Les équations d'Einstein pour les formes extérieures

A.Balan

1 Les dérivations des formes extérieures

On prend des formes de degré pair sur une variété différentielle M. Les dérivations $T\Lambda_+(M)$ des formes extérieures paires Λ_+ sont alors en isomorphisme avec le produit tensoriel :

$$\Lambda_+(M) \bigotimes TM$$

On a, pour une dérivation X, :

$$X(a \wedge b) = X(a) \wedge b + a \wedge X(b)$$

avec a, b, deux formes. Les dérivations sont un module sur Λ_+.

2 Les connexions pour les formes extérieures

On définit des connexions de Koszul par les deux axiomes suivants :

$$\nabla_X(w \wedge s) = X(w) \wedge s + w \wedge \nabla_X(s)$$

$$\nabla_{w \wedge X}(s) = w \wedge \nabla_X(s)$$

s est une section d'un module sur les formes. Pour une métrique riemannienne, g est une forme bilinéaire sur $T\Lambda_+(M)$ prenant valeurs dans les formes,

$$g(X, Y) = g(Y, X)$$

$$g(w \wedge X, Y) = w \wedge g(X, Y)$$

g, donnant un isomorphisme avec le dual. On peut définir la connexion de Levi-Civita qui conserve la métrique et est de torsion nulle.

3 La courbure riemannienne

La courbure riemannienne peut se construire par la connexion de Levi-Civita, c'est une deux forme sur les dérivations dans les endomorphismes de l'espace des dérivations des formes.

$$R \in \Lambda^2(T\Lambda_+(M)) \bigotimes_{\Lambda_+} End(T\Lambda_+(M))$$

On définit aussi la courbure de Ricci *Ricc*.

4 Les équations d'Einstein

Les équations d'Einstein pour les formes extérieures sont usuellement :

$$Ricc = rg$$

avec r un scalaire et g la métrique riemannienne. En dimension quatre, il s'agit de matrices 4.4 avec coefficients les formes extérieures paires qui sont de dimension huit, donc de dimension 128.