Великая теорема Ферма (без $n=2^t$)

<u>Памяти МАМЫ</u>

Теорема. Уравнение

0°) $X^m=Z^m-Y^m$, где число m (=tn) содержит простой сомножитель n>2, не имеет решения в целых положительных числах.

<u>Основы теории простого числа и равенства Ферма 0°</u>:

Все числа рассматриваются в системе счисления с простым основанием n>2.

Простейшие доказательства и вычисления из школьной программы не приводятся.

<u>Обозначения</u>.

A', A'', $A_{(k)}$ – первая, вторая, k-я цифра от конца в числе A;

$A_{[k]}$ – k-значное окончание числа A (т.е. $A_{[k]}=A \bmod n^k$);

При подстановке $X^t=A^n$; $Z^t=B^n$; $Y^t=C^n$ равенство 0° сводится к равенству

1°) (D=...) $A^n+B^n-C^n=0$, откуда, используя формулы разложения:

2°) (D=...) (C-B)P+(C-A)Q-(A+B)R=0.

3°) После деления равенства 1° на T^n, где T есть НОД чисел A, B, C, числа A, B, C с новыми значениями становятся попарно взаимно простыми.

4°) **<u>Теорема</u>**. При A' ≠ 0, B' ≠ 0, C' ≠ 0 числа в парах (C-B, P); (C-A, Q); (A+B, R) в равенстве 2° являются взаимно простыми. Истинность утверждения следует из представления числа P (аналогично чисел Q и R) в его формуле разложения в виде

4a°) $P=S(C-B)^2+nC^{(n-1)/2}B^{(n-1)/2}$, где C-B, C и B взаимно простые.

4b°) *<u>Следствие</u>* из 4° и 4a°. Если $A' = n^kA°$, где A°' ≠ 0, то P' = 0, P'' ≠ 0, $C-B=a^nn^{kn-1}$;

4c°) *<u>Следствие</u>* из 4°. Если (ABC)' ≠ 0, то $C-B=a^n$; $C-A=b^n$; $A+B=c^n$; $P=p^n$; $Q=q^n$; $R=r^n$.

5°) Если A' ≠ 0, то $(A^{n-1})' = 1$ [Малая теорема Ферма]).

6°) Если $(ABC)' \neq 0$, то [следствие из 1°, 2° и 5°] $P'=Q'=R'=1$, откуда

7°) $P_{[2]}=Q_{[2]}=R_{[2]}=01$ [бином Ньютона для числа $A=(A°n+1)^n$],

8°) Следовательно [см. 4c° и бином Ньютона], $p'=q'=r'=1$.

9°) Следовательно [2° и 7°], если $(ABC)' \neq 0$, то $(A+B-C)_{[2]}=0$.

10°) Следовательно [9°], $(A+B-C)'=0$.

11°) Следовательно [9° и 10°], $(A+B-C)''$ равна либо 0, либо n-1.

12°) <u>**Теорема**</u>. Все n цифр $(gt)'$, где $0<g<n$ и $t=1, 2, \ldots n$, различны.

13°) *Следствие*. Для заданной цифры g существует такая цифра t, что $(gt)' = 2$

13a°) Если $A' \neq 0$ и $A_{[2]}=A^n{}_{[2]}$, то для заданного $A_{[t]}$ существует такое g^{nn}, что $(Ag^{nn})_{[t]}=1$.

14°) <u>**Теорема**</u>. Сумма $S=1^n+2^n+\ldots(n-1)^n$ оканчивается на 00 и цифра S''' равна $(n-1)/2$.

15°) <u>*Следствие*</u>. Если $(ABC)' \neq 0$ и $(A'^n+B'^n-C'^n)_{[2]}=0$, то все $E''' = (A'^n+B'^n-C'^n)''' >0$ [в противном случае сумма $[(A'^n+B'^n-C'^n)ti^n]''' = 0$ ($i=1, 2, \ldots n-1$), а не $(n-1)/2$].

16°) Цифра $A^n{}_{(k+1)}$ однозначно определяется окончанием $A_{[k]}$ и, следовательно, окончание $A^n{}_{[2]}$ не зависят от цифры A''! Факт вытекает из записи числа A в виде $A=dn+A'$ и разложения бинома $A^n=(dn+A')^n$.

17°) Если $A=A°^n n^{2n}+1$, то $(A°^n n^{2n}+1)^n=\ldots+[(n-1)/2]A°^2 n^{4n+1}+A°^n n^{2n+1}+1$ [см. бином Ньютона].

18°) Если $A^n=Xn^{4n+1}+A°'n^{2n+1}+1$, где $A°^n<n^n$, то $A=\ldots+A°n^{2n}+1$ [17°].

19°) В равенстве 3° число $D=E+F$, где $E = A'^n+B'^n-C'^n$ и $F=(A''+B''-C'')n^2+Gn^3$.

***

Доказательство ВТФ. Случай I [(ABC)'≠0]

С помощью умножения равенства 3° на некоторое g^{nnn} [при этом свойства 4b°-13a°сохраняются!] мы превращаем цифру E''' в 2 [15° и 13°].
И из биномов Ньютона для чисел A, B, C [19°] видно, что для ее обнуления нужно, чтобы цифра (A''+B''-C'')' была равна n-2. Однако она равна либо 0, либо n-1 [11°], и равенство 1° по третьей цифре не выполняется.

Второй случай [например A'=0, но (BC)'≠0]

Итак, пусть для взаимно простых натуральных A [$A=n^kA°$], B и C
20°) $A^n=C^n-B^n$ и $C^n-B^n=(C-B)P$, где $(C-B)_{[kn-1]}=0$, $P=P°n$, $A^n=n^{kn}A^{°n}$ [4b°].
С помощью умножения равенства 20° на соответствующее число g^{nnn} преобразуем окончание числа B длиной в 3kn цифр в 1 [13a°]. После чего [4b°] в новом 20°
21°) $A=an^k$, $C=cn^{2kn-1}+1$, $B=...n^{3kn}+1$; $A^n=a^nn^{kn}$, $C^n=C°n^{kn}+1=...cn^{kn}+1$, $B^n=...n^{3kn+1}+1$.
После этого мы оставим в числах A°, B, C лишь последние цифры a, 1, 1 и вычислим (3kn-2)-значные окончания чисел A^n и C^n (при этом $B_{[3kn]}=1$):
22°) $a \Rightarrow a^n{}_{[n]}$; $\Rightarrow c_{[n]}=a^n{}_{[n]}$, $\Rightarrow$ [21°] $C^n=...+c_{[n]}n^{kn}+1=...+a^n{}_{[n]}n^{kn}+1$, $\Rightarrow$ C [18°]:
23°) $C=(...+c_{[n]}n^{kn}+1)^{1/n}=...+a^n{}_{[n]}n^{kn-1}+1 \Rightarrow C^n$ [17°]:
24°) $C^n=...[(n-1)(n-2)/6]a^{3n}n^{3kn-2}+[(n-1)/2]a^{2n}n^{2kn-1}+a^nn^{kn}+1$, $\Rightarrow A^n$ [21°]:
25°) $A^n=...[(n-1)(n-2)/6]a^{3n}n^{3kn-2}+[(n-1)/2]a^{2n}n^{2kn-1}+a^nn^{kn}=$
$=a^nn^{kn}\{...[(n-1)(n-2)/6]a^{2n}n^{2kn-2}+[(n-1)/2]a^nn^{kn-1}+1\}$, где выражение в фигурных скобках является n-й степенью числа [18°] $...[(n-1)/2]a^nn^{kn-2}+1$, то есть [17°]:
26°) $A^n=a^nn^{kn}\{...[(n-1)(n-1)(n-1)/8]a^{2n}n^{2kn-3}+[(n-1)/2]a^nn^{kn-1}+1\}$, или
26a°) $A^n=...[(n-1)(n-1)(n-1)/8]a^{3n}n^{3kn-3}+[(n-1)/2]a^{2n}n^{2kn-1}+a^nn^{kn}$.
И теперь, сравнивая 24° и 26a°, мы имеем противоречие равенства 21 по цифре (3kn-2): в 26a° она НЕ равна нулю, а в 24° она равна нулю!
При этом, как видно из 24° и 26a°, восстановление всех предыдущих цифр в числе A° исправить это противоречие не может, поскольку оно определяется лишь цифрой a'.
Тем самым великая теорема Ферма доказана.

Апрель, 2019