

## 萬物理論數理篇

相對論角度變化(Relativity angle change)

愛因斯坦的狹義相對論提到有鐘慢尺縮的效應，鐘慢尺縮分別對應到的是時間和長度變量，也就是 Noether 對稱的能量和動量，但是另一個對稱的角動量與角度並未述及，本文即在探討狹義相對論所會造成的角度變化效應。

根據洛倫茲變換，分別從 S 系和從 S' 來描述沿 X 軸進行的光信號:

$$\begin{aligned} X &= ct \\ X' &= ct' \end{aligned}$$

此時令  $c = \omega r$

$$\begin{aligned} X &= \omega r t \\ X' &= \omega' r t' \end{aligned}$$

而

$$V = \omega' r$$

求方程式聯立，得到新洛倫茲因子:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega'^2}{\omega^2}}}$$

等效於:(可見自旋最大線速度為光速)

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

可得

$$X' = \gamma(X - \omega' r t)$$

當  $X = r\theta$

$$\theta' = \gamma(\theta - \omega' t)$$

而

$$t' = \gamma\left(t - \theta * \frac{\omega'}{\omega^2}\right)$$

由上兩式可得相對角速度加成公式:

$$\mu' = \frac{d\theta'}{dt'} = \frac{d\theta - \omega' dt}{dt - \frac{\omega'}{\omega^2} d\theta} = \frac{\mu - \omega'}{1 - \frac{\mu * \omega'}{\omega^2}}$$

由以上 X 和  $\theta$  公式類比，當速度越接近光速則角度變化越顯著。

並也可導出力的相對論變化：

$$F_y = \frac{dP_y}{dt} = \frac{\frac{dP_y}{dt'}}{\frac{dt}{dt'}} = \frac{\frac{dP_y'}{dt'}}{\gamma \left(1 + \frac{\omega' d\theta'}{\omega^2 dt'}\right)} = \frac{\frac{F_y'}{\gamma}}{1 + \frac{\omega'}{\omega^2} \left(\frac{\mu - \omega'}{1 - \frac{\mu * \omega'}{\omega^2}}\right)}$$

由於旋力即為重力的相對論效應所產生的力，由上式可知當中心質量自轉角速度等於周邊質量公轉角速度時達到平衡不再有旋力。因此行星自轉角速度傾向與其衛星公轉角速度同步化。注意這與磁力不同，推導磁力過程中用的是相對旋轉線速度 V，因此服膺電荷相對論的漩渦星系傾向平衡時達到一致旋轉線速度，而解決了漩渦星系旋轉曲線問題。同理也可得相對應的動量公式：

$$P_{x'} = \gamma \left( P_x - \frac{\omega' E / r}{\omega^2} \right)$$

又  $E = rF\theta$ ,  $E/r = F\theta$

可得：

$$F_{x'} = \frac{F_x - \left(\frac{\omega'}{\omega^2}\right) F d\theta/dt}{1 - \omega' \mu / \omega^2}$$

又  $F = -F_{x'}$

則：

$$F_x = F_{x'} \left( 1 - \frac{2\mu\omega'}{\omega^2} \right)$$

可見重力的相對論效應就是旋力，旋力乃重力狹義相對論的必然結果。在二維上可以把角速度視為純量。

類似於狹義相對論的導法亦可得到旋轉動能：

$$E_r = \gamma I \omega^2 - I \omega^2 = \frac{I \omega^2}{\sqrt{1 - \frac{\omega'^2}{\omega^2}}} - I \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega'^2$$

另外，由敝人統一場論(三版)一書中重力波一節的推導，旋力場與速度關係：

$$s = \left(\frac{2G}{c^2}\right) \frac{J}{r^2} = 2V$$

又行星運動方程式：

$$\frac{GMm}{r^2} + \frac{Sjm\omega}{r^2} = mr\omega^2$$

兩相對照下可得：

$$ma + 2m\omega V = mr\omega^2$$

可引出旋轉坐標系的科氏力和離心力，可見旋力與科氏力的密切關係。

最後類比電磁力場列出重旋力場的馬克士威方程組：

$$F = m(g + s\omega)$$

$$\text{Div } g = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\text{Div } s = 0$$

$$\text{Curl } g = 0$$

$$\text{Curl } s = r \times \left[ (\varepsilon\mu) \frac{dg}{dt} \right]$$

宇宙方程式(Universe equation)

由於費德里曼方程式，宇宙未來命運可由以下方程式決定:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P)$$

而能量質量密度  $\rho$  與壓力  $P$  之間的比例:

$$P = \omega\rho$$

稱為宇宙方程狀態常數

當  $\omega < -1$ ，鬼魅能量會造成宇宙的大撕裂(Big Rip)

當  $\omega > -1/3$ ，會造成宇宙的大擠壓(Big Crunch)

當  $\omega$  介於以上兩常數之間會有一個加速膨脹的完美宇宙(Quintessence)

宇宙在大霹靂時由普朗克空間膨脹開始產生，普朗克時代的普朗克能量質量密度和普朗克光壓分別為:

$$\rho_p = \frac{E_p}{l_p^3} = \frac{c^7}{h'G^2}$$

$$P_p = \frac{-E_p}{l_p^3} = \frac{-h'}{l_p^3 t_p} = \frac{-c^7}{h'G^2}$$

可見當時的能量質量密度與光壓完全相等，而宇宙之後兩者成一定比例擴張造成固定宇宙方程狀態常數  $\omega = -1$ ，與目前觀測值相符合，可解釋為何我們的宇宙是加速膨脹的完美宇宙，而宇宙未來不會大擠壓或大撕裂。

以上常數假設宇宙是近乎正立方體，但若我們的宇宙最後擴張成球狀，因為球的表面積和體積差一個  $1/3$  的因子。因此若宇宙方程狀態常數  $\omega$  隨時間而變，它最後頂多變成  $-1/3$  仍落於完美宇宙，宇宙未來不

會有大撕裂或大擠壓沒有世界末日。

另外也可給出宇宙場方程式的逆變張量:

$$T^{uv} = \begin{bmatrix} \rho & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & -P_x & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & -P_y & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & -P_z \end{bmatrix}$$

知道了宇宙場方程式的逆變張量與協變張量即可做矩陣運算。

## 普朗克單位與測不準原理(Planck unit & Uncertainty Principle)

由於原始大小的質量（半徑）必須超過史瓦西半徑，以避免黑洞的形成：

$$\frac{h'}{2mc} \geq \frac{2Gm}{c^2}$$

因此，

$$M_p \leq \sqrt{\frac{h'c}{4G}} = 1.088 * 10^{-8} \text{kg}$$

此外，普朗克長度是普朗克質量的半徑

$$L_p = \frac{h'}{2mc} = \sqrt{\frac{h'G}{c^3}} = 1.616 * 10^{-35} \text{meter}$$

但是空間的最小單位應該是普朗克長度的兩倍

$$L_h = \frac{h'}{mc} = \sqrt{\frac{2h's}{c}}$$

而可知重力波

$$g = -\sqrt{\frac{h'G}{c^3}} \omega^2$$

由於右側的第一項是單位空間即普朗克長度（ $l_p$ ），我們可以重新寫出下式為：

$$g = -l_p \omega^2$$

因此知道光波是以空間最小單位一半為振幅做簡諧運動

我們也知道，旋衝力場  $S = 2G / \omega$ 。因此，光也可以攜帶旋力場：

$$s = -2l_p \omega = -l_h \omega$$

重力波振幅為普朗克長度（ $l_p$ ）而其路徑長度(Path length)為  $l_h$

另外在此要重申根據雙狹縫干涉得出的測不準原理應為：

$$XP \geq h'$$

而不是  $1/2h'$  此與  $l_h$  的推導相符節( $X=l_h \geq h'/mc$ )

楊密場論(Yang-Mills theory)

在此也要補充標準模型的楊密場論

$$F_{uv} = \partial_u A_v - \partial_v A_u - [A_u, A_v]$$

而撓率張量為

$$T(X, Y) = D_X Y - D_Y X - [X, Y]$$

$[X, Y]$  是李括號.

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

$$[X, Y] = XY - YX$$

由於楊密場論描寫強力及弱力交互作用，可知楊密場論和電磁場張量一樣也是撓率張量(只是電磁場張量無李括號)，因此可用幾何的方法一統電磁和強弱力。可知強弱力也是有吸引力和排斥力。而重力場為曲率張量，大統一場論即是用幾何方法再統一曲率和撓率。

最後補充一下弱力中的貝他衰變，為何自由中子會衰變但與質子結合的原子核內中子不易衰變?由於中子會放出  $W^-$  玻色子而衰變成質子最後放出電子和微中子，可以想做原子核內質子和  $W^-$  玻色子因電荷異性相吸而阻止了核內中子衰變。

## 電荷相對論和旋轉矩陣(Charge relativity & rotation matrix)

由於電磁場法拉第張量(F)為反對稱張量，則  $F^T = -F$

若正電荷為 F 則負電荷即為  $-F(F^T = -F)$

每個反對稱張量都可用 Cayley transform 來轉換

因此正電荷轉換可得

$$R = (I-F)(I+F)^{-1}$$

負電荷轉換可得

$$R'' = (I+F)(I-F)^{-1}$$

可知  $R * R'' = I$  因此根據定義正負電荷即對應於旋轉方向相反的兩旋轉矩陣，佐證了電荷相對論。