CONJECTURE SUR LES FAMILLES EXPONENTIELLES

Idriss Olivier BADO

May 18, 2019

Abstract

in this article we will establish some properties of random variables and then we will propose a conjecture related to the exponential family. This conjecture seems interesting to me. Our results are based on the consideration of continuous random variables X_i defined on the same space Ω and have the same super-extra density law of parameter θ_i and canonique function T Let $n \in \mathbb{N}^*$ Considering the random variable J and I a subsect of $\{1, 2, ..n\}$ such that : $X_J = \inf_{i \in I}(X_i)$ we show that :

$$\forall i \in I : \mathbb{P}(J = i) = \frac{\theta_i \prod_{j \in I} c(\theta_j)}{\sum_{j \in I} \theta_j} \int_{T(\Omega)} e^{-x} dx$$

. We conjecture that if the density of X_i is $c(\theta_i) e^{-\theta_i T(x)} \mathbf{1}_\Omega(x)$ Hence $\exists h, r$ two functions such that

$$\forall i \in I : \mathbb{P}(J = i) = \frac{r(\theta_i) \prod_{j \in I} h(\theta_j)}{\sum_{j \in I} r(\theta_j)} \int_{T(\Omega)} e^{-x} dx$$

1 Introduction

L'histoire des probabilités a commencé avec celle des jeux de hasard. Bien que quelques calculs de probabilité soient apparus dans des applications précises au Moyen Âge, ce n'est qu'au 17-ième siècle que la théorie des probabilités est élaborée. Elle évolue sans vrai formalisme pendant deux siècles autour du célèbre problème des partis, de problèmes d'urnes ou d'autres problèmes issus de jeux. Apparaît alors au 20-ième siècle la théorie classique des probabilités basée sur la théorie de la mesure et la théorie de l'intégration. Cette théorie s'est depuis lors diversifiée dans de nombreuses applications. Les discussions entre scientifiques, la publication des ouvrages et leur transmission étant difficiles à certaines époques, certaines questions historiques restent difficiles à résoudre ; c'est le cas de la paternité de la théorie des probabilités. Bien que La théorie des probabilités soit mathématisation de l'incertitude et du caractère imprévisible des phénomènes. Mais elle permet de comprendre certains problème et même nous révèle des belles propriétés . Dans cette article nous allons explorer une belle relation de certaines variables aléatoires et proposer une conjecture pour des études futures

1.1 HYPOTHESE

Soient $X_1, X_2, X_3, ...X_n$ des variables aléatoires telles que la variable X_i suit une loi exponentielle de paramètre λ_i tel que $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j < +\infty$ .On désigne par I une partie de l'ensemble $\{1, 2, ...n\}$ Soit la variable aléatoire Y définie par $Y = \inf_{i\in I}(X_i)$ et J la variable aléatoire telle que $X_J = Y$

1.2 Lemme 1

Soit A et B deux ensembles non vides . On a :

$$\inf(A \cup B) = \inf(\inf(A), \inf(B))$$

1.3 Preuve du Lemme 1

Comme $A \subset A \cup B$ alors $\inf(A) \geq \inf(A \cup B)$, de même $\inf(B) \geq \inf(A \cup B)$. Ainsi $\inf(\inf(A), \inf(B)) \geq \inf(A \cup B)$. De plus

$$\forall x \in A \cup B, x \geq \inf(\inf(A), \inf(B))$$

donc

$$\inf(A \cup B) \geq \inf(\inf(A), \inf(B))$$

1.4 Discussion

L'objectif de cette étude est de caractériser la loi de la variable aléatoire J . Puis enfin d'étendre cette étude pour une classe particulière . On considère la variable $Y_i = \inf_{j\in I\setminus\{i\}}(X_j)$

D'après le lemme on a : $Y = \inf_{i\in I} Y_i$ donc

$$\{J = i\} = \{X_i < Y_i\}$$

. De l'indépendance des variables $X_j (1 \leq j \leq n)$, on déduit l'indépendance de X_i et Y_i .

1.5 Lemme 2

La variable J est bien définie et à valeur dans I et

$$\forall i \in I : \mathbb{P}(J = i) = \frac{\lambda_i}{\sum_{j\in I} \lambda_j}$$

1.6 Preuve

Posons $\Delta = \{X_1 < X_2 .... < X_n\}$ comme les variables $X_j (1 \leq j \leq n)$ sont continues alors

$$\mathbb{P}(\Delta^c) \leq \sum_{i\neq j} \mathbb{P}(X_i = X_j) = 0$$

donc J est bien définie et par définition à valeur dans I. De plus

$$\{Y_i \geq x\} = \bigcap_{j\in I\setminus\{i\}} \{X_j \geq x\}$$

ainsi

$$\mathbb{P}(\{Y_i \geq x\}) = \prod_{j\in I\setminus\{i\}} \mathbb{P}(\{X_j \geq x\}) = e^{-\sum_{j\in I\setminus\{i\}} \lambda_j x}$$

donc la densité de Y_i est :

$$f_{Y_i}(x) = \sum_{j\in I\setminus\{i\}} \lambda_j e^{-\sum_{j\in I\setminus\{i\}} \lambda_j x}$$

Par la suite

$$\mathbb{P}(J = i) = \mathbb{P}(X_i < Y_i) = \int_0^{+\infty} \int_x^{+\infty} \lambda_i e^{-\lambda_i x} e^{-\sum_{j\in I\setminus\{i\}} \lambda_j y} dxdy = \frac{\lambda_i}{\sum_{j\in I} \lambda_j}$$

2 DEFINITION

2.1 Variable à densité super-extra

Une variable aléatoire X de densité f de paramètre θ et de Fonction de répartition F est dit à densité super-extra s'il existe une fonction c et une fonction T vérifiant :
$\lim_{x\to+\infty} T(x) = +\infty$ tel que

$$F(x) = 1 - c(\theta)e^{-\theta T(x)} *$$

2.2 Fonction canonique

Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition vérifie $*$ alors alors T est dit fonction canonique de X.

2.3 variable à densité exponentielle

Une variable aléatoire X continue de densité de probabilité f et de paramètre θ est dite à densité exponentielle $\exists h, T$ deux fonctions telles que $f(x) = c(\theta)e^{-\theta T(x)}$

3 Théorème

Soit $X_1, X_2, ...X_n$ des variables aléatoires continues définies sur le même espace Ω à même densité super-extra respectivement de paramètres $\theta_1, \theta_2, ...\theta_n$ et I une partie de l'ensemble $\{1, 2, ...n\}$. Soit J la variable aléatoire J la variable aléatoire telle que $X_J = \inf_{i \in I}(X_i)$ Alors

$$\forall i \in I : \mathbb{P}(J = i) = \frac{\theta_i \prod_{j \in I} c(\theta_j)}{\sum_{j \in I} \theta_j} \int_{T(\Omega)} e^{-x} dx$$

3.1 PREUVE

.En effet

$$\mathbb{P}(\{Y_i \geq x\}) = \prod_{j \in I \setminus \{i\}} \mathbb{P}(\{X_j \geq x\}) = \prod_{j \in I \setminus \{i\}} (1 - F_{X_j}(x)) = \prod_{j \in I \setminus \{i\}} c(\theta_j) e^{-\theta_j T(x)}$$

$$\mathbb{P}(\{Y_i \geq x\}) = \prod_{j \in I \setminus \{i\}} c(\theta_j) e^{-\sum_{j \in I \setminus \{i\}} \theta_j T(x)}$$

donc

$$f_{Y_i}(x) = \prod_{j \in I \setminus \{i\}} c(\theta_j) \sum_{j \in I \setminus \{i\}} \theta_j T'(x) e^{-\sum_{j \in I \setminus \{i\}} \theta_j T(x)}$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(J = i) = \int_\Omega \int_x^{+\infty} \theta_i c(\theta_i) \prod_{j \in I \setminus \{i\}} c(\theta_j) \sum_{j \in I \setminus \{i\}} \theta_j T'(y) e^{-\sum_{j \in I \setminus \{i\}} \theta_j T(y)} T'(x) e^{-\theta_i T(x)} dy dx$$

$$\mathbb{P}(J = i) = \theta_i \prod_{j \in I} c(\theta_j) \int_\Omega \int_x^{+\infty} T'(x) \sum_{j \in I \setminus \{i\}} \theta_j T'(y) e^{-\sum_{j \in I \setminus \{i\}} \theta_j T(y)} e^{-\theta_i T(x)} dy dx$$

$$\mathbb{P}(J=i)=\theta_i\prod_{j\in I}c(\theta_j)\int_{\Omega}T'(x)e^{-\sum_{j\in I}\theta_jT(x)}dx$$

$$\mathbb{P}(J=i)=\frac{\theta_i\prod_{j\in I}c(\theta_j)}{\sum_{j\in I}\theta_j}\int_{T(\Omega)}e^{-x}dx$$

3.2 APPLICATION A LA LOI DE PARETO

Dans le cas où les variables suivent une loi de Pareto de paramètre a_i . On a :

$$f_{X_i}(t)=\frac{a}{t^{a+1}}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(t)$$

sur $\Omega=[1,+\infty[$ on a $F(x)=1-\frac{1}{x^{a_i}}=1-e^{-a_i\ln x}$ donc $T(x)=\ln x, c(a_i)=1$ et $T(\Omega)=[0,+\infty[$ d'où :

$$\forall i\in I:\mathbb{P}(J=i)=\frac{a_i}{\sum_{j\in I}a_j}$$

4 CONJECTURE

Soient $X_1,X_2,X_3,.....X_n$ des variables aléatoires telles que la variable X_i soit à densité exponentielle de paramètre θ_i alors $\exists h,r$ deux fonctions telles que

$$\forall i\in I:\mathbb{P}(J=i)=\frac{r(\theta_i)\prod_{j\in I}h(\theta_j)}{\sum_{j\in I}r(\theta_j)}\int_{T(\Omega)}e^{-x}dx$$

References

[1] Armel Yode cours d'estimations ISE 2 (ENSEA)

[2] Prasanna Sahoo PROBABILITY AND MATHEMATICAL STATISTICS

[3] Jun Shao Mathematical Statistics