}{Z_{11}(\omega_p)} \sqrt{Z_{1p}^{\text{eff}}}$. Заметим, что неравенство Коши-Шварца подразумевает, что $|\chi_{qp}| \leq 2\sqrt{\alpha_q \alpha_p}$. Кроме того, если q и q' относятся к двум различным кубитоподобным модам, $\chi_{qq'}$ является мерой для общей силы взаимодействия (опосредованной

ν_{01} (GHz)		ν_c (GHz)		ν_{02} (GHz)		α_{qb} (MHz)		χ (MHz)		L_J (nH)	C_J (fF)
7.77	(7.763)	8.102	(8.105)	15.33	(15.333)	-210	(-193)	-90	(-80.6)	5.83	7.6
7.544	(7.54)	8.126	(8.05)	14.808	(14.830)	-280	(-249)	-30	(-33.0)	6.12	9.2
7.376	(7.376)	7.858	(7.864)	14.489	(14.495)	-264	(-257)	-37.5	(-38.7)	6.67	4.0
7.058	(7.045)	8.005	(8.023)	13.788	(13.794)	-328	(-295)	-13.2	(-13.3)	7.45	5.2
6.808	(6.793)	8.019	(8.017)	13.286	(13.294)	-330	(-293)	-8	(-8.4)	7.71	7.8
6.384	(6.386)	7.832	(7.823)	12.45	(12.449)	-318	(-324)	-5.4	(-7.6)	9.40	0.34

Табл. 1. Низкоэнергетический спектр ($\nu_{01}, \nu_c, \nu_{02}$), кубитная ангармоничность (α_{qb}) и зависящий от состояния сдвиг резонатора (χ) шести 3D-трансонов. Результаты представлены в формате: эксперимент (теория). Теоретические значения получены из минимального квадратного соответствия в C_J численно вычисленных трех нижних энергетических уровней Φ^6 -модели. Соответствующие значения C_J приведены в последнем столбце. Их порядок величины (несколько фемтофард) согласуется с оценками, основанными на размерах соединений. Индуктивности Джозефсона L_J получены из измерений сопротивления переходов при комнатной температуре.

полостью и прямой диполь-дипольной связью) между этими кубитами.

Сравнение с экспериментом. В качестве демонстрации метода применим его к случаю, показанному на рис. 1 из одного JJ, связанного с 3D-полостью [3]. Вход в соединительный порт Y представляет собой параллельную комбинацию линеаризованного кубитного входа и входа Y_c системы резонатор-антенна, т. е. $Y(\omega) = j\omega C_J - j/(\omega L_J) + Y_c(\omega)$. Предполагается, что переход не имеет диссипации, соответствующей ограниченной по Перселю кубиту, а омические потери полости включены в Y_c , которая является комплексной. Индуктивность Джозефсона L_J выводится из измеренного сопротивления перехода при комнатной температуре RT, экстраполируя до рабочей температуры [28] 15mk и используя отношение Амбегаокара-Баратоффа (Ambegaokar-Baratoff) $E_J = h\Delta/(8e^2 R_T)$. C_J – единственный свободный параметр, получается путем подгонки трех нижних энергетических уровней численного решения модели Φ^6 к измеренному спектру [3]. Хотя Y_c может в принципе быть получен из измерений тока-напряжения – это не практично для системы, где для антенны трудно получить доступ неинвазивно, находясь внутри замкнутой полости высокой добротности. Вместо этого мы используем программное обеспечение для высокочастотного моделирования конечных элементов (HFSS) и получаем $Y_c(\omega)$ путем численного решения уравнений Максвелла. Подробности этого этапа моделирования приведены в дополнительном материале [27].

Из нулей мнимой части проводимости и их наклонов мы строим и диагонализуем гамильтониан Φ^6 в усеченном гильбертовом пространстве, сохраняя в общей сложности три "одетые" моды (один кубит и две моды полости), позволяя максимально десять возбуждений на моду. Результаты подгонки низкоэнергетического спектра шести различных образцов представлены

в табл. 1, где сравниваются предсказанные и измеренные кубитные ангармоничности и χ -сдвиги. Мы находим согласие с измеренным спектром на субпроцентном уровне и в пределах десяти процентов с измеренными ангармоничностями и χ -сдвигами.

Заключение и выводы. Представлен простой метод определения эффективного низкоэнергетического гамильтониана широкого класса сверхпроводящих схем, содержащих сосредоточенные или распределенные элементы. Этот метод подходит для слабо нелинейных схем, для которых нормальные режимы линеаризованной классической схемы обеспечивают хорошую основу в квантовом случае. Для N -кубитной системы требуется только знание $N \times N$ (классической) матрицы импеданса. Работая в основе "одетых" состояний, параметры, которые появляются в гамильтониане, включают большую часть перенормировки, вызванной связью между многоуровневым искусственным атомом и многорежимным резонатором. Следовательно, число свободных параметров значительно уменьшается по сравнению со стандартными моделями, основанными на парадигме Джейнса-Каммингса (Jaynes-Cummings), выраженной в терминах экспериментально недоступных "голых" параметров. Показана полезность этого метода при проектировании сверхпроводящих квантовых блоков обработки информации путем вычисления низкоэнергетического спектра 3D-трансонов. Наконец, эта модель может представлять собой подходящую отправную точку для будущих исследований возникающего режима сверхсильной связи cQED.

Благодарности. Мы благодарим Клаудию де Гранди (Claudia De Grandi), Юстаса Эдвардса (Eustace Edwards) и Мазяра Миррахими (Mazyar Mirrahimi) за обсуждения и Михаэля Гая (Mikhael Guy) из Йельского центра HPC за помощь с численным моделированием. SEN признает финансовую поддержку со стороны швейцарского NSF. HP, GK, BV, LF, MD, RS и признает финансовую поддержку с целью, IARPA, ARO (Контракт W911NF-09-1-0514) и американской

NSF (контракт DMR-1004406). Все заявления о фактах, мнениях или выводах, содержащиеся в настоящем документе, принадлежат авторам и не должны толковаться как представляющие официальные взгляды или политику IARPA или правительства США.

Ссылки

- [1] M. H. Devoret and J. M. Martinis, *Quantum Information Processing* **3**, 1 (2004).
- [2] A. Wallraff, D. I. Schuster, A. Blais, L. Frunzio, R.-S. Huang, J. Majer, S. Kumar, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, *Nature* **431**, 162 (2004).
- [3] H. Paik, D. I. Schuster, L. S. Bishop, G. Kirchmair, G. Catelani, A. P. Sears, B. R. Johnson, M. J. Reagor, L. Frunzio, L. I. Glazman, S. M. Girvin, M. H. Devoret, and R. J. Schoelkopf, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 240501 (2011).
- [4] M. Devoret, S. Girvin, and R. Schoelkopf, *Ann. Phys.* **16**, 767 (2007).
- [5] A. A. Houck, J. A. Schreier, B. R. Johnson, J. M. Chow, J. Koch, J. M. Gambetta, D. I. Schuster, L. Frunzio, M. H. Devoret, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 080502 (2008).
- [6] J. Bourassa, J. M. Gambetta, A. A. Abdumalikov, O. Astafiev, Y. Nakamura, and A. Blais, *Phys. Rev. A* **80**, 032109 (2009).
- [7] T. Niemczyk, F. Deppe, H. Huebl, E. P. Menzel, F. Hocke, M. J. Schwarz, J. J. Garcia-Ripoll, T. H. D. Zueco, E. Solano, A. Marx, and R. Gross, *Nature Physics* **6**, 772 (2010).
- [8] S. Filipp, M. Göppl, J. M. Fink, M. Baur, R. Bianchetti, L. Steffen, and A. Wallraff, *Phys. Rev. A* **83**, 063827 (2011).
- [9] O. Viehmann, J. von Delft, and F. Marquardt, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 113602 (2011).
- [10] A. Cottet, *Implementation of a quantum bit in a superconducting circuit*, Ph.D. thesis, Université Paris VI (2002).
- [11] J. Koch, T. M. Yu, J. Gambetta, A. A. Houck, D. I. Schuster, J. Majer, A. Blais, M. H. Devoret, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, *Phys. Rev. A* **76**, 042319 (2007).
- [12] J. A. Schreier, A. A. Houck, J. Koch, D. I. Schuster, B. R. Johnson, J. M. Chow, J. M. Gambetta, J. Majer, L. Frunzio, M. H. Devoret, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, *Phys. Rev. B* **77**, 180502 (2008).
- [13] A. Blais, R.-S. Huang, A. Wallraff, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, *Phys. Rev. A* **69**, 062320 (2004).
- [14] E. Jaynes and F. Cummings, *Proceedings of the IEEE* **51**, 89 (1963); M. Tavis and F. W. Cummings, *Phys. Rev.* **170**, 379 (1968).
- [15] L. DiCarlo, J. M. Chow, J. M. Gambetta, L. S. Bishop, B. R. Johnson, D. I. Schuster, J. Majer, A. Blais, L. Frunzio, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, *Nature* **460** (2009), doi:10.1038/nature08121.
- [16] J. Bourassa and A. Blais, Private communication.
- [17] In current realizations of the 3D-transmon qubits, the length of the antenna is between 1 and 10% of the wavelength of the fundamental bare cavity mode.
- [18] M. D. Reed, L. DiCarlo, S. E. Nigg, L. Sun, L. Frunzio, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, *Nature* **482**, 382 (2012).
- [19] V. E. Manucharyan, E. Boaknin, M. Metcalfe, R. Vijay, I. Siddiqi, and M. Devoret, *Phys. Rev. B* **76**, 014524 (2007).
- [20] R. M. Foster, *Bell System Technical Journal* **3**, 260 (1924).
- [21] E. R. Beinger, R. H. Dicke, N. Marcuvitz, C. G. Montgomery, and E. M. Purcell, *Principles of Microwave Circuits*, edited by C. G. Montgomery, R. H. Dicke, and E. M. Purcell (MIT Radiation Laboratory, 1945).
- [22] The case of infinitely many discrete modes necessitates an extension of Foster's theorem as discussed in [29], but the results presented here still apply.
- [23] M. H. Devoret, "Quantum fluctuations in electrical circuits," (Elsevier Science B. V., 1995) Chap. 10, p. 351, les Houches, Session LXIII.
- [24] A. A. Clerk, M. H. Devoret, S. M. Girvin, F. Marquardt, and R. J. Schoelkopf, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 1155 (2010).
- [25] M. Boissonneault, J. M. Gambetta, and A. Blais, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 100504 (2010).
- [26] A. O. Caldeira and A. J. Leggett, *Phys. Rev. Lett.* **46**, 211 (1981).
- [27] See appended supplementary material.
- [28] K. Gloos, R. S. Poikolainen, and J. P. Pekola, *Applied Physics Letters* **77**, 2915 (2000).
- [29] M. K. Zinn, *Bell System Technical Journal* **31**, 378 (1951).
- [30] F. Pobel, *Matter and Methods at Low Temperatures*, 3rd ed. (Springer, 1937).
- [31] J. Krupka, K. Derzakowski, M. Tobar, J. Hartnett, and R. G. Geyer, *Measurement Science and Technology* **10**, 387 (1999).
- [32] Note that strictly speaking the commutator is rather $[\exp(i\varphi_s), n_s] = -\hbar \exp(i\varphi_s)$, but as we neglect charge dispersion, it is consistent to neglect the 2π -periodicity of the commutation relation.

Дополнительный материал для
"Квантование сверхпроводящей цепи черного ящика"
 Simon E. Nigg, Hanhee Paik, Brian Vlastakis, Gerhard Kirchmair, Shyam Shankar
 Luigi Frunzio, Michel Devoret, Robert Schoelkopf and Steven Girvin
 Departments of Physics and Applied Physics, Yale University, New Haven, CT 06520, USA
 (Dated: April 4, 2012)

Эти заметки предоставляют дополнительную информацию о моделировании HFSS полости, используемой для построения эффективного низкоэнергетического гамильтониана в подходе квантования черного ящика для сравнения с экспериментом с одним переходом, и о методе квантования черного ящика для случая с несколькими кубитами.

HFSS МОДЕЛИРОВАНИЕ 3D-ТРАНСМОНА

Как показано в основном тексте, информация о спектре квантовой схемы закодирована в проводимости порта джозефсоновского перехода $Y(\omega) = Z(\omega)^{-1}$; точнее — достаточно знать действительные корни и производные Y в этих точках.

Предполагая, что размер перехода пренебрежимо мал по сравнению с длиной волны нижних мод электромагнитного поля в резонаторе, целесообразно аппроксимировать проводимость линейной части перехода простым сосредоточенным элементом параллельного LC генератора с индуктивностью L_J и емкостью C_J параллельно остальному линейному резонатору. Следовательно, проводимость может быть представлена как

$$Y(\omega) = j\omega C_J - \frac{j}{\omega L_J} + Y_c(\omega), \quad (10)$$

где $Y_c(\omega)$ — проводимость системы без перехода. Последняя величина в принципе может быть непосредственно измерена, но в этой конкретной конструкции измерение не является практичным. Вместо этого мы моделируем классическую систему без перехода, решая уравнения Максвелла численно с использованием HFSS. На рис. 3 показано графическое представление различных сеток, используемых для представления различных элементов резонатора и антенной системы. Чем меньше элемент, тем тоньше для точности должна быть сетка. В этом конечно-элементном моделировании все металлические детали (антенна и границы резонатора из чистого алюминия) рассматриваются как совершенные проводники с нулевым сопротивлением. При этом мы пренебрегаем кинетической индуктивностью антенны и резонатора. Конечная глубина лондоновского проникновения в полость примерно $\lambda \approx 15$ nm привела бы к эффективному увеличению размера полости и, следовательно, уменьшению частоты полости примерно на 10 kHz. Кроме того, кинетическая индуктивность антенны и провода, соединяющего две антенные площадки с джозефсоновским переходом, может быть оценена как

$$L_k = \frac{\lambda_{\mu_0}}{2 \tanh\left(\frac{d}{2\lambda}\right)} \left[\frac{L}{W} + \frac{l}{w} \right], \quad (11)$$

где $d \approx 100$ nm — толщина алюминиевого слоя, $L \approx 1$ mm — общая длина и $W \approx 250$ μ m — ширина антенны, $l \approx 34$ μ m — длина и $w \approx 1$ μ m — ширина провода. С этими числами мы получаем $L_k \approx 1.6 \cdot 10^{-3}$ nH, что примерно на три порядка меньше (линейной части) индуктивности Джозефсона. Простая оценка показывает, что это приведет к отрицательному сдвигу кубитного резонанса всего на несколько сотен kHz. Эти поправки незначительны при текущем уровне точности и при необходимости могут быть легко включены в численное моделирование. Алюминиевая антенна испаряется поверх сапфировой подложки, толщина которой составляет 430 μ m для образцов 1, 2, 4 и 5, и 500 μ m — для образцов 3 и 6. Учитывается сжатие алюминия с понижением температуры, приводящее к усадке полости примерно на 0,5% и снижению диэлектрической проницаемости сапфира менее чем на процент [30, 31].

Мнимая и действительная части результирующей проводимости Y показаны на рис. 4 для $C_J = 0.34$ ff в диапазоне частот, охватывающем три режима. Самая низкая мода с наибольшим наклоном отождествляется с кубитной модой, а остальные — с полостными модами, хотя следует иметь в виду, что

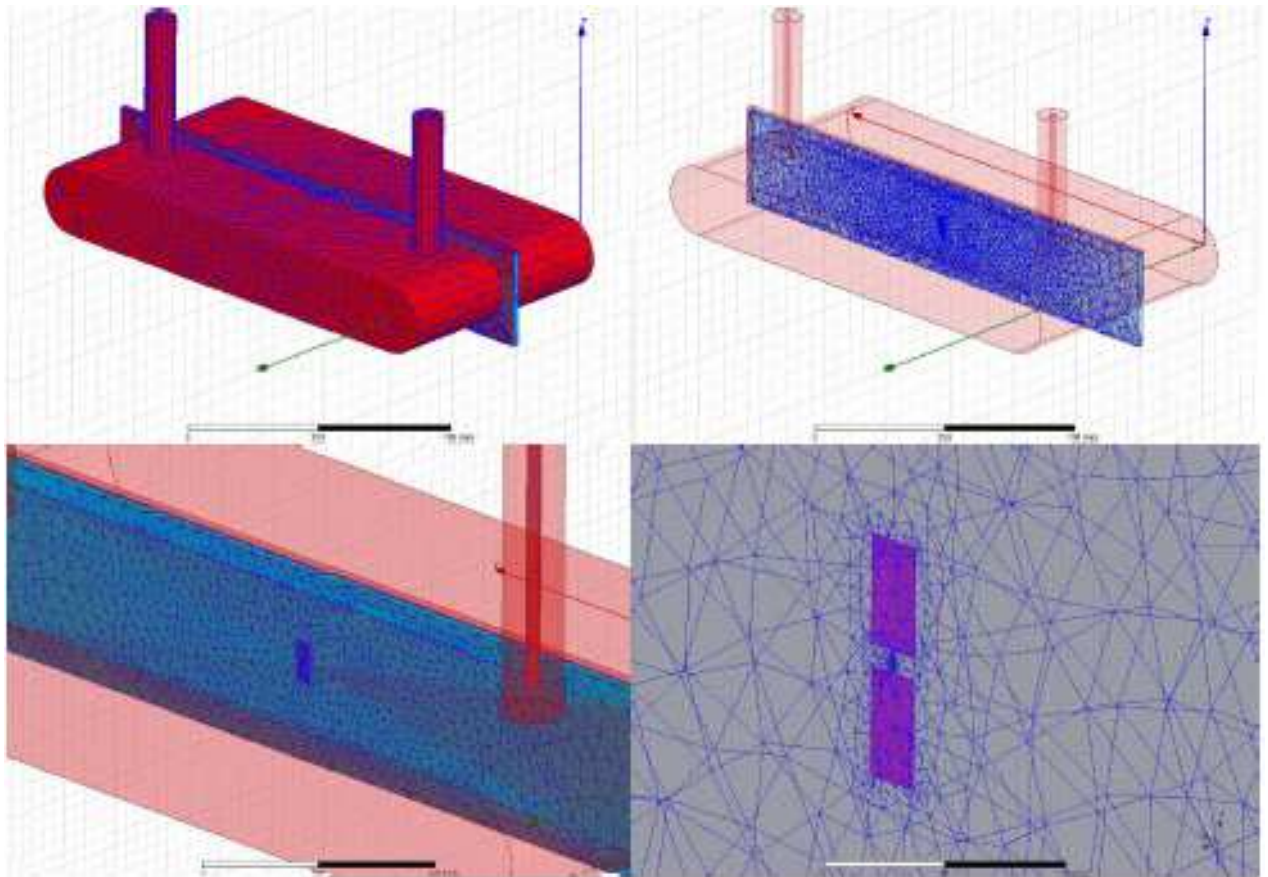


Рис. 3 (цветной в онлайн). HFSS модель 3D-трансмона. (a) 3D резонатор с входными и выходными портами 50Ohm. (b) Прозрачный вид полости с изображением сапфировой подложки. Поскольку электрическое поле сосредоточено в диэлектрике, используется более тонкая сетка. (c) и (d) Zoom-ins на антенне, помещенной поверх субстрата. Сетка — лучше всего вокруг антенны.

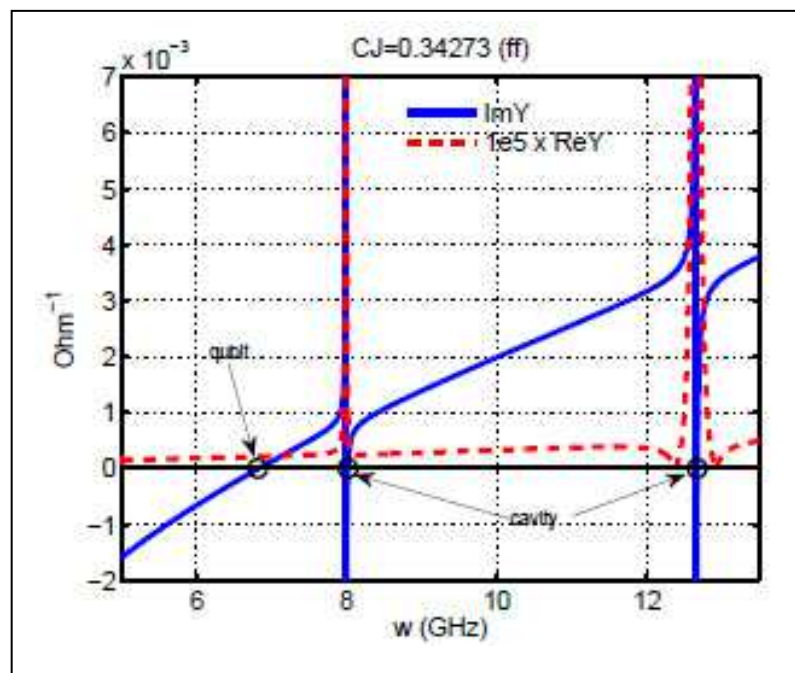


Рис. 4 (цветной в онлайн) Действительная и мнимая части проводимости $Y(\omega) = j\omega C_J - \frac{j}{\omega L_J} + Y_c(\omega)$. Получено из моделирования HFSS.

состояния, соответствующие этим модам, являются суперпозициями "голых" мод. С помощью этого вычисляются поправки, вызванные соединением, как описано в основном тексте. Результаты подгонки C_J приведены в табл. I основного текста и нанесены на рис. 5. Более подробную информацию об измерении спектра можно найти в [3].

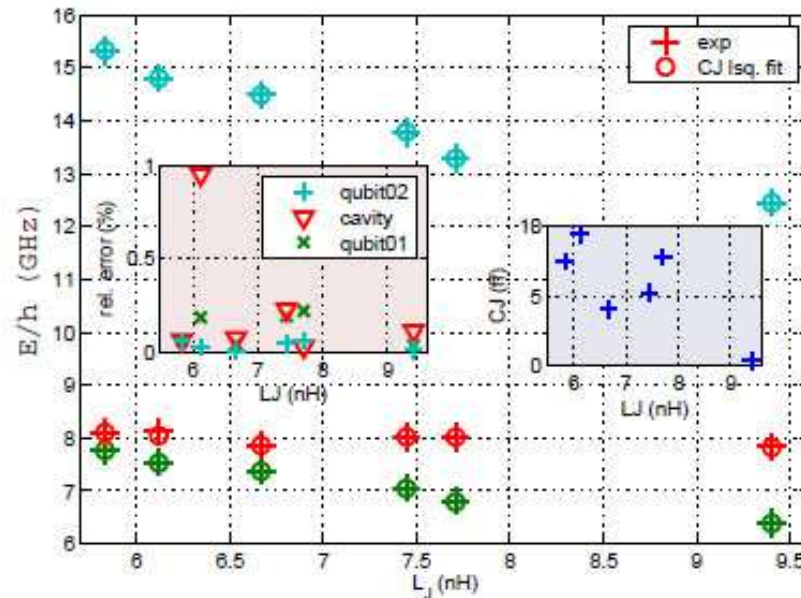


Рис. 5 (цветной в онлайн). Низкоэнергетический спектр шести 3D-трансонов. Теоретические значения (открытые окружности) получаются путем подгонки C_J для каждого набора данных (звездочки). Зеленые символы соответствуют переходу $0 \rightarrow 1$ кубита, красные символы – низшему резонансу резонатора, синие символы – переходу $0 \rightarrow 2$ кубита. Левая вставка показывает относительные ошибки уровня – % между теорией и экспериментом, а правая вставка показывает установленные значения C_J .

КВАНТОВАНИЕ ЧЕРНОГО ЯЩИКА С НЕСКОЛЬКИМИ ПЕРЕХОДАМИ

Для простоты мы сосредоточимся на бездиссипативном случае. Рассмотрим систему с N переходами Джозефсона с "голыми" джозефсоновскими энергиями $E_J^{(s)}$ и энергиями зарядов $E_C^{(s)}$, $s = 1, \dots, N$, параллельно с общим линейным бесспациональным, но в остальном произвольным электромагнитным резонатором, как показано на рис. 6 (a). Несмещенные изолированные переходы описываются гамильтонианом $H_J = \sum_{s=1}^N (4E_C^{(s)} (n_s)^2 - E_J^{(s)} \cos(\varphi_s))$, где n_s – оператор числа куперовских пар s -го перехода, сопряженный с фазовой степенью свободы φ_s , с. т. е. $[\varphi_s, n_s] = i\hbar$ [32]. Соответствующая линейная схема N -порта, показанная на рис. 6 (b), определяется путем связывания порта с каждым соединением и замены последнего параллельным сосредоточенным элементом LC-генератора с индуктивностью $L_J^{(s)} = (\phi_0)^2/E_J^{(s)}$ и емкостью $C_J^{(s)} = e^2/(2E_C^{(s)})$. Здесь и далее $\phi_0 = \hbar/(2e)$ является приведенным потоком квантов. Это соответствует расширению косинусов в H_J до второго порядка в φ_s . Далее мы рассматриваем эту линеаризованную схему классически.

Главное значение – матрица импеданса N -порта \mathbf{Z} с элементами $Z_{ss'}(\omega) = V_s(\omega)/I_{s'}(\omega)|_{I_{i=0, i \neq s, s'}}$. Выберем произвольно один опорный порт k из N портов. В силу теоремы Фостера [20], $Z_{kk}(\omega)$ является чисто мнимой мероморфной функцией и может быть воспроизведена эквивалентной схемой параллельных LC осцилляторов последовательно, показанной на рис. 6 (c). Явно

$$Z_{kk}(\omega) = \sum_{p=1}^M \left(j\omega C_p^{(k)} + \frac{1}{j\omega L_p^{(k)}} \right)^{-1}, \quad (12)$$

где M – количество мод, и мы приняли электротехническую нотацию записи мнимой единицы как $j = -i$. Это отображение эквивалентной схемы соответствует на языке электротехники диагонализации линеаризованной системы связанных гармонических осцилляторов. Соответственно, собственные частоты $\omega_p = (L_p^{(k)} C_p^{(k)})^{-\frac{1}{2}}$ определяются полюсами Z_{kk} или, что более удобно, действительными корнями проводимости, определяемой как $Y_k = Z_{kk}^{-1}$, а эффективные емкости определяются производной частоты по

резонансу последнего как $C_p^{(k)} = (1/2)\text{Im}Y_k'(\omega_p)$. Обратим внимание на то, что [20] $\text{Im}Y_k'(\omega) > 0$. Лагранжиан системы можно записать в виде

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^M \left(C_p^{(k)} (\dot{\Phi}_p^{(k)}(t))^2 + \frac{(\Phi_p^{(k)}(t))^2}{L_p^{(k)}} \right).$$

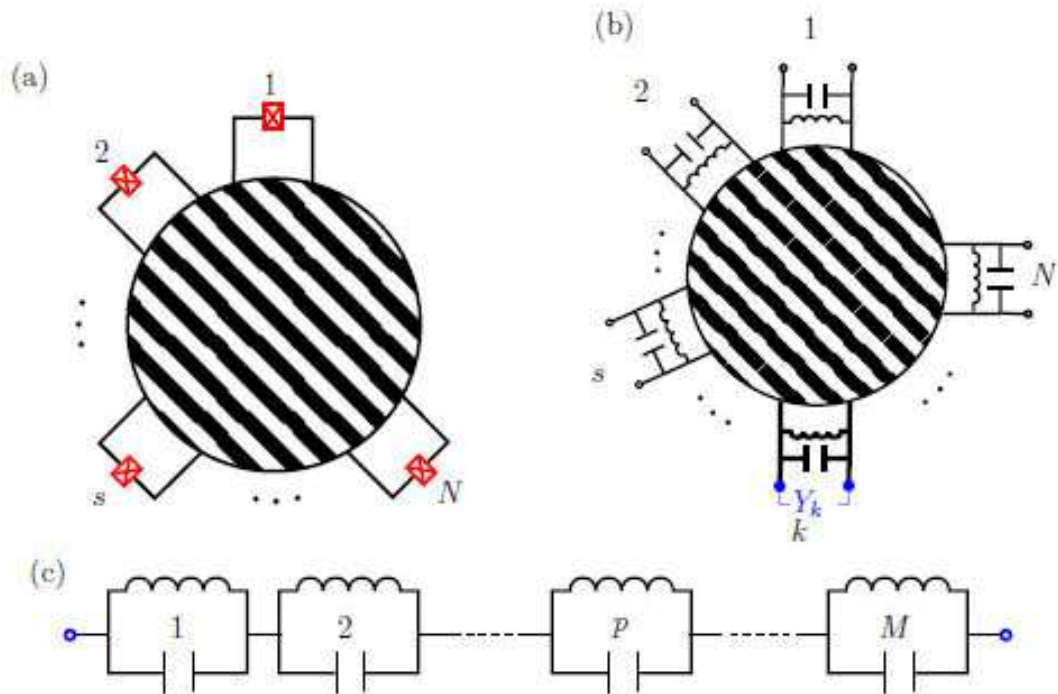


Рис. 6. (цветной в онлайн) (а) схемы N JJs (серые (красные) кресты в прямоугольниках), связанные с произвольной линейной схемой (полосатый диск). (б) соответствующая линейризованная N -порта цепи с замененными JJs параллельными осцилляторами LC. (в) Фостер-эквивалентная схема импеданса $Z_{kk}(\omega)$ линейризованной схемы, показанной в (б). Опорный порт $k \in \{1, \dots, N\}$ может

с точки зрения нормальных ("плавающих") координат $\Phi_p^{(k)}(t) = f_p^k e^{j\omega_p t} + (f_p^k)^* e^{-j\omega_p t}$, связанных с каждым из эквивалентных LC осцилляторов. Из этого мы можем сразу написать гамильтониан функция эквивалентной схемы как $\mathcal{H}_0 = 2 \sum_{p=1}^M (f_p^k)^* (L_p^{(k)})^{-1} f_p^k$, где индекс 0 указывает на то, что мы рассматриваем линейную электрическую цепь (рис. 6 (б)). Обратим внимание на то что собственные частоты не зависят от выбора порта, в то время как для собственных мод это не так. Закон Кирхгофа подразумевает, что с точностью до произвольной постоянной $\varphi_k(t) = \Phi_0^{-1} \sum_{p=1}^M P \Phi_p^{(k)}(t)$, где согласно второму соотношению Джозефсона $\varphi_k(t) = \Phi_0^{-1} \int_{-\infty}^t R V_k(\tau) d\tau$ – фазовая переменная k -го (опорного) перехода с напряжением V_k . Главное то, что это простое соотношение справедливо только для соединения с исходным портом k . Для того, чтобы найти соответствующие выражения для остальных перекрестков ($s \neq k$), мы замечаем, что амплитуда напряжения $V_s(\omega) = j\omega \Phi_s^{(k)}(\omega)$ на частоте ω генерируется через порт s в ответ на ток с амплитудой $I_{s'}(\omega)$ в порте s' и определяется как $V_s(\omega) = Z_{ss'}(\omega) I_{s'}(\omega)$. Поэтому $\Phi_s^{(k)}(\omega) = (Z_{sk}(\omega)/Z_{kk}(\omega)) \varphi_k(\omega)$. Учитывая это с вышеизложенным, находим, что

$$\varphi_s^{(k)}(t) = \Phi_0^{-1} \sum_{p=1}^M \frac{Z_{sk}(\omega_p)}{Z_{kk}(\omega_p)} (f_p^k e^{j\omega_p t} + (f_p^k)^* e^{-j\omega_p t}). \quad (13)$$

Квантование достигается каноническим способом [23, 24] путем замены амплитуд потока эквивалентных осцилляторов операторами в виде

$$f_p^{k(*)} \rightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{2}} Z_{kp}^{\text{eff}} a_p^{(\dagger)}, \quad Z_{kp}^{\text{eff}} = \frac{2}{\omega_p \text{Im}Y_k'(\omega_p)}, \quad (14)$$

с безразмерными бозонными операторами уничтожения (рождения) $a_p(a_p^\dagger)$. Прямая подстановка дает гамильтониан $H_0 = \sum P \hbar \omega_l a_l^\dagger a_l$ из M несвязанных гармонических осцилляторов (опуская энергии нулевого уровня) и шредингеровским оператором фазы L -го перехода является

$$\hat{\varphi}_s^{(k)} = \Phi_0^{-1} \sum_{n=1}^M \frac{Z_{sk}(\omega_p)}{Z_{kk}(\omega_p)} \sqrt{\frac{\hbar}{2} Z_{kp}^{\text{eff}}} (a_p + a_p^{(\dagger)}). \quad (15)$$

Это уравнение (7) основного текста с использованием того, что $\hat{\Phi}_s^{(k)} = \Phi_0 \hat{\varphi}_s$. Верхний индекс делает явной зависимость от опорного порта. Соответственно среднеквадратичная флуктуация потока от сопряжения s в фоковском мультирежиме $|n_1, n_2, \dots, n_M\rangle$ даётся выражением $\sqrt{\langle (\hat{\Phi}_s^{(k)})^2 \rangle} = \frac{\hbar}{2} \sum_{p=1}^M \left(\frac{Z_{sk}(\omega_p)}{Z_{kk}(\omega_p)} \right)^2 z_{kp}^{\text{eff}} (1 + 2n_p)$.

Ангармонические члены, порожденные нелинейностью джозефсоновской индуктивности, необходимой для построения кубита, включаются путем выражения членов более высокого порядка в разложении косинуса в гармоническом базисе. Включая члены квадратичного порядка, получаем явно после приведения членов

$$H = H_0 - \sum_{pp'} \gamma_{pp'} (2a_p^\dagger a_{p'} + a_p^\dagger a_{p'}^\dagger + a_p a_{p'}) - \quad (16)$$

$$- \sum_{pp'qq'} \beta_{pp'qq'} (6a_p^\dagger a_{p'}^\dagger a_q a_{q'} + 4a_p^\dagger a_{p'}^\dagger a_q^\dagger a_{q'} + 4a_p^\dagger a_{p'} a_q a_{q'} + a_p a_{p'} a_q a_{q'} + a_p^\dagger a_{p'}^\dagger a_q^\dagger a_{q'}^\dagger) +$$

$$+ \sum_{s=1}^N \mathcal{O}(\varphi_s^6),$$

с коэффициентами $\beta_{pp'qq'} = \sum_{s=1}^N \frac{e^2}{24L_j^{(s)}} \xi_{sp} \xi_{sp'} \xi_{sq} \xi_{sq'}$ and $\gamma_{pp'} = 6 \sum_{q=1}^M \beta_{qqpp'}$, где, выбирая первый порт в качестве опорного, $\xi_{sp} = \frac{Z_{s1}(\omega_p)}{Z_{11}(\omega_p)} \sqrt{z_{1p}^{\text{eff}}}$. Рассматривая нелинейность φ^4 в теории возмущений первого порядка, получены выражения для энергии, обобщенного хи-сдвига и обобщенной ангармоничности, задаваемые уравнением. (9) основного текста.