

ABDELMAJID BEN HADJ SALEM
INGÉNIEUR GÉNÉRAL GÉOGRAPHE
ANCIEN INGÉNIEUR GÉNÉRAL DE L'OFFICE DE TOPOGRAPHIE
ET DU CADASTRE DE TUNISIE

**RECUEIL D'EXERCICES ET DE PROBLÈMES:
ASTRONOMIE, TOPOGRAPHIE, GÉODÉSIE ET
LA THÉORIE DES MOINDRES CARRÉS**

*- Pour les Ingénieurs et les Techniciens en
Géomatique -*

1ÈRE ÉDITION - AVRIL 2019

abenhadsalem@gmail.com

Abdelmajid BEN HADJ SALEM
6, rue du Nil, Cité Soliman Erriadh
8020 Soliman, Tunisia
e-mail: abenhadsalem@gmail.com

*À mes chers parents, à ma femme, à mes
enfants.*

*À la mémoire de mon collègue et ami Dr.
Chedly Fezzani qui nous a quitté
(08/02/2019).*

*À la mémoire des éminents mathématiciens
Professeurs Abbas Bahri (1956-2016) et
Micheal Atiyah (1929-2019).*

Préface

J'ai souvent reçu des étudiants en géomatique des requêtes me demandant de leur fournir des exercices ou des problèmes de géodésie, de topographie, d'astronomie ou encore concernant l'application de la théorie des moindres carrés. Ce recueil vient donc combler le besoin des étudiants en la matière. C'est une collection d'exercices et de problèmes que j'avais rédigés lors des cours que j'avais enseignés à l'Université tunisienne durant trois décennies ou préparés pour divers concours ou que j'avais eus lors de mes études à l'Ecole Nationale des Sciences Géographiques (IGN France) .

Ce recueil est constitué comme suit:

⊖ La première partie comprend les exercices et les problèmes de Topographie regroupés par thème dans les chapitres suivants:

1 - Topographie: Calculs des coordonnées des points par intersection, relevement, par mesures de distances, nivellement géométrique, calculs d'erreurs en topographie, compensation des observations.

⊖ La deuxième partie concerne les exercices et les problèmes de géodésie:

2 - Astronomie: trigonométrie sphérique, astronomie de position.

3 - Courbes et théorie des surfaces: 1ère forme fondamentale, rayons de courbures.

4 - Géométrie de l'ellipse et de l'ellipsoïde.

4 - Les systèmes géodésiques.

5 - Les réductions des distances.

6 - Les représentations planes.

7 - Les transformations de passage entre les systèmes géodésiques.

8 - Géodésie dynamique et spatiale: mouvement des satellites, GPS.

⊖ La troisième partie concerne la théorie des moindres carrés comprenant les chapitres suivants:

9 - Compensation par les moindres carrés.

10 - Compensation non-linéaires par les moindres carrés.

Lors de la préparation de ce document, la Tunisie a perdu un de ses grands géodésiens le Docteur-Ingénieur Chedly Fezzani, ancien Ingénieur Général Géographe à l'Office de la To-

pographie et du Cadastre et ancien Secrétaire Exécutif et membre fondateur de l'Observatoire du Sahel et du Sahara (OSS). Je dédie cet ouvrage à sa mémoire.

Enfin, pour signaler toute correction à cette publication, prière de nous écrire à l'adresse: abenhadsalem@gmail.com, et je vous remercie d'avance.

Tunis,
Mars 2019

*Abdelmajid
Ben Hadj Salem, Dipl.-Ing.
Ingénieur Général Géographe*

Contents

Préface	i
Part I TOPOGRAPHIE	
1 Topographie	7
Part II GÉODÉSIE	
2 Astronomie	13
2.1 TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE	13
2.2 ASTRONOMIE DE POSITION	15
3 Courbes et Théorie des Surfaces	19
3.1 COURBES	19
3.2 THÉORIE DES SURFACES	20
4 Ellipse et Ellipsoïde de révolution	25
4.1 L'ELLIPSE ET L'ELLIPSOÏDE DE RÉVOLUTION	25
5 Les Systèmes Géodésiques	33
6 Les Réductions des Distances	37
7 Les Représentations Planes	39
7.1 LES REPRÉSENTATIONS PLANES	39
7.2 LA REPRÉSENTATION LAMBERT	44
7.3 LA REPRÉSENTATION UTM	46
8 Les Transformations de Passage entre Les Systèmes Géodésiques	47
8.1 LES TRANSFORMATIONS D2 DE PASSAGE ENTRE LES SYSTÈMES GÉODÉSQUES	47
8.2 LES TRANSFORMATIONS D3 DE PASSAGE ENTRE LES SYSTÈMES GÉODÉSQUES	47

9	<i>Géodésie Spatiale</i>	49
9.1	NOTIONS SUR LE MOUVEMENT D'UN SATELLITE ARTIFICIEL DE LA TERRE	49

Part III THÉORIE DES MOINDRES CARRÉS

10	<i>Modèles Linéaires de Compensation</i>	53
10.1	EXERCICES ET PROBLÈMES	53
11	<i>Modèles Non-Linéaires de Compensation</i>	61

Part I
TOPOGRAPHIE

Topographie

Exercice 1.1. On veut calculer:

a - les coordonnées X, Y et l'altitude Z de la base d'une antenne de radio.

b - la hauteur H de cette antenne, construite au sommet d'une colline (Fig.1.1).

D'un point A , on a obtenu un angle zénithal de 88.3333 gr avec une hauteur d'appareil de 1.37 m en visant le sommet de l'antenne et d'un point B un angle zénithal de 91.1111 gr et une hauteur de l'appareil de 1.52 m en visant la base de l'antenne. On a les données suivantes:

$$A(X_A = 30.48 \text{ m}, Y_A = 1219.20 \text{ m}, Z_A = 131.49 \text{ m})$$

$$B(X_B = 259.08 \text{ m}, Y_B = 457.20 \text{ m}, Z_B = 108.77 \text{ m})$$

$$\hat{A} = 73.3333 \text{ gr} \quad \hat{B} = 96.6667 \text{ gr}$$

Exercice 1.2. Vous travaillez avec un théodolite qui fournit les angles mesurés une seule fois avec une erreur moyenne quadratique $\sigma_\alpha = 12$ dmgr.

1. On mesure une distance D de 100 m en mode parallactique avec une stadia de longueur $l = 2$ m, en mesurant l'angle parallactique α 4 fois. Quelle est l'erreur quadratique σ_{α_m} de la moyenne en fonction de σ_α .

2. Démontrer que l'erreur moyenne quadratique sur la distance est donnée par:

$$\sigma_D = \frac{l}{2} \left(1 + \cot^2 \frac{\alpha_m}{2} \right) \sigma_{\alpha_m}$$

3. Exprimer σ_D en fonction de D, l et σ_{α_m} . Sachant que D est égale à 101.53 m, calculer la valeur de σ_D .

Problème 1.1. Pour la détermination d'un point P , on a stationné 4 points connus A, B, C et D et on a visé le point P . Par suite, on a observé un relevement en P sur les 4 points cités. Les données sont les suivantes:

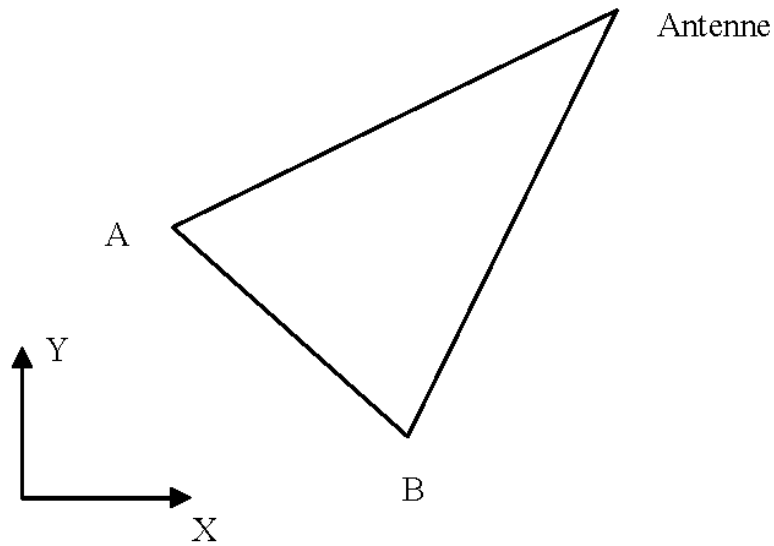


Fig. 1.1 Détermination de la hauteur de l'antenne

Nom du point	X(m)	Y(m)	Gisements d'intersection en gr
A	561 489.33	128 655.65	141.40857
B	572 653.27	132 530.62	231.68122
C	571 785.38	115 121.54	373.13636
D	563 633.65	110 629.36	19.96798

Tableau des coordonnées

Les lectures de relevement au point P (dans le sens des gisements) sont:

$$l_A = 309.72613 \text{ gr}; l_B = 399.99968 \text{ gr}; l_C = 141.45596 \text{ gr}; l_D = 188.28837 \text{ gr}$$

1. Calculer les coordonnées approchées (X_0, Y_0) du point approché P_0 de P par les intersections de A et B.
2. Calculer les sensibilités des visées d'intersection de C et de D.
3. Calculer les coordonnées approchées (X'_0, Y'_0) de P en utilisant une méthode de relevement.
4. Par la suite, on utilise (X_0, Y_0) comme coordonnées du point approché P_0 . Donner les segments capables.
5. Calculer pour ces segments capables les distances fictives, les sensibilités et leur gisement.
6. Faire un graphique à une échelle appropriée, tracer les visées d'intersection et de relevement. Calculer le point définitif P.

Problème 1.2. En un point A de coordonnées géographiques ($\varphi_A = 40.9193 \text{ gr}$, $\lambda_A = 11.9656 \text{ gr}$) à l'Est de Greenwich et d'altitude $Z_A = 638.80 \text{ m}$, on vise un point B en zénithale et on donne les éléments suivants:

- hauteur de l'appareil en A: $h_a(A) = 1.54 \text{ m}$,
- hauteur du voyant en B: $h_v(B) = 1.48 \text{ m}$,
- angle de site de A vers B, $i_{AB} = -0.0320 \text{ gr}$.

De même, on stationne le point B, on vise A et on donne:

$$h_a(B) = 1.50 \text{ m}, \quad h_v(A) = 1.58 \text{ m}, \quad i_{BA} = -0.0930 \text{ gr}$$

La distance suivant la pente D_p entre A et B est de 3450.90 m .

1. Dans quelle zone de Lambert Tunisie, se trouve le point A?
2. En utilisant les équations relatives aux visées directe et inverse entre A et B, calculer l'altitude de B et le niveau apparent.
3. Calculer la distance horizontale moyenne D_H .
4. Sachant que le rayon de la Terre vaut 6366 km , calculer D_0 la distance réduite au niveau zéro.
5. Dans la région des points A et B, l'altération linéaire est de -9 cm/km , calculer D_r la distance réduite au plan de projection Lambert.
6. Donner l'expression de la convergence des méridiens au point A et la calculer numériquement.
7. Au point A, on a déterminé l'azimut géodésique de la direction AB soit $Az_g = 55.7631 \text{ gr}$. Ecrire l'expression donnant le gisement de AB en fonction de Az_g , de la convergence des méridiens en A et de la correction à la corde dV . Sachant que $dV = 1.52 \text{ dmgr}$ et que les coordonnées de A sont $X_A = 577521.59 \text{ m}$, $Y_A = 391587.93 \text{ m}$, calculer le gisement de AB et en déduire les coordonnées de B.

Part II
GÉODÉSIE

Astronomie

2.1 TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE

Exercice 2.1. Calculer l'azimut d'une étoile de déclinaison $\delta = +5^\circ$ quand sa distance zénithale est de 80° pour un observateur situé à la latitude $\varphi = 56^\circ$.

Exercice 2.2. En appliquant au triangle de position les formules de trigonométrie sphérique montrer que l'on peut calculer l'angle horaire AH_c du coucher d'un astre par : $\cos AH_c = -\operatorname{tg}\varphi.\operatorname{tg}\delta$.

Exercice 2.3. Soit un triangle sphérique ABC . On donne les éléments suivants:

- $\hat{A} = 80.16433 \text{ gr}$,
 - $\hat{B} = 55.77351 \text{ gr}$,
 - $\hat{C} = 64.06261 \text{ gr}$,
 - $AC = 20.1357 \text{ km}$,
 - $AB = 22.1435 \text{ km}$.
1. Calculer $\alpha = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$.
 2. Déterminer ε l'excès sphérique de ce triangle.
 3. Calculer la fermeture du triangle ABC , donnée par:

$$f = \alpha - 200.00000 \text{ gr} - \varepsilon$$

Exercice 2.4. Soit (\mathbb{S}^2) une sphère de rayon égal à 1. Soit un carré sphérique $ABCD$ de côté a (arc de grand cercle). On note $\alpha = \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D}$.

1. Montrer que:

$$\cos a = \operatorname{cotg}^2 \frac{\alpha}{2}$$

2. Donner l'expression de la diagonale $d =$ l'arc AC .

Problème 2.1. Soit (\mathbb{S}^2) une sphère de rayon égal à 1 et de centre le point Ω . Un point M de (\mathbb{S}^2) a pour coordonnées (φ, λ) . On appelle les coordonnées de Cassini-Soldner ¹² de M les angles (Fig.2.1):

- $L = \widehat{\Omega O, \Omega H}$,
- $H = \widehat{\Omega H, \Omega M}$.

1. Déterminer les relations liant L, H à φ, λ .
2. Inversement, donner les relations liant φ, λ à L, H .

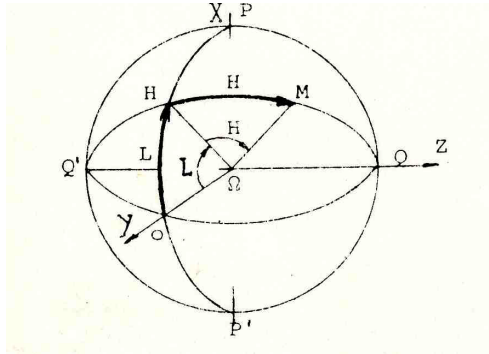


Fig. 2.1 Les coordonnées de Cassini-Soldner

Problème 2.2. Au lieu M de latitude $\varphi = 38^\circ$ Nord, on observe l'étoile polaire A de déclinaison $\delta = +89^\circ$ et d'ascension droite $\alpha = +2h 13mn 52.90s$.

1. Donner sur un graphique, les éléments du triangle sphérique PAM où P est le pôle Nord.
2. Sachant que l'heure sidérale locale HSL est égale au moment de l'observation à $6h 37mn 19.72s$, calculer l'angle horaire AH .
3. En appliquant la formule des cotangentes, montrer que l'azimut Az de l'étoile est donné par la formule:

$$\operatorname{tg}Az = \frac{\sin AH}{\cos AH \sin \varphi - \cos \varphi \operatorname{tg} \delta}$$

4. Calculer alors l'azimut Az .
5. Calculer la distance zénithale z de l'étoile.

¹ César-François Cassini (1714-1784): Astronome et géodésien français.

² Dr Johann Georg von Soldner (1776-1833): Mathématicien et astronome bavarois.

2.2 ASTRONOMIE DE POSITION

Exercice 2.5. Au lieu de latitude $\varphi = 36^{\circ}54'$ Nord, on veut calculer les hauteurs h_1 et h_2 de l'étoile polaire de déclinaison $\delta = +89^{\circ}$ respectivement à son passage supérieur et à son passage inférieur au méridien du lieu. Déterminer h_1 et h_2 .

Problème 2.3. 1. En un lieu de latitude φ quelles sont les étoiles :

- qui ne se couchent pas (qui sont toujours visibles),
- qui ne sont jamais visibles.

Traiter le cas : lieu dans l'hémisphère nord.

2. Quelle est la condition pour qu'une étoile culmine au zénith ?

3. Cas particulier du soleil: la déclinaison du soleil varie de $-23^{\circ}27'$ à $+23^{\circ}27'$ au cours de l'année. On appelle jour le moment pendant lequel le soleil est au-dessus de l'horizon, nuit lorsque le soleil est au-dessous de l'horizon, midi l'instant de la culmination, minuit l'instant du passage inférieur.

a) Montrer qu'au moment des équinoxes le jour et la nuit sont d'égale durée quel que soit le lieu.

b) Montrer qu'à l'équateur, quelle que soit la date le jour et la nuit sont d'égale durée.

Problème 2.4. Une station astronomique est située en un lieu de coordonnées géographiques : $\varphi = +45^{\circ}00'$; $\lambda = +7^{\text{h}}20^{\text{mn}}$.

En ce lieu, on observe une étoile A de coordonnées équatoriales:

$$\alpha = +11^{\text{h}}13^{\text{mn}}; \delta = 30^{\circ}00'.$$

L'observation se fait le jour de l'équinoxe de printemps le 21 mars à 0 heure TU. L'heure sidérale de Greenwich est $11^{\text{h}}52^{\text{mn}}$.

1. Calculer l'heure sidérale locale du lever et du coucher de l'étoile A au lieu considéré.

2. En déduire l'heure TU du lever et du coucher de l'étoile au lieu considéré.

Remarque: on choisira le coucher qui a lieu après le lever.

Problème 2.5. En un lieu de latitude $43^{\circ},521$ et de longitude $+0^{\text{h}}20^{\text{mn}}57^{\text{s}}$, on cherche à pointer la galaxie d'Andromède de coordonnées équatoriales $\alpha = 0^{\text{h}}40^{\text{mn}}$, $\delta = 41^{\circ}00'$ le 31 juillet 1992 à 21^{h}TU .

On donne l'heure sidérale de Greenwich à 0^{h}TU le 31/07/1992: $HSG_{0^{\text{h}}\text{TU}} = 20^{\text{h}}35^{\text{mn}}28^{\text{s}}$.

1. Calculer l'heure sidérale locale à 21^{h}TU .

2. En déduire l'angle horaire de la galaxie.

3. Calculer la distance zénithale de la galaxie à 21^{h}TU .

4. Calculer son azimut à cette même heure.

Problème 2.6. Soit $(R_0) = (O, X_0, Y_0, Z_0)$ un référentiel de base. A tout instant, on peut définir un référentiel $(R) = (O, X, Y, Z)$ par les trois conditions suivantes:

a) - On connaît à tout instant les deux paramètres E, d indiqués sur la figure (2.2) ci-dessous représentant la sphère de centre O et de rayon unité et définis comme:

- d est l'écart angulaire entre les axes OZ et OZ_0 ,
- E est l'écart angulaire entre les plans (OZ_0, OX_0) et (OZ_0, OZ) .

Ces deux angles sont comptés dans le sens trigonométrique. On note:

- σ_0 la trace de OX_0 sur la sphère,

5. On appelle angle stellaire l'écart angulaire $\theta = \omega\sigma$ compté positivement vers l'ouest. Commenter la nouvelle définition du temps universel $UT1 = k(\theta - \theta_0)$. En particulier, la signification de l'angle stellaire et le choix de la constante k .
6. Faire le lien avec l'expression de définition classique du temps universel.

$$GMST1 \text{ à } 0^h UT1 = 24110^s .54841 + 8640184^s .812866t + 0^s .093104t^2 - 6^s .2 \times 10^{-6}t^3$$

7. On sait qu'une première expression des composantes de la parallaxe annuelle sur les coordonnées elliptiques (l, β) est donnée par les équations:

$$\begin{aligned} \cos\beta\Delta l &= -k\cos(\theta - l) \\ \Delta\beta &= -k\sin(\theta - l) \end{aligned}$$

Transposer ce résultat pour le calcul de la parallaxe diurne:

- * en coordonnées équatoriales (α, δ) ,
- * en coordonnées horizontales (Az, z) .

Note: La question 7 est indépendante des autres questions.

Courbes et Théorie des Surfaces

3.1 COURBES

Exercice 3.1. Soit l'hélice circulaire Γ paramétrée par:

$$\begin{cases} x = acost \\ y = asint \\ z = bt \end{cases}$$

où a, b deux constantes positives.

1. Exprimer les composantes des vecteurs T, N, B du repère de Frénet.
2. Montrer que la courbure vaut $\frac{a}{a^2 + b^2}$.
3. Montrer que la torsion vaut $\frac{b}{a^2 + b^2}$.

Exercice 3.2. Soit la courbe (C) définie par les formules:

$$M \begin{cases} x = at^2 \\ y = at^3 \\ z = \frac{9}{16}at^4 \end{cases} \quad \text{avec } a > 0$$

1. Calculer l'abscisse curviligne s d'un point M quelconque de cette courbe lorsqu'on prend pour origine des arcs l'origine des coordonnées et qu'on prend pour sens des arcs croissants celui des y croissants.
2. Déterminer au point M les vecteurs unitaires du trièdre de Frenét.
3. Calculer le rayon de courbure et les coordonnées du centre de courbure.
4. Evaluer la torsion en M .

3.2 THÉORIE DES SURFACES

Exercice 3.3. Soit (Γ) la surface paramétrée par (u, v) dans \mathbb{R}^2 telle que:

$$M(u, v) \begin{cases} X = u(1 - u^2)\cos v \\ Y = u(1 - u^2)\sin v \\ Z = 1 - u^2 \end{cases}$$

1. Calculer l'expression de ds^2 .
2. Montrer que l'équation cartésienne de (Γ) est:

$$x^2 + y^2 = (1 - z)z^2$$

Exercice 3.4. Soit la surface d'Enneper:

$$M(u, v) \begin{cases} X = u - \frac{u^3}{3} + uv^2 \\ Y = v - \frac{v^3}{3} + vu^2 \\ Z = u^2 - v^2 \end{cases}$$

1. Montrer que:

$$ds^2 = (1 + u^2 + v^2)^2 \cdot (du^2 + dv^2)$$

2. Calculer un vecteur unitaire normal à la surface.
3. Montrer que la surface d'Enneper est de courbure moyenne nulle en chaque point.

Exercice 3.5. On suppose que la métrique d'une surface donnée est:

$$ds^2 = A^2 du^2 + B^2 dv^2, \quad A = A(u, v), \quad B = B(u, v)$$

1. Montrer alors que l'expression de la courbure totale est:

$$K = -\frac{1}{AB} \left[\left(\frac{A'_v}{B} \right)'_v + \left(\frac{B'_u}{A} \right)'_u \right]$$

' désigne la dérivation partielle.

Problème 3.1. On définit une surface (S) par les équations:

$$M(u, v) \begin{cases} X = u^2 + v \\ Y = u + v^2 \\ Z = uv \end{cases}$$

1. Calculer les composantes des vecteurs \mathbf{OM}'_u et \mathbf{OM}'_v .
2. Calculer les coefficients E, F, G de la première forme fondamentale de la surface (S) .
3. En déduire l'expression de ds^2 .
4. Les coordonnées (u, v) sont-elles orthogonales? symétriques?
5. Calculer un vecteur normal de (S) .

Problème 3.2. On définit une surface (Σ) par les équations:

$$M(u, v) \begin{cases} X = a.\cos u.\cos v \\ Y = a.\cos u.\sin v \\ Z = b.\sin u \end{cases}$$

avec a, b deux constantes positives.

1. Calculer les composantes des vecteurs \mathbf{OM}'_u et \mathbf{OM}'_v .
2. Calculer les coefficients E, F, G de la première forme fondamentale de la surface (Σ) .
3. En déduire l'expression de ds^2 .
4. Les coordonnées (u, v) sont-elles orthogonales? symétriques?
5. Calculer un vecteur unitaire normal \mathbf{n} de (Σ) .
6. Calculer les vecteurs :

$$\mathbf{OM}''_{uu}, \quad \mathbf{OM}''_{uv}, \quad \mathbf{OM}''_{vv}$$

On pose:

$$L = \mathbf{n}.\mathbf{OM}''_{uu}, \quad M = \mathbf{n}.\mathbf{OM}''_{uv}, \quad N = \mathbf{n}.\mathbf{OM}''_{vv}$$

7. Calculer les coefficients L, M et N .

Problème 3.3. On considère la surface (Γ) définie par les équations:

$$M(u, v) \begin{cases} X = \sin u.\cos v \\ Y = \sin u.\sin v \\ Z = \cos u + \text{Log}tg \frac{u}{2} + \psi(v) \end{cases}$$

avec $\psi(v)$ est une fonction définie de classe C^1 de v .

1. Donner le domaine de définition de la surface (Γ) .
2. Montrer que les courbes coordonnées $v = \text{constante}$ constituent une famille de courbes planes de (Γ) et que leur plan coupe (Γ) sous un angle constant.
3. Calculer les composantes des vecteurs \mathbf{OM}'_u et \mathbf{OM}'_v .
4. Calculer les coefficients E, F, G de la première forme fondamentale de la surface (Γ) .
5. En déduire l'expression de ds^2 .
6. Les coordonnées (u, v) sont-elles orthogonales? symétriques?
7. On suppose pour la suite que $\psi(v) = 0$, calculer un vecteur unitaire normal \mathbf{n} de Γ .
8. Calculer les vecteurs :

$$\mathbf{OM}''_{uu}, \quad \mathbf{OM}''_{uv}, \quad \mathbf{OM}''_{vv}$$

On pose:

$$L = \mathbf{n}.\mathbf{OM}''_{uu}, \quad M = \mathbf{n}.\mathbf{OM}''_{uv}, \quad N = \mathbf{n}.\mathbf{OM}''_{vv}$$

9. Calculer les coefficients L, M et N .
10. En déduire l'expression des courbures moyenne et totale.

Problème 3.4. Soit la surface (Γ) définie paramétriquement par:

$$M(u, v) \begin{cases} X = \text{th}u.\cos v \\ Y = \text{th}u.\sin v \\ Z = \frac{1}{\text{ch}u} + \text{Log}th \frac{u}{2} \end{cases}$$

avec $\text{ch}u$ et $\text{th}u$ sont respectivement le cosinus et la tangente hyperboliques définies par:

$$chu = \frac{e^u + e^{-u}}{2}, \quad thu = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u - e^{-u}}$$

1. Donner le domaine de définition de la surface (Γ) .
2. Calculer les composantes des vecteurs \mathbf{OM}'_u et \mathbf{OM}'_v .
3. Calculer les coefficients E, F, G de la première forme fondamentale de la surface (Γ) .
4. En déduire l'expression de ds^2 .
5. Les coordonnées (u, v) sont-elles orthogonales? symétriques?
6. Calculer un vecteur unitaire normal \mathbf{n} de (Γ) .
7. Calculer les vecteurs :

$$\mathbf{OM}''_{uu}, \quad \mathbf{OM}''_{uv}, \quad \mathbf{OM}''_{vv}$$

On pose:

$$L = \mathbf{n} \cdot \mathbf{OM}''_{uu}, \quad M = \mathbf{n} \cdot \mathbf{OM}''_{uv}, \quad N = \mathbf{n} \cdot \mathbf{OM}''_{vv}$$

8. Calculer les coefficients L, M et N .
9. Déterminer les courbures moyenne et totale.

Problème 3.5. Montrer que les courbures totale K et moyenne H en un point $M(x, y, z)$ d'une surface paramétrée par $z = f(x, y)$, où f est une fonction lisse, sont données par:

$$K = \frac{f''_{xx}f''_{yy} - f''_{xy}{}^2}{(1 + f_x'^2 + f_y'^2)^2}$$

et:

$$H = \frac{(1 + f_x'^2)f''_{xx} - 2f_x'f_y'f''_{xy} + (1 + f_x'^2)f''_{yy}}{(1 + f_x'^2 + f_y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Problème 3.6. Soit (Σ) une surface de \mathbb{R}^3 paramétrée par $OM(u, v)$ telle que sa première forme fondamentale s'écrit: $ds^2 = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2$

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:

i) - $\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\partial G}{\partial u} = 0,$

ii) - Le vecteur $\frac{\partial^2 OM}{\partial u \partial v}$ est parallèle au vecteur normal N à la surface,

iii) - Les côtés opposés de tout quadrilatère curviligne formés par les courbes coordonnées (u, v) ont même longueur.

2. Quand ces conditions sont satisfaites, on dit que les courbes coordonnées de (Σ) forment un réseau de Tchebychev.¹ Montrer que dans ce cas, on peut paramétrer la surface par (\tilde{u}, \tilde{v}) telle que ds^2 s'écrit:

$$ds^2 = d\tilde{u}^2 + 2\cos\theta d\tilde{u}d\tilde{v} + d\tilde{v}^2$$

où θ est une fonction de (\tilde{u}, \tilde{v}) . Montrer que θ est l'angle entre les courbes coordonnées \tilde{u}, \tilde{v} .

3. Montrer que l'expression de la courbure totale est donnée par:

$$K = \frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{u} \partial \tilde{v}}$$

4. On pose :

¹ Pafnouti Tchebychev (1821 - 1894): Mathématicien russe.

$$\begin{aligned}\hat{u} &= \tilde{u} + \tilde{v} \\ \hat{v} &= \tilde{u} - \tilde{v}\end{aligned}$$

Montrer que ds^2 s'écrit avec les nouvelles variables (\hat{u}, \hat{v}) :

$$ds^2 = \cos^2 \omega d\hat{u}^2 + \sin^2 \omega d\hat{v}^2$$

avec $\omega = \theta/2$. (A.N. Pressley, 2010)

Problème 3.7. Soit (\mathcal{F}) une surface définie dans \mathbb{R}^3 , paramétrée par la fonction vectorielle $OM = F(u, v)$ telle que:

$$F(u, v) \begin{cases} x = F_1(u, v) \\ y = F_2(u, v) \\ z = F_3(u, v) \end{cases}$$

F est dite une paramétrisation conforme de (\mathcal{F}) si on a les deux conditions suivantes:

$$\frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial F}{\partial v} = e^{\Phi(u,v)} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial F}{\partial v} = 0$$

1. Ecrire la première forme fondamentale de (\mathcal{F}) .
2. Soit n Le vecteur normal unitaire.

$$n = \frac{\frac{\partial F}{\partial u} \wedge \frac{\partial F}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial F}{\partial u} \wedge \frac{\partial F}{\partial v} \right\|}$$

Quand le point M varie sur la surface (\mathcal{F}) , le repère $(\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}, n)$ est un repère mobile. La deuxième forme fondamentale de (\mathcal{F}) est définie par:

$$n \cdot d^2F = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

Si cette deuxième forme fondamentale s'écrit sous la forme :

$$-n \cdot d^2F = e^{\Phi(u,v)} \left(\frac{du^2}{\rho_1} + \frac{dv^2}{\rho_2} \right)$$

alors, la paramétrisation de (\mathcal{F}) est dite isotherme. Dans ce cas, ρ_1, ρ_2 sont les rayons de courbure principaux de la surface (\mathcal{F}) . Une surface qui admet des coordonnées isothermes est dite isotherme.

3. On considère que (\mathcal{F}) est la sphère définie par: $M = \begin{cases} x = R \cos \varphi \cos \lambda \\ y = R \cos \varphi \sin \lambda \\ z = R \sin \varphi \end{cases} \quad R > 0$

Soit \mathcal{L}_M la variable de Mercator. Montrer que la sphère paramétrée par (\mathcal{L}_M, λ) est une surface isotherme.

4. On considère \mathcal{B} la base du repère mobile $(\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}, n)$. Exprimer les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial u}$ et $\frac{\partial}{\partial v}$ des vecteurs de \mathcal{B} dans \mathcal{B} , en tenant compte que la surface est isotherme c'est-à-dire

qu'on a l'équation:

$$-n.d^2F = e^{\Phi(u,v)} \left(\frac{du^2}{\rho_1} + \frac{dv^2}{\rho_2} \right) = -(L.du^2 + 2Mdu.dv + N.dv^2)$$

5. Montrer qu'on peut écrire les résultats de 4. sous la forme matricielle suivante:

$$\frac{\partial}{\partial u} \begin{pmatrix} F'_u \\ F'_v \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Phi'_u}{2} & -\frac{\Phi'_v}{2} & -\frac{e^\Phi}{\rho_1} \\ \frac{\Phi'_v}{2} & \frac{\Phi'_u}{2} & 0 \\ \frac{1}{\rho_1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F'_u \\ F'_v \\ n \end{pmatrix}$$

et:

$$\frac{\partial}{\partial v} \begin{pmatrix} F'_u \\ F'_v \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Phi'_v}{2} & \frac{\Phi'_u}{2} & 0 \\ -\frac{\Phi'_u}{2} & \frac{\Phi'_v}{2} & -\frac{e^\Phi}{\rho_2} \\ 0 & \frac{1}{\rho_2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F'_u \\ F'_v \\ n \end{pmatrix}$$

Les deux dernières expressions ci-dessus sont appelées les équations de Gauss-Weingarten² de la surface (\mathcal{F}).

² **Julius Weingarten** (1836 - 1910) : mathématicien allemand.

Ellipse et Ellipsoïde de révolution

4.1 L'ELLIPSE ET L'ELLIPSOÏDE DE RÉVOLUTION

Exercice 4.1. 1. Calculer les composantes du vecteur normal extérieur à l'ellipsoïde, en déduire les relations (dans les deux sens) entre les lignes trigonométriques de φ et celles de ψ .

2. Donner les équations paramétriques de l'ellipse et de l'ellipsoïde en fonction, respectivement, de φ et de λ et φ .

3. Etablir une relation différentielle entre ψ et φ .

4. Calculer la différentielle $d\beta$ de l'arc d'ellipse en fonction de φ , puis la première forme quadratique de l'ellipsoïde.

5. Calculer les courbures principales de l'ellipsoïde de révolution.

6. Trouver la coordonnée curviligne de l'ellipsoïde de révolution qui forme avec la longitude un couple de coordonnées symétriques et qui s'annule le long de l'équateur.

Exercice 4.2. Soit à calculer:

$$W_{2p} = \int_0^{\Omega} \sin^{2p} \omega d\omega$$

On pose:

$$I_{p-2}(\Omega) = \int_0^{\Omega} \sin^{p-2} \omega \cos^2 \omega d\omega$$

1. Etablir les formules suivantes:

$$\begin{aligned} W_p &= W_{p-2} - I_{p-2} \\ (p-1)I_{p-2} &= \sin^{p-1} \Omega \cos \Omega + W_p \\ W_p &= \frac{p-1}{p} W_{p-2} - \frac{1}{p} \sin^{p-1} \Omega \cos \Omega \end{aligned}$$

2. Préciser la valeur de W_0 , et proposer un programme (en Matlab) de calcul de W_{2p} .

Exercice 4.3. On a:

$$\beta(\varphi) = \int_0^\varphi \rho d\varphi$$

avec :

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{w^3}, \quad w^2 = 1 - e^2 \sin^2 \varphi$$

1. Développer w^{-3} suivant les puissances croissantes de $e \sin \varphi$.
2. Calculer $\beta(\varphi)$ en fonction des $W_{2p}(\varphi)$.
3. Majorer l'erreur de calcul, lorsqu'on arrête le développement au terme e^{2n} . Calculer n si l'on recherche la précision du millimètre sur β , quelle que soit la latitude φ entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.
4. Proposer un organigramme de calcul.
5. Envisager la solution du problème inverse: calcul de φ connaissant β .

Problème 4.1. Soit l'ellipse (E) définie par les équations paramétriques:

$$M \begin{cases} x = a \cos u \\ y = b \sin u \\ \text{avec } a > b > 0 \end{cases}$$

On pose:

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}; \quad e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

1. Calculer la position sur l'axe des abscisses des deux points F et F' appelés foyers tels que $MF + MF' = 2a$.
2. Montrer que le produit des distances des foyers à la tangente à l'ellipse en M est indépendant de u .
3. Donner l'expression de ds .
4. Déterminer les expressions des vecteurs unitaires \mathbf{T} et \mathbf{N} et en déduire le rayon de courbure de l'ellipse.
5. Montrer qu'il passe par M deux cercles tangents en ce point à la courbe et centrés sur Ox, Oy respectivement (appelés cercles surosculateurs).
6. Que deviennent ces cercles lorsque M est un sommet de l'ellipse.

Exercice 4.4. A partir de la définition géométrique de l'ellipse donnée par:

$$MF + MF' = \text{constante} = 2a$$

retrouver l'expression de l'équation cartésienne de l'ellipse.

Exercice 4.5. Montrer la formule très utilisée en géodésie:

$$\frac{d(N \cos \varphi)}{d\varphi} = -\rho \sin \varphi$$

avec N et ρ les deux rayons de courbures principaux de l'ellipsoïde de révolution donnés respectivement par :

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

et:

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

Problème 4.2. A partir des équations de l'ellipsoïde de révolution:

$$M = \begin{cases} X = N\cos\varphi\cos\lambda \\ Y = N\cos\varphi\sin\lambda \\ Z = N(1-e^2)\sin\varphi \end{cases}$$

1. Calculer les vecteurs:

$$\frac{\partial M}{\partial \lambda}, \frac{\partial M}{\partial \varphi}$$

2. Calculer les coefficients:

$$E = \frac{\partial M}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial M}{\partial \lambda}, \quad F = \frac{\partial M}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial M}{\partial \varphi}, \quad G = \frac{\partial M}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial M}{\partial \varphi}$$

Démontrer que l'expression de la première forme fondamentale s'écrit:

$$ds^2 = \rho^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2$$

3. Calculer le vecteur normal \mathbf{n} :

$$\mathbf{n} = \frac{\partial M}{\partial \lambda} \wedge \frac{\partial M}{\partial \varphi} \frac{1}{\left\| \frac{\partial M}{\partial \lambda} \wedge \frac{\partial M}{\partial \varphi} \right\|}$$

4. Calculer les vecteurs:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial \lambda^2}, \quad \frac{\partial^2 M}{\partial \lambda \partial \varphi}, \quad \frac{\partial^2 M}{\partial \varphi^2}$$

5. Déterminer les coefficients:

$$L = n \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial \lambda^2}, \quad M = n \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial \lambda \partial \varphi}, \quad N = n \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial \varphi^2}$$

6. Ecrire la deuxième forme fondamentale $\Phi(\lambda, \varphi)$.

7. En appliquant la formule du cours, Montrer que :

$$N(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

est le rayon de courbure de la section normale au point M perpendiculaire au plan de la méridienne de l'ellipsoïde de révolution.

8. En posant:

$$d\mathcal{L} = \frac{\rho d\varphi}{N\cos\varphi}$$

En déduire que ds^2 s'écrit:

$$ds^2 = N^2 \cos^2 \varphi (d\mathcal{L}^2 + d\lambda^2)$$

9. Montrer que \mathcal{L} est donnée par:

$$\mathcal{L}(\varphi) = \text{Log} \left(\text{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right) - \frac{e}{2} \text{Log} \left(\frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \right)$$

Problème 4.3. Sur l'ellipsoïde, on note φ la latitude géodésique et ψ la latitude réduite.

1. Calculer ρ le rayon de courbure de l'ellipse méridienne en fonction de ψ .
2. Exprimer l'aplatissement de l'ellipsoïde en fonction des valeurs de ρ au pôle et à l'équateur.
3. On mesure la longueur d'un arc de méridien d'un degré à la fois au pôle et à l'équateur. On trouve respectivement 111695 m et 110573 m. En déduire l'aplatissement.

Problème 4.4. On donne les coordonnées tridimensionnelles suivantes d'un point M:

$$M = (X, Y, Z) = (4\,300\,244.860\text{ m}, 1\,062\,094.681\text{ m}, 4\,574\,775.629\text{ m})$$

Les paramètres de l'ellipsoïde de référence sont $a = 6\,378\,137.00\text{ m}$, $e^2 = 0.006\,694\,38$.

1. Calculer le demi-petit axe b .
2. Calculer l'aplatissement.
3. Calculer les coordonnées géodésiques (φ, λ, h_e) du point M. φ et λ seront calculées en grades avec cinq chiffres après la virgule.

Problème 4.5. Soit $\mathcal{E}(a, e)$ un ellipsoïde de révolution où a, e sont respectivement le demi-grand axe et la première excentricité. (g) une géodésique partant d'un point $E(\varphi = 0, \lambda_E)$ sur l'équateur et d'azimut Az_E . A cette géodésique, on lui fait correspondre une géodésique (g') sur la sphère \mathcal{S}^2 dite de Jacobi¹ de rayon a , ayant le même azimut Az_E au point $E'(\varphi' = 0, \lambda_E)$. De même au point $M(\varphi, \lambda)$ de la géodésique (g) de l'ellipsoïde, on lui fait correspondre le point $M'(\varphi', \lambda')$ de (g') de \mathcal{S}^2 tel qu'il y a conservation des azimuts.

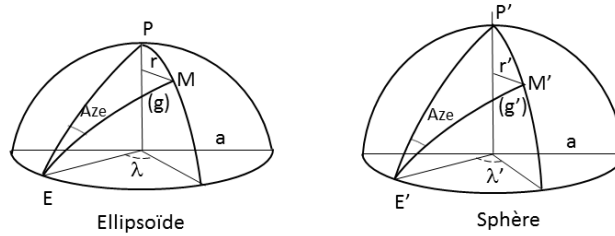


Fig. 4.1 La Correspondance de la sphère de Jacobi

1. Ecrire l'équation de Clairaut pour la géodésique (g) .
2. On note r' le rayon du parallèle passant par M' de la géodésique (g') . Ecrire de même l'équation de Clairaut pour la géodésique (g') .
3. Montrer que φ et φ' vérifient:

$$N \cos \varphi = a \cos \varphi'$$

¹ Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851): Mathématicien allemand.

et en déduire que φ' est la latitude paramétrique de M .

4. Ecrire les expressions de tgAz_g et $\text{tgAz}_{g'}$ respectivement sur (g) et (g') .

5. Montrer que:

$$d\lambda = \frac{\rho d\varphi}{a d\varphi'} d\lambda'$$

En déduire que :

$$d\lambda = \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi'} d\lambda'$$

6. En intégrant l'équation précédente, montrer qu'on obtient:

$$\lambda - \lambda_E = \int_{\lambda_E}^{\lambda' + \lambda_E} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi'} d\lambda'$$

avec $\lambda > \lambda_E$ et λ' est comptée à partir de λ_E .

7. En écrivant $\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi'} = 1 - \frac{e^2}{2} \cos^2 \varphi' + o(e^4)$ où $o(e^4)$ est un infiniment petit d'ordre 4 en e dont on néglige, écrire l'intégrale précédente entre λ_E et $\lambda_E + \lambda$.

8. Comme (g') est une géodésique de la sphère, on démontre que:

$$\cos^2 \varphi' d\lambda' = \frac{\sin Az_E}{a} ds'$$

où ds' est l'élément différentiel de l'abscisse curviligne sur la géodésique (un grand cercle). Alors en posant $s' = 0$ au point E' , montrer que l'équation précédente s'écrit sous la forme:

$$\lambda = \lambda_E + \lambda' - \frac{e^2 \sin Az_E}{2a} \int_0^{s'} ds'$$

9. On suppose que la géodésique (g') coupe une première fois le plan de l'équateur en un point F' , montrer qu'on obtient:

$$\begin{aligned} \lambda'_F &= \pi \\ s' &= \pi a \\ \lambda_F &= \lambda_E + \pi - \frac{e^2 \pi \sin Az_E}{2} \end{aligned}$$

10. La géodésique (g') partant de F' a pour azimut $\pi - Az_E$, elle coupe une deuxième fois l'équateur au point E' , mais la géodésique (g) sur l'ellipsoïde coupe une deuxième fois le plan de l'équateur au point correspondant à H dont la longitude est λ_H . Montrer que λ_H est donnée par:

$$\lambda_H = \lambda_E + 2\pi - \frac{e^2 \pi \sin Az_E}{2} - \frac{e^2 \pi \sin(\pi - Az_E)}{2} = \lambda_E + 2\pi - e^2 \pi \sin Az_E$$

Quelle conclusion a-t-on sur les lignes géodésiques de l'ellipsoïde de révolution.

Problème 4.6. Un point M de la surface d'une sphère (S) de rayon R , a pour coordonnées (X, Y, Z) dans un repère orthonormé:

$$M = (X, Y, Z) = (R \cos \varphi \cdot \cos \lambda, R \cos \varphi \cdot \sin \lambda, R \sin \varphi)$$

1. Montrer qu'un vecteur normal unitaire n à (S) en M est:

$$n = (\cos\varphi \cdot \cos\lambda, \cos\varphi \cdot \sin\lambda, \sin\varphi)^T$$

2. Soit (C) le grand cercle passant par le point $A(R, 0, 0)$ et d'azimut Az_E . Le point M peut être décrit par son abscisse curviligne s mesurant l'arc AM . On note par ω représente l'angle au centre de l'arc AM . Utilisant la trigonométrie sphérique, montrer que:

$$\cos\varphi \cdot \sin\lambda = \sin\omega \cdot \sin Az_E$$

3. En utilisant la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique dans le triangle APM , montrer qu'on a les deux relations :

$$\begin{aligned} \cos\omega &= \cos\varphi \cdot \cos\lambda \\ \sin\varphi &= \sin\omega \cdot \cos Az_E \end{aligned}$$

4. En déduire que les coordonnées de M s'écrivent en fonction de s comme suit:

$$M \begin{cases} X = R \cdot \cos(s/R) \\ Y = R \sin Az_E \sin(s/R) \\ Z = R \cos Az_E \sin(s/R) \end{cases}$$

5. Calculer les vecteurs T et N du repère de Frenêt. En déduire les composantes de N en fonction de ω .

6. Montrer que les vecteurs N et n sont parallèles.

7. Justifier que les géodésiques de la sphère sont les grands cercles.

Problème 4.7. Soit le tore \mathbb{T} défini par les équations suivantes:

$$M(\varphi, \lambda) = \begin{cases} x = (a + R \cos\varphi) \cos\lambda \\ y = (a + R \cos\varphi) \sin\lambda \\ z = R \sin\varphi \end{cases}$$

où a, R deux constantes positives avec $a > R$, $(\varphi, \lambda) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

1. Calculer la première forme fondamentale ds^2 .

2. Avec les notations usuelles, on pose:

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi} = E'_\varphi, \quad \frac{\partial E}{\partial \lambda} = E'_\lambda, \quad \frac{\partial F}{\partial \varphi} = F'_\varphi$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = F'_\lambda, \quad \frac{\partial G}{\partial \varphi} = G'_\varphi, \quad \frac{\partial G}{\partial \lambda} = G'_\lambda$$

Utilisant les équations des géodésiques du cours, montrer que les équations des géodésiques du tore sont:

$$-2R \sin\varphi (a + R \cos\varphi) \frac{d\varphi}{ds} \frac{d\lambda}{ds} + (a + R \cos\varphi)^2 \frac{d^2\lambda}{ds^2} = 0$$

$$R \sin\varphi (a + R \cos\varphi) \left(\frac{d\lambda}{ds} \right)^2 + R^2 \frac{d^2\varphi}{ds^2} = 0$$

3. Montrer que la première équation ci-dessus donne:

$$(a + R\cos\varphi)^2 \frac{d\lambda}{ds} = C = \text{cte}$$

Montrer qu'on retrouve l'équation de Clairaut avec $C = (a + R)\sin Aze$ où Aze est l'azimut de départ au point $M_0(\varphi = 0, \lambda_0)$.

4. On suppose au point M_0 , la géodésique a pour azimut Aze tel que:

$$0 < Aze < \frac{\pi}{2}$$

Montrer que la deuxième équation des géodésiques s'écrit en utilisant le résultat précédent:

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = -\frac{C^2}{R} \frac{\sin\varphi}{(a + R\cos\varphi)^3}$$

5. Montrer qu'on arrive à:

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = l - \frac{C^2}{R^2(a + R\cos\varphi)^2} \geq 0$$

où l est une constante d'intégration.

Les Systèmes Géodésiques

Exercice 5.1. On donne les coordonnées tridimensionnelles suivantes d'un point A:

$$\begin{aligned} X &= 5\,102\,603.85\,m \\ Y &= 916\,806.87\,m \\ Z &= 3\,703\,034.99\,m \end{aligned}$$

L'ellipsoïde de référence est l'ellipsoïde GRS80 dont les paramètres sont:

$$\begin{aligned} a &= 6\,378\,137.00\,m \\ e^2 &= 0066943800229 \end{aligned}$$

1. Calculer le demi-petit axe b .
2. Déterminer les coordonnées géodésiques (φ, λ, h) du point A. φ et λ seront calculées en grades avec cinq chiffres après la virgule.

Exercice 5.2. Donner l'expression des composantes du gradient en coordonnées cylindriques.

Exercice 5.3. On donne l'expression scalaire d'une fonction $V(x, y, z)$ par :

$$V(x, y, z) = \frac{ax^2 + y^2}{z^2} + \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2)$$

1. Calculer les composantes du vecteur $\mathbf{grad}V$ dans un domaine de \mathbb{R}^3 où $z \neq 0$.

Problème 5.1. Soit un point $A(\varphi, \lambda)$ sur un ellipsoïde de révolution associé à un référentiel géocentrique donné \mathcal{R} . On considère le repère orthonormé local en A $(e_\lambda, e_\varphi, e_n)$ défini dans la base orthonormée (i, j, k) de \mathcal{R} où e_λ est tangent au parallèle passant par A et dirigé vers l'Est, e_φ tangent à la méridienne, dirigé vers le nord et e_n porté par la normale à l'ellipsoïde dirigé vers le zénith.

1. Exprimer les vecteurs de la base $(e_\lambda, e_\varphi, e_n)$ dans la base (i, j, k) de \mathcal{R} .
2. Exprimer les vecteurs i, j et k dans la base $(e_\lambda, e_\varphi, e_n)$.
3. Calculer de_λ, de_φ et de_n dans la base (i, j, k) .
4. En adoptant une écriture matricielle, montrer que :

$$\begin{pmatrix} de_\lambda \\ de_\phi \\ de_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sin\phi d\lambda & -\cos\phi d\lambda \\ -\sin\phi d\lambda & 0 & -d\phi \\ \cos\phi d\lambda & d\phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_\lambda \\ e_\phi \\ e_n \end{pmatrix}$$

Problème 5.2. On considère les notations du précédent problème. Soit un point M . On pose:

$$\Delta X = (X_M - X_A, Y_M - Y_A, Z_M - Z_A)^T, \Delta x = (x_M, y_M, z_M)^T$$

où X et x sont respectivement les composantes du vecteur AM dans les repère \mathcal{R} et le repère local en A .

1. Montrer qu'on a la relation: $\Delta X = J.\Delta x$ avec J une matrice orthogonale ($J^{-1} = J^T$) qu'on déterminera.

2. On suppose maintenant que \mathcal{R} est le repère GPS et que le passage du repère \mathcal{R} vers le repère terrestre est donné par le modèle dit à 7 paramètres :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} &= F(X) = \begin{pmatrix} Tx \\ Ty \\ Tz \end{pmatrix} + (1+m).R. \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Tx \\ Ty \\ Tz \end{pmatrix} + (1+m). \begin{pmatrix} 1 & rz & -ry \\ -rz & 1 & rx \\ ry & -rx & 1 \end{pmatrix}. \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On note: $\delta X = F(\Delta X) - \Delta X$, que représente δX . Montrer qu'au premier ordre que:

$$\delta X \cong m\Delta X + (R - I)\Delta X$$

3. On appelle $\omega = (rx, ry, rz)^T$, montrer que:

$$\|\delta X\| = (m^2 + \omega^2 \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}} \|\Delta X\|$$

où θ est l'angle entre les vecteurs ΔX et ω .

4. En déduire que:

$$|m|. \|\Delta X\| \leq \|\delta X\| \leq (m^2 + \omega^2)^{\frac{1}{2}} \|\Delta X\|$$

5. En utilisant la relation liant ΔX et Δx ; montrer que:

$$\delta x = m\Delta x + J^T (R - I) J \Delta x$$

Problème 5.3. On définit dans \mathbb{R}^3 un point M par ses coordonnées ellipsoïdiques de Jacobi (ϕ, λ, u) comme suit:

$$M \begin{cases} x = \sqrt{u^2 + \varepsilon^2} \cdot \cos\phi \cos\lambda \\ y = \sqrt{u^2 + \varepsilon^2} \cdot \cos\phi \sin\lambda \\ z = u \cdot \sin\phi \end{cases}$$

avec: $\varepsilon^2 = \sqrt{a^2 - b^2}$, $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\lambda \in [0, 2\pi]$ et $u \in]0, +\infty[$, a, b deux constantes réelles telles que $a > b > 0$.

1. Montrer que le point M appartient à un ellipsoïde de révolution en précisant ses demi-axes.

2. Calculer ds^2 et montrer qu'il s'écrit sous la forme:

$$ds^2 = (d\phi, d\lambda, du) \cdot G \cdot \begin{pmatrix} d\phi \\ d\lambda \\ du \end{pmatrix}$$

avec G donnée par :

$$G = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} u^2 + \varepsilon^2 \sin^2 \phi & 0 & 0 \\ 0 & (u^2 + \varepsilon^2) \cos^2 \phi & 0 \\ 0 & 0 & \frac{u^2 + \varepsilon^2 \sin^2 \phi}{u^2 + \varepsilon^2} \end{pmatrix}$$

3. Sachant que l'expression du laplacien d'une fonction scalaire V en coordonnées de Jacobi est exprimée par:

$$\Delta V = \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}} \cdot \frac{\partial V}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{22}} \cdot \frac{\partial V}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{33}} \cdot \frac{\partial V}{\partial u} \right) \right\}$$

où g est le déterminant de la matrice G , donner l'expression de ΔV .

4. Calculer ΔV sachant que V est donnée par:

$$V(\phi, u) = \frac{GM}{\varepsilon} \operatorname{Arctg} \frac{\varepsilon}{u} + \frac{1}{3} a^2 \omega^2 \frac{q}{q_0} \left(1 - \frac{3}{2} \cos^2 \phi \right) + \frac{1}{2} \omega^2 (u^2 + \varepsilon^2) \cos^2 \phi$$

avec G, M et ω des constantes et:

$$q = q(u) = \frac{1}{2} \left[\left(1 + 3 \frac{u^2}{\varepsilon^2} \right) \operatorname{Arctg} \frac{\varepsilon}{u} - 3 \frac{u}{\varepsilon} \right]$$

$$q_0 = q(u = b) = \frac{1}{2} \left[\left(1 + 3 \frac{b^2}{\varepsilon^2} \right) \operatorname{Arctg} \frac{\varepsilon}{b} - 3 \frac{b}{\varepsilon} \right]$$

Problème 5.4. Avec les notations usuelles, un potentiel est donné avec les constantes (GM, a, J_2, ω) de GRS80 par :

$$W(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \left(1 - J_2 \frac{a^2}{r^2} P_2(\cos \theta) \right) + \frac{\omega^2}{2} r^2 \sin^2 \theta$$

où (r, θ, λ) sont les coordonnées sphériques du point de calcul et :

$$a = 6378137.00 \text{ m}, b = 6356752.31 \text{ m};$$

$$GM = 3986005 \times 10^8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2};$$

$$\omega = 7292115 \times 10^{-11} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1};$$

$$J_2 = 108263 \times 10^{-8}.$$

1. Calculer le potentiel W aux points suivants situés sur l'ellipsoïde GRS80:

* le Pôle Nord;

* sur l'équateur;

* au point A sur l'ellipsoïde avec $\theta_A = 34^\circ$.

2. Calculer les variations de W entre les 3 points.

3. Exprimer le potentiel W en coordonnées cartésiennes (X, Y, Z) .

On rappelle : $P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2 \theta - 1)$.

Problème 5.5. On considère deux points A et B de coordonnées géodésiques dans le système géodésique WGS84 du GPS:

$$A : (\varphi'_A = 36.6306 \text{ gr}; \lambda'_A = 10.7896 \text{ gr}; h'_A = 137.50 \text{ m})$$

$$B : (\varphi'_B = 36.6317 \text{ gr}; \lambda'_B = 10.7915 \text{ gr}; h'_B = 171.33 \text{ m})$$

1- Calculer les coordonnées tridimensionnelles $(X', Y', Z')_A, (X', Y', Z')_B$ des points A et B dans le système géodésique WGS84. Les paramètres de l'ellipsoïde WGS84 sont : $a = 6378137.00 \text{ m}, e^2 = 0.00669438$.

2- On pose: $\Delta X' = X'_B - X'_A; \Delta Y' = Y'_B - Y'_A; \Delta Z' = Z'_B - Z'_A$. Calculer les coefficients $\Delta X', \Delta Y'$ et $\Delta Z'$. Sachant que l'azimut géodésique de la direction AB est donné par la formule:

$$\text{tg}(Az'_g) = \frac{-\Delta X' \sin \lambda'_A + \Delta Y' \cos \lambda'_A}{\Delta Z' \cos \varphi'_A - \sin \varphi'_A (\Delta X' \cos \lambda'_A + \Delta Y' \sin \lambda'_A)} \quad (5.1)$$

calculer la valeur numérique de Az'_g .

3- On considère que le passage du système GPS au système géodésique terrestre national est donné par la formule:

$$\mathbf{X} = \mathbf{T} + \mathbf{X}'$$

où $\mathbf{X} = (X, Y, Z)^T$ représentant la position d'un point M dans le système géodésique terrestre national, $\mathbf{X}' = (X', Y', Z')^T$ celle dans le système GPS et $\mathbf{T} = (Tx, Ty, Tz)^T$ le vecteur translation entre les deux systèmes, dont les composantes sont :

$$\mathbf{T} = (+263.3 \text{ m}, -14.4 \text{ m}, -434.1 \text{ m})^T$$

Calculer les coordonnées géodésiques tridimensionnelles $(X, Y, Z)_A$ et $(X, Y, Z)_B$ de A et B dans le système géodésique terrestre national.

4- Calculer les coordonnées géodésiques (φ, λ) du point A dans le système géodésique terrestre national. On déterminera (φ, λ) à cinq chiffres après la virgule en gr. On donne les paramètres de l'ellipsoïde de référence du système géodésique terrestre national: ($a = 6378249.20 \text{ m}, e^2 = 0.006803487$).

$$5- \text{ On pose } \Delta X = X_B - X_A; \Delta Y = Y_B - Y_A; \Delta Z = Z_B - Z_A.$$

a- Calculer les coefficients $\Delta X, \Delta Y$ et ΔZ .

b- Déterminer en utilisant la formule (5.1) l'azimut géodésique Az_g de la direction AB en utilisant les coordonnées dans le système géodésique terrestre national.

$$\text{tg}(Az_g) = \frac{-\Delta X \sin \lambda + \Delta Y \cos \lambda}{\Delta Z \cos \varphi - \sin \varphi (\Delta X \cos \lambda + \Delta Y \sin \lambda)}$$

6- Calculer la valeur numérique de $Az'_g - Az_g$. Que pensez-vous.

Les Réductions des Distances

Exercice 6.1. On a mesuré une distance suivant la pente $D_P = 20130.858\text{ m}$ entre deux points A et B avec $H_A = 235.07\text{ m}$, $H_B = 507.75\text{ m}$, on prendra comme rayon terrestre $R = 6378\text{ km}$.

1. Calculer la distance suivant l'ellipsoïde :
 - en utilisant les différentes corrections,
 - en utilisant la formule rigoureuse.
2. En prenant la valeur de la formule rigoureuse et sachant que le module linéaire m vaut 0.999850371 , calculer la distance réduite au plan de la représentation plane utilisée.

Exercice 6.2. Entre 2 points A ($H_A = 128.26\text{ m}$) et B ($H_B = 231.84\text{ m}$), la distance D_P suivant la pente est égale à 15498.823 m . Soit D_0 la distance corde au niveau de la surface de référence. L'angle de site observé en A en direction de B est $i = 0.3523\text{ gr}$.

1. Calculer la valeur de D_0 en utilisant la formule rigoureuse.
2. Calculer D_0 par les corrections.
3. En adoptant la moyenne des deux méthodes, calculer la distance D_e réduite à la surface de référence.
4. Le module linéaire de la représentation plane Lambert Sud utilisée est de 0.999648744 , calculer alors la distance D_r réduite au plan de la représentation.

Problème 6.1. On a mesuré une distance suivant la pente entre les points A ($H_A = 1319.79\text{ m}$) et B ($H_B = 1025.34\text{ m}$) avec $D_P = 16483.873\text{ m}$.

1. Calculer la distance D_e distance réduite à l'ellipsoïde de référence par la formule rigoureuse, on prendra le rayon de la Terre $R = 6378\text{ km}$.
2. Calculer la distance D_r réduite à la représentation plane Lambert si l'altération linéaire de la zone est de -14 cm/km .
3. La direction AB a un azimut géodésique $Az_g = 297.56225\text{ gr}$. Donner l'expression du gisement G de AB en fonction de Az_g , γ la convergence des méridiens et dv la correction de la corde, sachant que la représentation plane utilisée est le Lambert Sud Tunisie et que le point A est au nord du parallèle origine.
4. On donne $dv = -13.7\text{ dmgr}$ et $\lambda = 9.3474734\text{ gr}$ la longitude de A, calculer G .
5. En déduire les coordonnées (X_B, Y_B) de B si $X_A = 363044.79\text{ m}$ et $Y_A = 407020.09\text{ m}$.
6. Déterminer les coordonnées géographiques (φ, λ) de B.

Les Représentations Planes

7.1 LES REPRÉSENTATIONS PLANES

Exercice 7.1. Soit \mathbb{S}^2 la sphère de rayon R . Au point $P(\varphi, \lambda)$ de \mathbb{S}^2 on lui fait correspondre le point $p(X, Y)$ du plan OXY par la représentation plane suivante définie par les formules :

$$p(X, Y) \begin{cases} X = R.\cos\lambda \\ Y = R.\sin\varphi \end{cases}$$

1. Cette représentation est-elle cylindrique ou conique? Justifier votre réponse?
2. Soit dS la longueur infinitésimale correspondante sur le plan, donner l'expression de $(dS)^2$ en fonction de $\varphi, \lambda, d\varphi, d\lambda$ et R .
3. Soit m le module linéaire, montrer que $m^2 = \frac{\cos^2\varphi d\varphi^2 + \sin^2\lambda d\lambda^2}{d\varphi^2 + \cos^2\varphi d\lambda^2}$.
4. En déduire les modules linéaires m_1 le long du méridien ($\lambda = \text{constante}$) et m_2 le long du parallèle ($\varphi = \text{constante}$).
5. Cette représentation est-elle conforme? Par quoi est représentée l'indicatrice de Tissot?

Problème 7.1. Soit \mathbb{S}^2 la sphère de rayon R , au point $P(\varphi, \lambda)$ on lui fait correspondre le point $p(X, Y)$ du plan OXY par la représentation plane suivante définie par les formules :

$$p(X, Y) = \begin{cases} X = 2R.\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).\sin\lambda \\ Y = -2R.\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).\cos\lambda \end{cases}$$

1. Montrer que l'image d'un méridien ($\lambda = \text{constante}$) est une droite dont on donne l'équation.
2. Montrer que l'image d'un parallèle ($\varphi = \text{constante}$) est un cercle dont on précise l'équation.
3. En utilisant le lemme de Tissot, déterminer les directions principales.
4. Soit dS la longueur infinitésimale correspondante sur le plan, calculer dS .
5. Sachant que sur la sphère $ds^2 = R^2 d\varphi^2 + R^2 \cos^2\varphi d\lambda^2$, calculer le module linéaire m .
6. En déduire le module linéaire m_1 le long du méridien.

7. En déduire le module linéaire m_2 le long d'un parallèle.
8. Comparer m_1 et m_2 . Conclure sur la conformité ou la non conformité de la représentation plane.

Problème 7.2. Soit Σ la sphère de rayon R , au point $P(\varphi, \lambda)$ on lui fait correspondre le point $p(X, Y)$ du plan OXY par la représentation plane suivante définie par les formules :

$$p(X, Y) = \begin{cases} X = R.\lambda \\ Y = R.\text{Logtg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \end{cases}$$

où Log désigne le logarithme népérien.

1. Quelles sont les images des méridiens ($\lambda = \text{constante}$) et des parallèles ($\varphi = \text{constante}$).
2. Soit dS la longueur infinitésimale correspondante sur le plan, calculer dS en fonction de φ et de λ et calculer le module linéaire m .
3. En déduire les modules linéaires m_1 le long du méridien et m_2 le long du parallèle.
4. Comparer m_1 et m_2 et conclure sur la conformité ou la non conformité de la représentation plane.
5. On suppose que P décrit sur la surface Σ une courbe (γ) telle que φ et λ sont liées par la relation : $\text{tg}\varphi = \sin\lambda$. Pour $\varphi = 0 \text{ gr}, 2 \text{ gr}, 4 \text{ gr}, 6 \text{ gr}, 8 \text{ gr}$ et 10 gr , dresser un tableau donnant les valeurs de λ correspondantes.
6. Sachant que $R = 1000 \text{ m}$, calculer les coordonnées (X, Y) de la représentation plane donnée ci-dessus pour les valeurs de φ et λ de la question 5.
7. Rappporter à l'échelle $1/100$ sur le plan OXY , les positions (X, Y) des points. Que pensez-vous de l'image de la courbe (γ).

Problème 7.3. Sur une sphère de rayon unité, modèle de la terre, on désigne :

- par p le pôle nord,
- par (C) un grand cercle qui coupe l'équateur au point i de longitude nulle,
- par q le pôle de ce grand cercle, de latitude φ_0 positive,
- par ω et h respectivement les points d'intersection de (C) et du méridien de q et du grand cercle issu de q , passant par le point $a(\varphi, \lambda)$.

On pose : $\omega h = x, \quad ha = y$

1. q est le pivot d'une représentation cylindrique conforme oblique tangente, dont (C) est le "pseudo-équateur". Le plan est rapporté aux axes $\Omega X, \Omega Y$ images respectives de (C) et du grand cercle ωpq . Exprimer en fonction de φ, λ et φ_0 les coordonnées X, Y du point A image de a (vérifier que pour $\varphi_0 = 0$, on retrouve les expressions de X, Y d'une représentation transverse).

2. Montrer que l'équation de l'image plane du parallèle de latitude φ_0 peut s'écrire :

$$e^Y \cos X = \text{tg}\varphi_0$$

Indications : b désignant un point de latitude φ_0 , le triangle pqb est isocèle, décomposer ce triangle en deux triangles rectangles égaux. Etudier qualitativement les images des autres parallèles.

3. Montrer que l'image plane de l'équateur a pour équation :

$$\cos X + \text{tg}\varphi_0 \cdot \text{sh} Y = 0$$

Ecrire d'une manière analogue, l'équation de l'image du méridien $\lambda = 0$.

4. Exprimer le gisement du méridien en fonction de φ, λ et φ_0 . Déterminer la valeur du module linéaire, en particulier en p , en un point de l'équateur, en un point du méridien origine.

Problème 7.4. Pour une représentation plane, on dit qu'elle est **équivalente** si le produit des modules linéaires m_1 et m_2 suivant les directions principales vérifie :

$$m_1.m_2 = 1$$

Soit le modèle terrestre représenté par la sphère de rayon R qu'on note \mathbb{S}^2 . Au point $P(\varphi, \lambda)$ on lui fait correspondre le point $p(X, Y)$ du plan OXY par la représentation plane suivante définie par les formules :

$$p(X, Y) \begin{cases} X = 2R.\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).\cos\lambda \\ Y = 2R.\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).\sin\lambda \end{cases} \quad (7.1)$$

1. Qu'elle est l'image du pôle nord P_N ?
2. Montrer que l'image d'un méridien ($\lambda = \lambda_0 = \text{constante}$) est une droite dont on donne l'équation.
3. Montrer que l'image d'un parallèle ($\varphi = \varphi_0 = \text{constante}$) est un cercle dont on précise l'équation.
4. En utilisant le lemme de Tissot, déterminer les directions principales.
5. Soit ds la longueur infinitésimale correspondante sur la sphère, donner l'expression de ds^2 .
6. Soit dS la longueur infinitésimale correspondante sur le plan. Montrer que :

$$dS^2 = R^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) d\varphi^2 + 4R^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) d\lambda^2$$

7. En déduire le carré du module linéaire m^2 .
8. Calculer le module linéaire m_1 le long du parallèle.
9. Calculer le module linéaire m_2 le long du méridien.
10. La représentation plane définie par (7.1) est-elle équivalente. Justifier votre réponse.

Problème 7.5. Etude de la représentation conforme d'une sphère de rayon unité dite représentation de Littrow¹ définie par :

$$Z = \sin z$$

avec $z = \lambda + iL$ et $Z = X + iY$.

1. Préciser le canevas, les images des méridiens et celle de l'équateur.
2. Vérifier que les points f et f' ($\varphi = 0, \lambda = \pm\pi/2$) sont des points singuliers.
3. Etudier les images plans des cercles de diamètre ff' et des petits cercles orthogonaux.
4. Soit s le point ($\varphi = \varphi_0, \lambda = 0$). On appelle segment capable sphérique l'ensemble des points b tels que l'angle $\widehat{bp, bs} = \alpha$. Quelle est l'image plane de cette courbe dans cette représentation plane.

¹ En hommage à Joseph Johann Littrow (1781-1840) astronome autrichien.

Problème 7.6. Soit l'application $F(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 1)$ définie par:

$$OM(u, v) = F(u, v) \begin{cases} x = \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1} \\ y = \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1} \\ z = \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \end{cases}$$

1. Calculer la forme fondamentale ds^2 .
2. Montrer que $OM(u, v)$ appartient à la sphère \mathbb{S}^2 d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
3. Calculer u, v en fonction de x, y et z .
4. Soit le point $N(0, 0, 1)$ de \mathbb{S}^2 , calculer les coordonnées (X, Y) du point p intersection de la droite NM avec la plan $z = 0$ en fonction de x, y et z .
5. Soit σ l'application $\mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \rightarrow (X, Y) = (X(x, y, z), Y(x, y, z))$. Montrer que $(\sigma \circ F)(u, v) = \sigma(F(u, v)) = (u, v)$. En déduire que $F = \sigma^{-1}$.

Problème 7.7. Soit un ellipsoïde de révolution $E(a, e)$ avec a et e respectivement le demi-grand axe de l'ellipsoïde de révolution et e la première excentricité. Soit \mathbb{S}^2 une sphère de rayon R . On veut étudier le passage suivant:

$$p(\varphi, \lambda) \text{ de l'ellipsoïde } E \Rightarrow P(\psi, \Lambda) \text{ de la sphère } \mathbb{S}^2$$

1. Exprimer m le module linéaire de cette représentation.
2. On pose:

$$z = \mathcal{L} + i\lambda, \quad Z = L + i\Lambda$$

\mathcal{L} est la latitude isométrique de l'ellipsoïde de révolution et L la latitude de Mercator. Une transformation conforme entre E et \mathbb{S}^2 est donnée par $Z = f(z)$ où f est une fonction analytique. On propose le cas le plus simple à savoir:

$$Z = \alpha z + \beta$$

avec $\begin{cases} \alpha = c_1 + ic_2 \\ \beta = b_1 + ib_2 \end{cases}$

les c_1, c_2, b_1, b_2 sont des constantes réelles. Donner les expressions de L et Λ en fonction de \mathcal{L} et λ .

3. On veut que représentation transforme les méridiens et les parallèles de l'ellipsoïde respectivement en méridiens et parallèles de la sphère et que l'image du méridien origine $\lambda = 0$ soit le méridien origine de la sphère $\Lambda = 0$. Montrer que $c_2 = b_2 = 0$ et $L = c_1 \mathcal{L} + b_1, \quad \Lambda = c_1 \lambda$.

4. Pour avoir la même orientation en longitude, on prendra $c_1 > 0$. On cherchera la transformation à déformation minimale autour d'un parallèle $\varphi = \varphi_0$ tel que le parallèle $\varphi = \varphi_0$ est automécoïque et le module linéaire m est stationnaire pour $\varphi = \varphi_0$, c'est-à-dire $m(\varphi_0) = 1$ et $\left. \left(\frac{dm}{d\varphi} \right) \right|_{\varphi=\varphi_0} = 0$, en plus on considère aussi la condition:

$$\left(\frac{d^2 m}{d\varphi^2} \right) \Big|_{\varphi=\varphi_0} = 0$$

Pour faciliter les notations, on prendra $b = b_1, c = c_1$. Montrer que la relation liant φ_0 et Ψ_0 est:

$$\operatorname{tg} \Psi_0 = \operatorname{tg} \varphi_0 \sqrt{\frac{1-e^2}{1-e^2 \sin^2 \varphi_0}}$$

5. Déterminer les constantes b, c et R en fonction de φ_0 et Ψ_0 telles que les conditions ci-dessus soient vérifiées.

6. Montrer que l'expression du développement limité de $m(\varphi)$ de part et d'autre du parallèle φ_0 est donnée par:

$$m(\varphi) = 1 - \frac{2e^2(1-e^2)\sin\varphi_0\cos\varphi_0}{3(1-e^2\sin^2\varphi_0)^2}(\varphi - \varphi_0)^3 + o((\varphi - \varphi_0)^4)$$

7. On fait intervenir la deuxième excentricité e' , Montrer que $m(\varphi)$ s'écrit:

$$m(\varphi) = 1 - \frac{2e'^2\sin\varphi_0\cos\varphi_0}{3(1+e'^2\cos^2\varphi_0)^2}(\varphi - \varphi_0)^3 + o((\varphi - \varphi_0)^4)$$

Problème 7.8. Soit $\mathcal{E}(a, b)$ un ellipsoïde de référence de paramètres a et e respectivement le demi-grand axe et la première excentricité. On considère une représentation plane \mathcal{P} de \mathcal{E} vers le plan (O, X, Y) . On pose:

$$\begin{aligned} z &= \lambda + i\mathcal{L} \\ Z &= X + iY = Z(z) \end{aligned}$$

avec \mathcal{L} la latitude isoparamétrique.

1. Ecrire les expressions du carré des éléments infinitésimaux de longueur sur l'ellipsoïde et le plan. En déduire le module linéaire m .

2. On pose $\zeta = \frac{\partial Z}{\partial z}$. Si γ est le gisement de l'image du méridien passant par le point $z = (\lambda, \mathcal{L})$, montrer que $\arg(\zeta) = \frac{\pi}{2} - \gamma$.

3. On cherche une représentation plane du type $Z = \alpha + \beta z + \varpi z^2$ où α, β et ϖ des constantes complexes. On impose les conditions suivantes:

- pour $z = 0, Z = 0,$
- l'axe des Y coïncide avec le méridien à l'origine.

Montrer que $\Re(\beta) = 0$.

4. En déduire que Z s'écrit:

$$Z = i\beta_1 z + (\varpi_1 + i\varpi_2)z^2$$

avec $\beta_1, \varpi_1, \varpi_2$ sont des réels.

7.2 LA REPRÉSENTATION LAMBERT

Exercice 7.2. En un point A de coordonnées géodésiques $\varphi = 40.9193 \text{ gr}$ et $\lambda = 11.9656 \text{ gr}$ à l'Est de Greenwich, on vise un point B.

1. Dans quelle zone de Lambert Tunisie se trouve le point A ? Calculer ses coordonnées planes (X,Y).

2. L'azimut géodésique de la direction AB est $Az_g = 55.7631 \text{ gr}$. Sachant que $D_v = 1.52 \text{ dmgr}$, calculer G le gisement de la direction AB.

3. La distance AB réduite à l'ellipsoïde de référence est $D_e = 5421.32 \text{ m}$. Sachant que l'altération linéaire dans la région des points A et B vaut -9 cm/km , calculer la distance AB réduite au plan.

Exercice 7.3. D'après les coordonnées de deux points A et B vous trouvez la distance $AB = 5427.380 \text{ m}$. Sachant que :

a - l'altération linéaire de la représentation dans la région de AB vaut $+8.10^{-5}$,

b - les altitudes des points A et B sont : $H_A = 1000.00 \text{ m}$ et $H_B = 1200.00 \text{ m}$. Calculer la distance suivant la pente D_p entre les points A et B matérialisés sur le terrain.

Problème 7.9. On a mesuré une distance suivant la pente $D_p = 20130.858 \text{ m}$ entre deux points A et B avec $H_A = 235.07 \text{ m}$, $H_B = 507.75 \text{ m}$, on prendra comme rayon terrestre $R = 6378 \text{ km}$.

1. Calculer la distance D_e suivant l'ellipsoïde en utilisant la formule rigoureuse.

2. Sachant que le module linéaire m vaut 0.999850371 , calculer la distance D_r réduite au plan de la représentation plane utilisée.

3. Les coordonnées géodésiques du point A sont : $\varphi = 10.72453 \text{ gr}$, $\lambda = 41.44903 \text{ gr}$. Par des observations astronomiques, on a déterminé les coordonnées astronomiques $\varphi_a = 10.72574 \text{ gr}$ et $\lambda_a = 41.45052 \text{ gr}$ du point A et l'azimut astronomique de la direction AB soit $Az_a = 89.68499 \text{ gr}$. Transformer l'azimut astronomique de la direction AB en azimut géodésique en utilisant l'équation de Laplace donnée par :

$$Az_g = Az_a + (\lambda - \lambda_a) \cdot \sin \varphi$$

4. Calculer le gisement G de la direction AB sachant que $D_v = 0.00188 \text{ gr}$.

5. Les coordonnées Lambert Nord Tunisie de A sont $X = 478022.43 \text{ m}$ et $Y = 444702.22 \text{ m}$. Déterminer alors les coordonnées de B.

6. Calculer l'azimut de B vers A sachant qu'on néglige la correction de la corde de la direction BA et que $\lambda_B = 10.92884 \text{ gr}$.

Problème 7.10. On a mesuré une distance suivant la pente entre les points A ($H_A = 1319.79 \text{ m}$) et B ($H_B = 1025.34 \text{ m}$) avec $D_p = 16483.873 \text{ m}$.

1. Calculer la distance D_e distance réduite à l'ellipsoïde de référence par la formule rigoureuse, on prendra le rayon de la Terre $R = 6378 \text{ km}$.

2. Calculer la distance D_r réduite à la représentation plane Lambert si l'altération linéaire de la zone est de -14 cm/km .

3. La direction AB a un azimut géodésique $Az_g = 297.56225 \text{ gr}$. Donner l'expression du gisement G de AB en fonction de Az_g , γ la convergence des méridiens et D_v la correction de la corde, sachant que la représentation plane utilisée est le Lambert Sud Tunisie et que le point A est au nord du parallèle origine.

4. On donne $D_v = -13.7 \text{ dmgr}$ et $\lambda = 9.3474734 \text{ gr}$ la longitude de A, calculer G.

5. En déduire les coordonnées (X_B, Y_B) de B si $X_A = 363\,044.79\text{ m}$ et $Y_A = 407\,020.09\text{ m}$.

6. Déterminer les coordonnées géographiques (φ, λ) de B.

On rappelle que: $a = 6\,378\,249.20\text{ m}$ et $e^2 = 0.006\,803\,4877$.

Problème 7.11. On donne deux points A et B dont les coordonnées géodésiques dans le système géodésique Tunisien sont:

$$A \begin{cases} \varphi = 40.4549\,830\text{ gr} \\ \lambda = 9.5954\,2429\text{ gr} \\ h = 742.40\text{ m} \end{cases} \quad B \begin{cases} \varphi' = 40.3385\,861\text{ gr} \\ \lambda' = 9.4548\,3610\text{ gr} \\ h' = 987.00\text{ m} \end{cases} \quad (7.2)$$

On a mesuré la distance D_P suivant la pente entre A et B soit $D_P = 16\,259.249\text{ m}$.

1. Calculer la distance D_e réduite à la surface de l'ellipsoïde de référence.

2. Rappeler l'expression du module linéaire m de la représentation Lambert Nord Tunisie.

3. Calculer le module linéaire moyen des modules linéaires calculés en A et B.

4. Calculer alors D_r la distance réduite au plan de la représentation Plane Lambert Nord Tunisie.

5. En A, on déterminé l'azimut géodésique A_{zg} de A vers B. En négligeant dv la correction de la corde, calculer le gisement G de la direction AB.

6. Calculer (X, Y) les coordonnées Lambert Nord Tunisie du point A. En déduire alors (X', Y') les coordonnées Lambert Nord Tunisie du point B à partir de celles de A.

7. Calculer directement les coordonnées (X'', Y'') de B. Comparer les avec celles de la question précédente?

(On donne $a = 6\,378\,249.20\text{ m}$, $e^2 = 0.006\,803\,4877$, $k_N = 0.999625544$, rayon moyen de la Terre $R = 6\,378\,000\text{ m}$)

7.3 LA REPRÉSENTATION UTM

Exercice 7.4. Dans cet exercice, on voudrait justifier l'arrêt à l'ordre 8 de l'expression de $Y(UTM)$ en fonction de λ . On donne: $\varphi = 40.00$ gr et $a = 6378249.20$ m, $e^2 = 0.0068034877$.

1. Calculer numériquement $e'^2, \eta^2, t^2 = tg^2\varphi$ et $N(\varphi)$.
2. Calculer numériquement le coefficient a_8 :

$$a_8 = \frac{1}{40320} N \cos^7 \varphi \sin \varphi (165 - 61t^2 + 537t^4 + 9679\eta^2 - 23278t^2\eta^2 + 9244\eta^4 + 358t^4\eta^2 - 19788t^2\eta^4)$$

3. On donne $\lambda = 1.23546$ gr, calculer $a_8\lambda^8$ et conclure.

Problème 7.12. Soit le point A de coordonnées géodésiques: $\varphi = 40.9193$ gr et $\lambda = 11.9656$ gr à l'Est de Greenwich. On considère la représentation plane UTM tronquée suivante, de méridien central $\lambda_0 = 9^\circ$ définie par les formules :

$$\begin{cases} X = a_1 \cdot (\lambda - \lambda_0) + a_3 \cdot (\lambda - \lambda_0)^3 \\ Y = g(\varphi) + a_2 \cdot (\lambda - \lambda_0)^2 \end{cases}$$

où φ, λ et λ_0 sont exprimées en rd, avec:

$$a_1 = N(\varphi) \cdot \cos \varphi$$

$$a_2 = \frac{a_1}{2} \cdot \sin \varphi$$

$$a_3 = \frac{a_1 \cos^2 \varphi}{6} (1 - tg^2 \varphi + e'^2 \cdot \cos^2 \varphi)$$

$$N(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi}}$$

$$g(\varphi) = a(1 - e^2)(1.0051353 \cdot \varphi - 0.0025731 \sin 2\varphi)$$

$$a = 6378249.20 \text{ m}, e^2 = 0.0068034877, e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2}$$

1. Montrer que les coordonnées du point A sont: $X = 157833.48$ m, $Y = 4078512.97$ m, on justifie les résultats.

2. Soit le point B de coordonnées ($X = 160595.98$ m; $Y = 4078564.53$ m). Sachant que B est situé sur le même parallèle que A, calculer la longitude λ' de B.

3. Calculer le gisement G et la distance AB.

4. Sachant que la convergence des méridiens γ est donnée par $tg \gamma = (\lambda - \lambda_0) \sin \varphi$ et qu'on néglige le Dv , calculer l'azimut de la direction AB.

5. Calculer l'azimut de B vers A en négligeant le Dv de B vers A.

6. En calculant les coordonnées UTM de A et B, on trouve respectivement $X_A = 657770.34$ m, $Y_A = 4076891.20$ m; $X_B = 660531.74$ m, $Y_B = 4076942.76$ m. Calculer la distance AB par les coordonnées UTM. En déduire l'erreur relative sur la distance en utilisant les coordonnées de l'UTM tronquée.

Les Transformations de Passage entre Les Systèmes Géodésiques

8.1 LES TRANSFORMATIONS D2 DE PASSAGE ENTRE LES SYSTÈMES GÉODÉSQUES

Exercice 8.1. On donne le modèle bidimensionnel suivant, de transformation entre deux systèmes géodésiques, défini par:

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21.662m \\ -627.748m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.999988149 & -0.000025928 \\ -0.000025928 & 0.999988149 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}$$

1. S'agit-il du modèle bidimensionnel de Helmert? Justifier.
2. Donner les valeurs numériques respectivement du facteur d'échelle et de l'angle de la rotation entre les deux systèmes.

8.2 LES TRANSFORMATIONS D3 DE PASSAGE ENTRE LES SYSTÈMES GÉODÉSQUES

Problème 8.1. Soient les trois tableaux ci-dessous des coordonnées 3D respectivement dans les systèmes S1 et S2 et à transformer dans le système S2:

<i>Nom</i>	<i>X(m)</i>	<i>Y(m)</i>	<i>Z(m)</i>
1	4300244.860	1062094.681	4574775.629
2	4277737.502	1115558.251	4582961.996
3	4276816.431	1081197.897	4591886.356
4	4315183.431	1135854.241	4542857.520
5	4285934.717	1110917.314	4576361.689
6	4217271.349	1193915.699	4618635.464
7	4292630.700	1079310.256	4579117.105

<i>Nom</i>	<i>X(m)</i>	<i>Y(m)</i>	<i>Z(m)</i>
1	4300245.018	1062094.592	4574775.510
2	4277737.661	1115558.164	4582961.878
3	4276816.590	1081197.809	4591886.238
4	4315183.590	1135854.153	4542857.402
5	4285934.876	1110917.227	4576361.571
6	4217271.512	1193915.612	4618635.348
7	4292630.858	1079310.168	4579116.986

<i>Nom</i>	<i>X(m)</i>	<i>Y(m)</i>	<i>Z(m)</i>
A	4351694.594	1056274.819	4526994.706
B	4319956.455	1095408.043	4548544.867
C	4303467.472	1110727.257	4560823.460
D	4202413.995	1221146.648	4625014.614

1. Déterminer les paramètres du modèle de Burša-Wolf à 7 paramètres.
2. Calculer les coordonnées 3D des points du troisième tableau dans le système S2.

Géodésie Spatiale

9.1 NOTIONS SUR LE MOUVEMENT D'UN SATELLITE ARTIFICIEL DE LA TERRE

Exercice 9.1. 1. Montrer que: $r = a(1 - e \cos E)$.
2. Démontrer à partir des formules du cours la relation:

$$\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}$$

Aide: exprimer $\operatorname{tg}(\nu/2)$ en fonction de $\operatorname{tg} \nu$.

Exercice 9.2. A partir de l'expression de X_C , montrer que X_C vérifie l'équation du mouvement non perturbé pour la composante X , soit:

$$\ddot{X}_C + \frac{\mu}{r^3} X_C = 0$$

Problème 9.1. La Terre est supposée sphérique, homogène de rayon $R = 6371000m$. Le produit de la constante universelle de gravitation terrestre G par la masse M de la Terre soit $GM = 3.986005 \cdot 10^{14} m^3 s^{-2}$. Un satellite géodésique a une trajectoire telle que son altitude maximale est $1100km$ et son altitude minimale $800km$.

1. Donner la période de ce satellite.
2. Quelle est l'excentricité de sa trajectoire?
3. On mesure la distance du satellite à une station au sol de latitude $43^\circ,5$ et d'altitude nulle, lors du passage du satellite à la verticale de la station, soit $D = 812000m$.
 - a - Quelle est l'anomalie vraie du satellite à cet instant, sachant qu'il vient de passer au périhélie.
 - b - Combien de temps s'est écoulé depuis le passage au périhélie?

Problème 9.2. Une comète décrit autour du Soleil une ellipse d'excentricité e et de demi-grand axe a et de demi-petit axe b où le Soleil occupe un des foyers. L'équation de l'orbite de la comète en coordonnées polaires est donnée par:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu}$$

avec r la distance Soleil- comète.

1. Déterminer les distances r_A et r_P lorsque la comète est à l'apogée et au périhélie en fonction de a et e .

2. La comète de Halley a une orbite fortement excentrique : son apogée est à 0.53 UA du Soleil et sa périhélie est à 35.1 UA. Calculer e .

3. En utilisant la loi des aires et la troisième loi de Kepler, montrer que la constante des aires C est exprimée par:

$$C^2 = \frac{b^2}{a} G.M$$

où G, M désignent respectivement la constante de la gravitation universelle et la masse du Soleil.

4. On pose : $u = \frac{1}{r}$. Donner l'expression du carré de la vitesse v^2 de la comète en fonction de u et $\frac{du}{d\nu}$. Montrer que v^2 peut s'écrire sous la forme:

$$v^2 = G.M \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

5. Déterminer l'expression du rapport des vitesses à l'apogée et au périhélie $\frac{v_A}{v_P}$ en fonction de e .

6. Calculer numériquement ce rapport pour le cas de la comète de Halley.

On donne:

- 1 UA = 149 597 870 km,

- $G = 6.672 \times 10^{-11} \text{ m}^3.\text{kg}^{-1}.\text{s}^{-2}$,

- $M = 1.9891 \times 10^{30} \text{ kg}$.

Part III
THÉORIE DES MOINDRES CARRÉS

Chapter 10

Modèles Linéaires de Compensation

10.1 EXERCICES ET PROBLÈMES

Exercice 10.1. Soient U un ouvert convexe d'un espace de Banach¹ réel E c'est-à-dire un espace vectoriel normé complet sur \mathbb{R} et f une fonction à valeurs réelles, différentiable et convexe dans U . Montrer que si $f'(x_0) = 0$ en un point $x_0 \in U$, alors f a un minimum absolu en x_0 .

Exercice 10.2. Montrer que dans un espace de Banach réel E , la fonction $f = \|\cdot\|^2$ est strictement convexe, c'est-à-dire, $\forall \alpha \in]0, 1[$, $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$, pour tout couple $(x, y) \in E^2$.

Aide: utiliser l'identité remarquable:

$$\|\alpha x + (1 - \alpha)y\|^2 = \alpha\|x\|^2 + (1 - \alpha)\|y\|^2 - \alpha(1 - \alpha)\|x - y\|^2$$

Exercice 10.3. On note F une surface de \mathbb{R}^3 définie par la représentation paramétrique:

$$\mathbf{OM} = (a_1(u, v), a_2(u, v), a_3(u, v))^T$$

où u et v sont deux paramètres réels. On se donne un point $P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

1. Donner une condition géométrique portant sur le plan tangent à F au point $M_0(u_0, v_0)$ pour que la différentielle de la fonction $(u, v) \rightarrow \varphi(u, v) = \|\mathbf{OP} - \mathbf{OM}(u, v)\|^2$ soit nulle en $M_0(u_0, v_0)$.

Exercice 10.4. Soient U un ouvert convexe d'un espace de Banach réel E et f une application différentiable de U dans \mathbb{R} .

1. Montrer que f est convexe dans U si et seulement si:

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

pour tout couple de points $x, x_0 \in U$.

¹ **Stefan Banach** (1892-1945): mathématicien polonais.

2. On suppose $E = \mathbb{R}^n$ et f de classe C^2 soit deux fois différentiable et f'' continue; pour $x \in U$, soit φ_x la forme quadratique définie par :

$$\varphi_x(h) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) h_i h_j, \quad h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$$

Montrer que f est convexe dans U si et seulement si φ_x est positive pour tout $x \in U$ soit $\varphi_x(h) \geq 0$ pour $x \in U$ et $h \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 10.5. Soit un triangle ABC , on observe les angles $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ et les côtés $BC = a, AC = b$ et $AB = c$:

$$\begin{cases} \hat{A} = 43.77160 \text{ gr} & \sigma_{\hat{A}} = 3.1 \text{ dmgr} \\ \hat{B} = 98.39043 \text{ gr} & \sigma_{\hat{B}} = 3.1 \text{ dmgr} \\ \hat{C} = 57.83858 \text{ gr} & \sigma_{\hat{C}} = 3.1 \text{ dmgr} \\ a = 333.841 \text{ m}, & \sigma_a = 0.005 \text{ m} \\ b = 525.847 \text{ m}, & \sigma_b = 0.010 \text{ m} \\ c = 414.815 \text{ m}, & \sigma_c = 0.005 \text{ m} \end{cases}$$

1. Calculer les angles et les côtés compensés.
2. Calculer les poids de l'angle \hat{A} et du côté a .
3. Déterminer une estimation du facteur de variance unitaire.

Problème 10.1. Les directions suivantes sont observées respectivement aux stations A, B, C et D d'un quadrilatère $ABDC$ comme suit:

$$\begin{aligned} \text{Station A} &= \begin{cases} \text{vers B : } 0.00000 \text{ gr} \\ \text{vers C : } 74.16667 \text{ gr} \end{cases} \\ \text{Station B} &= \begin{cases} \text{vers D : } 0.00000 \text{ gr} \\ \text{vers C : } 82.46080 \text{ gr} \\ \text{vers A : } 170.62531 \text{ gr} \end{cases} \\ \text{Station C} &= \begin{cases} \text{vers A : } 0.00000 \text{ gr} \\ \text{vers B : } 37.67099 \text{ gr} \\ \text{vers D : } 85.08302 \text{ gr} \end{cases} \\ \text{Station D} &= \begin{cases} \text{vers C : } 0.00000 \text{ gr} \\ \text{vers B : } 70.12809 \text{ gr} \end{cases} \end{aligned}$$

Les observations sont non corrélées. l'écart quadratique moyen de ces observations est identique et vaut $\sigma_d = 6.2 \text{ dmgr}$.

1. Compenser les directions et calculer leurs poids et celui de l'angle CBA .
2. Calculer l'estimateur s^2 du facteur de variance unitaire et celui de $\frac{s^2}{\sigma^2}$.
3. Des observations de nivellement ont été effectuées sur les lignes ABC et BCD . Les différences d'altitudes observées sont les suivantes:

$$H_A - H_B = 0.509 \text{ m}$$

$$H_B - H_D = 1.058 \text{ m}$$

$$H_A - H_C = 3.362 \text{ m}$$

$$H_D - H_C = 1.783 \text{ m}$$

$$H_B - H_C = 2.829 \text{ m}$$

Les observations sont non corrélées et de précision identique. Compenser les observations ci-dessus et calculer un estimateur du facteur de variance unitaire.

Problème 10.2. 1. Montrer que dans un cheminement altimétrique de précision, le poids de l'observation entre deux repères est inversement proportionnel de leur distance en supposant l'égalité des portées et que les observations sont non corrélées.

2. Une polygonale ABCD (voir **Fig. 10.1**) a été observée par le nivellement de précision. L'instrument utilisé a une précision de 2mm par km. Les observations considérées non corrélées sont les suivantes:

$$H_C - H_A = 1.878 \text{ m}, \quad AC = 6.44 \text{ km}$$

$$H_D - H_A = 3.831 \text{ m}, \quad AD = 3.22 \text{ km}$$

$$H_D - H_C = 1.954 \text{ m}, \quad CD = 3.22 \text{ km}$$

$$H_B - H_A = 0.332 \text{ m}, \quad AB = 6.44 \text{ km}$$

$$H_D - H_B = 3.530 \text{ m}, \quad BD = 3.22 \text{ km}$$

$$H_C - H_B = 1.545 \text{ m}, \quad BC = 6.44 \text{ km}$$

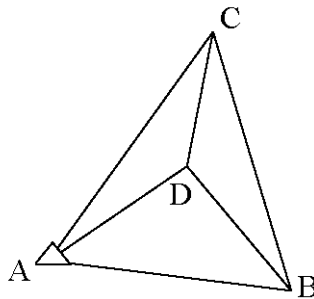


Fig. 10.1 La polygonale observée

L'altitude du repère A est de 3.048 m et non entachée d'erreurs. Calculer par compensation des observations les altitudes des repères B, C et D et leurs écarts-types.

3. Calculer l'écart-type de la différence d'altitudes entre les repères C et D.
4. Donner une estimation de la précision par km du nivellement effectué.

Problème 10.3. On veut étalonner un anéroïde, appareil donnant la pression de l'air; par la formule:

$$D = d + \alpha t + \gamma$$

où α, γ sont deux constantes, t la température en degrés centigrades. Les paramètres d et D sont lus respectivement de l'anéroïde et à partir d'un baromètre en mercure, et exprimés en mm Hg.

Pour déterminer α et γ , des lectures ont été prises à différentes températures (voir tableau 10.1). Ces observations sont non corrélées. L'écart-type de la lecture de d est de 0.14 mm Hg;

t	d	D
° Centigrade	mm Hg	mm Hg
6.0	761.3	762.3
10.0	759.1	759.5
14.0	758.4	758.7
18.0	763.1	763.0

Table 10.1 Table des observations

t et D sont supposées sans erreurs.

1. Calculer par la méthode des moindres carrés les constantes α et γ .
2. Estimer le facteur de variance unitaire.
3. Déterminer la variance et la covariance de α et γ .

Problème 10.4. En statistiques, la loi normale est une famille de distributions de probabilités caractérisées par la fonction de densité:

$$p(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

où μ est la moyenne et σ^2 la variance. On note par $l(x, \mu, \sigma) = \text{Log} p(x, \mu, \sigma)$, soit:

$$l(x, \mu, \sigma) = -\text{Log} \sigma - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

Soit X une variable aléatoire ayant comme fonction de densité $p(x, \mu, \sigma)$. On rappelle les opérateurs suivants espérance mathématique ou moyenne et variance:

$$E[f(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)p(x, \mu, \sigma)dx$$

$$V(f(X)) = E[(E[f(X)] - f(X))^2]$$

On donne la formule: $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. Montrer que:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x, \mu, \sigma)dx = \mu$$

$$\sigma^2(X) = \text{Var}(X) = \text{Cov}(X, X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 p(x, \mu, \sigma)dx = \sigma^2$$

2. Montrer que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^4 e^{-u^2} du = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

3. Calculer $\frac{\partial l}{\partial \mu} \frac{\partial l}{\partial \sigma}$.

4. On pose $\theta = (\mu, \sigma)$. Soit T_θ l'espace engendré par $(\frac{\partial l}{\partial \mu}, \frac{\partial l}{\partial \sigma})$. On définit sur T_θ l'opérateur $\langle \cdot, \cdot \rangle: T_\theta \times T_\theta \rightarrow \mathbb{R}$ à A, B deux variables aléatoires $\in T_\theta$:

$$\langle A, B \rangle = E[A(x)B(x)]$$

Justifier qu'on peut écrire:

$$E[A(x)B(x)] = \text{Cov}(A(x), B(x)) = E[(E[A(x)] - A(x))(E[B(x)] - B(x))]$$

5. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur T_θ .

6. On pose: $e_1 = \frac{\partial l}{\partial \mu}$ et $e_2 = \frac{\partial l}{\partial \sigma}$. On définit le tenseur métrique sur T_θ par:

$$g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$$

Montrer que la matrice $g = (g_{ij})$ est donnée par:

$$g = \frac{1}{\sigma^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et que la première forme fondamentale sur T_θ s'écrit:

$$ds^2 = \frac{1}{\sigma^2} (d\mu^2 + 2d\sigma^2)$$

Problème 10.5. Soit un triangle de côtés a, b, c et d'angles A, B et C . On se propose:
- d'estimer \hat{a}, \hat{b} et \hat{c} , et les variances de ces déterminations. Les observations sont:

$$\begin{cases} a = 96.48 \text{ mm} \\ b = 115.50 \text{ mm} \\ A = 63.042 \text{ gr} \\ B = 99.802 \text{ gr} \\ C = 37.008 \text{ gr} \end{cases} \quad (10.1)$$

On choisit ici comme unités normalisées le décimillimètre (0.1 mm) pour les mesures de distances, et le décimilligrade (0.1 gr) pour les angles.

On prend les poids égaux aux inverses des carrés des emq de chaque observation. On donne la matrice des poids P :

$$P = \begin{pmatrix} 0.277 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.160 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.524 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.524 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.524 \end{pmatrix}$$

On prendra comme valeurs approchées des inconnues $a_0 = a$; $b_0 = b$; $c_0 = a \frac{\sin C}{\sin A}$.

1. Ecrire les paramètres observés et les valeurs observées des inconnues dans les nouvelles unités.

2. Soit $X = (a, b, c)$ le vecteur des inconnues. On adopte le système suivant liant les inconnues aux observables:

$$\begin{cases} \dot{a} = \hat{a} \\ \dot{b} = \hat{b} \\ \text{Arccos} \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \hat{A} \\ \text{Arccos} \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \hat{B} \\ \text{Arccos} \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \hat{C} \end{cases} \quad (10.2)$$

Ceci étant, on posera pour les grandeurs à déterminer:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= a_0 + da = a + da \\ \dot{b} &= b_0 + db = b + db \\ \dot{c} &= c_0 + dc \end{aligned}$$

et pour les grandeurs observées:

$$\begin{aligned}\dot{a} &= a + v_a \\ \dot{b} &= b + v_b \\ \dot{A} &= A + v_A \\ \dot{B} &= B + v_B \\ \dot{C} &= C + v_C\end{aligned}$$

En linearisant la troisième équation de (10.2), montrer que l'équation d'observation s'écrit:

$$\frac{1}{\sin A} \frac{a_0}{b_0 c_0} \frac{2000}{\pi} da - \frac{1}{\sin A} \frac{a_0^2 + b_0^2 - c_0^2}{2b_0^2 c_0} \frac{2000}{\pi} db - \frac{1}{\sin A} \frac{a_0^2 + c_0^2 - b_0^2}{2b_0 c_0^2} \frac{2000}{\pi} dc = -k_A \frac{2000}{\pi} + v_A$$

où :

$$k_A = \frac{b_0^2 + c_0^2 - a_0^2 - 2b_0 c_0 \cos A}{2b_0 c_0 \sin A}$$

(étant entendu qu'on exprime v_A en dcgr).

3. Montrer que le système des moindres carrés $AX = L + V$ s'écrit:

$$\begin{pmatrix} 1. & 0. & 0. \\ 0. & 1. & 0. \\ 1.00375 & -0.83924 & 0.00143 \\ -1.00571 & 1.20285 & -0.66128 \\ 0.00094 & -0.36239 & 0.65918 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} da \\ db \\ dc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0. \\ 0. \\ 0.97981 \\ -2.88449 \\ 0.42396 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_a \\ v_b \\ v_A \\ v_B \\ v_C \end{pmatrix}$$

4. Résoudre le système précédent par la méthode des moindres carrés et montrer que la matrice normale $N = A^T P A$ est donnée par:

$$N = \begin{pmatrix} 3.35605 & -3.13044 & 1.01750 \\ - & 3.64132 & -1.57937 \\ - & - & 1.32971 \end{pmatrix}$$

5. Montrer que:

$$X = \begin{pmatrix} +0.62971 \\ -0.90962 \\ 0.9482 \end{pmatrix}$$

6. Déterminer les variances des inconnues σ_a^2 , σ_b^2 et σ_c^2 .

Problème 10.6. On considère $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ et on définit la fonction par :

$$f(u, v) = u^4 + 6uv + 1.5v^2 + 36v + 405$$

1. Chercher les points critiques réels de f .

2. Montrer que le point $x^* = (u, v) = (3, -18)$ est un point minimum de f .

3. Montrer que le Hessien de f est une matrice définie positive si $u^2 > 1$ et indéfinie si $u^2 < 1$.

4. Montrer que la formule de récurrence de Newton s'écrit avec $J = 1.5(u_k^2 - 1)$:

$$u_{k+1} = \frac{u_k^3 + 9}{J}, \quad v_{k+1} = -\frac{2u_k^3 + 18u_k^2}{J}$$

Problème 10.7. Soient le plan (P) et la sphère (\mathbb{S}^2) d'équations respectivement: $x + y + z = 1$ et $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. On veut chercher le point $M \in (\mathbb{S}^2)$ tel que sa distance au plan (P) soit maximale.

1. Montrer que la distance d'un point $M(X, Y, Z)$ au plan (P) est donnée par :

$$d = |X + Y + Z - 1|/\sqrt{3}$$

2. Pour répondre à la question posée ci-dessus, on considère la fonction: $E(x, y, z, \lambda) = -(x + y + z - 1)^2 - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$. Ecrire le système d'équations donnant les points critiques de E qu'on note par (1).

3. Montrer que si $\lambda = -1$, on arrive à une contradiction. On suppose que $\lambda \neq -1$. Que représente le cas $\lambda = 0$.

4. On suppose que $\lambda \notin \{-3, -1, 0\}$. Résoudre le système (1). Soit le point M_2 tel que ses coordonnées sont négatives.

5. Montrer que la matrice hessienne de E pour M_2 s'écrit sous la forme:

$$H = \begin{pmatrix} \mu^2 & -2 & -2 \\ -2 & \mu^2 & -2 \\ -2 & -2 & \mu^2 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \mu = 1 + \sqrt{3}$$

6. Si on pose $U = (X, Y, Z)^T \in (\mathbb{S}^2)$. Montrer que $U^T \cdot H \cdot U = 2[3 + \sqrt{3} - (X + Y + Z)^2]$. En déduire que $U^T \cdot H \cdot U > 0$ pour tout $U \neq 0 \in (\mathbb{S}^2)$.

7. Montrer que pour le point M_2 , on obtient un minimum strict de E . A-t-on répondu à la question du problème.

Modèles Non-Linéaires de Compensation

Problème 11.1. Dans le plan affine \mathcal{P} , on a mesuré trois distances planes entre un point inconnu $P(X_1, X_2)$ vers trois points connus $P_i(a_i, b_i)_{i=1,3}$ dans trois directions différentes. On considère le modèle non linéaire de Gauss-Markov défini par:

$$\zeta(X) = L - e, \quad e \in \mathcal{N}(0, \Gamma)$$

avec:

- L : le vecteur des observations $(3 \times 1) = (L_1, L_2, L_3)^T$;
- X : le vecteur des inconnues $(2 \times 1) = (X_1, X_2)^T$;
- e : le vecteur des erreurs $(3 \times 1) = (e_1, e_2, e_3)^T$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0, \Gamma)$ avec $E(e) = 0$ et $\Gamma = E(ee^T)$ la matrice de dispersion ou variance, on prendra $\Gamma = \sigma_0^2 \cdot P^{-1}$, P est la matrice des poids égale à la matrice unité I_3 , σ_0 une constante positive;
- ζ : est une fonction donnée injective d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par:

$$\zeta(X) = \zeta(X_1, X_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} [(X_1 - a_1)^2 + (X_2 - b_1)^2] \\ \frac{1}{2} [(X_1 - a_2)^2 + (X_2 - b_2)^2] \\ \frac{1}{2} [(X_1 - a_3)^2 + (X_2 - b_3)^2] \end{pmatrix}$$

On prendra comme composante L_i du vecteur observation la quantité $L_i = \frac{D_i^2 \text{observée}}{2}$

1. Montrer que les vecteurs $\frac{\partial \zeta}{\partial X_1}, \frac{\partial \zeta}{\partial X_2}$ sont linéairement indépendants en chaque point $X \in U$.
2. Montrer que les fonctions $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial X_i \partial X_j}$ sont continues sur U pour $i, j \in \{1, 2\}$.
3. Posons: $J = \|L - \zeta(X)\|^2$
Calculer les coefficients de la matrice $(\frac{\partial^2 J}{\partial X_i \partial X_j}), i, j \in \{1, 2\}$.

4. Soit la matrice carrée définie par:

$$g(X) = (g_{ij}) \quad \text{avec } g_{ij} = \left\langle \frac{\partial \zeta(X)}{\partial X_i}, \frac{\partial \zeta(X)}{\partial X_j} \right\rangle \quad \begin{cases} i = 1, 2 \\ j = 1, 2 \end{cases}$$

Calculer les coefficients g_{ij} .

5. Introduisons la matrice B définie par:

$$B(X, L) = (B_{ij}) \quad \text{avec } B_{ij} = g_{ij} - \left\langle L - \zeta(X), \frac{\partial^2 \zeta}{\partial X_i \partial X_j} \right\rangle \quad \begin{cases} i = 1, 2 \\ j = 1, 2 \end{cases}$$

Calculer les éléments de la matrice B et montrer qu'elle est définie positive.

Bibliographie

Parties I-II

1. **F.R. Helmert.** 1884. *Die Mathematischen und Physikalischen Theorien der Höheren Geodäsie*; Vol 2, Leipzig, B.G Teubner(reprinted 1962).
2. **H. Poincaré.** 1905. Sur les Lignes géodésiques des surfaces convexes. Transactions of the American Mathematical Society. n°6, pp. 237-274; Œuvres 6, pp. 38-84.
3. **F. Tisserand & H. Andoyer.** 1912. *Leçons de Cosmographie.* 6ème édition. Librairie Armand Colin. 396p.
4. **G. Julia.** 1955. Cours de l'Ecole Polytechnique. *Cours de Géométrie Infinitésimale.* Cinquième Fascicule, Deuxième Partie: Théorie des Surfaces. Deuxième édition entièrement refondue. Editeur Gauthier-Villars. 141p.
5. **W.A. Heiskanen & H. Moritz.** 1967. *Physical Geodesy.* Freeman, San Francisco. Reprint, 1979. Institute of Physical Geodesy, Technical University, Graz, Austria. 364p.
6. **J. Dieudonné.** 1968. *Calcul Infinitésimal.* 1ère édition. Collection Les Méthodes. Hermann, Paris. 479p.
7. **A. Fontaine.** 1969. Rapport sur la Géodésie de la Tunisie. OTC.
8. **C.A.C.G.G. (le Comité Associé Canadien de Géodésie et de Géophysique).** 1973. Canadian Surveyor, Vol 27, n°3.
9. **A. Marussi.** 1974. Africa and Modern Geodesy. Proceedings of the First Symposium in Geodesy in Africa, 14-19 January. Khartoum. Soudan.
10. **B. Morando.** 1974. *Mouvement d'un Satellite Artificiel de la Terre.* Gordon & Breach, Paris, London et New York. 255p.
11. **L. Bers.** 1977. Quasiconformal mappings, with applications to differential equations, function theory and topology. Bulletin of the American Mathematical Society, vol 83, n°6, pp. 1083-1100, 1977.
12. **C. Fezzani.** 1979. Analyse de la structure des réseaux astro-géodésiques tunisiens. Thèse de Docteur Ingénieur. Ecole Nationale des Sciences Géographiques. IGN France. 314p.
13. **C. Boucher.** 1979a. Systèmes géodésiques de référence et autres problèmes géodésiques liés à la localisation en mer. Colloque national sur la localisation en mer. Brest, 1-5 octobre 1979. IGN France.
14. **C. Boucher.** 1979b. Les Transformations géométriques entre systèmes géodésiques. Rapport Technique RT/G n°3, SGNM, IGN France.

15. **P. Dombrowski.** 1979. 150 Years after Gauss " disquisitiones generales circa superficies curvas". Astérisque n°62. Publication de la Société Mathématique de France. 153p.
16. **H.M. Dufour.** 1979. Systèmes de références: Systèmes Projectifs. Conférence présentée au Colloque national sur la Localisation en mer. Brest, 1-5 octobre 1979. 27p.
17. **H. Monge.** 1979. L'ellipsoïde de Clarke 1880. Bulletin d'Information de l'IGN France n°39-1979/3, pp. 37-38.
18. **J. Lemenestrel.** 1980. *Cours de Géodésie Élémentaire*, ENSG, IGN France.
19. **J. Commiot.** 1980. *Cours de Cartographie Mathématique*, ENSG, IGN France.
20. **A. Danjon.** 1980. *Astronomie Générale: Astronomie sphérique et Eléments de mécanique céleste*. Seconde édition, revue et corrigée. Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard. 454p.
21. **B. Doubrovine, S. Novikov et A. Fomenko.** 1982. *Géométrie Contemporaine: Méthodes et Application*. Première Partie: Géométrie des surfaces, des groupes de transformations et des champs. Edition Mir, Moscou. 438p.
22. **M. Charfi.** 1983. Les Travaux de revalorisation de la Géodésie Tunisienne. OTC.
23. **P. Vaniček & E.J. Krakiwsky.** 1986. *Geodesy: the Concepts*. North Holland Compagny. 2ème Edition. 697p.
24. **Defense Mapping Agency(DMA).** 1987a. DMA Technical Report 8350.2. Dept of Defense, World Geodetic System 1984, Its definition and relationships with local geodetic systems. 121p.
25. **Defense Mapping Agency.** 1987b. DMA Technical Report 8350.2-A. Part I: Methods, Techniques, and Data used in WGS84 development. Supplement to Department of Defense World Geodetic System 1984 Technical Report. 412p.
26. **Defense Mapping Agency.** 1987c. DMA Technical Report 8350.2-A. Part II: Parameters, formulas, and graphics for the practical application of WGS84. Supplement to Department of Defense World Geodetic System 1984 Technical Report. 775p.
27. **H. Moritz & I.I. Mueller.** 1988. *Earth Rotation :Theory and Observation*. Ungar Publishing Compagny. New York. 617p.
28. **B. Hofmann-Wellenhof, H. Lichtenegger et J. Collins.** 1992. *Global Positioning System, Theory and Practice*. Springer-Verlag Wien New York. 382p.
29. **M. Burša & K. Pěč.** 1993. *Gravity Field and Dynamics of the Earth*. Springer-Verlag. 385p.
30. **Publications de l'Académie Bavaroise de Géodésie, n°58.** 1997. Symposium de la Commission EUREF, Sofia, 4-7 juin 1997. Extrait du rapport présenté par la Suisse. pp. 212-218.
31. **T. Soler.** 1998. A Compendium of transformation formulas useful in GPS work. Journal of Geodesy, Vol.72, n°7/8, pp. 482-490.
32. **E.W. Grafarend.** 1998. Helmut Wolf: Das Wissenschaftliche Werk/ The Scientific Work. Publication de la Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe A, Heft n°115, München 1998. 97p.
33. **P. Petersen.** 1998. *Riemannian Geometry*. Graduate Texts in Mathematics, n°171. Springer-Verlag. 435p.
34. **A. Ben Hadj Salem.** 1999. La Mise à niveau de la Géodésie Tunisienne par l'unification Carthage2000 de ses réseaux, présentée au Premier Atelier Maghrébin de Géodésie. Tunis, 18-20 mai 2000. Publiée dans la revue Géo-Top de l'OTC numéro spécial mai 2000, pp. 6-16.
35. **A. Ben Hadj Salem.** 1999. Note sur les comparaisons des azimuts géodésiques du réseau géodésique primordial Tunisien. 5p.

36. **H. Moritz.** 2000. Geodetic Reference System 1980. *Journal of Geodesy*, vol. 74 n°1, pp. 128-134.
37. **A. Ben Hadj Salem.** 2001. Contrôle de l'azimut d'orientation du système géodésique tunisien Carthage³⁴. Publié dans la revue *Géo-Top* de l'OTC, n°4 février 2002, pp. 63-68.
38. **H.A. Kastrup.** 2008. On the Advancements of Conformal Transformations and their Associated Symmetries in Geometry and Theoretical Physics. arxiv: physics.hist-ph/0808.2730v1. www.arxiv.org. 82p.
39. **Arrêté du ministre de la Défense nationale du 10 février 2009.** 2009. Journal Officiel de la République Tunisienne n°14 du 17 février 2009.
40. **A.N. Pressley.** 2010. *Elementary Differential Geometry*. Springer-Verlag Heidelberg. 395p.
41. **M. Lemmens.** 2011. *Geo-information: Technologies, Applications and the Environment*. Series Geotechnologies and the Environment. Volume 5. Springer Netherlands. 349p.
42. **E. Zeidler.** 2011. *Quantum Field Theory III: Gauge Theory A Bridge Between Mathematicians and Physicists*. Springer-Verlag Heidelberg. 1158p.
43. **A. Ben Hadj Salem.** 2012. Selected Papers. Tome II, pp 165-172.
44. **A. Ben Hadj Salem.** 2013. Histoire de la Topographie en Tunisie : Les Coordonnées Origines Fuseaux. 11p.
45. **United Nations Committee of Experts on Global Geospatial Information Management (UN-GGIM).** 2015. La Résolution adoptée par l'Assemblée générale le 26 février 2015. www.ggim.un.org/docs/A_RES_69_266_F.pdf. 3p.
46. **A. Ben Hadj Salem.** 2017. *Eléments de Géodésie et de la Théorie des Moindres Carrés - Pour les Elèves-Ingénieurs Géomaticiens*. Noor Publishing. 1^{ère} Edition, ISBN : 978 – 3 – 330 – 96843 – 1. 364p.

Partie III

1. **J.M. Ortega & W.C. Rheinboldt.** 1970. *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*. Academic Press. 527p.
2. **A. Bjerhammer.** 1973. *Theory of Errors and Generalized Matrix Inverses*. Elsevier Scientific Publishing Compagny. Amsterdam. 420p.
3. **H. Cartan.** 1979. *Cours de Calcul Différentiel*. Collection Les Méthodes. Hermann, Paris. 362p.
4. **P. Hottier.** 1980. *Théorie des Erreurs*. Ecole Nationale des Sciences Géographiques. IGN France. 81p.
5. **A. Pázman.** 1984. Probability distribution of the multivariate nonlinear least-squares estimates. *Kybernetika* n°20, pp. 209-230.
6. **P.J.G. Teunissen.** 1985. *The Geometry of Geodetic Inverse Linear Mapping and Non-Linear Adjustment*. Publications on Geodesy, n°1, Volume 8, Netherlands Geodetic Commission. 177p.
7. **E.W. Grafarend & B. Schaffrin.** 1989. The Geometry of non-linear adjustment - the planar trisection problem. *FESTCHRIFT to TORBEN KRARUP* edited by E. Kejlo, K. Poder and C.C. Tscherning. Geodætisk Institut, Meddelelse n°58, pp. 149-172. København, Danmark.
8. **P.J.G. Teunissen.** 1990. Nonlinear least squares. *Manuscripta Geodaetica*, Vol 15, n°2, pp. 137-150.

9. **S. Amari & H. Nagaoka.** 2000. *Methods of Information Geometry*. Traduit du japonais par Daishi Harada. Translations of Mathematical Monographs, Vol 191. Oxford University Press. AMS. 206p.
10. **C. Brezinski.** 2005. La Méthode de Cholesky. *Revue d'Histoire des Mathématiques*, publication de la Société Mathématique de France. Vol 11 (2005), pp. 205-238.
11. **P.J. Olver.** 2013. *Nonlinear Systems*. 58p. Université de Minnesota.