LA CONJETURA DE COLLATZ
Orden y armonía en los números de la secuencia

por

Miquel Cerdà Bennassar

Agosto 2019

RESUMEN

Propongo una tabla numérica en la que se demuestra visualmente que las secuencias formadas con el algoritmo de Collatz acaban siempre en el número 1.

INTRODUCCIÓN

La conjetura fué planteada por el matemático Lothar Collatz en 1937. También es conocida con otros nombres: El problema 3n+1, la conjetura de Ulam, el problema de Kakutani, la conjetura de Thwaites, el algoritmo de Hasse o el problema de Siracusa.

La conjetura dice lo siguiente:

1 – Se elige un número natural cualquiera, n.
2 – Si es par de divide entre 2, (n/2).
3 – Si es impar se multiplica por 3 y se suma 1 al resultado, (3n+1).

Se repite el proceso con cada resultado y se obtiene una secuencia que siempre acaba en 1 y siempre es así, sea cual sea el número inicial. La incógnita es porqué sucede y si ocurre con todos los números naturales.

VISIÓN GENERAL

Para la conjetura de Collatz, identifico dos tipos de números impares: Los de la forma 4n+3 y los de la forma 4n+1.

Aplicando (3m+1)/2 a los de la forma 4n+3, resulta un número impar que es mayor que el anterior y la secuencia es ascendente.

Aplicando la misma operación a los de los de la forma 4n+1, resulta un número par que requiere más divisiones entre 2, por lo que el número impar al que llegan es siempre menor que el anterior y la secuencia es descendente.

Una secuencia de Collatz será más o menos descendente y más o menos larga según se obtengan más o menos números impares de la forma 4n+1.
Si en el conjunto de los números impares hay la misma cantidad de números de ambas formas, ¿Tienen la misma probabilidad de salir en las secuencias de Collatz? ¿Se puede predecir cuantos habrá y en qué momento aparecerán los números de la forma 4n+1 y la secuencia descenderá?

También identifico dos tipos de números pares: Los de la forma 4n+2 y los de la forma 4n+4.
Los de la forma 4n+2 admiten una sola división n/2 y el número impar que resulta es mayor que el anterior y la secuencia es ascendente.

Los de la forma 4n+4 admiten dos o más divisiones n/2 y el número impar al que llegan es menor que el anterior y la secuencia es descendente.

Una secuencia de Collatz será más o menos descendente y más o menos larga según se obtengan más o menos números pares de la forma 4n+4.

Si en el conjunto de los números pares hay la misma cantidad de números de ambas formas, ¿Tienen la misma probabilidad de salir en las secuencias de Collatz? ¿Se puede predecir cuantos habrá y en qué momento aparecerán los números de la forma 4n+4 y la secuencia descenderá?.

Las respuestas a estas dos preguntas quizás se encuentren en dos tablas, una para los números impares y otra para los números pares, que explico a continuación.

TABLA DE LOS NÚMEROS IMPARES DE LAS SECUENCIAS

En una table con k columnas, escribo en la primera fila los números 2k-1.
En las filas sucesivas aplico (3m+1)/2 a los números impares, dejando como último número de cada columna al número par.
En color rojo son los números impares de la forma 4n+3 y los de color verde son los números impares de la forma 4n+1. Los números pares se ha dejado sin color.

El valor de n del último número de las columnas, corresponde a la cantidad de números impares y al número de aplicaciones (3m+1)/2 que hay en ellas.

Ejemplo: En la columna k(48) hay 5 números impares y el impar 95 necesita 5 pasos para llegar hasta el número par 728.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	...
n																																																				
0	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79	81	83	85	87	89	91	93	95	97	99	101	...
1	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38	41	44	47	50	53	56	59	62	65	68	71	74	77	80	83	86	89	92	95	98	101	104	107	110	113	116	119	122	125	128	131	134	137	140	143	146	149	152	
2		8		17		26		35		44		53		62		71		80		89		98		107		116		125		134		143		152		161		170		179		188		197		206		215		224		
3				26				53				80				107				134				161				188				215				242				269				296				323				
4								80								161								242								323								404								485				
5																242																485																728				
6																																728																				
7																																																				

k	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	...
n																																																				
0	103	105	107	109	111	113	115	117	119	121	123	125	127	129	131	133	135	137	139	141	143	145	147	149	151	153	155	157	159	161	163	165	167	169	171	173	175	177	179	181	183	185	187	189	191	193	195	197	199	201	203	...
1	155	158	161	164	167	170	173	176	179	182	185	188	191	194	197	200	203	206	209	212	215	218	221	224	227	230	233	236	239	242	245	248	251	254	257	260	263	266	269	272	275	278	281	284	287	290	293	296	299	302	305	...
2	233		242		251		260		269		278		287		296		305		314		323		332		341		350		359		368		377		386		395		404		413		422		431		440		449		458	
3	350				377				404				431				458				485				512				539				566				593				620				647				674			
4					566								647								728								809								890								971							
5													971																1214																1457							
6													1457																																2186							
7													2186																																							

Esta fórmula define a cada número de la tabla: $a(n)=2k(3/2)^n-1$

En cada columna: $a(n+1)=a(n)+k(3/2)^n$

La cantidad de números que hay en cada columna es siempre la misma, según sea el valor de k:

		n		valor de k												cantidad de números por columna
2k-1		0		1	3	5	7	9	11	13	15	17	. . .			0 impares rojos, 1 número impar verde y un número par
2(2k-1)		1		2	6	10	14	18	22	26	30	34	. . .			1 número impar rojo, 1 número impar verde y un número par
4(2k-1)		2		4	12	20	28	36	44	52	60	68	. . .			2 números impares rojos, 1 número impar verde y un número par
8(2k-1)		3		8	24	40	56	72	88	104	120	136	. . .			3 números impares rojos, 1 número impar verde y un número par
16(2k-1)		4		16	48	80	112	144	176	208	240	272	. . .			4 números impares rojos, 1 número impar verde y un número par
32(2k-1)		5		32	96	160	224	288	352	416	480	544	. . .			5 números impares rojos, 1 número impar verde y un número par
64(2k-1)		6		64	192	320	448	576	704	832	960	1088	. . .			6 números impares rojos, 1 número impar verde y un número par
. . .		. . .		. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .			. . .

En cada una de las columnas k=2^n*(2k-1) hay n números impares rojos, un último impar verde y el número par que cierra la columna.

Ejemplo: en la columna k=2^50 hay 50 números impares rojos, el primero es el número 2251799813685247 y el 50º es el 957197316922470118360331 y el último impar de la columna, que es verde, es el número 1435795975383705177540497. El número par que cierra la columna es el 2153693963075557766310746. En el anexo 1, el desarrollo de la secuencia empezada con este primer número de la columna.

También tendrán la misma cantidad de números cada una de las columnas k=(2k-1)*2^50.

Una secuencia obtenida con el algoritmo de la conjetura de Collatz está formada por un número indeterminado de columnas de la tabla o ciclos.

Una secuencia empezada con el primer número impar de cualquier columna k=(2k-1)*2^1000000 tendría en esa columna, 1000000 impares rojos, un último impar verde y un número par cerrando la columna. Habrá el mismo número de impares en todas las columnas, para todo valor de (2k-1).

Si la secuencia se empezase con un número potencia de 2 cercana al infinito, la primera columna de la tabla o ciclo de esa secuencia tendría esa misma cantidad de números impares.

La tabla es infinita pero todas sus columnas o ciclos son progresiones geométricas acotadas.

Ejemplo de una secuencia empezando con el número 279:

279, 838, 419, 1258, 629, 1888, 944, 472, 236, 118, 59, 178, 89, 268, 134, 67, 202, 101, 304, 152,
k(140) k(30) k(34)

76, 38, 19, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.
k(10) k(6) k(7) k(3) k(1)

Las columnas implicadas de la secuencia:

140	30	34	10	6	7	3	1
279	59	67	19	11	13	5	1
419	89	101	29	17	20	8	2
629	134	152	44	26			
944							

La secuencia obtenida empezando con el número 27 y las 18 columnas o ciclos que la forman:

k	14	16	61	46	52	88	223	84	142	160	456	289	217	163	31	12	3	1
n																		
0	27	31	121	91	103	175	445	167	283	319	911	577	433	325	61	23	5	1
1	41	47	182	137	155	263	668	251	425	479	1367	866	650	488	92	35	8	2
2	62	71		206	233	395		377	638	719	2051					53		
3		107			350	593		566		1079	3077					80		
4		161				890				1619	4616							
5		242								2429								
6										3644								
7																		
8																		
9																		

Las mismas columnas sin los impares de la forma 4n+3

k	14	16	61	46	52	88	223	84	142	160	456	289	217	163	31	12	3	1
n																		
0			121				445					577	433	325	61		5	1
1	41		182	137			668		425			866	650	488	92		8	2
2	62			206	233			377	638							53		
3					350	593		566			3077					80		
4		161				890					4616							
5		242								2429								
6										3644								
7																		
8																		

Los impares verdes seguidos del número par del final de cada columna k (par), están también en las columnas k (impar).

K	21	81	61	69	117	297	223	189	213	1215	1539	289	217	163	31	27	3	1
	41	161	121	137	233	593	445	377	425	2429	3077	577	433	325	61	53	5	1
	62	242	182	206	350	890	668	566	638	3644	4616	866	650	488	92	80	8	2

Equivalencia de k par y **K** impar : k(3/2)^n=**K** Ejemplo: k160*(3/2)^5=**K**1215

A cada repetición de la operación del algoritmo (3m+1)/2, aplicada al primer número impar de la columna, la secuencia “salta” de una columna a otra, dejándola a un solo paso de alcanzar el número par que se podrá dividir entre 2^2, como mínimo. Esto ocurrirá siempre en cualquier secuencia hasta cuando el impar verde esté en la fila n(0).

Un ejemplo de la evolución de las columnas de la tabla en la que “pierde” un número impar en cada salto, k*3/2 :

32*3/2=48, 48*3/2=72, 72*3/2=108, 108*3/2=162 y 162*3/2=243 32*(3/2)^5=243

k = 32, **K** = 243

	k	32	48	72	108	162	243
n							
0		63	95	143	215	323	485
1		95	143	215	323	485	728
2		143	215	323	485	728	
3		215	323	485	728		
4		323	485	728			
5		485	728				
6		728					
7							

La columna k(32) contiene los números impares y un número par de una secuencia de Collatz desde el número 63 hasta el número 728, ocupando las filas n(0) hasta n(6).
Los mismos números están en las columnas k(32), k(48), k(72), k(108), k(162) y k(243), ocupando la fila n(0), porque en una secuencia puede haber los números de cualquiera de estas columnas y no necesariamente todos ellos.

El ciclo que sigue al anterior es el de la columna del número 91, porque 728/2^3=91

k	46		69
n			
0	91		137
1	137		206
2	206		
3			
4			
5			
6			
7			

El siguiente ciclo: 206/2=103

k	52		78		117
n					
0	103		155		233
1	155		233		350
2	233		350		
3	350				
4					
5					
6					
7					

Le siguen once ciclos más hasta que resulta el número 5, que encabeza la última columna antes de llegar al 1.

Los números impares de la forma 4n+3 llegan siempre a un número impar de la forma 4n+1.

LOS NÚMEROS PARES DE LAS SECUENCIAS EN UNA TABLA

En una table con k columnas, escribimos en la primera fila los números 2k.
En las filas sucesivas se dividen entre 2 a los números pares, dejando como último número de cada columna al número impar.

En color rojo son los números pares que al dividirlos entre 2 producen otro número par y los de color verde son los números pares que al dividirlos entre 2 producen un número impar.
Los números impares se han dejado sin color.

El valor de n del último número de las columnas, corresponde a la cantidad de números pares y al número de divisiones entre 2 que hay en ellas.

Ejemplo: En la columna k(48) hay 5 números pares y el par 96 necesita 5 pasos para llegar hasta el número impar 3.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	...
n																																																				
0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	62	64	66	68	70	72	74	76	78	80	82	84	86	88	90	92	94	96	98	100	102	...
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	...
2		1		2		3		4		5		6		7		8		9		10		11		12		13		14		15		16		17		18		19		20		21		22		23		24		25		...
3				1				2				3				4				5				6				7				8				9				10				11				12				...
4								1								2								3								4								5								6				...
5																1																2																3				...
6																																1																				...
7																																																				

k	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	...
n																																																				
0	104	106	108	110	112	114	116	118	120	122	124	126	128	130	132	134	136	138	140	142	144	146	148	150	152	154	156	158	160	162	164	166	168	170	172	174	176	178	180	182	184	186	188	190	192	194	196	198	200	202	204	...
1	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	...
2	26		27		28		29		30		31		32		33		34		35		36		37		38		39		40		41		42		43		44		45		46		47		48		49		50		51	...
3	13				14				15				16				17				18				19				20				21				22				23				24				25			...
4					7								8								9								10								11								12							...
5													4																5																6							...
6													2																																3							...
7													1																																							...
8																																																				

La cantidad de números que hay en cada columna es siempre la misma, según sea el valor de k:

	n	valor de k										cantidad de números por columna
2k-1	0	1	3	5	7	9	11	13	15	17	...	0 pares rojos, 1 número par verde y un número impar
2(2k-1)	1	2	6	10	14	18	22	26	30	34	...	1 número par rojo, 1 número par verde y un número impar
4(2k-1)	2	4	12	20	28	36	44	52	60	68	...	2 números pares rojos, 1 número par verde y un número impar
8(2k-1)	3	8	24	40	56	72	88	104	120	136	...	3 números pares rojos, 1 número par verde y un número impar
16(2k-1)	4	16	48	80	112	144	176	208	240	272	...	4 números pares rojos, 1 número par verde y un número impar
32(2k-1)	5	32	96	160	224	288	352	416	480	544	...	5 números pares rojos, 1 número par verde y un número impar
64(2k-1)	6	64	192	320	448	576	704	832	960	1088	...	6 números pares rojos, 1 número par verde y un número impar
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

En cada una de las columnas k=2^n*(2k-1) hay n números pares rojos, un último par verde y el número impar que cierra la columna.

Ejemplos: En la columna k=2^50 hay 50 números pares rojos, el primero es el número 2251799813685248 y el 50º es el 4 y el último par de la columna, que es verde, es el número 2. El número impar que cierra la columna es el 1.

También tendrían la misma cantidad de números cada una de las columnas k=(2k-1)*2^50.

Teniendo ambas tablas la misma cantidad de números en sus columnas con el mismo valor de k y el mismo valor de n y la misma cantidad de números rojos, números verdes y números sin color, ¿se podría formar una sola tabla donde desarrollar el recorrido de las secuencias de Collatz?.

Comparación de las dos tablas:

Impares:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	...
n																																																				
0	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79	81	83	85	87	89	91	93	95	97	99	101	...
1	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38	41	44	47	50	53	56	59	62	65	68	71	74	77	80	83	86	89	92	95	98	101	104	107	110	113	116	119	122	125	128	131	134	137	140	143	146	149	152	
2		8		17		26		35		44		53		62		71		80		89		98		107		116		125		134		143		152		161		170		179		188		197		206		215		224		
3				26				53				80				107				134				161				188				215				242				269				296				323				
4								80								161								242								323								404								485				
5																242																485																728				
6																																728																				
7																																																				

Pares:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	...
n																																																				
0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	62	64	66	68	70	72	74	76	78	80	82	84	86	88	90	92	94	96	98	100	102	...
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	...
2		1		2		3		4		5		6		7		8		9		10		11		12		13		14		15		16		17		18		19		20		21		22		23		24		25		...
3				1				2				3				4				5				6				7				8				9				10				11				12				...
4								1								2								3								4								5								6				...
5																1																2																3				...
6																																1																				...
7																																																				

Con las columnas de la tabla de los números pares, podemos formar la columna con igual valor de k de la tabla de los números impares.

Ejemplo: La columna k(4)

De pares a impares:	De impares a pares:
1*8-1=7	(7+1)/1=8
3*4-1=11	(11+1)/3=4
9*2-1=17	(17+1)/9=2
27*1-1=26	(26+1)/27=1
3^n*par-1=impar	**(impar+1)/3^n**

UN TRIÁNGULO CON LAS COLUMNAS DE LA TABLA

Un triángulo T(n):

Se escribe un número n en el vértice superior y se forma el triángulo de la siguiente manera:
Para las columnas, multiplicar n por 2 y sumar 1 al resultado, 2n+1. Repetir con los resultados obtenidos.
Para las filas, multiplicar n por 3, sumar 1 al resultado y dividir entre 2, (3n+1)/2. Repetir hasta llegar a un número par.
Un triángulo T(n) para cada valor de (n) = 0, 4, 6, 10, 12, 16, 18, 22, 24, ... y podremos escribir en ellos todos los números impares.

El triángulo T(0):

0											
1	2										
3	5	8									
7	11	17	26								
15	23	35	53	80							
31	47	71	107	161	242						
63	95	143	215	323	485	728					
127	191	287	431	647	971	1457	2186				
255	383	575	863	1295	1943	2915	4373	6560			
511	767	1151	1727	2591	3887	5831	8747	13121	19682		
1023	1535	2303	3455	5183	7775	11663	17495	26243	39365	59048	
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Cada fila k del triángulo es la columna k de la tabla y el valor de k es cualquier número del triángulo más 1.

0										
1	2									
3	5	8								
7	11	17	26							
15	23	35	53	80						
31	47	71	107	161	242					
63	95	143	215	323	485	728				
127	191	287	431	647	971	1457	2186			
255	383	575	863	1295	1943	2915	4373	6560		
511	767	1151	1727	2591	3887	5831	8747	13121	19682	
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Ejemplos:

La columna k(8) de la tabla tiene los números 15, 23, 35, 53 y 80.
La columna k(12) de la tabla tiene los números 23, 35, 53 y 80.
La columna k(18) de la tabla tiene los números 35, 53 y 80.
La columna k(27) de la tabla tiene los números 53 y 80.

8	12	18	27
15	23	35	53
23	35	53	80
35	53	80	
53	80		
80			

El triángulo T(4):

4											
9	14										
19	29	44									
39	59	89	134								
79	119	179	269	404							
159	239	359	539	809	1214						
319	479	719	1079	1619	2429	3644					
639	959	1439	2159	3239	4859	7289	10934				
1279	1919	2879	4319	6479	9719	14579	21869	32804			
2559	3839	5759	8639	12959	19439	29159	43739	65609	98414		
5119	7679	11519	17279	25919	38879	58319	87479	131219	196829	295244	
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

El triángulo T(6):

6											
13	20										
27	41	62									
55	83	125	188								
111	167	251	377	566							
223	335	503	755	1133	1700						
447	671	1007	1511	2267	3401	5102					
895	1343	2015	3023	4535	6803	10205	15308				
1791	2687	4031	6047	9071	13607	20411	30617	45926			
3583	5375	8063	12095	18143	27215	40823	61235	91853	137780		
7167	10751	16127	24191	36287	54431	81647	122471	183707	275561	413342	
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

El triángulo T(n) que contenga el primer número impar de la secuencia de Collatz es el que será el inicio o primer ciclo de la misma.

En las columnas de la tabla y en las filas de los triángulos, los números: a(n+1)=(a(n)*3+1)/2.

MULTIPLICAR POR 3 Y DIVIDIR ENTRE 2

Si en el triángulo T(0) le sumo 1 a sus números, resulta otro triángulo T(1):

1											
2	3										
4	6	9									
8	12	18	27								
16	24	36	54	81							
32	48	72	108	162	243						
64	96	144	216	324	486	729					
128	192	288	432	648	972	1458	2187				
256	384	576	864	1296	1944	2916	4374	6561			
512	768	1152	1728	2592	3888	5832	8748	13122	19683		
1024	1536	2304	3456	5184	7776	11664	17496	26244	39366	59049	
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

En cada columna de este triángulo, los números pares de las secuencias y los números impares a los que llegan después de ser sometidos a n divisiones entre 2, que coinciden con las columnas de la tabla de los números pares.

Un triángulo T(n) para cada valor de (n) = 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, ... (6n-1, 6n+1) y podremos escribir en ellos todos los números pares.

En las filas del triángulo, cada número: a(n+1)=a(n)*3/2. Todos tienen como factores primos 3 y 2.

Multiplicar por 3 y dividir entre 2 es el guion con el que se desarrolla una secuencia obtenida con el algoritmo de Collatz y esto mantiene en la misma fila a los impares de la secuencia.

Ejemplo: 8*3=24, 24/2=12, 12*3=36, 36/2=18, 18*3=54, 54/2=27. (números 7, 11, 17, 26 de la secuencia).

Para desarrollar una secuencia de Collatz en este triángulo y poder ver todo su recorrido, desde su inicio hasta que llega al 1, formamos una tabla con el triángulo como base.
Empezando con cada último número de las filas del triángulo, le aplicamos estas dos operaciones:
Al impar le sumamos 1 y al par lo dividimos entre 2.
Escribimos cada resultado encima del anterior, en la misma columna, hasta llegar al 1.
En esta prolongación del triángulo, los números están en rojo.

														1	1	. . .
												1	1	2	2	. . .
											1	2	2	3	4	. . .
									1	1	2	3	4	5	7	. . .
							1	1	2	2	3	5	7	10	14	. . .
						1	2	2	3	4	6	9	13	19	28	. . .
				1	1	2	3	4	5	8	11	17	25	37	55	. . .
		1	1	2	2	3	5	7	10	15	22	33	49	73	110	. . .
	1	2	2	3	4	6	9	13	20	29	44	65	98	146	219	. . .
1	2	3	4	6	8	12	18	26	39	58	87	130	195	292	438	. . .
2	3	5	7	11	16	23	35	52	77	116	173	260	390	584	876	. . .
4	6	9	14	21	31	46	69	103	154	231	346	519	779	1168	1752	. . .
8	12	18	27	41	61	92	137	206	308	462	692	1038	1557	2336	3504	. . .
16	24	36	54	81	122	183	274	411	616	923	1384	2076	3114	4671	7007	. . .
32	48	72	108	162	243	365	547	821	1231	1846	2768	4152	6228	9342	14013	. . .
64	96	144	216	324	486	729	1094	1641	2461	3691	5536	8304	12456	18684	28026	. . .
128	192	288	432	648	972	1458	2187	3281	4921	7382	11072	16608	24912	37367	56051	. . .
256	384	576	864	1296	1944	2916	4374	6561	9842	14763	22144	33216	49823	74734	112101	. . .
512	768	1152	1728	2592	3888	5832	8748	13122	19683	29525	44287	66431	99646	149468	224202	. . .
1024	1536	2304	3456	5184	7776	11664	17496	26244	39366	59049	88574	132861	199291	298936	448404	. . .
2048	3072	4608	6912	10368	15552	23328	34992	52488	78732	118098	177147	265721	398581	597872	896807	. . .
4096	6144	9216	13824	20736	31104	46656	69984	104976	157464	236196	354294	531441	797162	1195743	1793614	. . .
8192	12288	18432	27648	41472	62208	93312	139968	209952	314928	472392	708588	1062882	1594323	2391485	3587227	. . .
16384	24576	36864	55296	82944	124416	186624	279936	419904	629856	944784	1417176	2125764	3188646	4782969	7174454	. . .
32768	49152	73728	110592	165888	248832	373248	559872	839808	1259712	1889568	2834352	4251528	6377292	9565938	14348907	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

En esta tabla podremos visualizar cualquier secuencia de Collatz, cuyo primer número impar de la misma, esté en el triángulo. Si no está, se podrá visualizar en la tabla cuya base o triángulo contenga ese número. Tendrán la misma trayectoria todas las secuencias empezadas con los números impares de una fila del triángulo.

Igual que los triángulos, las tablas obtenidas a partir de éstos, son únicas para cada T(n) y la representación de las secuencias se hará en la tabla formada a partir del triángulo que contenga el primer número impar de la misma.

Por ejemplo, para visualizar la secuencia empezada con el número 508, cuyo primer número impar es el 127, la representaremos en la tabla del triángulo T(1), porque en la fila 2^8 está el número 127.

																...
														1	1	...
												1	1	2	2	...
											1	2	2	3	4	...
									1	1	2	3	4	5	7	...
							1	1	2	2	3	5	7	10	14	...
						1	2	2	3	4	6	9	13	19	28	...
				1	1	2	3	4	5	8	11	17	25	37	55	...
		1	1	2	2	3	5	7	10	15	22	33	49	73	110	...
	1	2	2	3	4	6	9	13	20	29	44	65	98	146	219	...
1	2	3	4	6	8	12	18	26	39	58	87	130	195	292	438	...
2	3	5	7	11	16	23	35	52	77	116	173	260	390	584	876	...
4	6	9	14	21	31	46	69	103	154	231	346	519	779	1168	1752	...
8	12	18	27	41	61	92	137	206	308	462	692	1038	1557	2336	3504	...
16	24	36	54	81	122	183	274	411	616	923	1384	2076	3114	4671	7007	...
32	48	72	108	162	243	365	547	821	1231	1846	2768	4152	6228	9342	14013	...
64	96	144	216	324	486	729	1094	1641	2461	3691	5536	8304	12456	18684	28026	...
128	192	288	432	648	972	1458	2187	3281	4921	7382	11072	16608	24912	37367	56051	...
256	384	576	864	1296	1944	2916	4374	6561	9842	14763	22144	33216	49823	74734	112101	...
512	768	1152	1728	2592	3888	5832	8748	13122	19683	29525	44287	66431	99646	149468	224202	...
1024	1536	2304	3456	5184	7776	11664	17496	26244	39366	59049	88574	132861	199291	298936	448404	...
2048	3072	4608	6912	10368	15552	23328	34992	52488	78732	118098	177147	265721	398581	597872	896807	...
4096	6144	9216	13824	20736	31104	46656	69984	104976	157464	236196	354294	531441	797162	1195743	1793614	...
8192	12288	18432	27648	41472	62208	93312	139968	209952	314928	472392	708588	1062882	1594323	2391485	3587227	...
16384	24576	36864	55296	82944	124416	186624	279936	419904	629856	944784	1417176	2125764	3188646	4782969	7174454	...
32768	49152	73728	110592	165888	248832	373248	559872	839808	1259712	1889568	2834352	4251528	6377292	9565938	14348907	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

La secuencia obtenida con el algoritmo de Collatz, empezada con el número 508:

508, 254, 127, 382, 191, 574, 287, 862, 431, 1294, 647, 1942, 971, 2914, 1457, 4372, 2186, 1093, 3280, 1640, 820, 410, 205, 616, 308, 154, 77, 232, 116, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

Los números en negro están en el triángulo base y los rojos están en la prolongación de éste.

Los impares del triángulo: 127, 191, 287, 431, 647, 971, 1457 están en la misma fila, o sea ninguno de ellos se aleja del 1, descendiendo a filas inferiores.

Ocurre lo mismo con los impares de la zona roja, ninguno desciende a filas inferiores y únicamente al cambiar de columna desciende a la fila inferior, pero vuelve a subir con la división entre 2.

Cada cambio de columna se produce cuando el número impar es multiplicado por 3. Cuantos más impares tenga la secuencia, más cambios de columnas habrá y más tardará en alcanzar el 1.

Ejemplo: En la siguiente tabla el impar 19 desciende una fila al número 57 cuando es multiplicado por 3, pero vuelve a subir al 29 cuando el número 58 es dividido entre 2.

El desarrollo de una secuencia de Collatz empezada con el número 39:

												. . .
										1	1	. . .
								1	1	2	2	. . .
							1	2	2	3	4	. . .
					1	1	2	3	4	5	7	. . .
			1	1	2	2	3	5	7	10	14	. . .
		1	2	2	3	4	6	9	13	19	28	. . .
1	1	2	3	4	5	8	11	17	25	37	55	. . .
2	2	3	5	7	10	15	22	33	49	73	109	. . .
3	4	6	9	13	19	29	43	65	97	145	217	. . .
5	8	12	17	26	38	57	86	129	193	289	433	. . .
10	15	23	34	51	76	114	171	257	385	577	865	. . .
20	30	45	68	102	152	228	342	513	769	1154	1730	. . .
40	60	90	135	203	304	456	684	1026	1538	2307	3460	. . .
80	120	180	270	405	608	912	1367	2051	3076	4614	6920	. . .
160	240	360	540	810	1215	1823	2734	4101	6151	9227	13840	. . .
320	480	720	1080	1620	2430	3645	5468	8202	12302	18453	27680	. . .
640	960	1440	2160	3240	4860	7290	10935	16403	24604	36906	55359	. . .
1280	1920	2880	4320	6480	9720	14580	21870	32805	49208	73812	110717	. . .
2560	3840	5760	8640	12960	19440	29160	43740	65610	98415	147623	221434	. . .
5120	7680	11520	17280	25920	38880	58320	87480	131220	196830	295245	442868	. . .
10240	15360	23040	34560	51840	77760	116640	174960	262440	393660	590490	885735	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

La secuencia obtenida con el algoritmo de Collatz, empezada con el número 39:

39, 118, 59, 178, 89, 268, 134, 67, 202, 101, 304, 152, 76, 38, 19, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

La secuencia recorre la tabla desarrollada a partir del triángulo T(5), porque el primer número impar de la secuencia, el 39, está en este triángulo. Tendrán el mismo recorrido las secuencias empezadas con los números 59, 89 y 134.

Para los números de la prolongación del triángulo, (en color rojo), si se resta 1 al número impar en vez de sumar 1, la tabla es igual de válida:

Impar-1

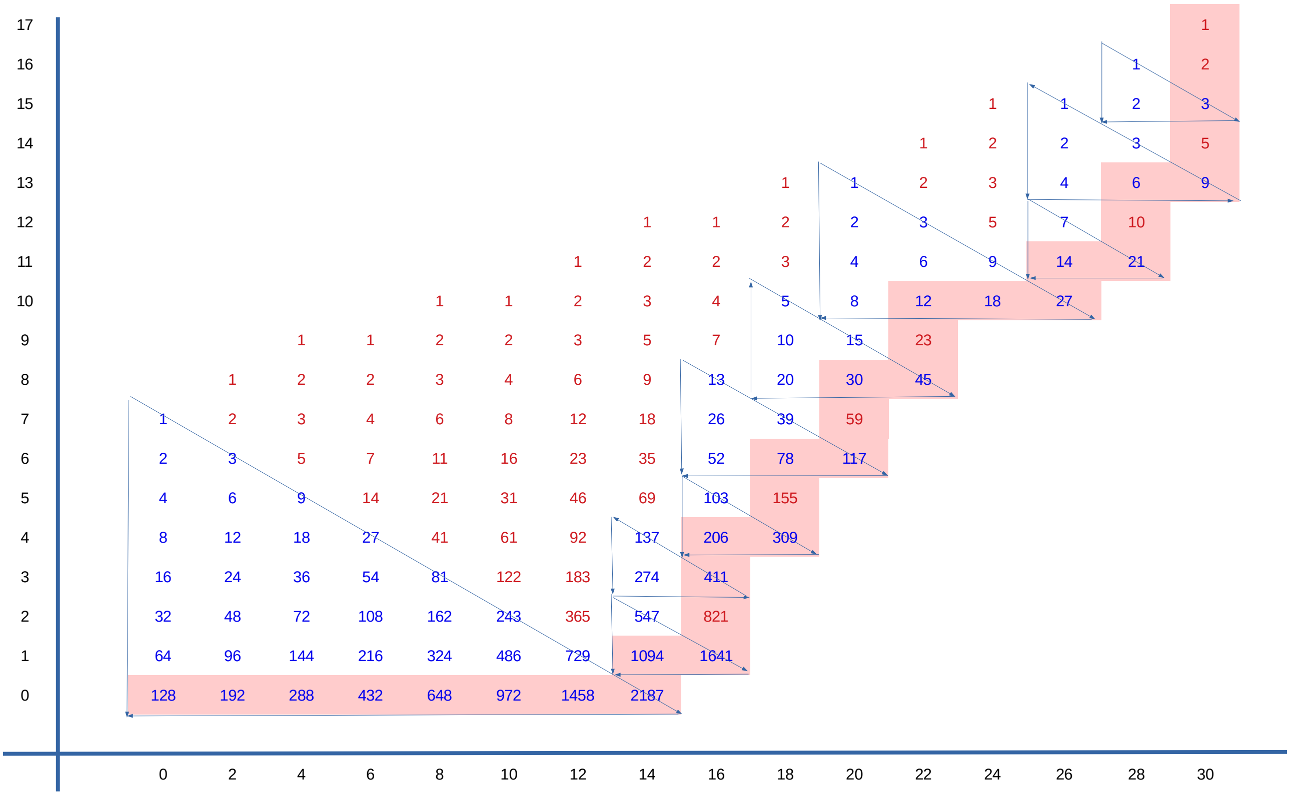
	0	1	2	3	4	5	6	7
11								1
10							1	2
9					1	1	2	4
8				1	2	3	5	8
7		1	1	2	4	6	10	16
6	1	2	3	5	8	13	20	
5	3	4	7	11	17	26	40	
4	6	9	14	22	34	52		
3	12	19	29	44				
2	25	38	58	88				
1	51	77	116					
0		154	232					

Impar+1

	0	1	2	3	4	5	6	7
11							1	1
10					1	1	2	2
9				1	2	2	3	4
8		1	1	2	3	4	5	8
7	1	2	2	3	5	7	10	16
6	2	3	4	6	9	13	20	
5	4	5	8	11	17	26	40	
4	7	10	15	22	34	52		
3	13	20	29	44				
2	26	39	58	88				
1	51	77	116					
0		154	232					

A continuación la tabla de la secuencia empezada con el número 127, considerando como ciclos de las secuencias las columnas de la tabla de números impares y a las filas de los triángulos, ya que ambas están formadas por los mismos números.

La tabla de la secuencia empezada con el número 127 y los triángulos implicados o ciclos:



La secuencia ha recorrido 30 pasos en horizontal o iteraciones de los números impares y 16 pasos en vertical o iteraciones de los números pares, divisiones entre 2.

Secuencia empezada con el número 27 y los triángulos o ciclos que la forman:

1										
2	3									
4	6	9								
8	12	18	27							
16	24	36	54	81						
32	48	72	108	162	243					
64	96	144	216	324	486	729				
128	192	288	432	648	972	1458	2187			
256	384	576	864	1296	1944	2916	4374	6561		
512	768	1152	1728	2592	3888	5832	8748	13122	19683	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

127,191, 287, 431, 647, 971, 1457, 2186

547										
1094	1641									
2188	3282	4923								
4376	6564	9846	14769							
8752	13128	19692	29538	44307						
17504	26256	39384	59076	88614	132921					
...	...	...	...	...	...	...				

1093, 1640

103										
206	309									
412	618	927								
824	1236	1854	2781							
1648	2472	3708	5562	8343						
3296	4944	7416	11124	16686	25029					
...	...	...	...	...	...	...				

205, 308

13										
26	39									
52	78	117								
104	156	234	351							
208	312	468	702	1053						
416	624	936	1404	2106	3159					
...	...	...	...	...	...	...				

77, 116

5										
10	15									
20	30	45								
40	60	90	135							
80	120	180	270	405						
160	240	360	540	810	1215					
...	...	...	...	...	...	...				

29, 44

1										
2	3									
4	6	9								
8	12	18	27							
16	24	36	54	81						
32	48	72	108	162	243					
...	...	...	...	...	...	...				

11, 17, 26

7										
14	21									
28	42	63								
56	84	126	189							
112	168	252	378	567						
224	336	504	756	1134	1701					
...	...	...	...	...	...	...				

13, 20

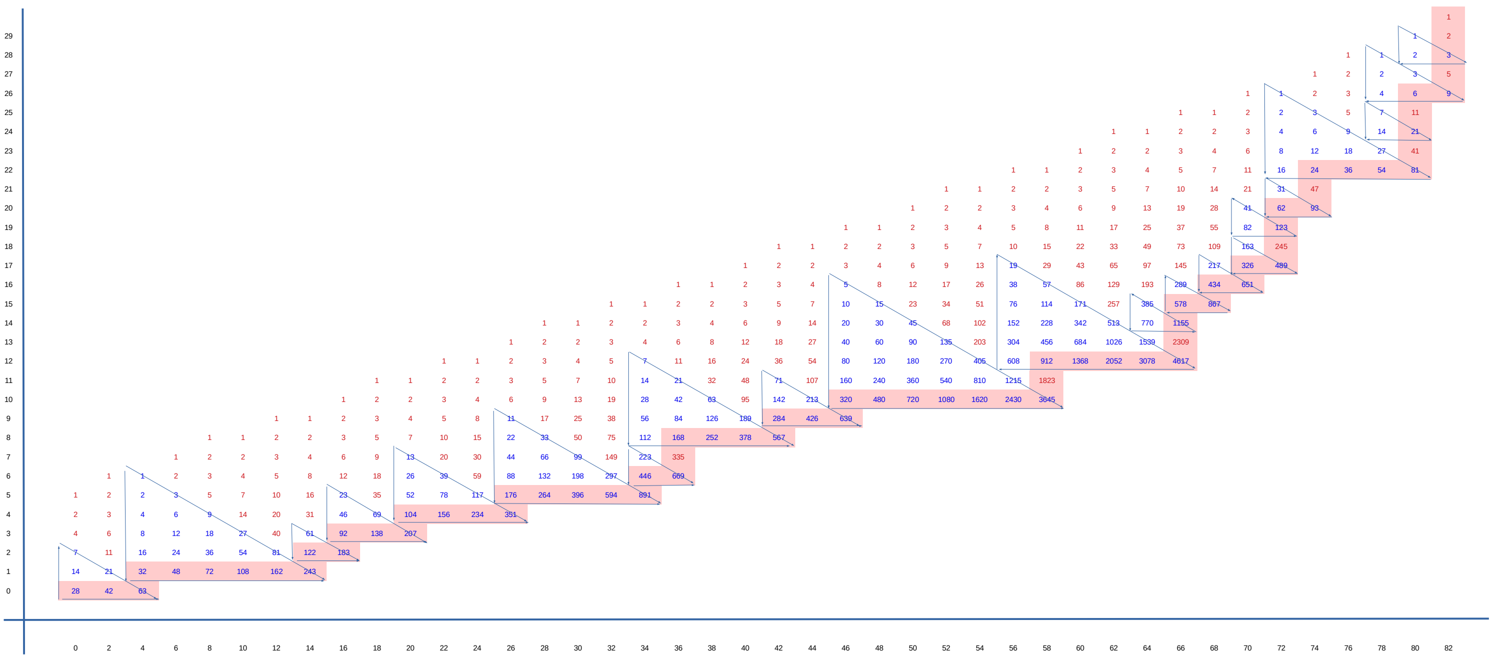
1										
2	3									
4	6	9								
8	12	18	27							
16	24	36	54	81						
32	48	72	108	162	243					
...	...	...	...	...	...	...				

5, 8

La secuencia empezada con el número 27 en las 18 columnas de la tabla o ciclos :

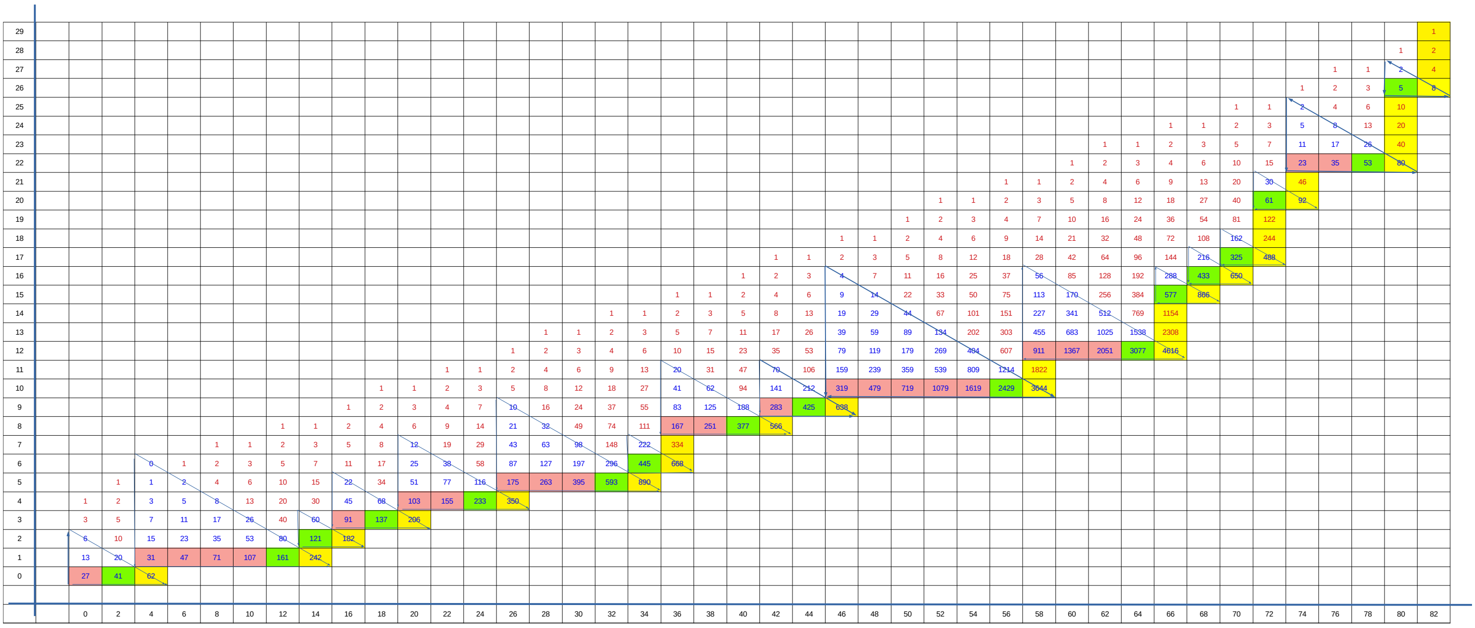
k	14	16	61	46	52	88	223	84	142	160	456	289	217	163	31	12	3	1
n																		
0	27	31	121	91	103	175	445	167	283	319	911	577	433	325	61	23	5	1
1	41	47	182	137	155	263	668	251	425	479	1367	866	650	488	92	35	8	2
2	62	71		206	233	395		377	638	719	2051					53		
3		107			350	593		566		1079	3077					80		
4		161				890				1619	4616							
5		242								2429								
6										3644								
7																		
8																		
9																		

La misma secuencia en la tabla de los triángulos :



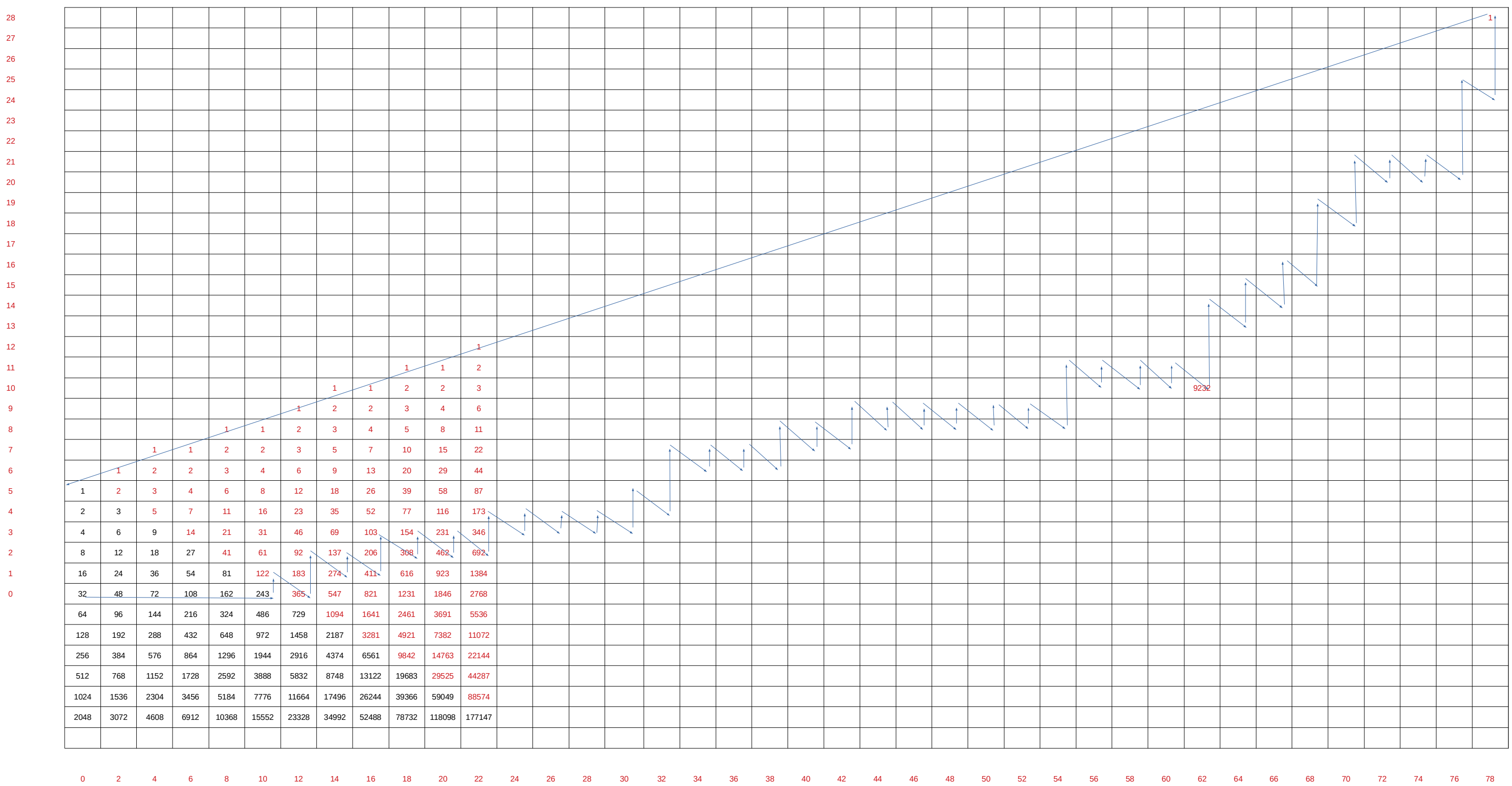
La secuencia empezada con el número 27 tiene 82 iteraciones horizontales de los números impares y 29 iteraciones verticales de los números pares.

También vemos el desarrollo de la secuencia con las columnas de la tabla de los números impares, como filas de los triángulos:



Las filas de los triángulos que forman los ciclos de la secuencia, con los impares de la forma 4n+3 en color rojo, los impares de la forma 4n+1 de color verde y los números pares que unen los ciclos en color amarillo.

En la siguiente tabla, una secuencia empezada con el número 31:



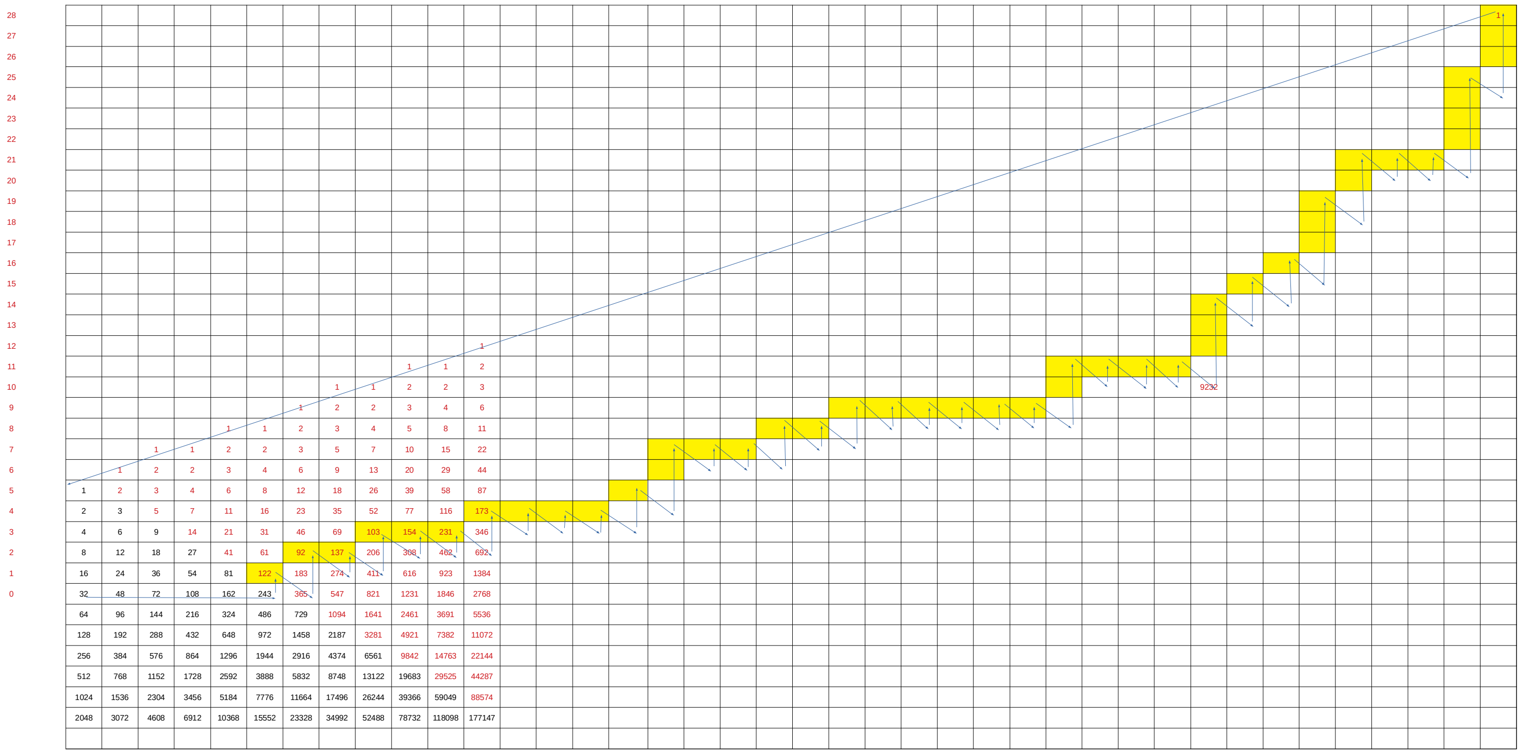
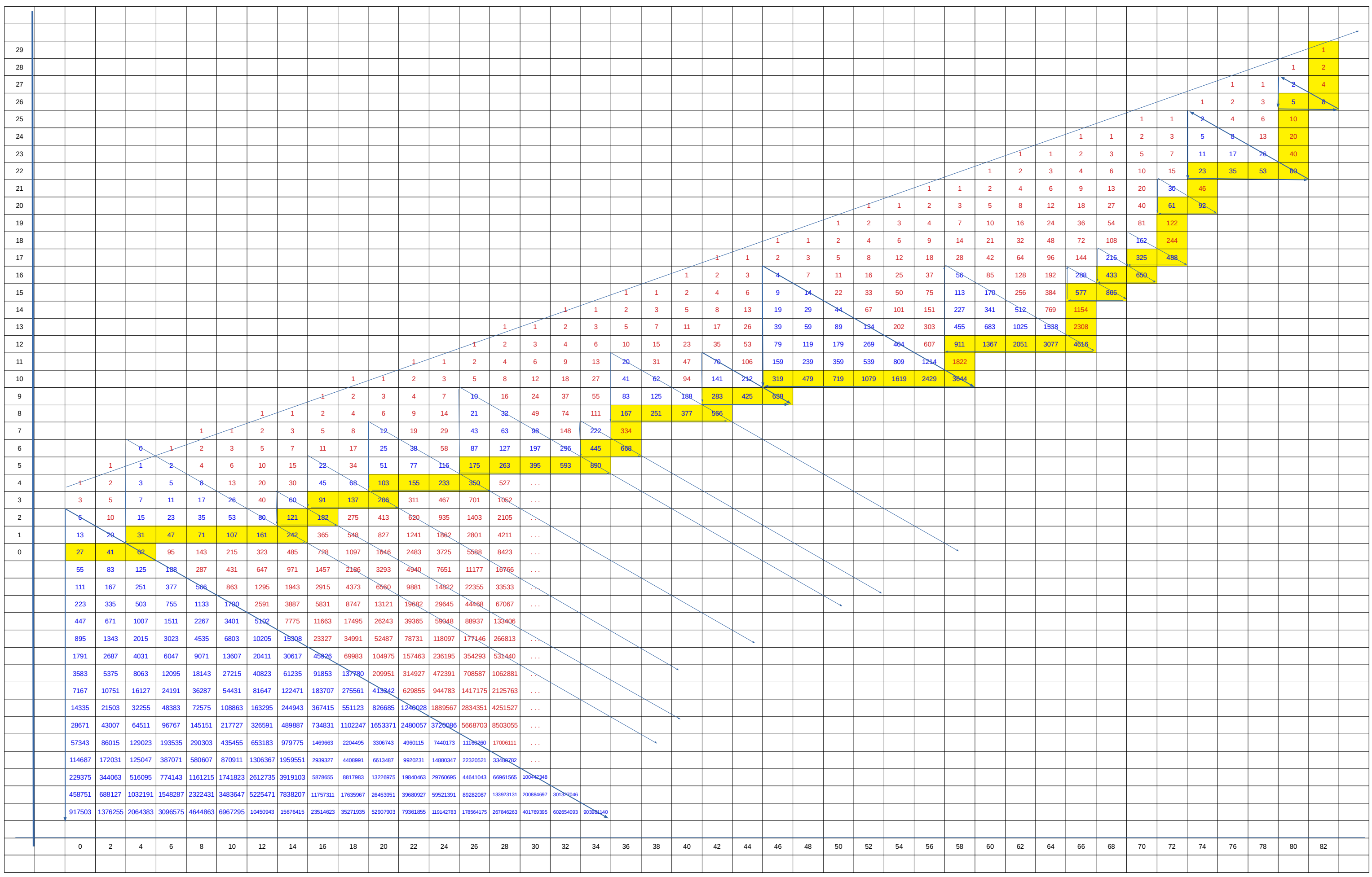


Tabla y los triángulos de la secuencia empezada con el número 27. Se podrían completar todos los números de cada triángulo, pero no son necesarios para ver el desarrollo de la secuencia.



Al aplicar (3m+1)/2 a un número impar provoca que la secuencia se mueva a la siguiente columna de la tabla, pero en la misma fila y asciende a filas superiores cuando al final de cada ciclo, el número par es dividido entre 2. En esta tabla, ascender significa acercarse al número 1.

En la tabla, cada ciclo o triángulo está por encima del anterior y la secuencia nunca desciende a una fila inferior. Tampoco irá en paralelo a la línea de los números 1 ni se separá, porque los ciclos o columnas con la mayor cantidad de números impares (filas más largas) son muy escasas:
En las primeras 10.000 columnas, la que tiene mayor cantidad de números impares es la columna k(8192), con 14 números. Le sigue la columna k(4096) con 13 números, dos columnas tienen 12 números, cinco columnas tienen 11 números, diez columnas con 10 números, veinte columnas con 9 números, etc.
En las primeras 50.000, la columna con más números k(32768) tiene 16.
En las primeras 300.000, la columna con más números k(262144) tiene 19.
En las primeras 1.000.000, la columna con más números k(524288) tiene 20.

Todas las filas de los triángulos o columnas de la tabla son finitas y su último número es par, por lo que inevitablemente acabará en un número 1.

Es una demostración visual de que, aunque los números sufran oscilaciones crecientes y decrecientes, todas las secuencias ascenderán hasta el número 1.

LA CANTIDAD DE NÚMEROS IMPARES que hay en cada columna de la tabla de impares y la cantidad de números pares que hay en la tabla de pares:1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 4 , 1, 2, . . . coincide con la cantidad de dígitos 1 que hay a la derecha del último 0 en la representación en binario de los números impares y con la cantidad de dígitos 0 que hay a la derecha del último 1 en la representación en binario de los números pares. Ejemplo:

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
1	11	101	111	1001	1011	1101	1111	10001	10011	10101
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
10	100	110	1000	1010	1100	1110	10000	10010	10100	10110
1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1

La última fila corresponde a la cantidad de números que hay en las columnas de las tablas y forma una secuencia fractal con infinitas secuencias de los números naturales, de la siguiente manera: Los números 1 están en los valores de k impar y los siguientes términos están en 2k.
Ejemplo: Los términos de la primera secuencia están en k(1), k(2), k(4), k(8), k(16), . . .
Los términos de la segunda secuencia están en k(3), k(6), k(12), k(24), k(48), . . .
Los términos de la tercera secuencia están en k(5), k(10), k(20), k(40), k(80), . . .

	k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	. . .
n																																																					
0		1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79	81	83	85	87	89	91	93	95	97	99	101	. . .
1		2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38	41	44	47	50	53	56	59	62	65	68	71	74	77	80	83	86	89	92	95	98	101	104	107	110	113	116	119	122	125	128	131	134	137	140	143	146	149	152	
2			8		17		26		35		44		53		62		71		80		89		98		107		116		125		134		143		152		161		170		179		188		197		206		215		224		
3					26				53				80				107				134				161				188				215				242				269				296				323				
4									80								161								242								323								404								485				
5																	242																485																728				
6																																	728																				
7																																																					

Impares	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1	5	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1	6	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1	5	1	2	1	. . .

“Impares” es la cantidad de esos números que hay en su columna.
También es el valor de n del número par al final de cada columna.
También es el número de pasos o iteraciones que necesita el primer número de la columna para llegar al número par, aplicando el algoritmo de Collatz.
También es la cantidad de dígitos 1 que hay a la derecha después del 0, de los números impares escritos en binario. Ejemplo: Columna k(24) tiene 4 números pares y el número 47 en binario es 101111.
Esta es una secuencia fractal y forma infinitas secuencias de los números naturales, de la siguiente manera: Los números 1 están en los valores de k impar y los siguientes términos están en 2k.
Ejemplo: Los términos de la primera secuencia están en k(1), k(2), k(4), k(8), k(16), . . .
Los términos de la segunda secuencia están en k(3), k(6), k(12), k(24), k(48), . . .
Los términos de la terceraera secuencia están en k(5), k(10), k(20), k(40), k(80), . . .

	k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	. . .
n																																																					
0		2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	62	64	66	68	70	72	74	76	78	80	82	84	86	88	90	92	94	96	98	100	102	. . .
1		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	. . .
2			1		2		3		4		5		6		7		8		9		10		11		12		13		14		15		16		17		18		19		20		21		22		23		24		25		. . .
3					1				2				3				4				5				6				7				8				9				10				11				12				. . .
4									1								2								3								4								5								6				. . .
5																	1																2																3				. . .
6																																	1																				. . .
7																																																					

Pares	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1	5	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1	6	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1	5	1	2	1	. . .

“Pares” es la cantidad de esos números que hay en su columna.
También es el valor de n del número impar al final de cada columna.
También es el número de pasos o iteraciones que necesita el primer número de la columna para llegar al número impar, aplicando el algoritmo de Collatz.
También es la cantidad de dígitos 0 que hay a la derecha después del 1, de los números pares escritos en binario. Ejemplo: Columna k(24) tiene 4 números pares y el número 48 en binario es 110000.
Esta es una secuencia fractal y forma infinitas secuencias de los números naturales, igual que en la tabla de los números impares.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61
	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38	41	44	47	50	53	56	59	62	65	68	71	74	77	80	83	86	89	92
		8		17		26		35		44		53		62		71		80		89		98		107		116		125		134	
				26				53				80				107				134				161				188			
								80								161								242							
																242															

k	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	. . .
	63	65	67	69	71	73	75	77	79	81	83	85	87	89	91	93	95	97	99	101	103	105	107	109	111	113	115	117	119	121	123	125	. . .
	95	98	101	104	107	110	113	116	119	122	125	128	131	134	137	140	143	146	149	152	155	158	161	164	167	170	173	176	179	182	185	188	. . .
	143		152		161		170		179		188		197		206		215		224		233		242		251		260		269		278		. . .
	215				242				269				296				323				350				377				404				. . .
	323								404								485								566								. . .
	485																728																. . .
	728																																. . .
																																	. . .

En la primera columna solamente hay 1 número impar.
En las primeras 3 columnas, hay 4 números impares y una que tiene 2 números impares.
En las primeras 7 columnas, hay 11 números impares y una que tiene 3 números impares.
En las primeras 15 columnas, hay 26 números impares y una que tiene 4 números impares.
En las primeras 31 columnas, hay 57 números impares y una que tiene 5 números impares.
En las primeras 63 columnas, hay 120 números impares y una que tiene 6 números impares.
. . .
En las primeras k(2^n-1), hay 2^n-n-1 números impares y la columna k(2^(n-1)) tiene n números impares y es la que tiene mayor cantidad.

k											
0	0										
1	1	2									
2	3	5	8								
3	7	11	17	26							
4	15	23	35	53	80						
5	31	47	71	107	161	242					
6	63	95	143	215	323	485	728				
7	127	191	287	431	647	971	1457	2186			
8	255	383	575	863	1295	1943	2915	4373	6560		
9	511	767	1151	1727	2591	3887	5831	8747	13121	19682	
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61
	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38	41	44	47	50	53	56	59	62	65	68	71	74	77	80	83	86	89	92
		8		17		26		35		44		53		62		71		80		89		98		107		116		125		134	
				26				53				80				107				134				161				188			
								80								161								242							
																242															

k	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	. . .
																																	. . .
	63	65	67	69	71	73	75	77	79	81	83	85	87	89	91	93	95	97	99	101	103	105	107	109	111	113	115	117	119	121	123	125	. . .
	95	98	101	104	107	110	113	116	119	122	125	128	131	134	137	140	143	146	149	152	155	158	161	164	167	170	173	176	179	182	185	188	. . .
	143		152		161		170		179		188		197		206		215		224		233		242		251		260		269		278		. . .
	215				242				269				296				323				350				377				404				. . .
	323								404								485								566								. . .
	485																728																. . .
	728																																. . .
																																	. . .

En cada “triángulo” T(n) del fractal hay 2*T(n)+n números impares y el número par es 3^n-1.

Ejemplo:

T(1)	2*T(0)+1=	1	número impar.
T(2)	2*T(1)+2=	4	números impares y el par 8.
T(3)	2*T(2)+3=	11	números impares y el par 26.
T(4)	2*T(3)+4=	26	números impares y el par 80.
T(5)	2*T(4)+5=	57	números impares y el par 242.
T(6)	2*T(5)+6=	120	números impares y el par 728.
T(7)	. . .		

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61
	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38	41	44	47	50	53	56	59	62	65	68	71	74	77	80	83	86	89	92
		8		17		26		35		44		53		62		71		80		89		98		107		116		125		134	
				26				53				80				107				134				161				188			
								80								161								242							
																242															
	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1	5	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1
	1	3		7				15								31															
	1																														
	4																														
	11																														
	26																														
	57																														
	120																														

k	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	. . .
	63	65	67	69	71	73	75	77	79	81	83	85	87	89	91	93	95	97	99	101	103	105	107	109	111	113	115	117	119	121	123	125	. . .
	95	98	101	104	107	110	113	116	119	122	125	128	131	134	137	140	143	146	149	152	155	158	161	164	167	170	173	176	179	182	185	188	. . .
	143		152		161		170		179		188		197		206		215		224		233		242		251		260		269		278		. . .
	215				242				269				296				323				350				377				404				. . .
	323								404								485								566								. . .
	485																728																. . .
	728																																. . .
																																	. . .
	6	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1	5	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1	. . .
	63																																. . .

1		1																															
2		2	1																														
4		3	1	2	1																												
8		4	1	2	1	3	1	2	1																								
16		5	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1																
32		6	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1	5	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1
64		7	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1	5	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1

1																																
2																																
4																																
8																																
16																																
32																																
64	6	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1	5	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1

ANEXO 1

Secuencia empezada con el número 2251799813685247, que es el primer número de la columna k(2^50) de la tabla.

En esta columna están los 50 primeros impares de la secuencia, que son de la forma 4n-1 y ocupan los pasos pares del 0 al 98. El impar 51º, que es de la forma 4n-3 en el paso 100 y el par 52º que es el último número de la columna, en el paso 102.

```
  paso: valor

     0: 2251799813685247
     1: 6755399441055742
     2: 3377699720527871
     3: 10133099161583614
     4: 5066549580791807
     5: 15199648742375422
     6: 7599824371187711
     7: 22799473113563134
     8: 11399736556781567
     9: 34199209670344702
    10: 17099604835172351
    11: 51298814505517054
    12: 25649407252758527
    13: 76948221758275582
    14: 38474110879137791
    15: 115422332637413374
    16: 57711166318706687
    17: 173133498956120062
    18: 86566749478060031
    19: 259700248434180094
    20: 129850124217090047
    21: 389550372651270142
    22: 194775186325635071
    23: 584325558976905214
    24: 292162779488452607
    25: 876488338465357822
    26: 438244169232678911
    27: 1314732507698036734
    28: 657366253849018367
    29: 1972098761547055102
    30: 986049380773527551
    31: 2958148142320582654
    32: 1479074071160291327
    33: 4437222213480873982
    34: 2218611106740436991
    35: 6655833320221310974
    36: 3327916660110655487
    37: 9983749980331966462
    38: 4991874990165983231
    39: 14975624970497949694
    40: 7487812485248974847
    41: 22463437455746924542
    42: 11231718727873462271
    43: 33695156183620386814
    44: 16847578091810193407
    45: 50542734275430580222
    46: 25271367137715290111
    47: 75814101413145870334
    48: 37907050706572935167
    49: 113721152119718805502
    50: 56860576059859402751
```

51: 170581728179578208254
52: 85290864089789104127
53: 255872592269367312382
54: 127936296134683656191
55: 383808888404050968574
56: 191904444202025484287
57: 575713332606076452862
58: 287856666303038226431
59: 863569998909114679294
60: 431784999454557339647
61: 1295354998363672018942
62: 647677499181836009471
63: 1943032497545508028414
64: 971516248772754014207
65: 2914548746318262042622
66: 1457274373159131021311
67: 4371823119477393063934
68: 2185911559738696531967
69: 6557734679216089595902
70: 3278867339608044797951
71: 9836602018824134393854
72: 4918301009412067196927
73: 14754903028236201590782
74: 7377451514118100795391
75: 22132354542354302386174
76: 11066177271177151193087
77: 33198531813531453579262
78: 16599265906765726789631
79: 49797797720297180368894
80: 24898898860148590184447
81: 74696696580445770553342
82: 37348348290222885276671
83: 112045044870668655830014
84: 56022522435334327915007
85: 168067567306002983745022
86: 84033783653001491872511
87: 252101350959004475617534
88: 126050675479502237808767
89: 378152026438506713426302
90: 189076013219253356713151
91: 567228039657760070139454
92: 283614019828880035069727
93: 850842059486640105209182
94: 425421029743320052604591
95: 1276263089229960157813774
96: 638131544614980078906887
97: 1914394633844940236720662
98: 957197316922470118360331
99: 2871591950767410355080994
100: 1435795975383705177540497
101: 4307387926151115532621492
102: 2153693963075557766310746
103: 1076846981537778883155373
104: 3230540944613336649466120
105: 1615270472306668324733060
106: 807635236153334162366530
107: 403817618076667081183265
108: 1211452854230001243549796
109: 605726427115000621774898
110: 302863213557500310887449
111: 908589640672500932662348
112: 454294820336250466331174
113: 227147410168125233165587
114: 681442230504375699496762

115: 340721115252187849748381
116: 1022163345756563549245144
117: 511081672878281774622572
118: 255540836439140887311286
119: 127770418219570443655643
120: 383311254658711330966930
121: 191655627329355665483465
122: 574966881988066996450396
123: 287483440994033498225198
124: 143741720497016749112599
125: 431225161491050247337798
126: 215612580745525123668899
127: 646837742236575371006698
128: 323418871118287685503349
129: 970256613354863056510048
130: 485128306677431528255024
131: 242564153338715764127512
132: 121282076669357882063756
133: 60641038334678941031878
134: 30320519167339470515939
135: 90961557502018411547818
136: 45480778751009205773909
137: 136442336253027617321728
138: 68221168126513808660864
139: 34110584063256904330432
140: 17055292031628452165216
141: 8527646015814226082608
142: 4263823007907113041304
143: 2131911503953556520652
144: 1065955751976778260326
145: 532977875988389130163
146: 1598933627965167390490
147: 799466813982583695245
148: 2398400441947751085736
149: 1199200220973875542868
150: 599600110486937771434
151: 299800055243468885717
152: 899400165730406657152
153: 449700082865203328576
154: 224850041432601664288
155: 112425020716300832144
156: 56212510358150416072
157: 28106255179075208036
158: 14053127589537604018
159: 7026563794768802009
160: 21079691384306406028
161: 10539845692153203014
162: 5269922846076601507
163: 15809768538229804522
164: 7904884269114902261
165: 23714652807344706784
166: 11857326403672353392
167: 5928663201836176696
168: 2964331600918088348
169: 1482165800459044174
170: 741082900229522087
171: 2223248700688566262
172: 1111624350344283131
173: 3334873051032849394
174: 1667436525516424697
175: 5002309576549274092
176: 2501154788274637046
177: 1250577394137318523
178: 3751732182411955570

179: 1875866091205977785
180: 5627598273617933356
181: 2813799136808966678
182: 1406899568404483339
183: 4220698705213450018
184: 2110349352606725009
185: 6331048057820175028
186: 3165524028910087514
187: 1582762014455043757
188: 4748286043365131272
189: 2374143021682565636
190: 1187071510841282818
191: 593535755420641409
192: 1780607266261924228
193: 890303633130962114
194: 445151816565481057
195: 1335455449696443172
196: 667727724848221586
197: 333863862424110793
198: 1001591587272332380
199: 500795793636166190
200: 250397896818083095
201: 751193690454249286
202: 375596845227124643
203: 1126790535681373930
204: 563395267840686965
205: 1690185803522060896
206: 845092901761030448
207: 422546450880515224
208: 211273225440257612
209: 105636612720128806
210: 52818306360064403
211: 158454919080193210
212: 79227459540096605
213: 237682378620289816
214: 118841189310144908
215: 59420594655072454
216: 29710297327536227
217: 89130891982608682
218: 44565445991304341
219: 133696337973913024
220: 66848168986956512
221: 33424084493478256
222: 16712042246739128
223: 8356021123369564
224: 4178010561684782
225: 2089005280842391
226: 6267015842527174
227: 3133507921263587
228: 9400523763790762
229: 4700261881895381
230: 14100785645686144
231: 7050392822843072
232: 3525196411421536
233: 1762598205710768
234: 881299102855384
235: 440649551427692
236: 220324775713846
237: 110162387856923
238: 330487163570770
239: 165243581785385
240: 495730745356156
241: 247865372678078
242: 123932686339039

243: 371798059017118
244: 185899029508559
245: 557697088525678
246: 278848544262839
247: 836545632788518
248: 418272816394259
249: 1254818449182778
250: 627409224591389
251: 1882227673774168
252: 941113836887084
253: 470556918443542
254: 235278459221771
255: 705835377665314
256: 352917688832657
257: 1058753066497972
258: 529376533248986
259: 264688266624493
260: 794064799873480
261: 397032399936740
262: 198516199968370
263: 99258099984185
264: 297774299952556
265: 148887149976278
266: 74443574988139
267: 223330724964418
268: 111665362482209
269: 334996087446628
270: 167498043723314
271: 83749021861657
272: 251247065584972
273: 125623532792486
274: 62811766396243
275: 188435299188730
276: 94217649594365
277: 282652948783096
278: 141326474391548
279: 70663237195774
280: 35331618597887
281: 105994855793662
282: 52997427896831
283: 158992283690494
284: 79496141845247
285: 238488425535742
286: 119244212767871
287: 357732638303614
288: 178866319151807
289: 536598957455422
290: 268299478727711
291: 804898436183134
292: 402449218091567
293: 1207347654274702
294: 603673827137351
295: 1811021481412054
296: 905510740706027
297: 2716532222118082
298: 1358266111059041
299: 4074798333177124
300: 2037399166588562
301: 1018699583294281
302: 3056098749882844
303: 1528049374941422
304: 764024687470711
305: 2292074062412134
306: 1146037031206067

307: 3438111093618202
308: 1719055546809101
309: 5157166640427304
310: 2578583320213652
311: 1289291660106826
312: 644645830053413
313: 1933937490160240
314: 966968745080120
315: 483484372540060
316: 241742186270030
317: 120871093135015
318: 362613279405046
319: 181306639702523
320: 543919919107570
321: 271959959553785
322: 815879878661356
323: 407939939330678
324: 203969969665339
325: 611909908996018
326: 305954954498009
327: 917864863494028
328: 458932431747014
329: 229466215873507
330: 688398647620522
331: 344199323810261
332: 1032597971430784
333: 516298985715392
334: 258149492857696
335: 129074746428848
336: 64537373214424
337: 32268686607212
338: 16134343303606
339: 8067171651803
340: 24201514955410
341: 12100757477705
342: 36302272433116
343: 18151136216558
344: 9075568108279
345: 27226704324838
346: 13613352162419
347: 40840056487258
348: 20420028243629
349: 61260084730888
350: 30630042365444
351: 15315021182722
352: 7657510591361
353: 22972531774084
354: 11486265887042
355: 5743132943521
356: 17229398830564
357: 8614699415282
358: 4307349707641
359: 12922049122924
360: 6461024561462
361: 3230512280731
362: 9691536842194
363: 4845768421097
364: 14537305263292
365: 7268652631646
366: 3634326315823
367: 10902978947470
368: 5451489473735
369: 16354468421206
370: 8177234210603

371: 24531702631810
372: 12265851315905
373: 36797553947716
374: 18398776973858
375: 9199388486929
376: 27598165460788
377: 13799082730394
378: 6899541365197
379: 20698624095592
380: 10349312047796
381: 5174656023898
382: 2587328011949
383: 7761984035848
384: 3880992017924
385: 1940496008962
386: 970248004481
387: 2910744013444
388: 1455372006722
389: 727686003361
390: 2183058010084
391: 1091529005042
392: 545764502521
393: 1637293507564
394: 818646753782
395: 409323376891
396: 1227970130674
397: 613985065337
398: 1841955196012
399: 920977598006
400: 460488799003
401: 1381466397010
402: 690733198505
403: 2072199595516
404: 1036099797758
405: 518049898879
406: 1554149696638
407: 777074848319
408: 2331224544958
409: 1165612272479
410: 3496836817438
411: 1748418408719
412: 5245255226158
413: 2622627613079
414: 7867882839238
415: 3933941419619
416: 11801824258858
417: 5900912129429
418: 17702736388288
419: 8851368194144
420: 4425684097072
421: 2212842048536
422: 1106421024268
423: 553210512134
424: 276605256067
425: 829815768202
426: 414907884101
427: 1244723652304
428: 622361826152
429: 311180913076
430: 155590456538
431: 77795228269
432: 233385684808
433: 116692842404
434: 58346421202

435: 29173210601
436: 87519631804
437: 43759815902
438: 21879907951
439: 65639723854
440: 32819861927
441: 98459585782
442: 49229792891
443: 147689378674
444: 73844689337
445: 221534068012
446: 110767034006
447: 55383517003
448: 166150551010
449: 83075275505
450: 249225826516
451: 124612913258
452: 62306456629
453: 186919369888
454: 93459684944
455: 46729842472
456: 23364921236
457: 11682460618
458: 5841230309
459: 17523690928
460: 8761845464
461: 4380922732
462: 2190461366
463: 1095230683
464: 3285692050
465: 1642846025
466: 4928538076
467: 2464269038
468: 1232134519
469: 3696403558
470: 1848201779
471: 5544605338
472: 2772302669
473: 8316908008
474: 4158454004
475: 2079227002
476: 1039613501
477: 3118840504
478: 1559420252
479: 779710126
480: 389855063
481: 1169565190
482: 584782595
483: 1754347786
484: 877173893
485: 2631521680
486: 1315760840
487: 657880420
488: 328940210
489: 164470105
490: 493410316
491: 246705158
492: 123352579
493: 370057738
494: 185028869
495: 555086608
496: 277543304
497: 138771652
498: 69385826

499: 34692913
500: 104078740
501: 52039370
502: 26019685
503: 78059056
504: 39029528
505: 19514764
506: 9757382
507: 4878691
508: 14636074
509: 7318037
510: 21954112
511: 10977056
512: 5488528
513: 2744264
514: 1372132
515: 686066
516: 343033
517: 1029100
518: 514550
519: 257275
520: 771826
521: 385913
522: 1157740
523: 578870
524: 289435
525: 868306
526: 434153
527: 1302460
528: 651230
529: 325615
530: 976846
531: 488423
532: 1465270
533: 732635
534: 2197906
535: 1098953
536: 3296860
537: 1648430
538: 824215
539: 2472646
540: 1236323
541: 3708970
542: 1854485
543: 5563456
544: 2781728
545: 1390864
546: 695432
547: 347716
548: 173858
549: 86929
550: 260788
551: 130394
552: 65197
553: 195592
554: 97796
555: 48898
556: 24449
557: 73348
558: 36674
559: 18337
560: 55012
561: 27506
562: 13753

563: 41260
564: 20630
565: 10315
566: 30946
567: 15473
568: 46420
569: 23210
570: 11605
571: 34816
572: 17408
573: 8704
574: 4352
575: 2176
576: 1088
577: 544
578: 272
579: 136
580: 68
581: 34
582: 17
583: 52
584: 26
585: 13
586: 40
587: 20
588: 10
589: 5
590: 16
591: 8
592: 4
593: 2
594: 1