Scalar potential field φ(t,r^{i}) of classical mechanics

Valery Timin

(August 2019)

Russia

This paper deals with the description of the scalar potential field and the motion of a material point in it in three-dimensional and four-dimensional interpretations. Attention is also paid to the existence of such fields in classical physics with the operating principles of relativity. It is shown that such fields can only be stationary, and not stationary can only be in conservative systems.

В данной работе рассмотрены вопросы описания скалярного потенциального поля и движения материальной точки в ней в трехмерной и четырехмерной интерпретациях. Также уделено внимание вопросу существования таких полей в классической физике с действующими в ней принципами относительности. Показано, что такие поля могут быть только стационарными, а не стационарными могут быть только в консервативных системах.

Скалярное потенциальное поле φ классической механики

Понятие поля имеет важное значение для описания процессов, изучаемых в таких областях физики как электродинамика, гидромеханика или механика сплошных сред. Различают скалярные и векторные поля. Если каждой точке (t, r^i) некоторой области P пространства поставлено в соответствие значение скалярной функции $\varphi(t, r^i)$, то говорят, что в области D задано скалярное поле φ. Другими словами, под скалярным полем φ понимается скалярная функция $\varphi(t, r^i)$ положения точки, заданная в некоторой области пространства.

Простейшим примером скалярного поля является температурное поле неоднородно нагретого тела, поскольку каждой точке тела можно поставить в соответствие определенное значение температуры. Можно назвать и другие примеры скалярных полей: плотность распределения заряда и массы, гравитационный потенциал системы тел, потенциал системы заряженных частиц, давление в жидкой или газообразной среде.

Но, например, поле скоростей частиц в с.с. уже не является скалярным полем.

Скалярные силовые поля зависят только от координаты м.т. Но непосредственного силового воздействия они оказывать не могут в силу своей не направленности. В классической механике со скалярными полями можно связать два вида полей:

1) со скалярным потенциальным полем $\varphi(r,t)$, задающим непосредственно кинетическую энергию м.о.;

2) с плотностью силы сопротивления движению k: $f = f(v) = kv$;

Первым и наиболее известным типом поля можно считать потенциальное поле. Поле $\varphi(r)$ – это скалярное поле потенциальной энергии м.т. Его особенность заключается в том, что оно непосредственно задает кинетическую энергию м.о. как скалярную функцию координат (t, r) или ее изменение в пространстве-времени, но не задает непосредственно ни импульса, ни ее изменения во времени. Ее силовое воздействие на м.т. заключается только в изменении параметра "кинетическая энергия" м.о. во времени:

$$K = -m\varphi(t, r) = -U,$$
$$dK = -m\cdot[\varphi(t_m, r_m) - \varphi(t_ц, r_ц)] = -dU\text{: } t_m = r_ц, \tag{1}$$

а изменение импульса задается только косвенно.

Здесь m – масса м.о.,

U – ее потенциальная энергия. Физически полезный смысл имеет не само ее значение, а ее изменение от текущего r_m до целевого положения $r_ц$ точки:

$$dU = U(r_m) - U(r_ц). \tag{2}$$

и оно равно работе, которую совершит поле при перемещении м.о. от текущей до целевой точки:

$$dA = -dU.$$

Знак "–" в (1*) связан с исторически принятым соглашением, выражаемым (2), связанным с необходимостью согласования с законом сохранения энергии (точнее, перехода работы в энергию): вся работа, которую совершит поле, равно изменению кинетической энергии м.о. между конечной и начальной точкой нахождения м.о.:

$$dK = dA \rightarrow$$
$$dK + dU = 0 \rightarrow dK = -dU.$$

1. Движение м.т. в скалярном поле

Найдем выражение для силы воздействия этого поля на м.о. Из (1) мы можем определить изменение кинетической энергии за бесконечно малое время движения в скалярном силовом поле:

$$\begin{aligned} dK &= -m\cdot[\varphi(t_т, r_т) - \varphi(t_ц, r_ц)] = \\ &= -m\left(\frac{\partial\varphi(t,r)}{\partial t}dt + \frac{\partial\varphi(t,r)}{\partial r^i}dr^i\right) = \\ &= -m\left(\frac{\partial\varphi(t,r)}{\partial t} + \frac{\partial\varphi(t,r)}{\partial r^i}v^i\right)dt. \end{aligned} \tag{3}$$

Но в КМ кинетическая энергия может измениться только при изменении скорости м.о. Поэтому из (3) необходимо исключить частную производную по времени:

$$\begin{aligned} dK &= -m\left(\frac{\partial\varphi(t,r)}{\partial t} + \frac{\partial\varphi(t,r)}{\partial r^i}v^i\right)dt \rightarrow \\ dK &= -m\frac{\partial\varphi(t,r)}{\partial r^i}dr^i = F_i dr^i \rightarrow \\ F_i &= -m\frac{\partial\varphi(t,r)}{\partial r^i} = -mE_i. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь E_i – напряженность силового поля.

Из уравнений (4) непосредственно можно сделать вывод, что

1) частная производная поля по времени не влияет на движение м.о. и

2) потенциальное поле (1.2) определено с точностью до постоянного слагаемого – от этого силовое действие поля на м.о. не изменится.

А это может быть в двух случаях:

1) в соответствии с (4) – игнорированием этой составляющей и

2) в соответствии с (3) – в случае равенства нулю производной $\partial\varphi/\partial t$.

Второе возможно только в стационарном потенциальном поле. А статические поля являются представителями АСО. Примерами таких полей являются гравитационное и электростатическое поля, поле давления в изотермической газовой среде без передачи тепловой энергии.

1). Уравнение (1.1) можно рассматривать независимо от (1.2), но (1.2) в любом случае является следствием (1.1). Из уравнения (1.1) следует, что как бы ни перемещался м.о. между двумя точками, его модуль скорости заранее предопределен:

$$K = -m\varphi(t,r) = \frac{mv^2}{2} \rightarrow |v| = \sqrt{\frac{2K}{m}}, \tag{5}$$

а направление может быть любым в текущей с.о. Но, зная начальное направление движения и векторное поле силового воздействия (4) на м.о., можно однозначно определить направление движения в любой в любой точке пространства-времени. А т.к. скаляр не может изменяться при преобразованиях координат, а любое изменение ИСО приводит к изменению начальной скорости и глобального поля возможных скоростей, то делаем вывод – скалярное поле (1.1) может быть только стационарным и задает АСО.

2). Если не привязывать потенциал $\varphi(t, r)$ с кинетической энергией K м.о., то вместо (1.1) можно пользоваться (1.2). Уравнение (1.2) дает больше свободы для перемещений м.о.: кинетическая энергия м.о. может быть определена с точностью до константы. При этом силовое поле и поле скоростей не изменяется. Но "ахиллесова пята" определенности АСО от (1.1) остается без изменений: поле траекторий в каждом из ИСО для каждого значения начальной энергии не будет совпадать с полем скоростей другой ИСО, и каждое ИСО в принципе будет определять свое собственное АСО.

3). Но не стационарные поля в КМ существуют! в силу принципа относительности Галилея. Т.к. любое стационарное во времени, но переменное в пространстве поле не является стационарным в любой другой ИСО:

$$F_0 = -m\partial\varphi/\partial t \neq 0.$$

А это возможно только в соответствии с (4) игнорированием F_0. Забыв, что F_0 существует. Как и делается в КМ.

Но для этого необходима полная отвязка значения потенциальной энергии $\varphi(t, r)$ от значения кинетической энергией K м.о., но при соблюдении (1.2). При этом при переходе в другое ИСО силовое поле и поле скоростей будут изменяться таким образом, что принцип относительности Галилея будет соблюдаться и с ИСО не будет связываться какое-либо независимое АСО. Точнее, возможность существования АСО останется, и если оно существует – то будет одним и тем же для всех ИСО, и его существование не будет нарушать принцип относительности Галилея.

Вывод: скалярное внешнее поле можно использовать в КМ как специальное статическое поле, определяющее независимое АСО в каждом из ИСО в зависимости от начального направления движения и начальной кинетической энергии в выделенной точке.

Особенностью использования силовых полей F_i и напряженности E_i является необходимость поднятия индекса для использования в рамках ньютоновой механики, а именно – в трех законах Ньютона: в них используется верхний индекс. В ньютоновой 3–

мерной механике поднятие/опускание индекса при пространственных элементах является чисто формальной операцией:

$$F^i = F_i,\ E^i \sim E_i. \tag{6}$$

Напряженность поля E^i в этом случае выступает в роли силового поля ускорения м.т. Гравитационное поле (ньютоновское) как раз определяется скалярным полем, поэтому все это относится к нему непосредственно.

2. Четвертое измерение и сила F_0

В 4–мерном случае к (4) формально прибавляется еще один член – сила F_0, связанная с координатой "время".

$$F_i \to (F_0, F_i) = -m\left(\frac{\partial\varphi(t,r)}{\partial t}, \frac{\partial\varphi(t,r)}{\partial r^i}\right). \tag{7}$$

Формулы (7) записаны в "естественной" форме, согласованной с (4.3). Причем от нее нельзя просто отмахнуться, как в КМ. Для этого нужны основания.

По аналогии с КМ (4) действующие на м.о. силы можно записать в виде:

$$\begin{gathered} F_i \to (F_0, F_i) = -m\left(\frac{\partial\varphi(t,r)}{\partial t}, \frac{\partial\varphi(t,r)}{\partial r^i}\right) \to, \\ F_0 = \frac{\partial\varphi(t,r)}{\partial t}, F_i = \frac{\partial\varphi(t,r)}{\partial r^i}. \end{gathered} \tag{8}$$

Составляющая F_0 в 3–мерной классической механике (далее КМ) не оказывает какого–либо силового воздействия на м.о. и ее как бы не имеется. Объяснение заключается в формальном определении понятия силы:

$$F_i = m\frac{d^2r}{dt^2}. \tag{9}$$

Подставляя формально вместо r символ t, имеем

$$F_0 = m\frac{d^2t}{dt^2} \equiv 0. \tag{10}$$

Т.е. $F_0 \equiv 0$. И это согласуется с тем, что в КМ кинетическая энергия может измениться только при изменении скорости м.о. Из этого получаем частное решение:

$$F_0 = \frac{\partial\varphi(t,r)}{\partial t} \equiv 0. \tag{11}$$

т.е. поле $\varphi(t, r)$ является стационарными полем.

Но не стационарные поля в КМ существуют! Т.к. любое стационарное во времени, но переменное в пространстве поле не является стационарным в любой другой ИСО, то $F'_0 = -m\partial\varphi/\partial t \neq 0$. Т.к. с другой стороны, $dK = F_i dr^i$, то должно выполняться условие

$$-m\frac{\partial\varphi}{\partial t}dt = F_i dr^i. \tag{12}$$

Сравнив (11) и (12), можем сделать вывод: это условие не может быть выполнено даже для одного м.о., который может двигаться в произвольном направлении с произвольной скоростью в произвольной ИСО в некотором начальном, исходном положении и точно будет нарушено при переходе в любое другое ИСО. Из этого можно сделать вывод, что скалярные поля в 4-мерной механике не допустимы. Следовательно, необходим другой выход в 4-мерную механику с использованием 4-мерных силовых полей.

3. Консервативная система

Консервативная система м.о. может быть определена как система со стационарным потенциальным полем. Суть заключается в том, это поле определяется не в обычном 3–мерном пространстве $\varphi(t, r^i)$, а в конфигурационном обобщенном пространстве взаимодействующих м.о., объединяющем координаты всех м.о.: действительно, в таком пространстве силовое потенциальное поле $\varphi(t, r^i) \to \cup_{(n)}\varphi(r^i{}_{(n)},t)$, не зависит явно от времени, но зависит от обобщенной пространственной координаты $r^i{}_{(n)}$ всех n м.о. и является стационарным. Здесь n – перечисление м.о. Такие системы называются консервативными:

$$\varphi(t, r^i) \to \varphi(t, r^i{}_{(n)}) \to \frac{\partial\varphi(t, r^i{}_{(n)})}{\partial t} = 0. \tag{13}$$

4. Преобразование скалярного потенциального поля при ГПТК

Рассмотрим, как изменяется скалярное поле $\varphi(q)$ при галилеевых преобразованиях координат (ГПТК). При переходе в новую с.о., двигающуюся со скоростью $V_{(0)}{}^i$ относительно старой, скалярное поле $\varphi(q)$ изменяется следующим образом:

$$\varphi'(t', r') = \varphi(t, r + V^i_{(0)} t). \tag{14}$$

Если на графике потенциального поля $\varphi(q)$ есть горбик, то визуально во времени при преобразовании (14) горбик (да и весь график) будет перемещаться влево. При этом частные производные $\varphi(q)$ в бесконечно малой окрестности каждой точки q при $dt \to 0$ изменятся следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi'(t', r')}{\partial t'} = \dfrac{\partial\varphi'(t, r + V^i_{(0)} dt)}{\partial t} = \dfrac{\partial\varphi(t, r)}{\partial t} + V^i_{(0)} \dfrac{\partial\varphi(t, r)}{\partial r^i}, \\ \dfrac{\partial\varphi'(t', r')}{\partial r'^i} = \dfrac{\partial\varphi(t, r)}{\partial r^i}. \end{cases} \tag{15}$$

Т.к. $V_{(0)}{}^i$ для каждого ИСО является константой, то ее можно внести под знак дифференциала. Из (15) имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi'}{\partial t'} = \dfrac{\partial\varphi(t, r)}{\partial t} + \dfrac{\partial\left(V^i_{(0)}\varphi(t, r)\right)}{\partial r^i}, \\ \dfrac{\partial\varphi'(t', r')}{\partial r'^i} = \dfrac{\partial\varphi(t, r)}{\partial r^i}. \end{cases} \tag{16}$$

В соответствии с (16) решение скалярного поля $\varphi(q)$ определено с точностью до постоянного слагаемого φ_0. Само поле $\varphi(q)$ в данной форме рассмотрения уже нельзя интерпретировать как поле кинетической энергии м.о. Но связь с кинетической энергией сохраняется.

Вышеприведенные выражения означают, что чисто скалярное поле $\varphi(q)$ превратилось в векторное поле $V_{(0)}{}^i\varphi(q)$:

$$\varphi(t, r) \to \left(\varphi'(t, r'), V^i_{(0)}\varphi'(t, r')\right) = \varphi'(t, r')(1, V^i_{(0)}), \tag{17}$$

в котором само сскалярное поле $\varphi(q)$ просто является скалярным множителем, но уже не стационарным, перед идентифицирующим конкретное ИСО 4–вектором (1, $V_{(0)}{}^{i}$), а обратный к ней вектор (1, $-v_{(0)}{}^{i}$) выполняет роль вектора обратного перехода в ИСО, в котором скалярное поле является стационарным, и это ИСО в принципе является АСО. А "скалярное" (теперь уже в кавычках) силовое поле плотности φ(r,t) будет только элементом частного случая более общего вида векторного поля. А это полностью подтверждает вывод о невозможности использования скалярного потенциального поля в качестве кандидата на роль реального силового поля КМ. Избавляясь от штрихованной с.к. в (17), имеем:

$$\begin{cases} \varphi(t,r) \rightarrow \left(\varphi(t,r), V_{(0)}^{i}\varphi(t,r)\right) = \varphi(t,r)\left(1, V_{(0)}^{i}\right), \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial t} \rightarrow \dfrac{\partial\varphi(t,r)}{\partial t} + \dfrac{\partial\left(V_{(0)}^{i}\varphi(t,r)\right)}{\partial r^{i}}, \\ \dfrac{\partial\varphi(t,r)}{\partial r^{i}} = \dfrac{\partial\varphi(t,r)}{\partial r^{i}}. \end{cases} \tag{18}$$

Здесь φ(q) – скалярное поле плотности потенциального поля,

$V_{(0)}{}^{i}$) – скорость ИСО относительно АСО.

Запишем формулы для расчета силы в "естественной" форме (11):

$$\begin{cases} F_0 = -m\left(\dfrac{\partial\varphi(t,r)}{\partial t} + \dfrac{\partial\left(V_{(0)}^{i}\varphi(t,r)\right)}{\partial r^{i}}\right) = 0, \\ F_i = -m\dfrac{\partial\varphi(t,r)}{\partial r^{i}}. \end{cases} \tag{19}$$

Данные формулы мало чем отличаются от (11), но позволяют ковариантно записывать и использовать силу F_0 в любом ИСО. Но для этого просто надо приравнять ее нулю. И какой-либо пользы в этом нет – эта сила в КМ все равно игнорируется.

Но есть методическая польза – она явным образом показывает, что скалярное потенциальное поле используется в другом качестве – как плотность потенциальной энергии, и она неразрывно связана со "скоростным" "потенциальным" векторным полем $\varphi(q)(1,V^{i}_{(0)})$ в качестве множителя.

5. Выводы

Из только что сказанного и всего выше сказанного можно сделать вывод, что

1) Свободное скалярное поле может быть только стационарным.

2) В случае использования консервативных систем, в которой допустимы взаимодействия только между м.о, составляющими систему, возможно использование стационарных потенциальных полей в обобщенных координатах всех м.о. с "галилеевым" условием $F_0 = 0$. Но сила F_0 в этом случае не определяет каким–либо образом кинетическую энергию системы: он просто игнорируется.

3) Существование не стационарного скалярного поля требует отказа от применения "скалярного" поля. Т.к. потенциальное поле связывается с кинетической энергией м.о., то естественной альтернативой в качестве 4-ой координаты импульса может быть кинетическая энергия K (см. 3 и 4) а 4-ой координатой силы будет мощность N.

4) Также отказ от применения "скалярного" поля требует принятия другой альтернативы "потенциальному скалярному" полю. Такой альтернативой может быть "скоростное" векторное потенциальное поле V^{i}(q), отличающее ее от АСО, связанного со скалярной плотностью потенциального поля.