Compound numbers with dimension 5, 6 and 7

Valery Timin

(July 2019)

Russia

This work is devoted to the search, study and compilation of the multiplication table of a composite hyperbolic (Hypercomplex) number of dimension five (5):

$$q = \{1, i, j, k, l\}: i^2 = 1, j^2 = 1, k^2 = 1, l^2 = 1.$$

On this basis, as a template, you can pick up other multiplication tables with a different target or arbitrary arrangement of plus (+) and minus (-) signs in the cells of the multiplication table. The disadvantage of this multiplication table is its weak associativity and not commutativity (not even anti-commutativity). But this is its fundamental property.

Эта работа посвящена поиску, изучению и составлению таблицы умножения составного гиперболического (гиперкомплексного) числа размерностью пять (5):

$$q = \{1, i, j, k, l\}: i^2 = 1, j^2 = 1, k^2 = 1, l^2 = 1.$$

На этой основе как на шаблоне можно подобрать другие таблицы умножения с другой целевой или произвольной расстановкой знаков "плюс" (+) и "минус" (-) в ячейках таблицы умножения. Недостатком данной таблицы умножения является ее слабая ассоциативность и не коммутативность (даже не антикоммутативность). Но это является ее принципиальным свойством.

Гиперкомплексные числа

В элементарной алгебре наряду с действительными числами рассматривается и более широкая система комплексных чисел. История комплексных чисел начинается с XVI века. Итальянские математики Джироламо Кардано и Рафаэль Бомбелли, решая квадратные уравнения, ввели в рассмотрение символ $\sqrt{-1}$ - формальное решение уравнения $x^2 = -1$. Впоследствии эти числа стали называться «мнимыми», а затем «комплексными» числами и записываться $a + bi$.

В последующем комплексные числа нашли широкое применение не только в самой математике, но и в физике, механике и многих других областях естествознания. Именно это обстоятельство послужило причиной поиска новых систем чисел, которые, являясь обобщением действительных и комплексных чисел, обладают если не всеми, то хотя бы частью основных свойств последних. Так возникли системы двойных и дуальных чисел, кватернионов, октав, чисел Клиффорда, Грассмана и др. Систему гиперкомплексных чисел, имевших вид $a + bi + cj + dk$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, построил в 1843 г. ирландский математик У. Гамильтон, который назвал их "кватернионами".

В основе построения указанных и других систем чисел лежат разные методы, среди которых особое место занимают процедуры удвоения. Однако не все системы чисел можно получить с помощью той или иной процедуры удвоения: таким способом можно получить только гиперкомплексные числа размерности 2^n, а именно – 2, 4, 8 - октавы, 16 - седенионы, … Гиперкомплексные числа других размерностей при этом получить невозможно.

Гиперкомплексные числа размерностью 3 (три)

Существуют ли гиперчисла других размерностей? Например, размерности 3, 5, 6, 7? По размерности 3 можно сразу сказать, что не существует. Попробуем создать такую таблицу. Первым шагом при составлении данной таблицы умножения является определение диагональных элементов со свойством $e_n^2 = \pm 1$. Она могла бы быть со следующей таблицей умножения:

Таблица 1.

1	e_1	e_2
e_1	± 1	*
e_2	*	± 1

Следующим шагом могло бы быть заполнение оставшихся двух элементов со свойством $e_n e_m = \pm ek$: $n \neq k \neq m$. Но в этой реализации нечем заполнить пустые места (обозначены звездочками), не нарушив это условие. Любая единица из множества $\{e_1, e_2\}$ на этом месте повторит другую единицу на этой же строке или столбце, а любое число из множества {0, 1} обедняет ее алгебру, т.к. в каждой строке и столбце окажется не полный набор из базисных элементов.

Есть реализация 3-мерных гиперчисел в форме векторной алгебры с операцией векторного произведения:

Таблица 2.

$\times$	e_1	e_2	e_3
e_1	0	e_2	e_3
e_2	e_2	0	e_1
e_3	e_3	e_1	0

Эта реализация не удовлетворяет условию вещественности квадрата базиса не дуального гиперкомплексного числа: $e_i^2 \in \{\pm 1\}$

Гиперкомплексные числа размерностью 5 (пять)

В отличие от размерности 3, для размерности 5 (пять) такую таблицу умножения построить можно.

Из пяти базисных элементов можно создать единственную гиперболическую базисную таблицу умножения с точностью до перестановок строк и столбцов, отражения (транспонирования), обнуления элементов и установки знаков {+, -} в ячейках:

Таблица 3.

1	**2**	3	4	5
2	**1**	4	5	3
3	5	1	2	4
4	3	5	1	2

5	4	2	3	1

(Здесь (и далее) значения 1, 2, 3, 4 *и* 5 *соответствуют и*
ндексам гиперкомплексных единиц: 1 ~ e_0, 2 ~ e_1, …, 5 ~ e_4
или символически: {*+1, i, j, k, l* }).

Симметричный (коммутативный) случай не возможен. Процесс построения минимальной коммутативной таблицы умножения приводит к тупику:

Таблица 4.

1	2	3	4	5
2	1	4	5	3
3	4	1	2	x
4	5	2	1	
5	3			1

Других минимальных реализаций таблицы умножения размерности 5 не имеется.

Эта таблица умножения не ассоциативна и не коммутативна. Но она центрально ассоциативна: $(ab)a = a(ba)$. Ни левой, ни правой ассоциативностью не обладает: $(ab)b \neq a(bb) = a$, $b = (aa)b \neq a(ab)$. Степенная ассоциативность имеется: $a(aa) = (aa)a = a$.

Единицы алгебры выделены в две группы. Одна группа состоит из двух единиц – (1, i) и она изоморфна алгебре комплексных чисел 2×2, другая группа состоит из мнимых единиц (j, k, l). И правое, и левое умножение элементов второй группы на первую мнимую единицу i производит циклическую перестановку элементов этой группы, отличающуюся только направлением перестановки. Причем для любого n: $i(i(i(i_n))) = 1$.

Несмотря на выделенность мнимых единиц в две группы, все мнимые единицы равноправны. Во первых, потому что в качестве выделенного можно взять любую. При этом остальные три элемента будут умножаться подобно умножению на i, т.е. умножение на любую мнимую единицу производит циклическую перестановку оставшихся. При этом для любых n, m: $i_n(i_n(i_n(i_m))) = 1$. Надо заметить, что подобное равноправие сохраняется для всех базисных (положительно определенных, беззнаковых) таблиц умножения.

Во вторых, таблица умножения мнимых элементов обладает определенной симметрией. Для выявления этой симметрии объединим их все в тетраэдр. Выделим в ней любую грань. Закономерность проявляется в том, что умножение любых двух элементов a и b этой грани дает элемент c этой же грани только в том случае, когда они по отношению к элементу d составляют правый винт:

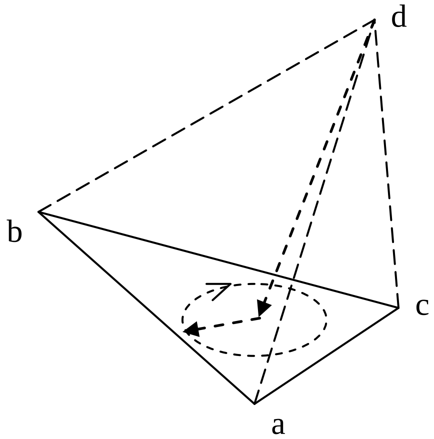

Рис. 1. Схема, поясняющая таблицу умножения гиперкомплексных чисел размерности 5.

Алгебру, построенную на основе этой таблицы умножения, вполне можно применить для определения алгебры вращения объектов 4-мерного пространства, по аналогии с векторной алгеброй для 3-мерного пространства: умножение на единичный вектор в четвертом направлении производит циклическую перестановку значений координат по остальным координатным осям вектора. Чем-то напоминает физический объект, определяемый как кварк, точнее, ее цвет.

Единственный недостаток – ее слабая ассоциативность и не коммутативность (даже не антикоммутативность). Но это является ее принципиальным свойством.

Гиперкомплексные числа размерностью 6 (шесть)

Из шести базисных элементов **имеется всего 4 таблицы умножения. Все они не ассоциативные.** Имеются один коммутативный и три не коммутативных таблиц умножения. Ни одну из них нельзя получить как прямое произведение алгебр меньшей размерности 2×3.

Возможные типы ассоциативности – *Al*, *Ar*, *As*, *Am*, *Alm*, *Arm*,: *A* – **ассоциативная**: $(ab)c = a(bc)$, *l* – **левая альтернативная**: $(aa)b = a(ab)$, *r* – **правая альтернативная**: $(ab)b = a(bb)$, *s* – **альтернативная** (двусторонняя – одновременно и правая, и левая), *m* – **эластичная** (центральная) ассоциативность: $(ab)a = a(ba)$, и *e* - **степенная ассоциативность** - : $(aa)a = a(aa)$ (смю таблицы 5, 7, 8). Замечание: тип коммутативности и ассоциативности для таблицы умножения определяется типом коммутативности и ассоциативности элементов только таблицы умножения, т.е. ее мнимых единиц. Этот тип не эквивалентен типу коммутативности и ассоциативности произвольных гиперчисел.

Есть один единственный коммутативный случай с эластичной ассоциативностью. Он не состоит из ячеек 2×2:

Таблица 5.

2	K	2				4
Am	1	2	3	4	5	6
25	2	1	4	5	6	3
5	3	4	1	6	2	5
25	4	5	6	1	3	2
5	5	6	2	3	1	4
	6	3	5	2	4	1

Замечания:

1) Здесь (и далее) значения чисел 1, 2, 3, 4 и 5 соответствуют индексам гиперкомплексных единиц: $1 \sim e_0$, $2 \sim e_1$, …, $5 \sim e_4$).

2) Также в первой строке и столбце этой таблицы (и далее) указаны номер таблицы, тип ассоциативности, ее коммутативность и тип cикличности ячеек.

3) Расшифровки параметров, присутствующих в первом столбце таблицы 5:

Таблица 6.

2	Номер таблицы умножения
Am	Эластично-ассоциативныая таблица умножения
25	Всего 45 ассоциативных троек элементов
5	Всего 5 левоассоциативных троек
25	Всего 25 правоассоциативных троек
5	Всего 5 центральноассоциативных троек

4) Верхний ряд чисел

2	K	2				4

таблицы умножения указывают на 1) номер таблицы, 2) параметр коммутативности и 3)… цикличность (в последних ячейках циклических перестановок первых двух строк таблицы, а само число – значение цикличности перестановк). Параметры коммутативности: К – коммутативная, если число – степень коммутативности (количество коммутативных пар элементов таблицы, исключая пары первой строки и столбца и самокоммутативность диагональных элементов). Параметры цикличности текущей таблицы: первая перестановка имеет цикличность 2. Первым элементом следующей цикличности (перестановки) является пустой элемент, последним – число, показывающее цикличность второй перестановки. В данном случае – это число 4.

Здесь единицы алгебры по первым двум строкам выделены в две группы. Одна группа состоит из двух единиц – (1, *i*) и изоморфна комплексной алгебре 2×2, другая группа состоит из мнимых единиц (*j*, *k*, *l*, *m*). Умножение второй группы на *i* переводит мнимые единицы в следующий элемент по циклу своей группы. Есть замечательная симметрия: первая строка плюс любая *n*-ая строка в паре с первым и *n*-ым столбцом на пересечениях составляют циклическую комплексную группу из двух элементов (1, *n*), а все остальные элементы будут находиться в альтернативной группе из оставшихся 4-х элементов. Для примера в таблице 5 зеленым цветом выделена одна такая комплексная пара.

Имеется два ассоциативных, но не коммутативных таблицы умножения:

Таблица 7.

1	0	2		2		2
Alm	1	2	3	4	5	6
45	2	1	4	3	6	5
25	3	5	1	6	2	4
25	4	6	5	1	3	2
5	5	4	6	2	1	3
	6	3	2	5	4	1

3	0	2				4
Arm	1	2	3	4	5	6
45	2	1	4	5	6	3
5	3	5	1	6	4	2
25	4	6	2	1	3	5
25	5	3	6	2	1	4
	6	4	5	3	2	1

Эти две таблицы на самом деле эквивалентны относительно замены правого на левое умножение. Мнимые единицы алгебры эквивалентны между собой.

Есть еще одна не коммутативная и не ассоциативная таблица с цикличностью 2:

Таблица 8.

2	2	2		2		2
-	1	2	3	4	5	6
29	2	1	4	3	6	5
9	3	5	1	6	4	2
13	4	6	5	1	2	3
9	5	3	6	2	1	4
	6	4	2	5	3	1

Других таблиц умножения не имеется. Всего имеется 3 (три) независимых таблицы с не совпадающими сигнатурами (по первым строке и столбцу).

Также, как и для таблицы умножения размерности 5, умножение на любую мнимую единицу производит циклическую перестановку некоторых элементов, соответствующих порядку цикличности таблицы. Для коммутативной таблицы правая и левая цикличности совпадают (без изменения направления перестановки). Для двуцикличных не коммутативных таблиц элементы, входящие в правый и левый циклы, совпадают, но порядок перехода элементов изменяется.

Гиперкомплексные числа размерностью 7 (семь)

Из семи базисных элементов имеется достаточно много таблиц умножения – всего 20 штук. Среди них не имеется ни ассоциативных, ни коммутативных. С цикличностью (2+2+3) имеется 12 таблиц умножения (шесть групп с не совпадающими сигнатурами по первым строке и столбцу):

1	1	2		2			3
-	1	2	3	4	5	6	7
46	2	1	4	3	6	7	5
8	3	5	1	6	7	2	4
17	4	6	7	1	3	5	2
8	5	4	2	7	1	3	6
	6	7	5	2	4	1	3
	7	3	6	5	2	4	1

2	1	2		2			3
-	1	2	3	4	5	6	7
46	2	1	4	3	6	7	5
8	3	5	1	6	7	2	4
17	4	7	5	1	2	3	6
8	5	6	2	7	1	4	3
	6	4	7	5	3	1	2
	7	3	6	2	4	5	1

11	1	2		2			3
-	1	2	3	4	5	6	7
46	2	1	4	3	6	7	5
8	3	5	1	7	4	2	6
17	4	6	5	1	7	3	2
8	5	7	6	2	1	4	3
	6	3	7	5	2	1	4
	7	4	2	6	3	5	1

12	1	2		2			3
-	1	2	3	4	5	6	7
46	2	1	4	3	6	7	5
8	3	5	1	7	4	2	6
17	4	7	6	1	2	5	3
8	5	4	7	6	1	3	2
	6	3	5	2	7	1	4
	7	6	2	5	3	4	1

5	3	2		2			3
-	1	2	3	4	5	6	7
47	2	1	4	3	6	7	5
12	3	5	1	7	2	4	6
16	4	6	5	1	7	2	3
12	5	4	7	6	1	3	2
	6	7	2	5	3	1	4
	7	3	6	2	4	5	1

10	3	2		2			3
-	1	2	3	4	5	6	7
47	2	1	4	3	6	7	5
12	3	5	1	7	2	4	6
16	4	7	6	1	3	5	2
12	5	6	7	2	1	3	4
	6	4	2	5	7	1	3
	7	3	5	6	4	2	1

8	4	2		2			3
-	1	2	3	4	5	6	7
53	2	1	4	3	6	7	5
12	3	5	1	7	2	4	6
13	4	7	6	1	3	5	2
14	5	3	7	6	1	2	4
	6	4	2	5	7	1	3
	7	6	5	2	4	3	1

6	4	2		2			3
-	1	2	3	4	5	6	7
53	2	1	4	3	6	7	5
12	3	5	1	7	2	4	6
13	4	6	5	1	7	2	3
14	5	7	2	6	1	3	4
	6	4	7	5	3	1	2
	7	3	6	2	4	5	1

7	0	2		2			3
-	1	2	3	4	5	6	7
51	2	1	4	3	6	7	5
16	3	5	1	7	2	4	6
21	4	6	5	1	7	2	3
6	5	7	6	2	1	3	4
	6	3	7	5	4	1	2
	7	4	2	6	3	5	1

9	2	2		2			3
-	1	2	3	4	5	6	7
57	2	1	4	3	6	7	5
16	3	5	1	7	2	4	6
16	4	7	6	1	3	5	2
10	5	4	7	6	1	2	3
	6	3	2	5	7	1	4
	7	6	5	2	4	3	1

4	2	2		2			3
-	1	2	3	4	5	6	7
57	2	1	4	3	6	7	5
16	3	5	1	6	7	4	2
16	4	7	5	1	3	2	6
10	5	6	2	7	1	3	4
	6	4	7	5	2	1	3
	7	3	6	2	4	5	1

3	2	2		2			3
-	1	2	3	4	5	6	7
59	2	1	4	3	6	7	5
10	3	5	1	6	7	4	2
17	4	7	2	1	3	5	6
12	5	4	6	7	1	2	3
	6	3	7	5	2	1	4
	7	6	5	2	4	3	1

С цикличностью (2+5) имеется 8 таблиц умножения (две группы с не совпадающими сигнатурами):

13	5	2					5
-	1	2	3	4	5	6	7
26	2	1	4	5	6	7	3
6	3	4	1	7	2	5	6
11	4	6	5	1	7	3	2
6	5	3	7	6	1	2	4
	6	7	2	3	4	1	5
	7	5	6	2	3	4	1

14	5	2					5
-	1	2	3	4	5	6	7
26	2	1	4	5	6	7	3
6	3	4	1	7	2	5	6
11	4	7	6	1	3	2	5
6	5	6	7	3	1	4	2
	6	3	5	2	7	1	4
	7	5	2	6	4	3	1

17	5	2					5
-	1	2	3	4	5	6	7
26	2	1	4	5	6	7	3
6	3	5	1	6	7	2	4
11	4	7	5	1	2	3	6
6	5	6	7	3	1	4	2
	6	4	2	7	3	1	5
	7	3	6	2	4	5	1

20	5	2					5
-	1	2	3	4	5	6	7
26	2	1	4	5	6	7	3
6	3	7	1	6	4	2	5
11	4	3	6	1	7	5	2
6	5	4	2	7	1	3	6
	6	5	7	2	3	1	4
	7	6	5	3	2	4	1

15	0	2					5
-	1	2	3	4	5	6	7
51	2	1	4	5	6	7	3
6	3	5	1	2	7	4	6
21	4	6	7	1	2	3	5
16	5	7	6	3	1	2	4
	6	3	5	7	4	1	2
	7	4	2	6	3	5	1

16	0	2					5
-	1	2	3	4	5	6	7
51	2	1	4	5	6	7	3
6	3	5	1	6	7	2	4
21	4	7	2	1	3	5	6
16	5	3	6	7	1	4	2
	6	4	7	3	2	1	5
	7	6	5	2	4	3	1

18	0	2					5
-	1	2	3	4	5	6	7
51	2	1	4	5	6	7	3
6	3	6	1	7	2	4	5
21	4	7	2	1	3	5	6
16	5	4	7	6	1	3	2
	6	3	5	2	7	1	4
	7	5	6	3	4	2	1

19	0	2					5
-	1	2	3	4	5	6	7
51	2	1	4	5	6	7	3
6	3	6	1	7	4	5	2
21	4	3	5	1	7	2	6
16	5	7	2	6	1	3	4
	6	4	7	3	2	1	5
	7	5	6	2	3	4	1