Парадокс близнецов – обзор решений,
гл.4 Противоречия решение парадокса близнецов в ОТО
The Twins Paradox - Review of Decisions
Ch.4 Contradictions solution of the twins paradox in GR

Путенихин П.В.
Putenikhin P.V.

Оглавление, URL:
http://samlib.ru/p/putenihin_p_w/twin00.shtml

Аннотация: Рассмотрены известные решения релятивистского "парадокса близнецов" и предложены новые. Вопреки распространенному мнению, парадокс имеет корректное решение в СТО. Напротив, в ОТО решения парадокса вызывают ряд вопросов. Рассмотрен принципиально новый парадокс близнецов - в тахионной теории относительности.

Abstract: The well-known solutions of the relativistic "twin paradox" are considered and new ones are proposed. Contrary to popular belief, the paradox has the correct solution in the SRT. In contrast, in the GRT, the solutions to the paradox raise a number of questions. A fundamentally new paradox of twins is considered - in the tachyon theory of relativity.

Ключевые слова: СТО, иллюзорность преобразований Лоренца, ровесники, парадокс близнецов, принцип относительности

4. Решение парадокса близнецов в ОТО

Считается, что окончательное решение парадокс близнецов получил только в общей теории относительности, что, напротив, специальная теория относительности не позволяет его разрешить, парадокс не является задачей специальной относительности:

"При изучении СТО указывается, что "парадокс близнецов" не может быть объяснен в рамках этой теории. … Этот парадокс не может быть разрешен в рамках СТО, так как рассматриваемые СО не равноправны (как это требуется в СТО): космический корабль не может рассматриваться ИСО, так как движется на отдельных участках траектории неравномерно. Только в рамках ОТО мы можем понять и объяснить "парадокс близнецов" естественным образом, опираясь на положения ОТО" [11, с.298 Розман].

Заключительное уравнение, с помощью которого в цитированной работе выводится это решение, имеет вид [11, с.294 Розман]:

$$\tau = t\sqrt{1+\frac{2\varphi}{c^2}} \approx t\left(1+\frac{\varphi}{c^2}\right) \quad (9.15)$$

"... из которой ясно видно, что темп хода часов замедляется в гравитационном поле с потенциалом φ (то же справедливо и для эквивалентной ускоренно движущейся СО, каковой в нашей задаче является космический корабль с "близнецом" "В"). Таким образом, часы на Земле покажут больший промежуток времени, чем часы на космическом корабле при его возвращении на Землю" [11, с.298 Розман].

Буквой А обозначен близнец, остававшийся неподвижным, на Земле, а буквой В – близнец, совершивший космический полёт. Здесь значение гравитационного потенциала описывается уравнением [11, с.293 Розман]:

$$\varphi = -\frac{GM}{r}$$

К сожалению, в цитированной работе развёрнутые выкладки отсутствуют, но даётся весьма показательное заключение:

"Повторим ещё раз, что "парадокс близнецов" не имеет никакого объяснения в специальной теории относительности, в которой используются только равноправные инерциальные СО. По СТО "близнец" "В" должен вечно равномерно и прямолинейно удаляться от наблюдателя "А" (по сути дела, он не должен взлетать с Земли, именно поэтому мы берем слово "близнец" в кавычки). В популярной литературе часто обходят "острый" момент в объяснении этого парадокса, заменяя физически длящийся разворот космического корабля "назад к Земле" его мгновенным разворотом, что невозможно. Этим "обманным маневром" в рассуждениях устраняют ускоренное движение корабля на развороте и тогда обе СО ("Земля" и "Корабль") оказываются равноправными и инерциальными, в которых можно применять положения СТО. Но такой прием нельзя считать научным" [11, с.299 Розман].

Тем не менее, попытки решить "парадокс близнецов" средствами специальной относительности предпринимаются по-прежнему не только противниками специальной теории относительности, но и её сторонникам. В частности, несколько таких решений представлены в предыдущих главах нашей работы. Поиск этих решений вызван странностями, обнаруженными в решениях общей теории относительности.

Самым высоким значением гравитационного потенциала, а точнее, нулевым обладает область, полностью свободная от массивных, гравитирующих тел. В ней часы идут с наибольшей скоростью (темпом). Принимается, что ко второму близнецу, находящемуся на Земле, не приложены никакие силы, а её гравитационное поле не учитывается. Таким образом, этот второй близнец находится в эквивалентном гравитационном поле космического корабля и под его действием совершает "свободное падение" на корабль. Согласно общей теории относительности и в соответствии с релятивистским явлением "гравитационного красного смещения" все часы, удалённые от центра корабля, идут в более быстром темпе, спешат. Изменение этого темпа хода часов и даёт уравнение общей теории относительности [12, с.113 IV.48, с.119 IV.74, с.140 IV.121 Скоб; 7, с.200; 6 Мёл; 9, с.1143 Окунь], в одном из вариантов имеющее вид:

$$d\tau = \sqrt{\left(1+\frac{xg(t)}{c^2}\right)^2 - \frac{u^2}{c^2}}dt = \sqrt{1+\frac{2\chi}{c^2}-\frac{u^2}{c^2}}dt \qquad (4.1)$$

где:

$d\tau$, dt - интервалы времени, прошедшие по часам, соответственно, на "падающем" (Земля) и на гравитирующем теле (космическом корабле);

x - расстояние между телами (между близнецами); понятно, что оно зависит от времени;

$g(t)$ - ускорение свободного падения на гравитирующем теле;

u - скорость падения или относительная скорость близнецов; понятно, что она зависит от времени, поскольку "падение" земного брата в "гравитационном" поле брата-космонавта происходит с ускорением;

χ - так называемый, гравитационный потенциал, создаваемый "гравитационным" полем корабля при его развороте в точке пространства, в которой находится земной брат; также очевидно, что значение потенциала зависит от расстояния между близнецами и, соответственно, величины ускорения корабля в этой точке.

В этом уравнении мы видим, в чем, собственно, и состоит сущность решения парадокса близнецов в общей теории относительности. С одной стороны, в процессе сближения братьев и увеличения их относительной скорости часы земного брата замедляются – слагаемое с минусовым знаком. Это соответствует специальной теории относительности и является причиной возникновения парадокса. Однако, с другой стороны, эквивалентный "гравитационный" потенциал корабля приводит к противоположному эффекту: он вызывает ускорение хода земных часов. В сумме оба эффекта должны привести к тому, что показания часов земного брата в момент встречи будут больше показаний часов улетавшего брата, как того и требует корректное решение парадокса близнецов. Получается, вопреки специальной теории относительности, что с точки зрения путешественника движущиеся часы (часы земного брата) идут *быстрее*, чем неподвижные (часы на корабле).

В парадоксе близнецов наибольший интерес представляет картина, какую наблюдает улетавший брат. Действительно, с точки зрения земного, неподвижного брата ситуация предельно ясна. Она полностью и корректно описывается математикой специальной относительности и даёт исходные данные для последующих расчётов. Для удобства этих последующих расчётов примем:

1. Начальная скорость корабля v_0 = 0,866c или 259 628 км/сек;
2. Интервал времени t_A, на котором исследуется парадокс, равен 240 месяцам;
3. Величина ускорения разворота неизменна на всём протяжении полёта.

Этих трёх условий достаточно, чтобы вычислить все остальные параметры. Значение скорости корабля 0,866 взято как округлённое значение дроби √3/2. Следовательно, из заданного условия времени t_A движения корабля по часам Земли, равным 240 месяцев, находим ускорение разворота (торможения):

$$a = \frac{2v_0}{t_A} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{240} = \frac{\sqrt{3}}{240} \approx 0{,}00722$$

Поскольку мы взяли значение скорости света, равное единице, то и ускорение мы получили в схожих единицах измерения. Если перевести ускорение в обычные единицы, то мы получим величину, почти в 11 раз меньшую ускорения свободного падения на Земле $a \approx 0{,}09$g. Текущая скорость корабля равна, соответственно:

$$v = v_0 - at = v_0 - \frac{2v_0 t}{t_A} = v_0\left(1 - \frac{2t}{t_A}\right)$$

Таким образом, по истечении 240 месяцев, корабль, движущийся с отрицательным ускорением 0,007 и начальной скоростью 0,866, вернётся на Землю, имея скорость минус 0,866. Эти условия, как указано выше, позволяют нам исключить из рассмотрения не только начальный этап разгона и конечный этап торможения, но и моменты изменения ускорения при развороте, которое неизменно на всём протяжении.

Подставляя в уравнение исходные данные, находим интегрированием время в пути по часам корабля:

$$t_B = \int_0^{t_A} \sqrt{1-v^2}\,dt = \int_0^{t_A} \sqrt{1 - v_0^2\left(1 - \frac{2t}{t_A}\right)^2}\,dt = \frac{40}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{40}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} \approx 17{,}09\ \textit{лет} \approx 205{,}1\ \textit{мес}$$

Для вычисления времени по часам землянина с точки зрения корабля воспользуемся приведённым выше уравнением (4.1). Согласно принципу эквивалентности общей теории относительности, действие сил инерции при ускоренном движении тел эквивалентно действию гравитационного поля, создаваемого массивным телом. В этом случае, движущееся ускоренно тело, корабль может рассматриваться как покоящееся. Напротив, Земля с его точки зрения находится в свободном падении в эквивалентном гравитационном поле корабля. Это свободное падение Земли в гравитационном поле корабля и описывается уравнением (4.1). Подставляем в него исходные параметры и производим тривиальные преобразования:

$$t_A = \int_0^{t_B} \sqrt{\left(1 + v_0 gt - \frac{g^2 t^2}{2}\right)^2 - (v_0 - gt)^2}\,dt \approx 19{,}225\ \textit{лет} \approx 230{,}7\ \textit{мес}$$

Это уравнение и было использовано для вычисления гравитационного красного смещения при замедлении темпа хода часов Земли с точки зрения космического корабля. Здесь мы приняли во внимание, что величина ускорения с точки зрения корабля иная: g = √3/t_B, поскольку относительная скорость – инвариант, а время в пути меньше, 205 месяцев. Это уравнение позволяет произвести своеобразное "табличное" интегрирование (см. Приложения).

И здесь мы обнаруживаем неожиданную и довольно неприятную ситуацию [10 Итак]. Конечно, согласно уравнениям общей относительности часы на Земле действительно идут более быстрым темпом и опережают часы на корабле. Но! Скрупулёзные расчёты этого опережения не дали абсолютно полного *совпадения*, график на рис.4.1. С точки зрения Земли, часы на ней показали при встрече близнецов 240 месяцев, это их собственное время, являющееся инвариантом. Однако по расчетам с точки зрения корабля, часы на Земле показали при встрече близнецов только 231 месяц или 19,2 года. Расхождение почти 5%, что для аналитических выкладок в данном случае чрезмерно. Точность вычислений – до трёх знаков после запятой. Разбиение отрезков при графическом интегрировании – от 240 до 50 000. Во всех случаях получался один и тот же результат – 231 месяц. Ни в одном случае не удалось получить 240 месяцев. Таким образом, считать приведённые выкладки как безусловное подтверждение решения парадокса близнецов средствами общей теории относительности следует с определённой осторожностью.

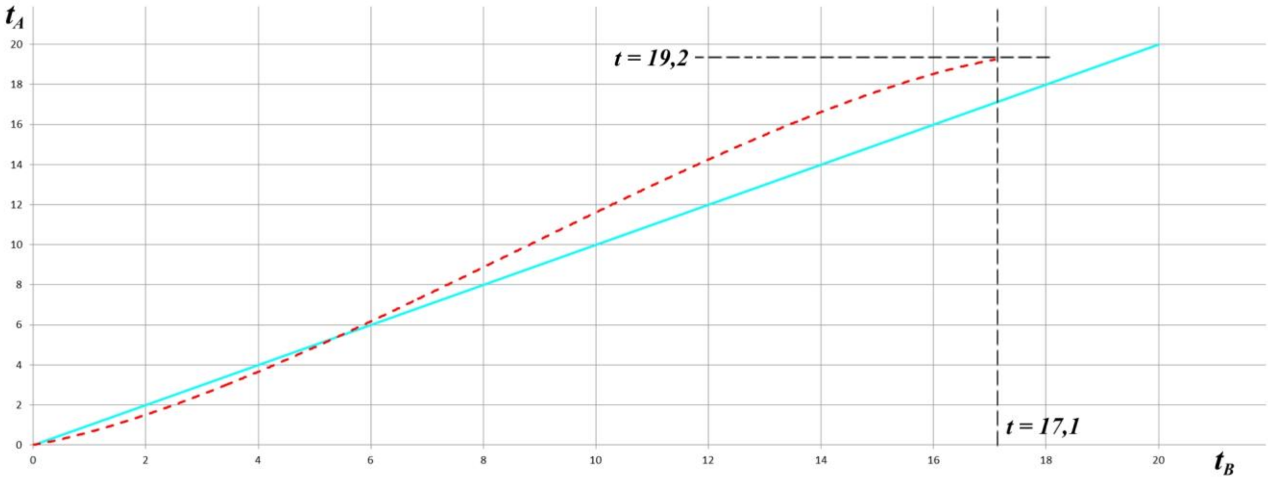

Рис.4.1 Численное интегрирование уравнения (4.1)

Как видно на графике, в результате численного интегрирования получено t_A=19,2 – конечная точка красной штриховой линии. Дискретность – 2000, точность результата, то есть, отклонение от известного значения: –3,8%. Бирюзовая сплошная линии – график времени земного наблюдателя А по его собственным часам.

4.1 Нахождение точного вида уравнения потенциала

Дальнейший анализ позволил предположить, что погрешность связана с использованием приближённого уравнения (4.1). Для определения точного вида этого уравнения следует, очевидно, использовать точное выражение для гравитационного потенциала, предложенное Эйнштейном [14, с.109]:

$$\sigma = \tau\, e^{\frac{\gamma\varsigma}{c^2}} = \tau\, e^{\frac{\Phi}{c^2}} \quad (4.2)$$

Можно заметить, что приближённое значение получено именно из этого выражения разложением его в ряд Тейлора и отбрасыванием членов высшего порядка:

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

Из чего следует:

$$\sigma = \tau\, e^{\frac{\Phi}{c^2}} \approx \tau \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right)$$

Обзор литературы выявил, что точное уравнение Эйнштейна (4.2) в таком виде вскользь упомянуто лишь в работе [15, с.215-232] и, как отмечено в работах [2, 8], более нигде не используется и даже не упоминается:

"...возможно, развитие теории пошло бы другим путем, если бы этот результат не остался без внимания" [8].

Отметим, что выражение (4.2) у разных авторов имеет разный вид [1, с.84]:

$$d\tau = dt\sqrt{1 + \frac{2\Phi}{c^2}} \quad (4.26)$$

В некоторых работах для обозначения величины Φ используется греческая буква χ. Для расчётов её свою очередь заменяем χ на параметры движения системы [12, с.119]:

$$\chi = gx + \frac{g^2 x^2}{2c^2} \quad (4.3)$$

В этом случае точное выражение экспоненциального коэффициента будет иметь вид:

$$e^{\frac{2\chi}{c^2}} = \exp\left\{\frac{2}{c^2}\left(gx + \frac{g^2x^2}{2c^2}\right)\right\} = \exp\left\{\frac{2gx}{c^2} + \frac{g^2x^2}{c^4}\right\} = e^{\frac{2gx}{c^2}+\frac{g^2x^2}{c^4}}$$

Нас интересует точное значение уравнения (4.1), поэтому подставляем полученное выражение, содержащее точное значение гравитационного потенциала, в уравнение (4.1) и после несколько замысловатых преобразований получаем:

$$t_A = \int_0^{t_B} \sqrt{\exp\left\{\left(1 + gt\left(v_0 - \frac{gt}{2}\right)\right)^2 - 1\right\} - (v_0 - gt)^2}\, dt \quad (4.4)$$

Для нашей задачи это выражение является точным. Интегрирование такой сложной функции связано с очевидными трудностями, поэтому вновь используем табличное (численное) интегрирование.

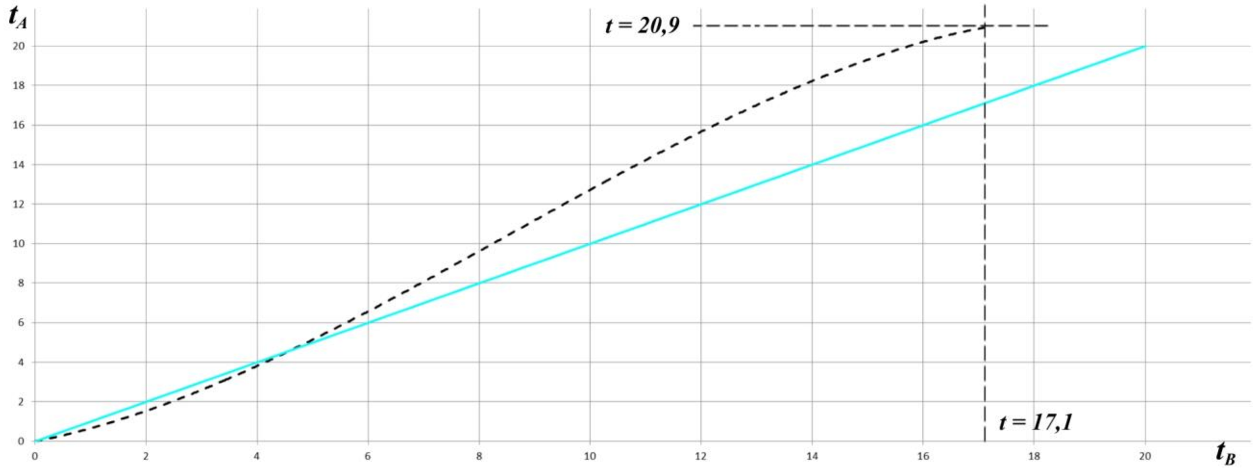

Рис.4.2 Численное интегрирование уравнения (4.4)

Как видно на графике, в результате численного интегрирования получено t_A=20,9, конечная точка черной штриховой линии. Дискретность – 2000, точность результата, то есть, отклонение от известного значения: +4,6%. Это весьма странно, поскольку мы использовали точное выражение для гравитационного потенциала по Эйнштейну. Если с приближённым значением потенциала мы получили отрицательную погрешность, то с точным значением погрешность и увеличилась и изменила знак. Из этого прямо следует, что точное значение может быть получено только с некоторым промежуточным значением потенциала – меньше, чем точное, и больше, чем самое грубое округление. Получилось, что предсказание ОТО для парадокса близнецов хуже, чем предсказание специальной теории относительности, являющееся максимально точным.

Попробуем использовать большее число членов разложения в ряд Тейлора, хотя это не имеет особого логического смысла, поскольку это точно такое же приближённое вычисление. Вновь используем разложение в ряд Тейлора, оставив три первых члена ряда:

$$\sigma = \tau\, e^{\frac{2\Phi}{c^2}} \approx 1 + \frac{2\Phi}{c^2} + \frac{4\Phi^2}{2c^4} = 1 + \frac{2\Phi}{c^2} + \frac{2\Phi^2}{c^4}$$

То же самое в обозначениях Эйнштейна и с использованием греческого символа:

$$e^{2\frac{\gamma\varsigma}{c^2}} \approx 1 + \frac{2\gamma\varsigma}{c^2} + \frac{4\gamma^2\varsigma^2}{2c^4} = 1 + \frac{2\chi}{c^2} + \frac{2\chi^2}{c^4}$$

Используем эквивалентное выражение (4.3) и после достаточно кропотливых преобразований приходим к следующему интегралу:

$$t_A = \int_0^{t_B} \sqrt{(1+gx)^2 + 2\left(gx + \frac{g^2x^2}{2}\right)^2 - (v_0 - gt)^2}\, dt\,, \quad (4.5)$$

интегралу, в котором с учётом наших начальных данных и для удобства численного интегрирования сделана подстановка:

$$gx = \frac{\sqrt{3}gt}{2} - \frac{g^2t^2}{2} \quad (4.6)$$

Произведя численное интегрирование, получаем следующую картину:

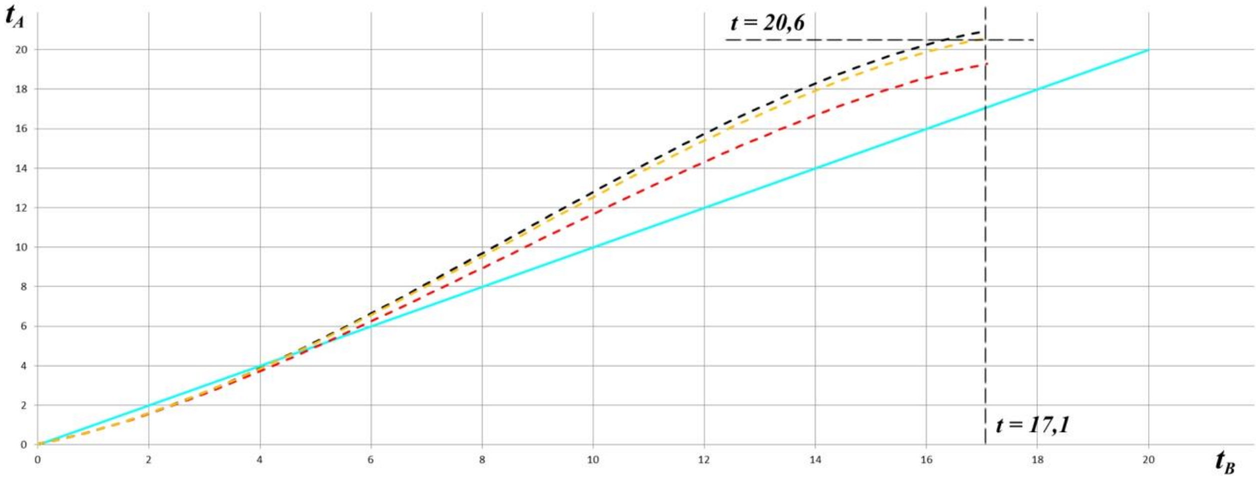

Рис.4.3 Численное интегрирование уравнения (4.5)

Как видно на графике, в результате численного интегрирования получено t_A=20,6 – конечная точка жёлтой штриховой линии. Дискретность – 2000, точность результата, то есть, отклонение от известного значения: +2,8%. Этот результат нас не устраивает теперь уже окончательно. Действительно, первый член ряда Тейлора, самое грубое приближение выражения для потенциала даёт заниженное значение времени, а два первых члена – завышенное. То есть, никаким разложением в ряд мы не сможем получить значение интеграла t_A=20,0 с удовлетворительной точностью.

Ситуация, прямо скажем, тупиковая: формализм ОТО не позволил в первом приближении получить приемлемое решение парадокса близнецов. Не опираясь ни на какие логические основания, просто подставим в выражение интеграла множитель, двойку:

$$t_A = \int_0^{t_B} \sqrt{(1+gx)^2 + \frac{2}{2}\left(gx + \frac{g^2x^2}{2}\right)^2 - (v_0 - gt)^2}\, dt \qquad (4.7)$$

Результат интегрирования оказался, прямо скажем, неожиданным.

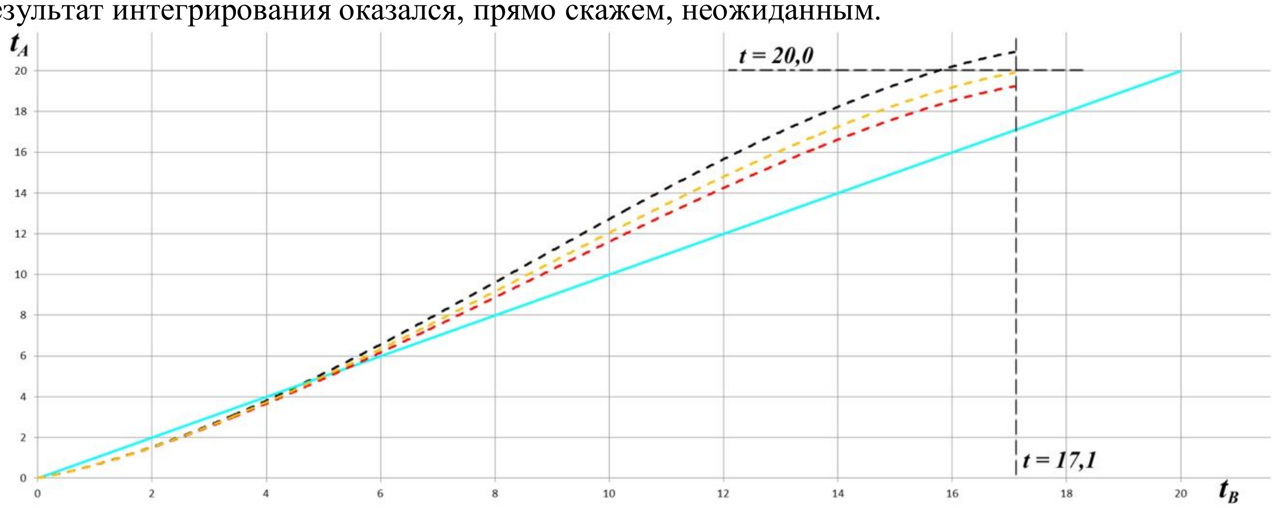

Рис.4.4 Численное интегрирование уравнения (4.7)

Как видно на графике, в результате численного интегрирования получено t_A=19,9 – конечная точка жёлтой штриховой линии. Дискретность – 2000, точность результата, то есть, отклонение от известного значения: –0,5%. Такой результат приемлем лишь отчасти, поскольку нужно помнить, что получен он случайным *подбором* коэффициента и, кроме того, выражение гравитационного потенциала не является точным эйнштейновским. Вместе с тем, этот результат наталкивает на мысль, а можно ли получить его как-то иначе, без подгонки?

Для выяснения этого рассмотрим историю получения приближенных значений потенциала. Можно сказать, что одним из главнейших уравнений теории относительности, если не самым главным, является уравнение интервала:

$$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k$$

Чаще всего рассматривается его развёрнутая форма при i = k:

$$ds^2 = -g_{00}c^2dt^2 + g_{11}dx^2 + g_{22}dy^2 + g_{33}dz^2$$

В случае одномерного, линейного движения, интервал можно переписать в виде:

$$ds^2 = -g_{00}c^2dt^2 + g_{11}dx^2$$

При исследовании парадокса близнецов всегда принимается $g_{11}=1$, а величина g_{00} описывает внешнее гравитационное поле:

$$ds^2 = -g_{00}c^2dt^2 + dx^2$$

Значение величины g_{00}, судя по литературным данным, зачастую задаётся с определённой долей произвола, без достаточно убедительных обоснований. Точное значение потенциала (4.2) Эйнштейном приводится в литературе также без обоснования. Интервал с этим значением потенциала имеет вид:

$$ds^2 = -e^{\frac{\gamma\varsigma}{c^2}}c^2dt^2 + dx^2 \quad (4.8)$$

Именно отсюда и возникает известное уравнение для решения парадокса близнецов. Поскольку движение времениподобное, то сам квадрат интервала является величиной отрицательной, поэтому:

$$-ds^2 = -e^{\frac{\gamma\varsigma}{c^2}}c^2dt^2 + dx^2 = -\left(1+\frac{2\Phi}{c^2}\right)c^2dt^2 + dx^2$$

Преобразуем:

$$\frac{ds^2}{c^2} = \left(1+\frac{2\Phi}{c^2}\right)dt^2 - \frac{dx^2}{c^2} \quad \to \quad d\tau = dt\sqrt{1+\frac{2\chi}{c^2}-\frac{v^2}{c^2}}$$

Обратим внимание, что в данном случае

$$g_{00} = e^{\frac{\gamma\varsigma}{c^2}}$$

Как мы уже обнаружили, такое соответствие не позволило получить приемлемое решение парадокса близнецов [10]. Если считать выражение точным, то неточным получается результат. Однако можно встретить и несколько иную запись интервала [3, с.145]:

$$ds^2 = \exp(2v)dt^2 - \exp(2v)dt^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\varphi^2 \quad (18.1)$$

Перепишем это уравнение в эквивалентную форму для одномерного движения:

$$ds^2 = e^{2v}dt^2 - e^{2\lambda}dr^2$$

Теперь обратим внимание на двойку в экспоненте. В сущности, её появление можно отнести к математическому вкусу автора, поскольку, например, в другом случае она находится в знаменателе [4, с.392]:

$$\Delta\tau = e^{v/2}\Delta t \quad (7.2)$$

А также может вообще отсутствовать, как в уравнении Эйнштейна (4.2). Конечно, можно, не приводя особых объяснений, нейтрально заявить, что этот множитель взять просто для удобства [13, с.221]. Однако обратим внимание на то, что все элементы в уравнении интервала являются квадратами. Вполне логично и данный коэффициент рассматривать как квадрат некоторой величины. Тогда выражение (4.8) можно переписать:

$$ds^2 = -\left(e^{\frac{\gamma\varsigma}{c^2}}\right)^2 c^2dt^2 + dx^2$$

Или в таком виде:

$$ds^2 = -\left(e^{\chi}\right)^2 dt^2 + dx^2$$

Такая трактовка двойки в экспоненте приводит к интересному результату. Традиционное понижение точности приближением имеет вид:

$$\sigma = \tau\, e^{\frac{2\Phi}{c^2}} \approx 1 + \frac{2\Phi}{c^2}$$

Если же рассматривать двойку как показатель степени, то мы получим:

$$\sigma = \tau\, e^{\frac{2\Phi}{c^2}} \approx \left(1+\frac{\Phi}{c^2}\right)^2$$

Изменив обозначения в последнем варианте и используя эквивалент (4.3), получаем:

$$e^{2\chi} \approx (1+\chi)^2 = \left(1 + gx + \frac{g^2x^2}{2}\right)^2$$

Вновь вернёмся к уравнению интервала:

$$-ds^2 = -\left(1 + gx + \frac{g^2x^2}{2}\right)^2 dt^2 + dx^2$$

После преобразований получаем новый вид интеграла:

$$t_A = \int_0^{t_B} \sqrt{\left(1 + gx + \frac{g^2x^2}{2}\right)^2 - (v_0 - gt)^2}\, dt \quad (4.9)$$

Численное интегрирование для *gx* из (4.6) дало следующие результаты:

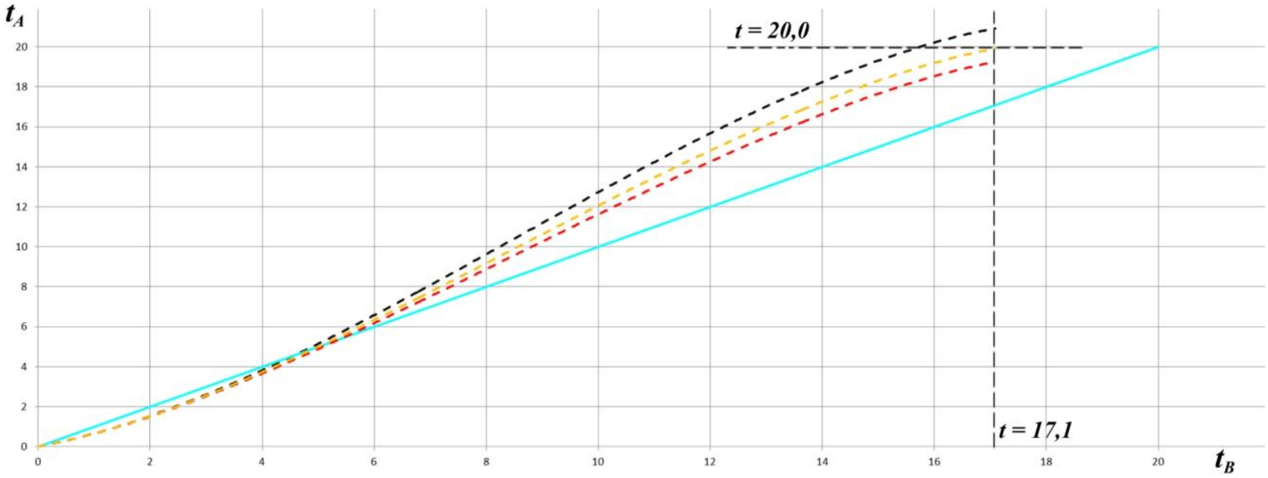

Рис.4.5 Численное интегрирование уравнения (4.9)

На графике в результате численного интегрирования получено t_A=19,9 – конечная точка жёлтой штриховой линии. Дискретность – 2000, точность результата, то есть, отклонение от известного, земного значения: –0,46%. Такой результат также является приемлемым только отчасти, поскольку он получен не с точным эйнштейновским гравитационным потенциалом. Проверка точности интегрирования в зависимости от других значений дискретности интервалов дала следующие результаты:

Получено: t_A=19,9. Дискретность – 16000, точность результата –0,478%
Получено: t_A=19,9. Дискретность – 8000, точность результата –0,475%
Получено: t_A=19,9. Дискретность – 4000, точность результата –0,470%
Получено: t_A=19,9. Дискретность – 2000, точность результата –0,459%
Получено: t_A=19,9. Дискретность – 1000, точность результата –0,438%
Получено: t_A=19,9. Дискретность – 500, точность результата –0,395%
Получено: t_A=19,9. Дискретность – 250, точность результата –0,310%
Получено: t_A=20,0. Дискретность – 125, точность результата –0,144%
Получено: t_A=20,0. Дискретность – 90, точность результата –0,016%
Получено: t_A=20,0. Дискретность – 88, точность результата –0,00567%
Получено: t_A=20,0. Дискретность – 87, точность результата –0,00035%
Получено: t_A=20,0. Дискретность – 86, точность результата +0,0051%
Получено: t_A=20,0. Дискретность – 85, точность результата +0,011%
Получено: t_A=20,0. Дискретность – 80, точность результата +0,041%
Получено: t_A=20,0. Дискретность – 60, точность результата +0,208%
Получено: t_A=20,2. Дискретность – 30, точность результата +0,850%

Как видим, значение величины t_A во всех случаях максимально приближено к точному, земному значению, особенно при дискретности 87. Но это свидетельствует, скорее, о плохом соответствии уравнения гравитационного потенциала заданным требованиям. Отметим, что интегралы (4.7) и (4.9) на всех дискретностях дали неразличимо совпадающие результаты.

Выводы

Утверждение о том, что в общей теории относительности парадокс близнецов получил полное и окончательное решение является *недостаточно* обоснованным. В рассмотренной предельно идеализированной версии парадокса – путешественник всё время движется с неизменным ускорением, точность нескольких численных вариантов решений не превышает единиц процента, что для аналитических вычислений является неприемлемым.

Использование приближённого уравнения параметра g_{00} и гравитационного потенциала позволяет получить достаточно низкую погрешность вычислений. Однако сам факт использования *неточных* исходных данных дискредитирует практически любую точность конечных вычислений, фактически означая подгонку под требуемый результат.

Получить для близнеца-путешественника то же значение земного времени, что и для близнеца, остававшегося на Земле, по известным исходным величинам оказалось невозможным. При всех вычислениях по земным часам прошло иное время, чем вычисленное с точки зрения улетавшего близнеца.

В литературе не удалось найти информации о реальном, физически обоснованном значении гравитационного потенциала при ускоренном движении близнеца-путешественника, которое позволило бы получить совпадение времени по земным часам с точки зрения обоих близнецов. Подбор осмысленных его значений не позволил получить инвариант этого времени с приемлемой точностью. Традиционное значение g_{00}, описываемое в литературе, приводит для близнецов к разным значениям времени по земным часам. Предложенное Эйнштейном "точное" значение g_{00} в экспоненциальной форме приводит к *завышенному* значению этого времени. Однако и приближённое значение величины до первого функционального (после единицы) члена ряда Тейлора также даёт *завышенное* значение времени на Земле, вычисленного с точки зрения близнеца-путешественника. Это значит, что даже самое грубое, завышенное приближение этого параметра уже исключает возможность получить точное значение времени. Наилучшее отклонение инварианта земного времени, ок.0,46% было получено только путём специфического приближения (снижения точности) параметра g_{00}, что, конечно же, не даёт оснований считать результат приемлемым.

Возможность *искусственно* подобрать такое значение гравитационного потенциала и такие правила вычислений, при которых инвариант земного времени будет выполнен с любой точностью, конечно же, существует. Однако физически обосновать такое *подобранное* значение гравитационного потенциала будет невозможно, это простая подгонка.

11. Приложения

11.1 Численное интегрирование

Интеграл от некоторой функции геометрически представляет собой площадь под графиком этой функции. Таким образом, для вычисления интеграла функции существуют, по меньшей мере, три принципиально отличных способа. Первый – это аналитической вычисление новой функции - интеграла, второй – разбиение площади на элементарные участки и их пересчет, третий – подобен такому же разбиению на участки, но аналитически, с использованием уравнения интегрируемой функции. В этом случае мы получаем либо график, либо таблицу числовых данных. Напротив, первый способ позволяет получить решение в точном аналитическом виде, что позволяет в дальнейшем осуществлять строгие аналитические преобразования и исследование интеграла, если только при его вычислении не использовались упрощающие замены, фактически подменяющие исходную функцию её подобием.

Современные компьютерные технологии позволяют вычислить значение интеграла в виде графической функции. Мы получаем некую линию, график, предельно точно соответствующий интегралу функции, которая даже может быть и сама представлена в графическом или табличном виде, но аналитическое исследование этой графической (или табличной) функции-интеграла затруднено. Можно отдельные участки интеграла аппроксимировать какими-либо элементарными функциями, но фундаментальную суть интеграла они, разумеется, не отражают.

Тем не менее, графическое, числовое (табличное) интегрирование даёт немало ценной информации. Если не предполагается дальнейшее фундаментальное исследование собственно интеграла, то такие графики вполне достаточны.

Рассмотрим подробнее, как выглядит такое числовое, табличное интегрирование. Возьмем функцию, например, cos(x). Строим её график. Теперь вычисляем последовательно величины cos(x)dx и находим возрастающую сумму: cos1+ cos2+ cos3… для каждого текущего значения x. Пары значений (сумма; x) изображаем в виде графика. Результатом и является график – уравнение интеграла:

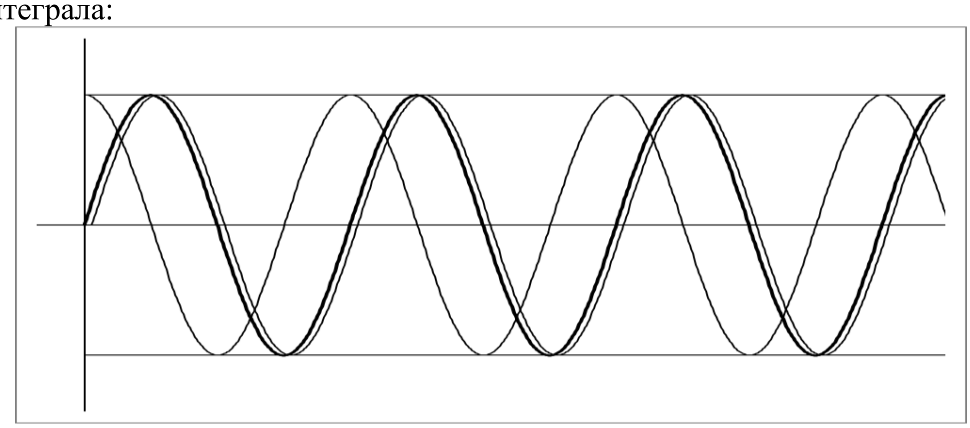

Рис.11.1 Числовой интеграл функции cos(x)

На рисунке представлены три графика. Первый - одиночная тонкая линия – это исходная, интегрируемая функция – cos(x). Толстая линия рядом – это её числовой интеграл – sin(x). Рядом с толстой линией интеграла для примера показана аналитическая линии функции sin(x), которая немного смещена вправо, чтобы не сливаться с интегральной линией.

Подобный алгоритм позволяет производить интегрирование любой как аналитической, так и аппроксимированной, табличной функции. Например, трапецеидальное интегрирование состоит из следующих шагов:

Находим первое значение функции.

Находим второе значение функции для прироста аргумента

Запоминаем его для следующего шага

Находим полу-сумму запомненного и нового значений

Умножаем на приращение аргумента (оно неизменно)

Получено значение площади первого интервала

В цикле находим остальные и суммируем их.

Вычисленный интеграл является определенным, на некотором интервале, поэтому каждая промежуточная сумма является точкой графика (таблицы) интеграла.

На следующем рисунке показано, как вычисляется площадь элементарной трапецеидальной ячейки интегрируемой функции f(x)

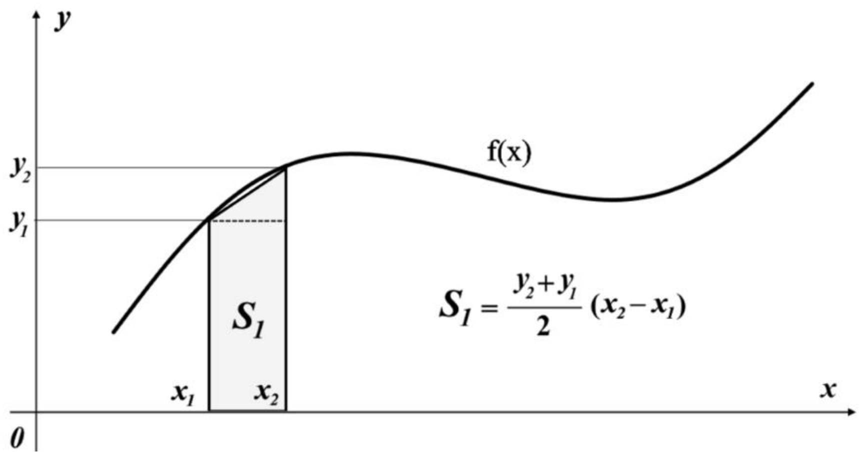

Рис.11.2 Площадь интегральной трапеции

При уменьшении приращения (x_2-x_1) площадь прямоугольной трапеции предельно приближается к площади косоугольной трапеции, одна из сторон которой является отрезком линии графика.

$$S_1 = \frac{y_2 - y_1}{2}(x_2 - x_1) \approx \int_{x1}^{x2} f(x)dx$$

11.2 Проверка численного интегрирования на функции Sin

Проверка, демонстрация численного интегрирования – функция Sin(ф)

$$y = \int_0^{\pi} \sin(\varphi)d\varphi = -\cos(\varphi)\Big|_0^{\pi} = -\cos(\pi) + \cos(0) = -(-1) + 1 = 2$$

Численным интегрированием получен результат 2,000:

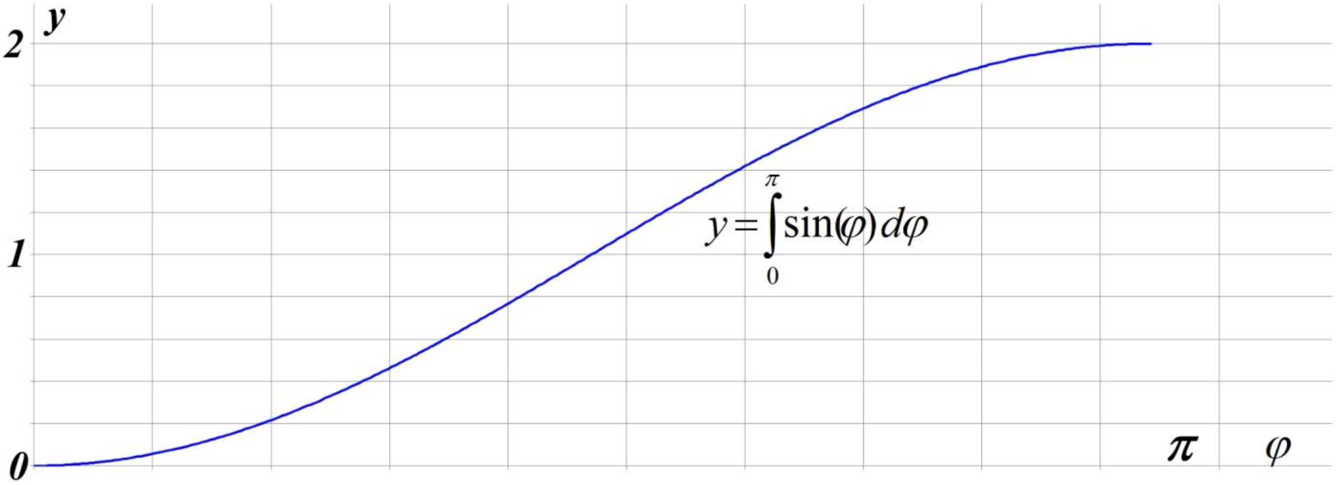

Рис.11.3 Численное интегрирование уравнения Sin(x)

Такое совпадение означает корректность модели численного интегрирования.

11.3 Сравнение численного и аналитического интегрирования

Значение следующего интеграла может быть вычислено аналитически абсолютно точно:

$$t_B = -\frac{t_A}{2v_0} \int_{-v_0}^{v_0} \sqrt{1 - s^2}ds \approx 17{,}091996 \quad (11.1)$$

Поэтому удобно проверить возможности численного интегрирования, произведя такое же интегрирования этой функции численным способом.

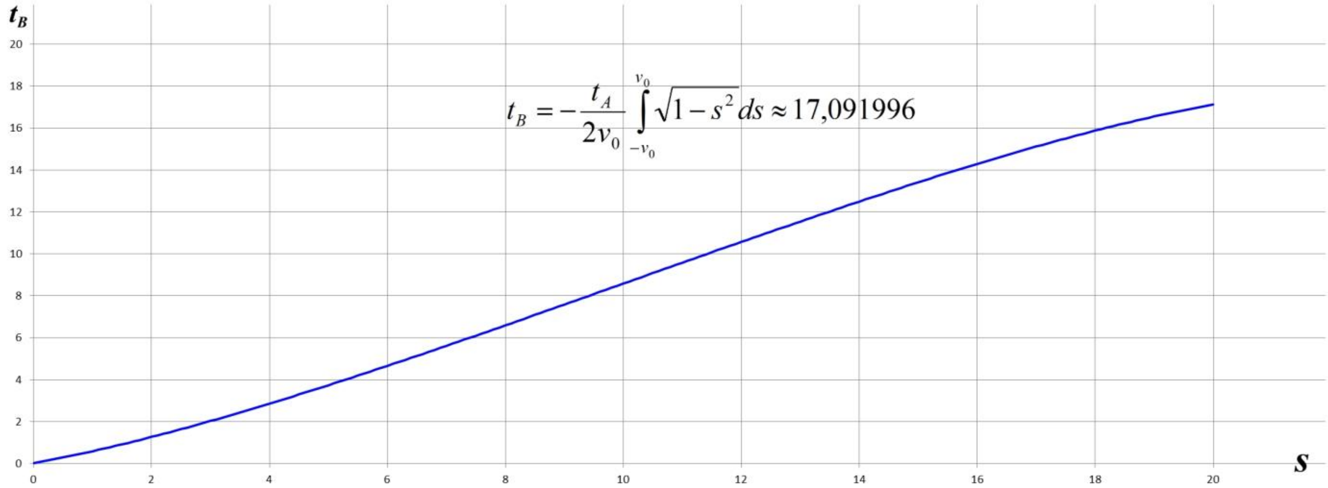

Рис.11.4 Численное интегрирование уравнения (11.1)

Получено: t_B=17,093246. Дискретность – 8000, точность результата – 0,007%
Получено: t_B=17,094495. Дискретность – 4000, точность результата – 0,015%
Получено: t_B=17,096933. Дискретность – 2000, точность результата – 0,029%
Получено: t_B=17,101986. Дискретность – 1000, точность результата – 0,058%

Получено: t_B=17,111956. Дискретность – 500, точность результата – 0,117%
Получено: t_B=17,131836. Дискретность – 250, точность результата – 0,233%
Получено: t_B=17,171356. Дискретность – 125, точность результата – 0,462%

Как видим и в этом случае результат численного интегрирования с высокой точностью совпал с аналитическим значение интеграла, что означает корректность метода.

Литература

1. Grøn Ø., Lecture Notes on the General Theory of Relativity, p.90. Springer (2009).
2. Morozov V.B., Do body shapes depend on acceleration or not? ArXiv 1305.5412v4
3. Дирак П. А. М. Лекции по теоретической физике. — Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001, 240 с.
4. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., Релятивистская астрофизика, ч.1. **УФН**, т.LXXXIV, вып.3, 1964, с.377-417
5. Зельманов А.Л., Агаков В.Г. Элементы общей теории относительности. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. - 240 с. - ISBN 5-02-014064-3.
6. Мёллер К., Парадокс часов. "Эйнштейновский сборник 1968", с.230-238. Ответственные редакторы И.Е.Тамм, Г.И.Наан, Составитель У.И.Франкфурт. – М.: «Наука», 1968 г.
7. Мёллер К., Теория относительности, Изд. 2-е. Пер. с англ. Под ред. проф. Д. Иваненко. М.: Атомиздат, 1975, 400 с.
8. Морозов В.Б., Исходные принципы общей теории относительности. Новые уравнения, новые решения, 2017, DOI: 10.13140/RG.2.2.11122.50888/1, URL: https://www.researchgate.net/publication/313770160
9. Окунь Л Б, Селиванов К Г, Телегди В "Гравитация, фотоны, часы" *УФН* **169** 1141–1147 (1999)
10. Путенихин П.В., Итак, парадокса (близнецов) больше нет!, 2014, URL: http://samlib.ru/editors/p/putenihin_p_w/ddm4-oto.shtml
11. Розман Г.А. Теория относительности. – Псков: ПГПУ, 2005. – 256 с. ISBN 5-87854-343-5.
12. Скобельцын Д.В., "Парадокс близнецов в теории относительности", АН СССР, М.- "Наука", 1966
13. Фейнман Р.Ф., Мориниго Ф.Б., Вагнер У.Г., Фейнмановские лекции по гравитации. Перев. с англ. А.Ф.Захарова. – М.: "Янус-К", 2000. – 296 с.
14. Эйнштейн А., О принципе относительности и его следствиях. Сборник научных трудов, т.1, М.: Наука, 1965, с.65-114
15. Эйнштейновский сборник. 1967. – М.: Наука, 1967