Mostre que o seno de um arco na forma $1/p$, com p inteiro, resulta em um irracional.

Observe que:

$$sen(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Suponha que o seno de 1/p seja uma racional, daí então, existem m e n tais que a igualdade abaixo seja satisfeita:

$$m/n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{1}{p}\right)^{2k+1}$$

Então multiplicando a igualdade acima por $n(2n+1)!p^{2n+1}$ tem-se

$$mn(2n+1)!p^{2n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2n+1)!p^{2n+1}n}{(2k+1)!} \left(\frac{1}{p}\right)^{2k+1}$$

Daí então, teremos:

$$mn(2n+1)!p^{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (2n+1)!p^{2n+1}n}{(2k+1)!} \left(\frac{1}{p}\right)^{2k+1} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2n+1)!p^{2n+1}n}{(2k+1)!} \left(\frac{1}{p}\right)^{2k+1}$$

Daí então observe que:

$$-(n/((2n+3)(2n+2)) + n/((2n+5)(2n+4)(2n+3)(2n+2)) + ...) <$$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2n+1)!p^{2n+1}n}{(2k+1)!} \left(\frac{1}{p}\right)^{2k+1} < n/((2n+3)(2n+2)) + n/((2n+5)(2n+4)(2n+3)(2n+2)) + ...$$

Observe que $\frac{n}{2n+2} < 1$,daí então tem-se:

$$-(1/(2n+3) + 1/((2n+5)(2n+4)(2n+3)) + ...) <$$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2n+1)!p^{2n+1}n}{(2k+1)!} \left(\frac{1}{p}\right)^{2k+1} < 1/(2n+3) + 1/((2n+5)(2n+4)(2n+3)) + ...$$

E ainda:

$$-1/2(n+1) = -(1/(2n+3) + 1/(2n+3)^2 + 1/(2n+3)^3 + ...) <$$

$$-(1/(2n+3) + 1/((2n+5)(2n+4)(2n+3)) + ...) <$$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2n+1)!p^{2n+1}n}{(2k+1)!} \left(\frac{1}{p}\right)^{2k+1}$$

$$< 1/(2n+3) + 1/((2n+5)(2n+4)(2n+3)) + ...$$

$$< 1/(2n+3) + 1/(2n+3)^2 + 1/(2n+3)^3 + ... = 1/2(n+1)$$

De onde concluímos que:

$$-1/2(n+1) < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2n+1)! p^{2n+1} n}{(2k+1)!} \left(\frac{1}{p}\right)^{2k+1} < 1/2(n+1)$$

A soma está entre -1 e 1 e não pode ser zero, então só pode ser uma fração inexata.Olhando para a identidade (4) temos um inteiro somado a uma fração inexata resultando em um inteiro, o que é um absurdo.