

Sobre una ecuación polinomial de grado nueve

Edgar Valdebenito

13-04-2019 17:03:17

Resumen

En esta nota se muestra una raíz real de una ecuación polinomial de grado nueve.

Introducción

Sea $n > 0$ y $p_9(x, n)$ el polinomio definido como sigue

$$p_9(x, n) = 64x^9 - 96nx^7 + 48x^6 + 36n^2x^5 - 12nx^4 - (42 + 4n^3)x^3 + 3nx + 1 \quad (1)$$

Considerando n como parámetro y x como incognita se tiene que la ecuación:

$$p_9(x, n) = 0 \quad (2)$$

posee nueve ceros, tres ceros reales y seis complejos.

En esta nota mostramos una de las raíces reales de (2) en función del parámetro n .

Una raíz real de la ecuación $p_9(x, n) = 0$.

Para $n > 0$ sea $x(n)$ el número definido por:

$$x(n) = \frac{1}{2}R^{1/3} \left(\cos \frac{\theta}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{\theta}{3} \right) + \frac{1}{2}S^{1/3} \left(\cos \frac{\phi}{3} - \sqrt{3} \sin \frac{\phi}{3} \right) \quad (3)$$

donde

$$R = \sqrt{\left(P - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(Q - \frac{1}{2}\right)^2}, \quad S = \sqrt{\left(P + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(Q + \frac{1}{2}\right)^2} \quad (4)$$

$$\theta = -\tan^{-1}\left(\frac{2Q-1}{1-2P}\right), \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{2Q+1}{2P+1}\right) \quad (5)$$

$$P = \sqrt{-\frac{n^3}{54} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{n^3}{27}\right)^2}}, \quad Q = \sqrt{\frac{n^3}{54} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{n^3}{27}\right)^2}} \quad (6)$$

Se puede probar que $x(n)$ es una raíz de (2).

Ejemplo $n=1$.

Para $n=1$, se tiene

$$p_9(x,1) = 64x^9 - 96x^7 + 48x^6 + 36x^5 - 12x^4 - 46x^3 + 3x + 1 = 0 \quad (7)$$

Aplicando las fórmulas (3),(4),(5),(6), se tiene

$$P = \frac{\sqrt{-6+3\sqrt{733}}}{18}, \quad Q = \frac{\sqrt{6+3\sqrt{733}}}{18} \quad (8)$$

$$\theta = -\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{6+3\sqrt{733}}-9}{9-\sqrt{-6+3\sqrt{733}}}\right), \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{9+\sqrt{6+3\sqrt{733}}}{9+\sqrt{-6+3\sqrt{733}}}\right) \quad (9)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{-6+3\sqrt{733}}}{18} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6+3\sqrt{733}}}{18} - \frac{1}{2}\right)^2} \quad (10)$$

$$S = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{-6+3\sqrt{733}}}{18} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6+3\sqrt{733}}}{18} + \frac{1}{2}\right)^2} \quad (11)$$

$$x(1) = 0.3589501704891506724567631825... \quad (12)$$

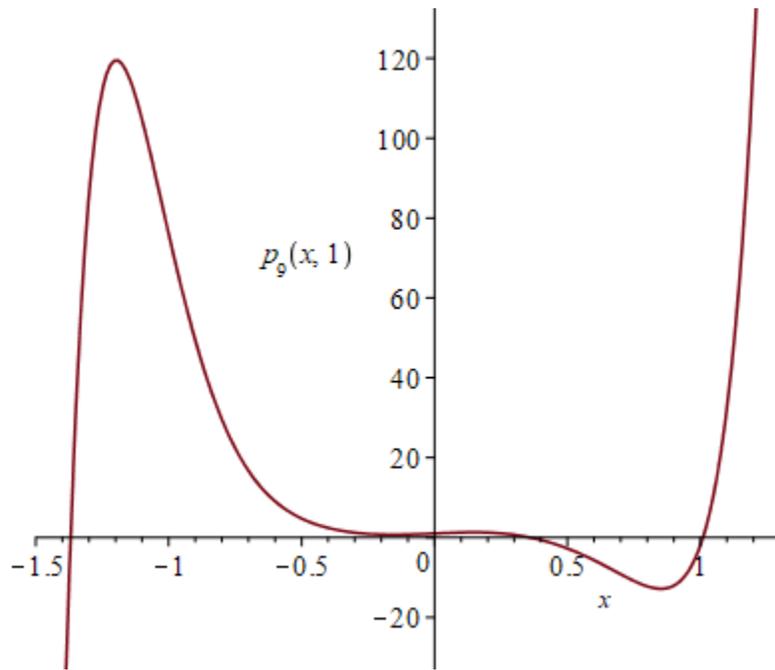


Figura 1.

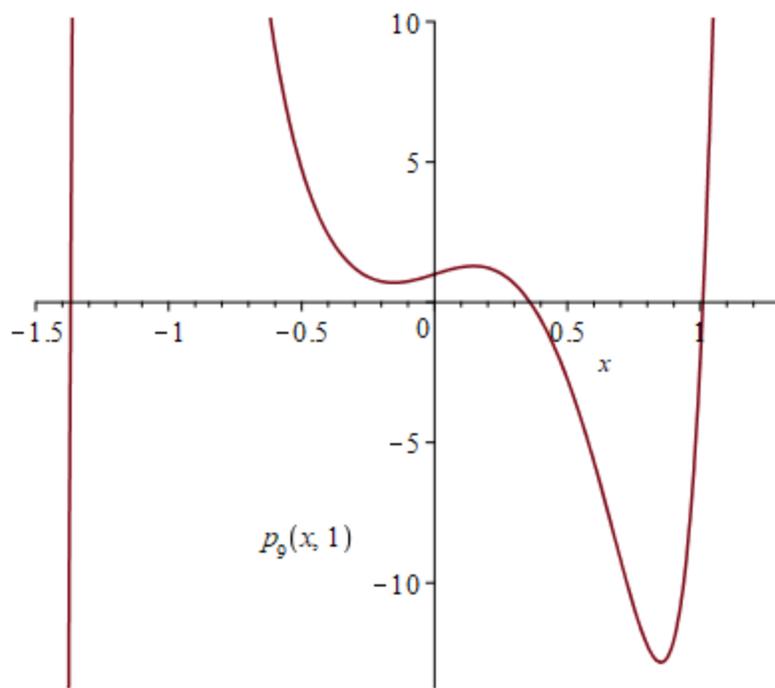


Figura 2.

Referencias

1. Birkhoff, G. and MacLane, S.: A Survey of Modern Algebra, Macmillan , 1953.
2. Cohen, P.M.: Universal Algebra, Harper and Row , 1965.
3. Hall, Jr.,M.: The Theory of Groups, Macmillan , 1959.
4. Rotman, J.J.: The Theory of Groups: An Introduction, Allyn and Bacon , 1965.
5. Tignol, J-P. : Galois theory of algebraic equations, Longman, New York:Wiley, 1988.
6. Weyl, H.: Symmetry , Princeton University Press , 1952.