Note Sur La Formule de Dufour-Fezzani

Abdelmajid BEN HADJ SALEM

Office de la Topographie et du Cadastre (OTC),
BP 156, 1080 Tunis Cedex, TUNISIE

E-mail: abenhadjsalem@gmail.com

ABSTRACT: Dans cette note, on passe en revue la formule de Dufour-Fezzani concernant la comparaison de deux réseaux géodésiques. On développe cette formule pour des modèles ellipsoidiques.

Octobre 2012

Table des matières

1	Introduction	1
2	Comparaison en coordonnées Mercator	1
2.1	L'effet d'une rotation pure	1
2.2	L'effet d'une translation tridimensionnelle	2
3	Comparaison en coordonnées UTM	4
3.1	L'Effet d'Une Translation Tridimensionnelle	4

1 Introduction

Dans la comparaison des réseaux géodésiques, C. Fezzani [1] prévoit la méthode suivante :
$\boxed{\text{Mercator modèle sphérique}} \Rightarrow \boxed{\text{Mercator Transverse UTM}} \Rightarrow \boxed{\text{Passage d'un ellipsoide à un autre ellipsoide}}$

Le point de départ est deux calculs R_1 et R_2 d'un réseau géodésique qu'on considère au voisinge de l'equateur.

2 Comparaison en coordonnées Mercator

On considère que les coordonnées de R_1 et R_2 sont exprimées par la représentation plane Mercator directe d'un modèle sphérique (de rayon a).

2.1 L'effet d'une rotation pure

Si on suppose que les calculs sont parfaits.Si R_2 est obtenu par une rotation autour de l'axe des pôles d'un angle Ω, alors nous avons les expressions suivantes en un point M :

$$(\varphi_1, \lambda_1)_{R_1} \Longrightarrow \begin{cases} X_1 = a\lambda_1 \\ Y_1 = aL(\varphi_1) = a.Logtg(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2}) \end{cases} \tag{2.1}$$

et :

$$(\varphi_2, \lambda_2)_{R_2} \Longrightarrow \begin{cases} X_2 = a\lambda_2 \\ Y_2 = aL(\varphi_2) = a.Logtg(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2}) \end{cases} \tag{2.2}$$

Or :

$$\varphi_2 = \varphi_1 \tag{2.3}$$
$$\lambda_2 = \lambda_1 + \Omega \tag{2.4}$$

Posons :

$$z = X_1 + iY_1 \tag{2.5}$$
$$Z = X_2 + iY_2 = a\lambda_2 + iY_2 = a(\lambda_1 + \Omega) + iY_1 = X_1 + iY_1 + a\Omega \tag{2.6}$$

Alors, nous avons :

$$Z = z + a\Omega \tag{2.7}$$

La transformation (2.7) est une représentation conforme, donc conserve localement les figures donc les angles sont conservés.

Ecrivons maintenant l'équation de Laplace :

$$\text{Pour} R_1 \Longrightarrow Aza - Azg_1 = (\lambda_a - \lambda_1)sin\varphi_1 \tag{2.8}$$

$$\text{Pour} R_2 \Longrightarrow Aza - Azg_2 = (\lambda_a - \lambda_2)sin\varphi_2 \tag{2.9}$$

où Aza est l'azimut astronomique observé au point M. Comme : $\varphi_1 = \varphi_2$, par différence des équations précédentes, on obtient :

$$Azg_2 - Azg_1 = \Omega sin\varphi_1 \tag{2.10}$$

Donc, les azimuts géodésiques ne sont pas conservés lors d'une rotation autour de l'axe des pôles.

2.2 L'effet d'une translation tridimensionnelle

Pour un modèle sphérique, le point M a pour coordonnées :

$$M \begin{cases} X = acos\varphi cos\lambda \\ Y = acos\varphi sin\lambda \\ Z = asin\varphi \end{cases} \tag{2.11}$$

Les coordonnées géodésiques (φ, λ) dans (2.11) sont exprimées par :

$$\begin{cases} tg\lambda = \dfrac{Y}{X} \\ tg\varphi = \dfrac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}} \end{cases} \tag{2.12}$$

Une translation tridimensionnelle infinitésimale est exprimée par (dX, dY, dZ). Exprimons $d\varphi$ et $d\lambda$ en fonction de dX, dY et dZ. De (2.12), on a :

$$d\lambda = \frac{XdY - YdX}{X^2+Y^2} = \frac{acos\varphi cos\lambda dY - acos\varphi sin\lambda dX}{a^2cos^2\varphi} = \frac{-sin\lambda}{acos\varphi}dX + \frac{cos\lambda}{acos\varphi}dY \tag{2.13}$$

et :

$$\frac{d\varphi}{cos^2\varphi} = \frac{dZ}{\sqrt{X^2+Y^2}} - \frac{Z}{X^2+Y^2}\frac{XdX+YdY}{\sqrt{X^2+Y^2}} \tag{2.14}$$

Utilisant (2.11), on obtient :

$$\frac{d\varphi}{cos^2\varphi} = \frac{dZ}{acos\varphi} - \frac{asin\varphi}{a^2cos^2\varphi}\frac{acos\varphi cos\lambda dX + acos\varphi sin\lambda dY}{acos\varphi} \tag{2.15}$$

Soit :

$$\frac{d\varphi}{cos\varphi} = \frac{dZ}{a} - \frac{tg\varphi cos\lambda}{a}dX - \frac{tg\varphi sin\lambda}{a}dY \tag{2.16}$$

Or l'équation (2.16) n'est autre que la différentielle de la latitude de Mercator L, d'où :

$$dL = \frac{d\varphi}{cos\varphi} = \frac{dZ}{a} - \frac{tg\varphi cos\lambda}{a}dX - \frac{tg\varphi sin\lambda}{a}dY \tag{2.17}$$

Au voisinage du point central $M_0(\varphi = 0, \lambda = 0)$, on peut écrire au deuxième ordre de petitesse :

$$cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} \tag{2.18}$$

$$sin\lambda = \lambda \tag{2.19}$$

$$cos\lambda = 1 - \frac{\lambda^2}{2} \tag{2.20}$$

L'expression de la latitude de Mercator L devient :

$$L = Logtg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{cos\varphi} = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{1 - \frac{\varphi^2}{2}} = \int_0^{\varphi} (1 + \frac{\varphi^2}{2})d\varphi = \varphi + \frac{\varphi^3}{6} \approx \varphi \tag{2.21}$$

Alors, les expressions (2.17) et (2.13) deviennent respectivement :

$$dL = \frac{dZ}{a} - \frac{\varphi(1 - \frac{\lambda^2}{2})}{a}dX - \frac{\varphi.\lambda}{a}dY$$

$$dL = \frac{dZ}{a} - \frac{dX}{a}L - \frac{dY}{a}L.\lambda \tag{2.22}$$

et :

$$d\lambda = \frac{-sin\lambda}{acos\varphi}dX + \frac{cos\lambda}{acos\varphi}dY = \frac{-\lambda(1 + \frac{L^2}{2})}{a}dX + \frac{(1 - \frac{\lambda^2}{2})(1 + \frac{L^2}{2})}{a}dY$$

En gardant les termes du 2ème ordre :

$$d\lambda = \frac{-dX}{a}\lambda + \frac{dY}{a} + \frac{dY}{2a}(L^2 - \lambda^2) \tag{2.23}$$

Posons :

$$z = \lambda + iL \tag{2.24}$$

$$Z = d\lambda + idL \tag{2.25}$$

On utilise les équations (2.22) et (2.23), on obtient :

$$Z = d\lambda + idL = \frac{-dX}{a}\lambda + \frac{dY}{a} + \frac{dY}{2a}(L^2 - \lambda^2) + i\left(\frac{dZ}{a} - \frac{dX}{a}L - \frac{dY}{a}L.\lambda\right) \tag{2.26}$$

Soit :

$$Z = \frac{dY + idZ}{a} - \frac{dX}{a}(\lambda + iL) - \frac{dY}{2a}(\lambda^2 - L^2 + 2i\lambda L)$$

ou :

$$Z = \frac{dY + idZ}{a} - \frac{dX}{a}(\lambda + iL) - \frac{dY}{2a}(\lambda + iL)^2 \tag{2.27}$$

Et en remplaçant $\lambda + iL$ par z, (2.27) devient :

$$\boxed{Z = \frac{dY + idZ}{a} - \frac{dX}{a}z - \frac{dY}{2a}z^2} \tag{2.28}$$

C'est la formule de **Dufour-Fezzani** [1],[2]. La transformation (2.28) est une fonction holomorphe de z donc c'est une représentation conforme sous la forme d'un polynôme du second degré.

3 Comparaison en coordonnées UTM

On considère que les coordonnées de R_1 et R_2 sont exprimées par la représentation UTM d'un modèle ellipsoidique $E(a,e)$; a et e sont respectivement le demi grand-axe et la première excentricité.

Ecrivons maintenant l'équation de Laplace :

$$\text{Pour} R_1 \Longrightarrow Aza - Azg_1 = (\lambda_a - \lambda_1) sin\varphi_1 \tag{3.1}$$

$$\text{Pour} R_2 \Longrightarrow Aza - Azg_2 = (\lambda_a - \lambda_2) sin\varphi_2 \tag{3.2}$$

Comme : $\varphi_1 = \varphi_2$, par différence des équations précédentes, on obtient :

$$Azg_2 - Azg_1 = \Omega sin\varphi_1 \tag{3.3}$$

Donc, les azimuts géodésiques ne sont pas conservés lors d'une rotation autour de l'axe des pôles.

3.1 L'Effet d'Une Translation Tridimensionnelle

Un point M du modèle ellipsoidique a pour coordonnées :

$$M \begin{cases} X = Ncos\varphi cos\lambda \\ Y = Ncos\varphi sin\lambda \\ Z = N(1-e^2).sin\varphi \end{cases} \tag{3.4}$$

avec :

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 sin^2\varphi}} \tag{3.5}$$

Les coordonnées géodésiques (φ, λ) dans (3.4) sont exprimées par :

$$\begin{cases} tg\lambda = \dfrac{Y}{X} \\ (1-e^2) tg\varphi = \dfrac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}} \end{cases} \tag{3.6}$$

Une translation tridimensionnelle infinitésimale est exprimée par (dX, dY, dZ). Exprimons $d\varphi$ et $d\lambda$ en fonction de dX, dY et dZ. De (3.6), on a :

$$d\lambda = \frac{XdY - YdX}{X^2+Y^2} = \frac{Ncos\varphi cos\lambda dY - Ncos\varphi sin\lambda dX}{N^2 cos^2\varphi} = \frac{-sin\lambda}{Ncos\varphi} dX + \frac{cos\lambda}{Ncos\varphi} dY \tag{3.7}$$

et :

$$(1-e^2) \frac{d\varphi}{cos^2\varphi} = \frac{dZ}{\sqrt{X^2+Y^2}} - \frac{Z}{X^2+Y^2} \frac{XdX + YdY}{\sqrt{X^2+Y^2}} \tag{3.8}$$

Utilisant (3.4), on obtient après calculs :

$$(1-e^2) d\varphi = \frac{cos\varphi dZ}{N} - \frac{(1-e^2) sin\varphi cos\lambda dX}{N} - \frac{(1-e^2) sin\varphi sin\lambda dY}{N} \tag{3.9}$$

Dans le modèle ellipsoidique, posons $\mathscr{L}$ la latitude isométrique :

$$\mathscr{L} = Logtg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{e}{2} Log \frac{1 + esin\varphi}{1 - esin\varphi} \tag{3.10}$$

En utilisant la latitude de Mercator L (2.21), l'équation (3.10) s'écrit :

$$\mathscr{L} = L - \frac{e}{2} Log \frac{1+esin\varphi}{1-esin\varphi} \tag{3.11}$$

Au voisinage du point central $M_0(\varphi = 0, \lambda = 0)$, on peut écrire au deuxième ordre de petitesse :

$$cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} \tag{3.12}$$

$$sin\varphi = \varphi \tag{3.13}$$

$$sin\lambda = \lambda \tag{3.14}$$

$$cos\lambda = 1 - \frac{\lambda^2}{2} \tag{3.15}$$

L'expression de $\mathscr{L}$ devient :

$$\mathscr{L} = L - \frac{e}{2} Log \frac{1+e\varphi}{1-e\varphi} = \varphi - \frac{e}{2} Log(1+e\varphi)(1-e\varphi)^{-1} \tag{3.16}$$

Or au deuxième ordre de petitesse, on a :

$$\frac{1}{1-e\varphi} = 1 + e\varphi + e^2\varphi^2 \tag{3.17}$$

L'expression de $\mathscr{L}$ devient :

$$\mathscr{L} = \varphi - \frac{e}{2} Log(1+e\varphi)(1+e\varphi+e^2\varphi^2) = \varphi - \frac{e}{2} Log(1+2e\varphi+2e^2\varphi^2) \tag{3.18}$$

on utilise la formule du développement limité de la fonction Log pour x petit devant 1 :

$$Log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

ce qui donne :

$$\mathscr{L} = \varphi - e^2\varphi = (1-e^2)\varphi \tag{3.19}$$

$1/Ncos\varphi$ devient :

$$\frac{1}{Ncos\varphi} = \frac{(1-e^2\varphi^2)^{1/2}(1+\varphi^2/2)}{a} = \frac{1}{a}\left(1 + \frac{(1-e^2)\varphi^2}{2}\right) \tag{3.20}$$

Alors, l'expression (3.7) devient :

$$d\lambda = \frac{-sin\lambda}{Ncos\varphi} dX + \frac{cos\lambda}{Ncos\varphi} dY = \frac{-\lambda(1+\frac{(1-e^2)\varphi^2}{2})}{a} dX + \frac{(1-\frac{\lambda^2}{2})(1+\frac{(1-e^2)\varphi^2}{2})}{a} dY \tag{3.21}$$

En gardant les termes du 2ème ordre en λ et φ, on a :

$$d\lambda = \frac{-dX}{a}\lambda + \frac{dY}{a} + \frac{dY}{2a}(1-e^2)\varphi^2 - \frac{\lambda^2}{2a} dY \tag{3.22}$$

De (3.19), on a :

$$\varphi = \frac{\mathscr{L}}{1-e^2} = (1+e^2)\mathscr{L} \Rightarrow \varphi^2 = (1+e^2)^2\mathscr{L}^2 = (1+2e^2)\mathscr{L}^2 \tag{3.23}$$

En remplaçant φ dans (3.22), $d\lambda$ devient :

$$d\lambda = \frac{-dX}{a}\lambda + \frac{dY}{a} + (1+e^2)\mathscr{L}^2\frac{dY}{2a} - \frac{\lambda^2}{2a}dY \tag{3.24}$$

et (3.9) devient en utilisant (3.19) :

$$d\mathscr{L} = \frac{(1-\frac{\varphi^2}{2})(1-e^2\frac{\varphi^2}{2})}{a}dZ - \frac{\mathscr{L}(1-e^2\frac{\varphi^2}{2})(1-\frac{\lambda^2}{2})}{a}dX - \frac{\mathscr{L}\lambda(1-e^2\frac{\varphi^2}{2})}{a}dY \tag{3.25}$$

Soit :

$$d\mathscr{L} = (1-\frac{(1+e^2)\varphi^2}{2})\frac{dZ}{a} - \mathscr{L}\frac{dX}{a} - \lambda\mathscr{L}\frac{dY}{a} \tag{3.26}$$

Utilisant (3.23), l'expression de $d\mathscr{L}$ devient à l'ordre 2 de petitesse :

$$\begin{aligned} d\mathscr{L} &= (1-\frac{(1+3e^2)\mathscr{L}^2}{2})\frac{dZ}{a} - \mathscr{L}\frac{dX}{a} - \lambda\mathscr{L}\frac{dY}{a} \\ d\mathscr{L} &= \frac{dZ}{a} - \frac{\mathscr{L}^2 dZ}{2a} - \frac{3e^2\mathscr{L}^2 dZ}{2a} - \mathscr{L}\frac{dX}{a} - \lambda\mathscr{L}\frac{dY}{a} \end{aligned} \tag{3.27}$$

Posons :

$$z = \lambda + i\mathscr{L} \tag{3.28}$$

$$Z = d\lambda + id\mathscr{L} \tag{3.29}$$

On utilise les équations (3.24) et (3.27), on obtient :

$$\begin{aligned} Z = d\lambda + id\mathscr{L} &= \frac{-dX}{a}\lambda + \frac{dY}{a} + (1+e^2)\mathscr{L}^2\frac{dY}{2a} - \frac{\lambda^2}{2a}dY \\ &+i\left(\frac{dZ}{a} - \frac{\mathscr{L}^2 dZ}{2a} - \frac{3e^2\mathscr{L}^2 dZ}{2a} - \mathscr{L}\frac{dX}{a} - \lambda\mathscr{L}\frac{dY}{a}\right) \end{aligned} \tag{3.30}$$

Soit :

$$Z = \frac{dY+idZ}{a} - \frac{dX}{a}(\lambda+i\mathscr{L}) - \frac{dY}{2a}(\lambda^2-\mathscr{L}^2+2i\lambda.\mathscr{L}) + e^2\mathscr{L}^2\frac{(dY-idZ)}{2a}$$

ou :

$$Z = \frac{dY+idZ}{a} - \frac{dX}{a}(\lambda+i\mathscr{L}) - \frac{dY}{2a}(\lambda+i\mathscr{L})^2 + e^2\mathscr{L}^2\frac{(dY-idZ)}{2a} \tag{3.31}$$

Et en remplaçant $\lambda + i\mathscr{L}$ par z et $\mathscr{L}$ par $-\frac{i}{2}(z-\bar{z})$, (3.31) devient :

$$\boxed{Z = \frac{dY+idZ}{a} - \frac{dX}{a}z - \frac{dY}{2a}z^2 - \frac{e^2(dY-idZ)}{8a}(z-\bar{z})^2} \tag{3.32}$$

C'est la formule de ***Dufour-Ben Hadj Salem***. La transformation (3.32) est une fonction biholomorphe de z et de $\bar{z}$. L'effet d'une translation tridimensionnelle (dX, dY, dZ) au point M_0 entraîne une transformation non conforme.

Références

[1] **C. Fezzani**. 1979. La Structure des Réseaux Astro-Géodésiques de la Tunisie. Thèse de Docteur ingénieur. Ecole Nationale des Sciences Géographiques. IGN France. pp149-169.

[2] **H.M. Dufour**. 1979. Systèmes de références : Systèmes Projectifs. Conférence présentée au Colloque national sur la Localisation en mer. Brest, 1-5 octobre 1979. 27p.