Explorando una fórmula de Ramanujan

Edgar Valdebenito

14-04-2019 8:48:18

Resumen

En esta nota recordamos una fórmula de Ramanujan y mostramos algunos resultados relacionados con dicha fórmula.

Introducción

En la referencia [1] , página 19 , aparece la fórmula (Ramanujan):

$$2\sqrt{3}\cos 10^{\circ}-1=\sqrt{8-\sqrt{8-\sqrt{8+\sqrt{8-...}}}} \tag{1}$$

La fórmula (1) se puede escribir como:

$$2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{18}-1=2\sqrt{3}\sin\frac{4\pi}{9}-1=\sqrt{8-\sqrt{8-\sqrt{8+\sqrt{8-...}}}} \tag{2}$$

Poniendo $x=2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{18}-1=2\sqrt{3}\sin\frac{4\pi}{9}-1$, tenemos la siguiente ecuación fundamental:

$$x=\sqrt{8-\sqrt{8-\sqrt{8+x}}} \tag{3}$$

En esta nota mostramos fórmulas relacionadas con las ecuaciones (2) y (3).

Fórmulas

Teorema 1. Sea x tal que $x=\sqrt{8-\sqrt{8-\sqrt{8+x}}}$, entonces se tiene:

$$x^8-32x^6+368x^4-1792x^2-x+3128=0 \tag{4}$$

Teorema 2.

$$x^8-32x^6+368x^4-1792x^2-x+3128=$$
$$=\left(x^2-x-8\right)\left(x^3+3x^2-6x-17\right)\left(x^3-2x^2-11x+23\right) \tag{5}$$

Teorema 3.

$$x^3+3x^2-6x-17=$$
$$=\left(x+1+2\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{9}\right)\left(x+1+2\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{9}\right)\left(x+1-2\sqrt{3}\sin\frac{4\pi}{9}\right) \tag{6}$$

Sean a,b,c definidos como sigue:

$$a=-1+2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{18}=-1+2\sqrt{3}\sin\frac{4\pi}{9} \tag{7}$$

$$b=-1+2\sqrt{3}\cos\frac{11\pi}{18}=-1-2\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{9} \tag{8}$$

$$c=-1+2\sqrt{3}\cos\frac{13\pi}{18}=-1-2\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{9} \tag{9}$$

Teorema 4. Sean a,b,c definidos por (7),(8),(9), se tiene:

$$a=\sqrt{8-\sqrt{8-\sqrt{8+a}}} \tag{10}$$

$$b=-\sqrt{8-\sqrt{8+\sqrt{8+b}}} \tag{11}$$

$$c=-\sqrt{8+\sqrt{8-\sqrt{8+c}}} \tag{12}$$

Teorema 5. Sean a,b,c definidos por (7),(8),(9), se tiene:

$$a=\sqrt{8+b} \quad , \quad b=-\sqrt{8+c} \quad , \quad c=-\sqrt{8+a} \tag{13}$$

Teorema 6. Sean a_n,b_n,c_n las sucesiones definidas como sigue:

$$a_{n+1}=\sqrt{8-\sqrt{8-\sqrt{8+a_n}}} \quad ,a_1=0 \tag{14}$$

$$b_{n+1} = -\sqrt{8-\sqrt{8+\sqrt{8+b_n}}} \quad ,b_1 = 0 \tag{15}$$

$$c_{n+1} = -\sqrt{8+\sqrt{8-\sqrt{8+c_n}}} \quad ,c_1 = 0 \tag{16}$$

Entonces se tiene

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad , \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b \quad , \quad \lim_{n\to\infty} c_n = c \tag{17}$$

Teorema 7. Sean a_n, b_n, c_n las sucesiones definidas como sigue:

$$a_{n+1} = \sqrt{8+b_n} \quad , \quad b_{n+1} = -\sqrt{8+c_n} \quad , \quad c_{n+1} = -\sqrt{8+a_n} \quad ,a_1 = b_1 = c_1 = 0 \tag{18}$$

Entonces se tiene

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad , \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b \quad , \quad \lim_{n\to\infty} c_n = c \tag{19}$$

Teorema 8. Sean $\alpha = 2\sqrt{3}\sin\frac{4\pi}{9}, \beta = -2\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{9}, \gamma = -2\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{9}$, entonces se tiene

$$\alpha = 1+\sqrt{7+\beta} \quad , \quad \beta = 1-\sqrt{7+\gamma} \quad , \quad \gamma = 1-\sqrt{7+\alpha} \tag{20}$$

Teorema 9. Sean $\alpha = 2\sqrt{3}\sin\frac{4\pi}{9}, \beta = -2\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{9}, \gamma = -2\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{9}$, y $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ las sucesiones definidas como sigue:

$$\alpha_{n+1} = 1+\sqrt{7+\beta_n} \quad , \quad \beta_{n+1} = 1-\sqrt{7+\gamma_n} \quad , \quad \gamma_{n+1} = 1-\sqrt{7+\alpha_n} \tag{21}$$

Con $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 0$. Entonces se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \gamma_n = \gamma \tag{22}$$

Teorema 10.

$$-1+2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{18} = -1+\sqrt[3]{9+9\sqrt[3]{9+9\sqrt[3]{9+...}}} \tag{23}$$

$$-1+2\sqrt{3}\cos\frac{11\pi}{18} = -2-\frac{1}{9}\left(1+\frac{1}{9}\left(1+\frac{1}{9}(1+...)^3\right)^3\right)^3 \tag{24}$$

$$-1+2\sqrt{3}\cos\frac{13\pi}{18}=-1-\sqrt{9-\frac{9}{\sqrt{9-\frac{9}{\sqrt{9-...}}}}} \tag{25}$$

Teorema 11. Si $x^3-2x^2-11x+23=0$ y $3x=z+2$, entonces se tiene

$$z^3-111z+407=0 \tag{26}$$

Teorema 12. Las raíces de la ecuación $z^3-111z+407=0$ son:

$$z_1=\frac{11}{3}+\frac{1}{111}\left(\frac{11}{3}+\frac{1}{111}\left(\frac{11}{3}+...\right)^3\right)^3 \tag{27}$$

$$z_2=-\sqrt[3]{407+111\sqrt[3]{407+111\sqrt[3]{407+...}}} \tag{28}$$

$$z_3=\sqrt{111-\frac{407}{\sqrt{111-\frac{407}{\sqrt{111-...}}}}} \tag{29}$$

Teorema 13. Si $z=\frac{11}{3}+\frac{1}{111}\left(\frac{11}{3}+\frac{1}{111}\left(\frac{11}{3}+...\right)^3\right)^3$, entonces se tiene

$$\pi=6\sin^{-1}\left(\frac{z}{2\sqrt{37}}\right)+2\sin^{-1}\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{37}}\right) \tag{30}$$

Teorema 14. Si $z=\sqrt[3]{407+111\sqrt[3]{407+111\sqrt[3]{407+...}}}$, entonces se tiene

$$\pi=2\sin^{-1}\left(\frac{z}{2\sqrt{37}}\right)+\frac{2}{3}\sin^{-1}\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{37}}\right) \tag{31}$$

Teorema 15. Si $z=\sqrt{111-\frac{407}{\sqrt{111-\frac{407}{\sqrt{111-...}}}}}$, entonces se tiene

$$\pi = 6\sin^{-1}\left(\frac{z}{2\sqrt{37}}\right) - 2\sin^{-1}\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{37}}\right) \tag{32}$$

Teorema 16.

$$\frac{1+\sqrt{33}}{2} = \sqrt{8+\sqrt{8+\sqrt{8+\left(\frac{1+\sqrt{33}}{2}\right)}}} \tag{33}$$

$$\frac{1-\sqrt{33}}{2} = -\sqrt{8-\sqrt{8-\sqrt{8+\left(\frac{1-\sqrt{33}}{2}\right)}}} \tag{34}$$

Teorema 17. Sean a,b,c definidos por (7),(8),(9) , entonces se tiene:

$$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\frac{13}{17} - \tan^{-1}\left(\frac{1}{a}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{-b}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{-c}\right) \tag{35}$$

Teorema 18. Sean a,b,c definidos por (7),(8),(9) , entonces se tiene:

$$\frac{\pi}{4} = -\tan^{-1}\frac{1}{19} - \tan^{-1}\left(\frac{1}{1+a}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{-1-b}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{-1-c}\right) \tag{36}$$

O de forma equivalente:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} = -\tan^{-1}\frac{1}{19} - \tan^{-1}\left(\left(2\sqrt{3}\sin\frac{4\pi}{9}\right)^{-1}\right) + \\ + \tan^{-1}\left(\left(2\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{9}\right)^{-1}\right) + \tan^{-1}\left(\left(2\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{9}\right)^{-1}\right)\end{aligned} \tag{37}$$

Observación: $\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = 3.141592...$

Referencias

1. B. C. Berndt : Ramanujan's Notebooks Part IV. Springer-Verlag, New York, 1994.
2. B. C. Berndt, H. H. Chan and L.-Ch. Zhang: Radicals and units in Ramanujan's work , Acta Arith. 87 , 1998 , 145-158.