Vector potential field

Valery Timin

(July 2019)

Russia

In addition to the force fields given by the scalar potential field and its intensity, there may be force vector potential fields $V^i(r,t)$, which are converted as a vector. Such fields can directly set the energy $K = p^0$ and the momentum p^i (speed) of the motion of a material point in space or their change in contrast to the scalar potential field, which determines the change only of the kinetic energy of the material point. This field is called a vector potential field.

Кроме силовых полей, задаваемых скалярным потенциальным полем и его напряженностью, возможно существование силовых векторных потенциальных полей $V^i(r,t)$, которые преобразуются как вектор. Такие поля могут непосредственно задавать энергию $K = p^0$ и импульс p^i (скорость) движения материальной точки в пространстве или их изменение в отличие от скалярного потенциального поля, задающего изменение только кинетической энергии м.т. Такое поле называется векторным потенциальным полем.

1. ГПТК координатных векторов

В начале рассмотрим законы преобразования геометрических пространственно–временных параметров м.о. – координат q^i, скорости v^i и ускорения w^i – при преобразованиях галилеевых координат КМ. Для примера рассмотрим преобразование координат q^i:

$$\begin{cases} t' = t, \\ r'^i = -V_0^i t + r^i + V_j^i r^j. \end{cases} \quad (1)$$

или в матричном виде:

$$\left(t', r'^i\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V_0^i & \delta_j^i + V_j^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ r^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -V_0^i t + \left(r^i + V_j^i r^j\right) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где V^i_0 – направляющий вектор преобразования, численно равный скорости новой с.о.

V^i_j – антисимметричный направляющий тензор поворота пространственных координат,

δ^i_j – диагональный единичный пространственный тензор.

Более привычным выражением галилеевых преобразовании координат является преобразование без поворота с.к.:

$$\begin{cases} t' = t, \\ r'^i = r^i - V_0^i t. \end{cases}$$

Прежде чем перейти к галилеевым преобразованиям скорости и ускорения, выясним моменты, касающиеся скорости и ускорения по нулевой координате t. Здесь по очевидным определениям принимается, что скорость $v^0 = dt/dt \equiv 1$ и ускорение $w^0 = dv^0/dt \equiv 0$.

Преобразование скорости мы можем получить из (2), получив из нее производную временных и пространственных координат по "скалярной" координате "время". Учитывая, что $v^0 = dt/dt \equiv 1$, имеем:

$$\begin{cases} v'^{0} = \dfrac{dt'}{dt} = \dfrac{dt}{dt} \equiv 1, \\ v'^{i} = \dfrac{dr'^{i}}{dt} = \dfrac{dr^{i}}{dt} - \left(V_0^i - V_j^i v^j\right) = v^i - \left(V_0^i - V_j^i v^j\right). \end{cases} \tag{3}$$

В матричном форме оно же запишется в следующем виде:

$$\left(v'^0, v'^i\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V_0^i & \delta_j^i + V_j^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ v^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -V_0^i + \left(v^i + V_j^i v^j\right) \end{pmatrix}, \tag{4}$$

Преобразование ускорения мы можем получить из (3), получив из нее производную временных и пространственных координат по "скалярной" координате "время"". Учитывая, что $w^0 = d^2t/dt^2 \equiv 0$, имеем:

$$\begin{cases} w'^{0} = \dfrac{d}{dt} 1 \equiv 0, \\ w'^{i} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{dr'^{i}}{dt} = \dfrac{d}{dt} v^i - \dfrac{d}{dt}\left(V_0^i - V_j^i v^j\right) = w^i + V_j^i w^j. \end{cases} \tag{5}$$

В матричном форме оно же запишется в следующем виде:

$$\left(w'^0, w'^i\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V_0^i & \delta_j^i + V_j^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ w^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ w^i + V_j^i w^j \end{pmatrix}, \tag{6}$$

Соответственно для любого вектора A^i это преобразование задается выражением:

$$\begin{gathered} A'^{i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V_0^i & \delta_j^i + V_j^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^0 \\ A^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V_0^i & \delta_j^i + V_j^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^0 \\ A^j \end{pmatrix}, \\ A'_{i} = \begin{pmatrix} 1 & V_i^0 \\ 0 & \delta_j^i + V_i^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & dV_i^0 \\ 0 & \delta_j^i + dV_i^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_j \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{7}$$

Таким образом, координаты, скорость, ускорение и любой другой галилеев вектор преобразуются одним и тем же способом.

2. Метрики галилеева пространства

В галилеевом пространстве возможно существование трех метрик, каждая со своей областью определения и применения:

1. Метрика "промежуток времени" или просто "время" $d\tau$:

$$d\tau = dt. \tag{8}$$

Эта метрика является линейной, обладает универсальным свойством инвариантности и может быть применена в галилеевом пространстве в качестве универсального скалярного параметра.

2. Метрика "расстояние" dl:

$$dl^2 = dr^2 = dr^i dr^i. \tag{9}$$

Эта метрика является билинейной, обладает универсальным свойством инвариантности – но только в пределах пространственной 3-мерной "плоскости" при постоянном значении координаты время. Может быть применена в галилеевом пространстве в качестве универсального скалярного параметра, но только в пределах 3-мерного пространства для одновременных событий.

3. Метрика "интервал" или просто "время" ds:

$$ds^2 = dt^2 – dl^2 = dt^0dt_0 + dr^idr_i = dq^idq_i. \tag{10}$$

Здесь по определению принимается, что $dt^0 = dt_0$, $dr^i = -dr_i$, как в ортонормированном пространстве Минковского. Многие могут оспаривать возможность включения данной метрики в множество метрик галилеева пространства, но эта метрика соответствует изотропной метрике распространения волн в сплошной среде. Но у него есть и недостаток – в галилеевом пространстве она определяет АСО, и при переходе в ИСО форма (13) искажается, но - в соответствии с правилами преобразования тензоров галилеева пространства.

3. ПТК материальных векторных параметров м.о.

В классической механике у материальных объектов, кроме пространственных тензорных параметров, имеются еще "материальные" "тензорные" параметры, которые не совсем являются "геометрическими" "галилеевыми". Насчет "массы" м.о. ничего такого нельзя сказать – она является скаляром. Импульс м.о. также не вызывает каких-либо нареканий, но у него нет партнера – элемента с индексом "0". А параметр "энергия" и вообще "энергетические" параметры не вписываются в тензорное ложе галилеева пространства. По определению, изменение кинетической энергии равно:

$$dK = mv^idv^i. \tag{11}$$

Но у него есть интересное свойство, или закон, которому она подчиняется – закон сохранения энергии или закон перехода работы в энергию и наоборот. Из (11) можем записать следующее тождество:

$$\begin{gathered} dK = mv^idv^i \rightarrow \\ dK - mv^idv^i \equiv 0 \rightarrow. \\ \frac{dK}{dt}v^0 - F^iv^i = 0 \rightarrow \\ F^0v^0 - F^iv^i = 0. \end{gathered} \tag{12}$$

Здесь $F^0 \rightarrow N$ – мощность силы,

F^i – сила, действующая на м.о.,

Это, конечно, не доказательство, но намек на 4-мерное инвариантное скалярное произведение, где кинетическая энергия и импульс (K, p^i), а также мощность и сила (N,F^i), являются элементами соответствующего им единого 4-вектора.

Теперь рассмотрим, как преобразуются кинетическая энергия и импульс м.о. при галилеевых преобразованиях. В отличие от преобразований координат, которые подчиняются галилеевым преобразованиям (1, 2), при преобразовании материальных параметров м.о. нельзя воспользоваться ими хотя бы потому, что при таких преобразованиях кинетическая энергия, вопреки законам галилеевых преобразований векторов, должна изменяться:

$$\begin{gathered} K' = K(v') = ½m(v^i - dV^i_{(0)})^2 = \\ = ½mv^2 - mv^i\,dV^i_{(0)} + ½mdV^i_{(0)}{}^2 \rightarrow \end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{cases} K' \cong K - mv^i dV^i_{(0)}, \\ p'^i = mv'^i = m(v^i - dV^i_{(0)}). \end{cases}$$

где $V^i_{(0)}$ – направляющий вектор преобразования, численно равный скорости новой с.о. Это соответствует малому преобразованию кинетической энергии K и вектора импульса mv^i (импульса – а не скорости. Скорость преобразуется в соответствии с преобразованиями векторов галилеева пространства) м.о. в КМ с точностью до бесконечно малой величины второго порядка $½(V^i_{(0)})^2$. Кинетическую энергию K можно принять за импульс по нулевой координате в силу равенств $K = Kv^0$ и $v^0 \equiv 1$, поэтому в (12) она может присутствовать вполне законно:

$$\begin{pmatrix} K' \\ p'^i \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 1^0_0 & -dV^0_j \\ -dV^i_0 & \delta^i_j + dV^i_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^0 \\ v^j \end{pmatrix}: \qquad (13)$$

$$dV^0_j = dV^i_{(0)} = dV^i_0.$$

где $V^i_0 \sim V^0_i$ – скорость движущейся с.о. В более общем случае к члену δ^i_j должен быть добавлен произвольный антисимметричный тензор V^i_j, соответствующий повороту пространственных элементов скорости v^i м.о., при котором энергия м.о. не изменится. Изменение энергии-импульса за бесконечно малое время будет определяться выражением

$$d\begin{pmatrix} K \\ p^i \end{pmatrix} = mdV_{(0)} = m\begin{pmatrix} dV^0_{(0)} \\ dV^i_{(0)} \end{pmatrix} \to$$

$$d\begin{pmatrix} K \\ p^i \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} 0 & -dV^0_j \\ -dV^i_0 & dV^i_j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ v^j \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} 0 & -V^0_j \\ -V^i_0 & V^i_j \end{pmatrix} dt \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ v^j \end{pmatrix}. \qquad (14.1)$$

(индексы при числах – по контексту (13)). Из (14) можно видеть, что элемент силы $V^0_0 \equiv 0$. Элементы V^0_j и V^i_0 матрицы преобразований (13) и (14) симметричны по диагонали и равны по значению:

$$\left.\begin{cases} V^0_0 = 0, \\ V^0_j = V^i_0, \\ V^i_j = -V^j_i. \end{cases}\right| : (i, j \in 1..3). \qquad (14.2)$$

Векторы, изменяющиеся таким же образом, назовем "материальными".

Из (14) также видно, что и сам вектор $V_{(0)}$ тоже преобразуется подобно вектору энергия–импульс м.о. в силу пропорциональности их изменения и поэтому является материальным.

Как видно из (13, 14), преобразования векторного потенциального поля не соответствуют преобразованиям пространственных векторов галилеева пространства (1, 2). Но в КМ именно этими выражениями (1, 2) производятся преобразования координат (t, r^i), скоростей и ускорений. Таким образом:

В КМ имеется две геометрии: 4–мерная геометрия материальных (силовых) векторов (тензоров) и (3+1)–мерная геометрия пространственных и временных (ПВ) векторов (тензоров).

4. 4–мерное векторное потенциальное поле V^i.

Кроме силовых полей, задаваемых потенциальным (скалярным) полем и его напряженностью, возможно существование силовых векторных полей $V^i(r,t)$, которые преобразуются как вектор. Такие поля могут непосредственно задавать энергию $K = p^0$ и импульс p^i (через скорость) движения м.т. в пространстве или их изменение в отличие от потенциального поля, задающего изменение только потенциальной (и кинетической) энергии м.т. Такое поле называется векторным потенциальным полем (далее – ВПП).

$$\begin{cases} p^i(r,t) = mV^i(r,t), \\ K(r,t) = mV^0(r,t) = p^0. \end{cases}$$
$$\begin{cases} dp^i(r,t) = mdV^i(r,t), \\ dK(r,t) = mdV^0(r,t) = dp^0. \end{cases} \tag{15}$$

Формула (15.1) определяет непосредственно кинетическую энергию и импульс м.о. в месте нахождения, а (15.2) определяет только изменение кинетической энергии и импульса м.о. Здесь надо иметь в виду, что (15.2) следует из (15.1), но не наоборот: они отличаются друг от друга. (15.1) непосредственно дает функцию энергии и скорости м.о. от положения, а (15.2) – только ее изменение в соседних точках.

Также, как и для скалярного поля $\varphi(r)$, в поле которого м.т. получает дополнительную кинетическую энергию $dK = md\varphi(r,t)$, в ВПП тело получает заранее определенный дополнительный импульс $dp^i = mdV^i(r)$ и кинетическую энергию $dK = mdV^0(r)$. В этом смысле ВПП объединяется в 4–вектор изменения кинетической энергии и импульса м.т., при этом кинетическая энергия будет представляться элементом с индексом 0: $K \to p^0$.

Найдем силу F, с которой поле (15.2) будет действовать на м.т. При этом из (15.2) имеем:

$$\begin{cases} dp^0 = mdV^0 \\ dp^i = mdV^i \end{cases} \to$$

$$\begin{cases} F^0 = m\dfrac{dV^0}{dt} = m\left(V^0_{,0}v^0 + V^0_{,j}v^j\right) = m\left(V^0_{,0} + V^0_{,j}v^j\right), \\ F^i = m\dfrac{dV^i}{dt} = m\left(V^i_{,0}v^0 + V^i_{,j}v^j\right) = m\left(V^i_{,0} + V^i_{,j}v^j\right). \end{cases} \tag{16}$$

где $V^i{}_{,j}$: $i \in \{1..3\}$ – силовое векторное поле, действие которой зависит от скорости м.о., соответствующее частным производным поля $V^i(r,t)$ по пространственным координатам. Из (16) мы видим, что силовое поле, определяющее изменение импульса движения м.т., относится к силовым полям, линейно зависящим от скорости движения.

В отличие от галилеевых преобразований контравариантных векторов, здесь мы не связали заранее силу F^0 с геометрической "силой" $md^2t/dt^2 \equiv 0$.

5. Векторное потенциальное поле и закон сохранения энергии

В соответствии с КМ, должен соблюдаться закон сохранения энергии, точнее – закон перехода работы в энергию – и наоборот, а для этого необходимо соблюдение условия:

$$\begin{gathered} F^0dt = F^idr^i, \\ F^0dt - F^idr^i = 0. \end{gathered} \tag{17}$$

Эти уравнения должны выполняться независимо от того, каким образом получены уравнения для сил F^i: непосредственно, через силовой тензор $F^i{}_j$ или через ВПП $V^i{}_j$. Подставим в (17) выражения (16):

$$\begin{aligned} &m\left(\left(V^0_{,0} + V^0_{,j}v^j\right) - \left(V^i_{,0} + V^i_{,j}v^j\right)v^i\right)dt = \\ &= m\left(V^0_{,0} + V^0_{,j}v^j - V^i_{,0}v^i - V^i_{,j}v^iv^j\right)dt = \\ &= m\left(V^0_{,0} + \left(V^0_{,j} - V^i_{,0}\right)v^i + V^i_{,j}v^iv^j\right)dt = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Т.к. это уравнение должно выполняться при любых скоростях, мы должны сделать вывод о справедливости следующих трех уравнений:

$$\left.\begin{cases} V^0_{,0} = 0, \\ V^0_{,j} = V^i_{,0}, \\ V^i_{,j} = -V^j_{,i}. \end{cases}\right| : (i, j \in 1..3). \tag{19}$$

Эти условия мы уже видели в (14). Первая формула справедлива потому, что энергия м.о. не может изменяться без изменения ее скорости, вторая справедлива в силу закона сохранения энергии, третья справедлива по причине того, что элементы V^i_j антисимметричны в силу того, что просто поворачивают вектор скорости м.о. без изменения ее длины.

Условия (19) являются условиями антисимметричности силового поля V_{ij}, но уравнения (19) записаны с учетом смешанности индексов, поэтому (19.2) записан симметрично. Условия антисимметричности говорит о том, что силовое поле V_{ij} не может быть градиентом скалярной функции. А это означает, что в поле V^i градиент скалярного поля должен быть убран. Это говорит и о том, что на ВПП имеется ограничение: оно не может быть градиентом скалярного поля. Это достигается целевым выбором в качестве ВПП ротора поля V^i:

$$V^i_j \Rightarrow \left.\begin{cases} E^0_0 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial V^0}{\partial t^0} - \dfrac{\partial V^0}{\partial t^0}\right) \equiv 0, \\ E^0_j = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial V^0}{\partial r^j} + \dfrac{\partial V^j}{\partial t^0}\right), \\ E^i_0 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial V^i}{\partial t^0} + \dfrac{\partial V^0}{\partial r^i}\right) = E^0_j, \\ H^i_j = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial V^i}{\partial r^j} - \dfrac{\partial V^j}{\partial r^i}\right) = -H^j_i. \end{cases}\right| : (i, j \in 1..3). \tag{20}$$

Здесь $E^i{}_0$ – напряженность "ньютонова" силового векторного поля, действие которой не зависит от скорости м.о. Он может изменять направление движения, и это направление заранее задано направлением "вектора" $E^i{}_0$. Ее антисимметричная часть совместно с $E^0{}_j$ ответственна за "скалярную" часть потенциального поля и поэтому игнорируется.

$E^0{}_j$ – напряженность силового векторного поля, ответственное непосредственно за изменение (слежение за) кинетической энергии м.о., зависящей от скорости м.о. Непосредственно связан с законом сохранения энергии, и, в связи с этим, численно должен быть равен $E^i{}_0$.

$E^0{}_0$ – напряженность силового поля, непосредственно действующий на энергию м.о., не зависящую от скорости м.о., соответствующее частной производной $V^0(r,t)$ по времени. В соответствии с законом сохранения энергии, должен быть равен нулю.

$H^i{}_j$: $i \in \{1..3\}$ – напряженность силового векторного поля, действие которой зависит от скорости м.о., соответствующее частным производным поля $V^i(r,t)$ по пространственным координатам. Действие ее антисимметричной части заключается в непосредственном изменении, повороте направления движения. Ее симметричная часть деформирует возможное поле скоростей м.о. и в связи с однородностью и изотропностью пространства должна быть равна нулю.

Формула для расчета силы в ВПП будет следующим:

$$\begin{cases} F^0 = E^0_j v^j, \\ F^i = E^i_0 + H^i_j v^j. \end{cases} \tag{21}$$

Здесь F^0 определяет мощность действующей силы, а F^i определяет действующую на м.о. силу.

6. 3+1–мерное векторное потенциальное поле V^i. Силы, непосредственно задающие импульс и энергию м.т.

Рассмотрим следствия из (15.1). Особенностью этого закона движения м.т. является точно известное направление движения м.о. в любом месте пространства в любой момент времени.

$$\begin{cases} p^i(r,t) = mV^i(r,t), \\ K(r,t) = mV^0(r,t) = p^0. \end{cases} \tag{22}$$

С т.з. ньютоновой механики это уравнение не имеет никакого интереса, т.к. нет необходимости знать, какие силы действуют на м.о. Интерес может быть только с т.з. кинематики. Решение для траектории движения определяется из дифференциального уравнения

$$\frac{dq^i}{dt} = V^i(r,t). \tag{23}$$

Уравнение (15.1) можно рассматривать независимо от (15.2), но (15.2) в любом случае является следствием (15.1). Из уравнения (15.1) следует, что как бы ни перемещался м.о. между двумя точками, его модуль скорости заранее предопределен. Из закона сохранения энергии (без использования дифференциалов – но зная выражение для кинетической энергии из КМ) имеем:

$$\begin{gathered} K \;=\; mV^0(t,r) = \frac{mv^2}{2} \rightarrow \\ v = \sqrt{2V^0(t,r)} = \sqrt{\frac{2K}{m}}. \end{gathered} \tag{24}$$

Направление в текущей с.о. при этом может быть любым. С другой стороны, и направление скорости также вполне определено векторным потенциалом:

$$v^i \;=\; V^i(t,r). \tag{25}$$

В соответствии с законом сохранения энергии должно соблюдаться условие:

$$v = |v^i|\,. \tag{26}$$

Дифференциальное условие к изменению кинетической энергии и импульсу м.о. диктуется из закона сохранения энергии (см. также 15.2):

$$\begin{gathered} dK = F^i dr^i \rightarrow \\ dK = mv^i\left(\frac{\partial V^i}{\partial r^j}dr^j\right) = mv^i dV^i. \end{gathered}$$

Здесь предполагается, что масса является скалярным параметром м.о. Зная, что по начальному условию (22) $V^i = v^i$, решим ее:

$$K = \int_0^{v^i} m v^i dv^i = \frac{m{v^i}^2}{2}. \tag{27}$$

Т.к. поле $V^i(r,t) = (V^0, V^i)$ относится к материальным векторам, однозначно задающим 4–импульс (кинетическую энергию и импульс м.о.), то она также подчиняется преобразованиям типа (13, 14), и при любых преобразованиях координат останется пропорциональным 4–импульсу. Следовательно, ВПП $V^i(r,t)$ никоим образом не нарушает принцип относительности Галилея.

Таким образом, и скорость, и кинетическая энергия м.о. вполне определены полем. Если известна потенциальная скорость $V^i(r,t)$, то и энергия м.о. вполне известна. Таким образом, на вид поля $V^i(r,t)$ накладываются очень жесткие ограничения, уменьшающие количество ее степеней свободы на одну единицу – до трех из четырех. На ум приходит сравнение такого "силового" ВПП с движением легкой пушинки на ветру в воздухе, если пренебречь ее гравитационным падением: движение пушинки повторяет движение воздуха во всех деталях.

Таким образом,

7. Выводы.

1) Векторное поле V^i также, как и потенциальное поле φ, можно представить как потенциальное, но 4–мерное ВПП, действующее в отношении энергии и импульса (K, p^i) м.т., потому что оно однозначно задает для каждой точки пространства изменение энергии и импульса м.т. вне зависимости от траектории движения.

2) Векторное силовое поле V^i_j: $i,j \in \{0..3\}$ представляет собой "материальный" тензор преобразований "материальных" векторов галилеева пространства КМ одновременно с галилеевыми преобразованиями координат. При этом элементы V^0_j: $i,j \in \{1..3\}$ напряженности силового поля задают изменение кинетической энергии м.о. (соответствует мощности), элементы V^i_0 задают "ньютонову" силу поля, численно равную V^0_j (в КМ соответствует ее ускорению, в ЭД соответствует электрическому полю), а элементы V^i_j задают силовое "вихревое" поле (в ЭД соответствует "магнитному" полю).