LA LEY DE MAXWELL-WHITTAKER: FUERZA DE GRAVEDAD Y DE INERCIA

Óscar Sánchez Uriarte
Dpto. de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Valladolid, Valladolid, España
osanchez@eii.uva.es1
21 de junio de 2019

"Abstract"

In this article, the Maxwell-Wittaker law is used to describe magnetic phenomena instead of the Lorentz Force. Certain similarities are mentioned with Weber's proposals and a more elementary interaction is proposed, which justifies it. From there, a possibility is obtained to explain the gravitational and inertial phenomena.

En este artículo, se utiliza la ley de Maxwell-Wittaker para describir los fenómenos magnéticos en lugar de la Fuerza de Lorentz. Se mencionan ciertas similitudes con los planteamientos de Weber y se propone una interacción más elemental, que la justifica. A partir de ahí, se obtiene una posibilidad para explicar los fenómenos gravitatorios e inerciales.

1.-INTRODUCCIÓN

Es sabido que, la ecuación de Biot y Savart, aplicada a la descripción de la fuerza entre elementos de corriente, en general, no cumple la tercera Ley de Newton. Este hecho, soslayado de diversas maneras, ha sido, y sigue siendo, motivo de controversias. No faltan quienes han intentado encontrar una evidencia experimental que zanje la cuestión [1] [2] [3] [4]. Las dificultades son grandes, dada la imposibilidad de materializar elementos de corriente aislados, y los resultados no son concluyentes.

Hay propuestas recientes [5] [6] que consideran a la ley de Maxwell-Whittaker [7], que sí cumple la tercera ley de Newton, como una posibilidad a tener en cuenta para describir la acción entre elementos de corriente:

$$\mathbf{d^2F}_{\mathrm{ba}} = i_a\mathbf{dl_a} \times \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(i_b\mathbf{dl}_{\boldsymbol{b}} \times \mathbf{r_{ba}})}{\mathrm{r_{ba}}^3} + i_b\mathbf{dl}_{\boldsymbol{b}} \times \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(i_a\mathbf{dl_a} \times \mathbf{r_{ba}})}{\mathrm{r_{ba}}^3} + \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(\,i_a\mathbf{dl_a} \cdot i_b\mathbf{dl}_{\boldsymbol{b}})\mathbf{r_{ba}}}{\mathrm{r_{ba}}^3}$$

Cuando se aplica la expresión de Maxwell-Whittaker al cálculo de la acción de un circuito cerrado sobre un elemento de corriente, el resultado es el mismo que si se aplica la ley de Biot y Savart. Pero hay más, cuando se divide un circuito en dos partes, al calcular la fuerza de una parte sobre la otra, el resultado es como si cada parte del circuito ejerciera fuerza sobre sí mismo.

En el caso de aplicar la expresión de Maxwell-Whittaker, lo anteriormente expuesto es un resultado. Si se utiliza la expresión de Biot y Savart, el que deba considerarse la totalidad del circuito, es una necesidad que ya fue evidenciada por el propio Grassman [8] al criticar la Ley de Ampère en favor de la suya. Este planteamiento sustenta la consideración del campo magnético como una perturbación del medio solidaria con el sistema de referencia del observador.

La llamada paradoja de Faraday también ha sido, y sigue siendo, explicada en esa línea argumental [9]. Sin embargo hay trabajos experimentales [10] [11] que atribuyen, la diferencia de potencial medida, a la fuerza electromotriz inducida en los elementos del circuito que se mueven respecto del imán.

Por nuestra parte, en [6] comentamos que es posible obtener la ley de Maxwell-Whittaker suponiendo que la interacción entre cargas puntuales viene dada por:

$$\mathbf{F_{ba}} = \mathrm{q_a}(\mathbf{v_a} - \mathbf{v_b}) \times \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathrm{q_b}(\mathbf{v_b} - \mathbf{v_a}) \times \mathbf{r_{ba}}}{\mathrm{r_{ba}}^3} + \frac{\mu_0}{8\pi} \frac{[\mathrm{q_a}(\mathbf{v_a} - \mathbf{v_b}) \cdot \mathrm{q_b}(\mathbf{v_b} - \mathbf{v_a})]\mathbf{r_{ba}}}{\mathrm{r_{ba}}^3} \quad (a)$$

Expresión que sí es invariante de Galileo. No obstante, tenemos que ser conscientes de que, el que permita deducir la expresión de Maxwell-Whittaker, no implica necesariamente que la interacción entre cargas esté correctamente descrita.

Por ejemplo, si la expresión fuese:

$$\mathbf{F_{ba}} = -\mathrm{q_a}(\mathbf{v_a} - \mathbf{v_b}) \times \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathrm{q_b}(\mathbf{v_b} - \mathbf{v_a}) \times \mathbf{r_{ba}}}{\mathrm{r_{ba}}^3} - \frac{\mu_0}{8\pi} \frac{[\mathrm{q_a}(\mathbf{v_a} - \mathbf{v_b}) \cdot \mathrm{q_b}(\mathbf{v_b} - \mathbf{v_a})]\mathbf{r_{ba}}}{\mathrm{r_{ba}}^3} \quad (b)$$

Al aplicarla a elementos de corriente eléctricamente neutros, se obtendrían idénticos resultados. Basta comprender que puede sustituirse cada par $(\mathrm{q_b}, \mathbf{v_b})$ por el par $\left(-\mathrm{q_b}, \mathbf{v}_\mathrm{b}^{'}\right)$**,** y entonces:

$$\mathbf{F_{ba}} = \mathrm{q_a}\left(\mathbf{v_a} - \mathbf{v}_\mathrm{b}^{'}\right) \times \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathrm{q_b}\left(\mathbf{v}_\mathrm{b}^{'} - \mathbf{v_a}\right) \times \mathbf{r_{ba}}}{\mathrm{r_{ba}}^3} + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\left[\mathrm{q_a}\left(\mathbf{v_a} - \mathbf{v}_\mathrm{b}^{'}\right) \cdot \mathrm{q_b}\left(\mathbf{v}_\mathrm{b}^{'} - \mathbf{v_a}\right)\right]\mathbf{r_{ba}}}{\mathrm{r_{ba}}^3}$$

Ahora bastaría renombrar $\mathbf{v}_\mathrm{b}^{'} \rightarrow \mathbf{v_b}$.

En 1846, Weber publica su tratado sobre Electrodinámica [13] en el que, unificando los fenómenos electrostáticos y electrodinámicos, propone como potencial de interacción entre dos cargas eléctricas $\mathrm{q_a}$ y $\mathrm{q_b}$:

$$\mathrm{U}_\mathbf{ba} = \frac{\mathrm{q_a q_b}}{4\pi\varepsilon_0 \mathrm{r_{ba}}}\left[1 - \mu_0\varepsilon_0 \frac{(\mathbf{v_a} - \mathbf{v_b})^2}{2}\right]$$

De tal manera que:

$$\mathbf{F_{ba}} = -\boldsymbol{\nabla}\left\{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathrm{q_a q_b}}{\mathrm{r_{ba}}}\left[1 - \mu_0\varepsilon_0 \frac{(\mathbf{v_a} - \mathbf{v_b})^2}{2}\right]\right\}$$

Pude comprobarse que la expresión (b) es compatible con el planteamiento de Weber.

Se obtendrían resultados equivalentes postulando que el potencial de interacción fuese:

$$\mathrm{U}_{\mathbf{ba}} = \frac{\mathrm{q_a q_b}}{4\pi\varepsilon_0 \mathrm{r_{ba}}}\left(1 + \mu_0\varepsilon_0 \frac{(\mathbf{v_a} - \mathbf{v_b})^2}{2}\right)$$

Con este supuesto la expresión sería compatible con (a).

La dificultad para dilucidad el mecanismo físico, que rige la interacción entre partículas cargadas, parece pues considerable. No es de extrañar entonces, la huida hacia delante de Lorentz, cuando postuló [12] que para un electrón:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(\mathrm{q_e}\mathbf{v_e} \times \mathbf{r_{ba}})}{\mathrm{r_{ba}}^3} \qquad ; \qquad \mathbf{F} = \mathrm{q_e}\mathbf{v_e} \times \mathbf{B}$$

Pero, al eludir una dificultad, creo otra. El problema es evidente, **v** depende del observador y **B** y **F** no son invariantes ante una transformación de Galileo. Problema cuya resolución ha necesitado el auxilio de la Teoría de la Relatividad Especial.

2.- LA LEY DE MAXWELL-WHITTAKER Y LA INTERACCIÓN DE UN ELEMENTO DE CORRIENTE SOBRE UNA CARGA ELÉCTRICA ELEMENTAL.

La Ley de Maxwell-Whittaker describe la interacción entre elementos de corriente eléctricamente neutros y también puede expresarse como:

$$\mathbf{d^2F}_{\mathrm{ba}} = i_a\mathbf{dl_a} \times \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(i_b\mathbf{dl}_{\boldsymbol{b}} \times \mathbf{r_{ba}})}{\mathrm{r_{ba}}^3} + i_a\mathbf{dl_a}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(i_b\mathbf{dl}_{\boldsymbol{b}} \cdot \mathbf{r_{ba}})}{\mathrm{r_{ba}}^3}$$

Esto da lugar a que pueda definirse un potencial vector **A**, tal que:

$$\mathbf{d^2F}_{\mathrm{ba}} = i_a\mathbf{dl_a} \times (\nabla \times \mathbf{dA_b}) - i_a\mathbf{dl_a}(\nabla \cdot \mathbf{dA_b}) \qquad (c)$$

Ya hemos comentado que la Ley de Maxwell-Whittaker puede obtenerse de:

$$\mathbf{F_{ba}} = \mathrm{q_a}(\mathbf{v_a} - \mathbf{v_b}) \times \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{q_b}(\mathbf{v_b} - \mathbf{v_a}) \times \mathbf{r_{ba}}}{\mathrm{r_{ba}}^3} + \frac{\mu_0}{8\pi}\frac{[\mathrm{q_a}(\mathbf{v_a} - \mathbf{v_b}) \cdot \mathrm{q_b}(\mathbf{v_b} - \mathbf{v_a})]\mathbf{r_{ba}}}{\mathrm{r_{ba}}^3}$$

Suponiendo correcta la expresión anterior, cabe preguntarnos cuál será la interacción de un elemento de corriente sobre una carga puntual animada de una velocidad **v.** Supongamos el elemento de corriente representado por k cargas animadas de sus respectivas velocidades $\mathbf{v}_{\mathrm{k}}$, la fuerza sobre una carga q animada de una velocidad **v**, vendrá dada por:

$$\mathbf{F} = \sum_{\mathrm{k}} \mathrm{q}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\mathrm{k}}) \times \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{q_k}(\mathbf{v}_{\mathrm{k}} - \mathbf{v}) \times \mathbf{r}_{\mathrm{kq}}}{\mathbf{r}_{\mathrm{kq}}{}^3} + \sum_{\mathrm{k}} \frac{\mu_0}{8\pi}\frac{[\mathrm{q}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\mathrm{k}}) \cdot \mathrm{q_k}(\mathbf{v}_{\mathrm{k}} - \mathbf{v})]\mathbf{r}_{\mathrm{kq}}}{\mathbf{r}_{\mathrm{kq}}{}^3}$$

$$\mathbf{F} = \sum_{\mathrm{k}} \mathrm{q}\mathbf{v} \times \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{q_k}\mathbf{v}_\mathrm{k} \times \mathbf{r}_\mathrm{kq}}{\mathbf{r}_\mathrm{kq}{}^3} + \sum_{\mathrm{k}} \mathrm{q}\mathbf{v}_\mathrm{k} \times \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{q_k}\mathbf{v} \times \mathbf{r}_\mathrm{kq}}{\mathbf{r}_\mathrm{kq}{}^3} - \sum_{\mathrm{k}} \mathrm{q}\mathbf{v} \times \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{q_k}\mathbf{v} \times \mathbf{r}_\mathrm{kq}}{\mathbf{r}_\mathrm{kq}{}^3}$$
$$- \sum_{\mathrm{k}} \mathrm{q}\mathbf{v}_\mathrm{k} \times \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{q_k}\mathbf{v}_\mathrm{k} \times \mathbf{r}_\mathrm{kq}}{\mathbf{r}_\mathrm{kq}{}^3} - \sum_{\mathrm{k}} \frac{\mu_0}{8\pi}\frac{\mathrm{qq_k}\mathbf{v}^2\mathbf{r}_\mathrm{kq}}{\mathbf{r}_\mathrm{kq}{}^3} - \sum_{\mathrm{k}} \frac{\mu_0}{8\pi}\frac{\mathrm{qq_k}\mathbf{v}_\mathrm{k}{}^2\mathbf{r}_\mathrm{kq}}{\mathbf{r}_\mathrm{kq}{}^3}$$
$$+ \sum_{\mathrm{k}} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{qq_k}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_\mathrm{k})\mathbf{r}_\mathrm{kq}}{\mathbf{r}_\mathrm{kq}{}^3}$$

Si el elemento de corriente es eléctricamente neutro:

$$\mathbf{F} = \sum_{\mathrm{k}} \mathrm{q}\mathbf{v} \times \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{q_k}\mathbf{v}_\mathrm{k} \times \mathbf{r}_\mathrm{kq}}{\mathbf{r}_\mathrm{kq}{}^3} + \sum_{\mathrm{k}} \mathrm{q}\mathbf{v}_\mathrm{k} \times \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{q_k}\mathbf{v} \times \mathbf{r}_\mathrm{kq}}{\mathbf{r}_\mathrm{kq}{}^3} - \sum_{\mathrm{k}} \mathrm{q}\mathbf{v}_\mathrm{k} \times \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{q_k}\mathbf{v}_\mathrm{k} \times \mathbf{r}_\mathrm{kq}}{\mathbf{r}_\mathrm{kq}{}^3}$$
$$- \sum_{\mathrm{k}} \frac{\mu_0}{8\pi}\frac{\mathrm{qq_k}\mathbf{v}_\mathrm{k}{}^2\mathbf{r}_\mathrm{kq}}{\mathbf{r}_\mathrm{kq}{}^3} + \sum_{\mathrm{k}} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{qq_k}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_\mathrm{k})\mathbf{r}_\mathrm{kq}}{\mathbf{r}_\mathrm{kq}{}^3}$$

$$\mathbf{F} = \sum_{\mathrm{k}} \mathrm{q}\mathbf{v} \times \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{q_k}\mathbf{v}_\mathrm{k} \times \mathbf{r}_\mathrm{kq}}{\mathbf{r}_\mathrm{kq}{}^3} + \sum_{\mathrm{k}} \mathrm{q}\mathbf{v}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{q_k}\mathbf{v}_\mathrm{k} \cdot \mathbf{r}_\mathrm{kq}}{\mathbf{r}_\mathrm{kq}{}^3} - \sum_{\mathrm{k}} \mathrm{q}\mathbf{v}_\mathrm{k} \times \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{q_k}\mathbf{v}_\mathrm{k} \times \mathbf{r}_\mathrm{kq}}{\mathbf{r}_\mathrm{kq}{}^3} - \sum_{\mathrm{k}} \frac{\mu_0}{8\pi}\frac{\mathrm{qq_k}\mathbf{v}_\mathrm{k}{}^2\mathbf{r}_\mathrm{kq}}{\mathbf{r}_\mathrm{kq}{}^3}$$
$$+ \sum_{\mathrm{k}} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{qq_k}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_\mathrm{k})\mathbf{r}_\mathrm{kq}}{\mathbf{r}_\mathrm{kq}{}^3}$$

$$\mathbf{F} = \sum_{\mathrm{k}} \mathrm{q}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_\mathrm{k}) \times \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{q_k}\mathbf{v}_\mathrm{k} \times \mathbf{r}_\mathrm{kq}}{\mathbf{r}_\mathrm{kq}{}^3} + \sum_{\mathrm{k}} \mathrm{q}\mathbf{v}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{q_k}\mathbf{v}_\mathrm{k} \cdot \mathbf{r}_\mathrm{kq}}{\mathbf{r}_\mathrm{kq}{}^3} - \sum_{\mathrm{k}} \frac{\mu_0}{8\pi}\frac{\mathrm{qq_k}\mathbf{v}_\mathrm{k}{}^2\mathbf{r}_\mathrm{kq}}{\mathbf{r}_\mathrm{kq}{}^3}$$
$$+ \sum_{\mathrm{k}} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{qq_k}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_\mathrm{k})\mathbf{r}_\mathrm{kq}}{\mathbf{r}_\mathrm{kq}{}^3}$$

Bajo el supuesto de que $\mathbf{v} \gg \mathbf{v}_\mathrm{k}$, podríamos aproximar:

$$\mathbf{dF} \cong \mathrm{q}\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{dA}) - \mathrm{q}\mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{dA}) + \mathbf{dG} \qquad (d)$$

Luego bajo el supuesto de que la expresión (a) fuese correcta no nos está permitido que la expresión (c) pueda generalizarse a cargas en movimiento. Sin embargo la expresión (d) no está alejada de la realidad experimental. Cuando un electrón describe una trayectoria circular en presencia de un campo magnético perpendicular al plano de giro, admitimos que:

$$\mathrm{q}_e\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathrm{q}_e\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

Según (d):

$$\mathbf{0} \cong \mathrm{q}\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathrm{q}\mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{G}$$

Como $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$:

$$\mathbf{0} \cong \mathrm{q}\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{G}$$

Bastaría que:

$$\mathbf{G} = -\mathrm{q}_e\mathbf{a}$$

3.- EL SUPUESTO CAMPO DE INTERACCIÓN ENTRE SUPUESTAS PARTÍCULAS PUNTUALES: LA ECUACIÓN DE ONDAS DE UN CAMPO ESCALAR

Recordemos que, para evitar la concepción de fuerzas a distancia, podemos recurrir al concepto de campo, de tal forma que una carga de prueba q, situada en un punto del espacio, interacciona con el campo en dicho punto. Por ejemplo, la fuerza que ejerce un campo eléctrico por unidad de carga en un punto del espacio, situado por un vector de posición **r**, puede modelarse como el gradiente de un campo escalar:

$$\frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{\mathrm{q}} = -\boldsymbol{\nabla}\mathrm{U}(\mathbf{r})$$

Para dilucidar la interacción en los fenómenos electrodinámicos, vamos a utilizar la expresión (a), multiplicando por dos el segundo término. La razón de esta modificación resultará obvia más adelante. Obtenemos:

$$\mathbf{F_{ba}} = \mathrm{q_a}(\mathbf{v_a} - \mathbf{v_b}) \times \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{q_b}(\mathbf{v_b} - \mathbf{v_a}) \times \mathbf{r_{ba}}}{\mathrm{r_{ba}}^3} + \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{[\mathrm{q_a}(\mathbf{v_a} - \mathbf{v_b}) \cdot \mathrm{q_b}(\mathbf{v_b} - \mathbf{v_a})]\mathbf{r_{ba}}}{\mathrm{r_{ba}}^3}$$

Con lo que queda reducida a:

$$\mathbf{F_{ba}} = \mathrm{q_a}(\mathbf{v_b} - \mathbf{v_a})\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{q_b}(\mathbf{v_a} - \mathbf{v_b}) \cdot \mathbf{r_{ba}}}{\mathrm{r_{ba}}^3}$$

Si además llamamos $\nabla\mathrm{U_b}$ a:

$$\nabla\mathrm{U_b} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{q_b}\mathbf{r_{ba}}}{\mathrm{r_{ba}}^3}$$

Entonces:

$$\mathbf{F_{ba}} = \mu_0\varepsilon_0\mathrm{q_a}(\mathbf{v_a} - \mathbf{v_b})[(\mathbf{v_a} - \mathbf{v_b}) \cdot \boldsymbol{\nabla}\mathrm{U_b}]$$

Bajo este supuesto, la interacción de la carga de prueba $\mathrm{q_a}$ con el campo, no solamente es función del valor de dicho campo, sino también de la velocidad relativa entre ambos. Admitamos entonces, que en un punto localizado en el espacio por un vector de posición **r**, puede haber un campo resultado de la superposición de k campos caracterizados con sus respectivas velocidades $\mathbf{v}_\mathrm{k}$. Y que la interacción, con dicho campo, de una carga de prueba q animada de una velocidad **v**, vendrá dada por:

$$\frac{\mathbf{F}}{\mathrm{q}} = \mu_0\varepsilon_0\sum_{\mathrm{k}}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_\mathrm{k})[(\mathbf{v} - \mathbf{v}_\mathrm{k}) \cdot \boldsymbol{\nabla}\mathrm{U_k}(\mathbf{r})] - \sum_{\mathrm{k}}\boldsymbol{\nabla}\mathrm{U_k}(\mathbf{r})$$

Si fijamos el origen de coordenadas con la carga de prueba, entonces $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ y, si no hay más campos implicados, en una situación de equilibrio, el sumatorio de fuerzas debe de ser cero, por lo que:

$$\mu_0\varepsilon_0 \sum_{\mathrm{k}} \mathbf{v}_{\mathrm{k}}[\mathbf{v}_{\mathrm{k}} \cdot \boldsymbol{\nabla}\mathrm{U}_{\mathrm{k}}(\mathbf{r})] - \sum_{\mathrm{k}} \boldsymbol{\nabla}\mathrm{U}_{\mathrm{k}}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$$

Al aplicar la condición de equilibrio, la carga de prueba, que no es más que una herramienta auxiliar, desaparece, lo que nos permite encontrar el comportamiento del campo escalar $\mathrm{U}_{\mathrm{k}}(\mathbf{r})$ en cada punto. Entonces:

$$\sum_{\mathrm{k}} \boldsymbol{\nabla}\mathrm{U}_{\mathrm{k}}(\mathbf{r}) = \mu_0\varepsilon_0 \sum_{\mathrm{k}} \mathbf{v}_{\mathrm{k}}[\mathbf{v}_{\mathrm{k}} \cdot \boldsymbol{\nabla}\mathrm{U}_{\mathrm{k}}(\mathbf{r})]$$

$$\boldsymbol{\nabla}\mathrm{U}(\mathbf{r}) = \mu_0\varepsilon_0 \sum_{\mathrm{k}} \mathbf{v}_{\mathrm{k}}[\mathbf{v}_{\mathrm{k}} \cdot \boldsymbol{\nabla}\mathrm{U}_{\mathrm{k}}(\mathbf{r})]$$

Calculemos su divergencia:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}\mathrm{U}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\nabla} \cdot \left\{\mu_0\varepsilon_0 \sum_{\mathrm{k}} \mathbf{v}_{\mathrm{k}}[\mathbf{v}_{\mathrm{k}} \cdot \boldsymbol{\nabla}\mathrm{U}_{\mathrm{k}}(\mathbf{r})]\right\}$$

$$\boldsymbol{\nabla}^2\mathrm{U}(\mathbf{r}) = \mu_0\varepsilon_0 \sum_{\mathrm{k}} \boldsymbol{\nabla} \cdot \{\mathbf{v}_{\mathrm{k}}[\mathbf{v}_{\mathrm{k}} \cdot \boldsymbol{\nabla}\mathrm{U}_{\mathrm{k}}(\mathbf{r})]\}$$

$$\boldsymbol{\nabla}^2\mathrm{U}(\mathbf{r}) = \mu_0\varepsilon_0 \sum_{\mathrm{k}} [\mathbf{v}_{\mathrm{k}} \cdot \boldsymbol{\nabla}\mathrm{U}_{\mathrm{k}}(\mathbf{r})]\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v}_{\mathrm{k}} + \mu_0\varepsilon_0 \sum_{\mathrm{k}} \mathbf{v}_{\mathrm{k}}\boldsymbol{\nabla}[\mathbf{v}_{\mathrm{k}} \cdot \boldsymbol{\nabla}\mathrm{U}_{\mathrm{k}}(\mathbf{r})]$$

Si consideramos $\nabla \cdot \mathbf{v}_{\mathrm{k}} = 0$, entonces:

$$\boldsymbol{\nabla}^2\mathrm{U}(\mathbf{r}) = \mu_0\varepsilon_0 \sum_{\mathrm{k}} \mathbf{v}_{\mathrm{k}}\boldsymbol{\nabla}[\mathbf{v}_{\mathrm{k}} \cdot \boldsymbol{\nabla}\mathrm{U}_{\mathrm{k}}(\mathbf{r})]$$

Si podemos establecer una métrica que nos permita calcular cada $\boldsymbol{\nabla}^2\mathrm{U}_{\mathrm{k}}(\mathbf{r})$ y un parámetro t con el que se cumpla que:

$$\mathbf{v}_{\mathrm{k}} \cdot \boldsymbol{\nabla}\mathrm{U}_{\mathrm{k}}(\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{U}_{\mathrm{k}}(\mathbf{r})$$

Entonces:

$$\mu_0\varepsilon_0 \sum_{\mathrm{k}} \mathbf{v}_{\mathrm{k}}\boldsymbol{\nabla}[\mathbf{v}_{\mathrm{k}} \cdot \boldsymbol{\nabla}\mathrm{U}_{\mathrm{k}}(\mathbf{r})] = \mu_0\varepsilon_0 \sum_{\mathrm{k}} \frac{\partial^2}{\partial t}\mathrm{U}_{\mathrm{k}}(\mathbf{r})$$

$$\boldsymbol{\nabla}^2\mathrm{U}(\mathbf{r}) = \mu_0\varepsilon_0 \sum_{\mathrm{k}} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{U}_{\mathrm{k}}(\mathbf{r})$$

$$\boldsymbol{\nabla}^2\mathrm{U}(\mathbf{r}) = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{U}(\mathbf{r})$$

El campo escalar $\mathrm{U}(\mathrm{r})$, visto desde un observador, que se mueve con la carga de prueba, se comporta como una onda elemental.

4.- UNA POSIBLE SOLUCIÓN PARA UN CAMPO ESCALAR ONDULATORIO ELEMENTAL

Partimos de que en cada punto del espacio se cumple la ecuación:

$$\boldsymbol{\nabla}^2\mathrm{U}(\mathbf{r}) = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{U}(\mathbf{r})$$

Con lo que volvemos a la expresión cuya divergencia nos ha permitido, en el apartado anterior, obtener una ecuación de ondas elemental:

$$\mu_0\varepsilon_0\sum_{\mathrm{k}}\mathbf{v}_{\mathrm{k}}[\mathbf{v}_{\mathrm{k}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathrm{U}_{\mathrm{k}}(\mathbf{r})] - \sum_{\mathrm{r}}\boldsymbol{\nabla}\mathrm{U}_{\mathrm{k}}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$$

Que, a su vez, puede ponerse como:

$$-\sum_{\mathrm{k}}\boldsymbol{\nabla}\mathrm{U}_{\mathrm{k}}(\mathbf{r}) + \mu_0\varepsilon_0\sum_{\mathrm{k}}\mathbf{v}_{\mathrm{k}}\times[\mathbf{v}_{\mathrm{k}}\times\boldsymbol{\nabla}\mathrm{U}_{\mathrm{k}}(\mathbf{r})] + \mu_0\varepsilon_0\sum_{\mathrm{k}}\mathbf{v}_{\mathrm{k}}{}^2\,\boldsymbol{\nabla}\mathrm{U}_{\mathrm{k}}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$$

$$-\sum_{\mathrm{k}}\boldsymbol{\nabla}\mathrm{U}_{\mathrm{k}}(\mathbf{r}) + \mu_0\varepsilon_0\sum_{\mathrm{k}}\mathbf{v}_{\mathrm{k}}\times[\mathbf{v}_{\mathrm{k}}\times\boldsymbol{\nabla}\mathrm{U}_{\mathrm{k}}(\mathbf{r})] + \frac{\mu_0\varepsilon_0}{2}\sum_{\mathrm{k}}\mathbf{v}_{\mathrm{k}}{}^2\,\boldsymbol{\nabla}\mathrm{U}_{\mathrm{k}}(\mathbf{r}) + \frac{\mu_0\varepsilon_0}{2}\sum_{\mathrm{k}}\mathbf{v}_{\mathrm{k}}{}^2\,\boldsymbol{\nabla}\mathrm{U}_{\mathrm{k}}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$$

El primer sumatorio es compatible con los fenómenos electrostáticos. Del segundo y tercer sumatorio se obtiene la Ley de Maxwell-Whittaker, que es una opción compatible con los fenómenos electrodinámicos. Ahora, necesitamos que:

$$\frac{\mu_0\varepsilon_0}{2}\sum_{\mathrm{k}}\mathbf{v}_{\mathrm{k}}{}^2\,\boldsymbol{\nabla}\mathrm{U}_{\mathrm{k}}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$$

Vamos a suponer que tenemos libertad para escoger cada $\mathrm{U}_{\mathrm{k}}(\mathbf{r})$ y vamos a imponer una nueva condición, que los $\mathrm{U}_{\mathrm{k}}(\mathbf{r})$ se escogen de manera que cumplan:

$$\forall\mathrm{k} \Rightarrow \mathbf{v}_{\mathrm{k}}{}^2\mathrm{U}_{\mathrm{k}}(\mathbf{r}) = \mathrm{cte.} \Rightarrow \boldsymbol{\nabla}[\mathbf{v}_{\mathrm{k}}{}^2\mathrm{U}_{\mathrm{k}}(\mathbf{r})] = \mathbf{0}\ \Rightarrow \mathbf{v}_{\mathrm{k}}^2\boldsymbol{\nabla}\mathrm{U}_{\mathrm{k}} = -\mathrm{U}_{\mathrm{k}}\nabla\mathbf{v}_{\mathrm{k}}^{\mathbf{2}}$$

Lo anterior, también implica que:

$$\sum_{k} \mathrm{U_k} \mathbf{v}_{\mathrm{k}}^{\mathbf{2}} = cte.$$

Entonces, como:

$$\sum_{k} \mu_0 \varepsilon_0 \mathbf{v}_{\mathrm{k}}^2 \boldsymbol{\nabla} \mathrm{U_k} = 0$$

$$\sum_{k \neq j} \mu_0 \varepsilon_0 \mathbf{v}_{\mathrm{k}}^2 \boldsymbol{\nabla} \mathrm{U_k} + \mu_0 \varepsilon_0 \mathbf{v}_{\mathbf{j}}^2 \boldsymbol{\nabla} \mathrm{U_j} = 0$$

$$\sum_{k \neq j} \mu_0 \varepsilon_0 \mathbf{v}_{\mathrm{k}}^2 \boldsymbol{\nabla} \mathrm{U_k} - \mu_0 \varepsilon_0 \mathrm{U_j} 2 \left(\mathbf{v}_{\mathrm{j}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \right) \mathbf{v}_{\mathrm{j}} = 0$$

$$\sum_{k \neq j} \mu_0 \varepsilon_0 \mathbf{v}_{\mathrm{k}}^2 \boldsymbol{\nabla} \mathrm{U_k} - \mu_0 \varepsilon_0 2 \mathrm{U_j} \mathbf{a}_{\mathrm{j}} = 0$$

$$\sum_{k \neq j} \mu_0 \varepsilon_0 \mathbf{v}_{\mathrm{k}}^2 \boldsymbol{\nabla} \mathrm{U_k} = \mu_0 \varepsilon_0 2 \mathrm{U_j} \mathbf{a}_{\mathrm{j}}$$

$$\mu_0 \varepsilon_0 2 \mathrm{U_j} = \mathrm{m_j}$$

$$\mathbf{a}_{\mathrm{j}} = \frac{\sum_{k \neq j} \mathbf{v}_{\mathbf{r}}^2 \boldsymbol{\nabla} \mathrm{U_k}}{2 \mathrm{U_j}} = \frac{\sum_{k \neq j} \mathbf{v}_{\mathbf{r}}^2 \boldsymbol{\nabla} \mathrm{U_k}}{2 \sum_{k \neq j} \mathrm{U_k}}$$

$$\mathbf{a}_{\mathrm{j}} = \frac{1}{2} \sum_{k \neq j} \frac{\mathbf{v}_{\mathbf{k}}^2 \boldsymbol{\nabla} \mathrm{U_k}}{\sum_{k \neq j} \mathrm{U_k}} \quad \text{(e)}$$

Y como también:

$$\sum_{k \neq j} \mu_0 \varepsilon_0 \mathbf{v}_{\mathrm{k}}^2 \mathrm{U_k} = cte.$$

$$\sum_{k \neq j} \mu_0 \varepsilon_0 \mathbf{v}_{\mathbf{k}}^2 \mathrm{U_k} + \mu_0 \varepsilon_0 \left(\mathbf{v}_{\mathrm{j}}^2 \mathrm{U_j} \right) = cte.$$

$$\sum_{k \neq j} \mu_0 \varepsilon_0 \mathbf{v}_{\mathrm{k}}^2 \mathrm{U_k} + \frac{\mathrm{m_j}}{2} \mathbf{v}_{\mathrm{j}}^2 = cte.$$

$$\frac{\sum_{k \neq j} \mathbf{v}_{\mathrm{k}}^2 \mathrm{U_k}}{2 \sum_{k \neq j} \mathrm{U_k}} + \frac{\mathbf{v}_{\mathrm{j}}^2}{2} = cte.$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k\neq j}\frac{\mathbf{v}_k^2 U_k}{\sum_{k\neq j} U_k}+\frac{\mathbf{v}_j^2}{2}=cte.$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k\neq j}\frac{\mathbf{v}_k^2 U_k}{U_j}+\frac{\mathbf{v}_j^2}{2}=cte. \quad \text{(f)}$$

Las ecuaciones (e) y (f) son compatibles con el campo gravitatorio según la teoría de Newton.

5.- UN CAMPO DE RADIACIÓN QUE NO DESCRIBE EL COMPORTAMIENTO DE LA LUZ

En los apartados anteriores, hemos supuesto en todo momento que $\nabla\cdot\mathbf{v}_k=0$. Y bajo este supuesto hemos podido alcanzar una ecuación de ondas elemental para un campo escalar. Si no se cumple tal condición, otra forma de alcanzar el mismo resultado es suponer que:

$$\sum_k \boldsymbol{\nabla} U_k(\mathbf{r})=\mu_0\varepsilon_0\sum_k \mathbf{v}_k[\mathbf{v}_k\cdot\boldsymbol{\nabla} U_k(\mathbf{r})]-\mu_0\varepsilon_0\sum_k(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}_k)\mathbf{v}_k U_k(\mathbf{r})$$

Porque entonces:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\sum_k \boldsymbol{\nabla} U_k(\mathbf{r})=\mu_0\varepsilon_0\nabla\cdot\sum_k \mathbf{v}_k[\mathbf{v}_k\cdot\boldsymbol{\nabla} U_k(\mathbf{r})]-\mu_0\varepsilon_0\nabla\cdot\sum_k(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}_k)\mathbf{v}_k U_k(\mathbf{r})$$

$$\begin{aligned}\sum_k \boldsymbol{\nabla}^2 U_k(\mathbf{r})=\mu_0\varepsilon_0\sum_k[\mathbf{v}_k\cdot\boldsymbol{\nabla} U_k(\mathbf{r})]\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}_k+\mu_0\varepsilon_0\sum_k \mathbf{v}_k\boldsymbol{\nabla}[\mathbf{v}_k\cdot\boldsymbol{\nabla} U_k(\mathbf{r})]\\ -\mu_0\varepsilon_0\sum_k(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}_k)\mathbf{v}_k\nabla U_k(\mathbf{r})-\mu_0\varepsilon_0\sum_k\boldsymbol{\nabla}\cdot[(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}_k)\mathbf{v}_k]U_k(\mathbf{r})\end{aligned}$$

$$\sum_k \boldsymbol{\nabla}^2 U_k(\mathbf{r})=\mu_0\varepsilon_0\sum_k \mathbf{v}_k\boldsymbol{\nabla}[\mathbf{v}_k\cdot\boldsymbol{\nabla} U_k(\mathbf{r})]-\mu_0\varepsilon_0\sum_k\boldsymbol{\nabla}\cdot[(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}_k)\mathbf{v}_k]U_k(\mathbf{r})$$

Si $\boldsymbol{\nabla}\cdot[(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}_k)\mathbf{v}_k]=0$, entonces:

$$\sum_k \boldsymbol{\nabla}^2 U_k(\mathbf{r})=\mu_0\varepsilon_0\sum_k \mathbf{v}_k\boldsymbol{\nabla}[\mathbf{v}_k\cdot\boldsymbol{\nabla} U_k(\mathbf{r})]=\mu_0\varepsilon_0\sum_k\frac{\partial^2}{\partial t}U_k(\mathbf{r})$$

Llamemos $(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}_k)\mathbf{v}_k=\mathbf{a}_k$, y supongamos que $\nabla\cdot\mathbf{a}_k=0$, entonces:

$$-\sum_{\mathrm{k}} \boldsymbol{\nabla}\mathrm{U}_{\mathrm{k}}(\mathbf{r}) + \mu_0\varepsilon_0 \sum_{\mathrm{k}} \mathbf{v}_{\mathrm{k}}[\mathbf{v}_{\mathrm{k}} \cdot \boldsymbol{\nabla}\mathrm{U}_{\mathrm{k}}(\mathbf{r})] - \mu_0\varepsilon_0 \sum_{\mathrm{k}} \mathbf{a}_{\mathrm{k}}\mathrm{U}_{\mathrm{k}}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$$

Con lo visto hasta ahora, podemos admitir que los comportamientos electrostáticos, electrodinámicos y gravitatorios están justificados en los dos primeros sumatorios. El tercero debería dar cuenta de la radiación electromagnética. Pero aunque parezca que lo hace, no describe el comportamiento cuántico de la misma.

6.- CONCLUSIONES

Según lo visto hasta ahora, una ecuación como:

$$-\sum_{\mathrm{k}} \boldsymbol{\nabla}\mathrm{U}_{\mathrm{k}}(\mathbf{r}) + \mu_0\varepsilon_0 \sum_{\mathrm{k}} \mathbf{v}_{\mathrm{k}}[\mathbf{v}_{\mathrm{k}} \cdot \boldsymbol{\nabla}\mathrm{U}_{\mathrm{k}}(\mathbf{r})] - \mu_0\varepsilon_0 \sum_{\mathrm{k}} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v}_{\mathrm{k}})\mathbf{v}_{\mathrm{k}}\mathrm{U}_{\mathrm{k}}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$$

Puede justificar los campos eléctrico, magnético, gravitatorio y de radiación bajo la perspectiva de Maxwell.
La expresión anterior también permite obtener un campo escalar ondulatorio elemental:

$$\boldsymbol{\nabla}^2\mathrm{U}(\mathbf{r}) = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{U}(\mathbf{r})$$

El potencial escalar y el potencial vectorial, considerados como herramientas auxiliares para la determinación del campo eléctrico y magnético, adquieren significado físico. El tiempo no tiene entidad propia y es un mero parámetro.

No se ha dado una explicación satisfactoria a la radiación electromagnética porque no se ha alcanzado su carácter de propagación cuántico. Y se sugiere que, podría encontrarse justificación a este hecho, tomando como base las inestabilidades posibles en un campo escalar ondulatorio elemental.

Referencias.-

[1] Ampère’s Hairpin Spaceship Kirk T. McDonald. Joseph Henry Laboratories, Princeton University, NJ 08544, 2016

[2] Graneau, P. Phys. Lett. A Vol 97 (1983), 253.

[3] Wesley, J. P. Scienti_c Physics (2002), 305-308.

[4] Pappas, P. T. Il Nuovo Cimento B 76 (1983).

[5]Valery Petuschak, Old inconsistency in electromagnetism and a way to eliminate it, Journal of Advances in Physics, January 2018.

[6] Óscar Sánchez y…, Discussion About the Interaction Between Current Elements Proposal of a New Force Law, viXra -2018.

[7] Whittaker, E. T. Theories of Aether and Electricity. Figgis&Co, 1910.

[8] Poggendorff, J. C. Annalen der Physik und Chemie (1845), 1-18.

[9] Luis A. de Vedia, Acción a distancia y localidad espacio-temporal: ¿un paradigma en peligro?, Academia nacional de ciencias de Buenos Aires.

[10] Diana López Nacir y…,Motor-Generador Unipolar, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, 2002.

[11] Jorge Guala V. y …, Máquinas Eléctricas Unipolares, Revista facultad de Ingeniería, U.T.A.,2002

[12] Kenneth F. Schaffner, The Lorentz Electron Theory of Relativity, American Journal of Physics, 1969.

[13] Ampere, Biot-Savart, Grassman and WeberMagnetic Force Laws with Code,Kurt Nalty,July 16, 2011