집합과 공리계의 구성

construction of sets and axiomatic system

이 백현

Baekhyun Lee

(연락처·Contact)baekhyunlee@hanmail.net

목차

Ⅰ. 서론·초록(introduction and abstract) 3p

Ⅱ. 집합과 공리계 구성하기

2.1 공리로 폰 노이만 전체 구성하기 4p

2.2 공리를 집합으로 다루기 6p

2.3 위상과 명제를 통해 공리집합의 구성 요건 알아내기 9p

Ⅲ. 결론 14p

참고문헌 15p

Ⅰ. 서론·초록
(introduction and abstract)

이 백 현
Baekhyun Lee

한국어

이 논문은 집합 개념을 몇 가지의 공리로 구성 가능한 것과, 그 공리들 또한 집합으로 다룰 수 있다는 것을 밝히기 위해 작성되었습니다.

English

This paper is written to show that concept of sets can be constructed with a few axioms, and also the axioms can be treated as a set.

Ⅱ. 집합과 공리계 구성하기

2.1 공리로 폰 노이만 전체 구성

우선 집합을 몇 개의 공리를 통해 구성해보려고 한다. 모든 집합을 구성하기 이전에, 우선 공집합과 공집합의 멱집합, 그리고 공집합의 멱집합의 멱집합, …으로 구성된 V(폰 노이만 전체)[0]을 구성해보자. 이는 다음과 같은 공리들로 가능하다.

공집합$\varnothing$은 존재한다.
임의의 집합 n에 대해, n을 원소로 하는 집합이 존재한다.
임의의 집합 A, B에 대해 A, B의 원소를 모두 원소로 가지는 집합이 존재한다.
공집합 외에 원소가 없는 집합은 존재하지 않는다.
임의의 집합 A, B에 대해, 두 집합이 같은 원소를 가진다면 두 집합은 같다.
V의 부분집합 X에 대해, $\varnothing \in X$이고, X의 임의의 집합 n, m에 대하여 $\{n\} \in X$, $\{m\} \in X$이고, $(n \cup m) \in X$인 X는 V이다.

두 번째 공리를 통해 $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\{\varnothing\}\}$, $\{\{\{\varnothing\}\}\}$,…이 가능하며
세 번째, 합집합 공리를 통해 $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$, $\{\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$, … 등이 가능함을 알 수 있다. 따라서 공집합의 멱집합군 $\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\cdots\}=V$이 구성 가능하다.

*멱집합군은 어떤 집합 n에 대해 n의 멱집합의 멱집합의 멱집합의 멱집합…을 무한 번 반복했을 때 구성 가능한 집합이라고 잠시 약속하자. V를 집합으로 다루는 것에 대해서는 '러셀의 역설'과 관련해 후술하겠다.

이는 페아노 공리계[1]의 방법론을 참고했으며 다섯 번째 공리는 체르멜로-프렝켈 공리계[2]의 외연 공리를 그대로 가져왔다.

V를 집합으로 취급한다는 점에서 러셀의 역설[3]을 해결해야 한다. 러셀이 제기한 문제를 위에서 구축한 공리계로 표현하면, V의 부분집합 $M=\{x \mid x \notin x\}$에서 M이 자기자신을 포함하는가?'가 된다.
우선 V의 부분집합 중 $И=\{x \mid x$는 $\varnothing \in И$, $n \in И$에 대해 $\{n\} \in И$을 만족하는 모든 집합$\}$, 즉 $И=\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\{\{\varnothing\}\}\}, \{\{\{\{\varnothing\}\}\}\}, \cdots\}$를 생각해보자. $\varnothing=1$로 표기하기로 약속하고, $\{1\}=2$, $\{2\}=3$, 임의의 n에 대해 $n^+=\{n\}$이라고 약속하면 곧 $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\{\{\varnothing\}\}\}, \{\{\{\{\varnothing\}\}\}\}, \cdots\}=\{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$ 즉 자연수의 집합으로 표현될 수 있음을 알 수 있다.

*$\varnothing=\{\}=1$에서, '{'와 '}' 짝의 개수가 곧 그 집합을 표기하는 숫자가 된다. $\{\}=1$, $\{\{\}\}=2$, $\{\{\{\}\}\}=3$

한편 자연수의 개수가 $\aleph_0$라고 한다면 $И$의 원소의 개수는 $|И|=\aleph_0$가 된다. 이때 $И=\{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$의 원소 중 $\aleph_0$번째 원소를 그대로 $\aleph_0$이라고 하자. 다음과 같은 식이 성립

할 수 있음을 알 수 있다.

$\aleph_0^+=\aleph_0+1=\{\aleph_0\}$

이때 $\aleph_0+1=\aleph_0$이므로, $\aleph_0=\{\aleph_0\}$가 성립한다. 이는 $x=\{x\}$의 꼴로, 사실 다른 공리계, 특히 체르멜로-프렝켈 공리계의 기초 공리(정칙성 공리)와 전면으로 모순되는데, 그 이외의 나머지 공리와는 모순되지 않는다.(예를 들면 $\aleph_0$를 원소로 갖는 $\aleph_0$는 유일하다.)
폰 노이만 식의 자연수 구성, $1=\{0\}$, $2=\{0, 1\}$, 임의의 n에 대해 $n^+=n\cup\{n\}=\{0, 1, 2, 3, \cdots, n\}$를 봤을 때에도 $\aleph_0^+=\aleph_0=\{0, 1, 2, 3, 4, \cdots, \aleph_0\}$이고, $\aleph_0\in\aleph_0$가 성립하므로 V의 부분집합 $\{x \mid x \in x\}$에서, $\{x \mid x \in x\}$의 원소가 존재한다. 또한 이는 앞서 만든 공리계에서는 모순을 일으키지 않는 것을 알 수 있다.

그렇다면 이제 V의 부분집합 $M=\{x \mid x\notin x\}$에서 $M\in M$인지 $M\notin M$인지 알아보자.
일단 $M\in M$을 가정하면, M을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$M=M\cup\{M\}$$

어디서 많이 본 구성이다. 이때 $M=M\cup\{M\}$이므로

$$M=M\cup\{M\}=M\cup\{M\cup\{M\}\}=M\cup\{M\cup\{M\cup\{M\}\}=\cdots$$

이렇게 표현할 수 있으므로 $M\in M$이라면 M에서 $x \in x$를 만족하는 원소가 포함되는데 이는 $M=\{x \mid x\notin x\}$라는 정의에 모순이다. 따라서 $M\in M$은 불가능하다.
따라서 V의 부분집합 $M=\{x \mid x\notin x\}$에 대해 $M\notin M$이며, V에서 $x\notin x$인 집합은 무한히 많고 이를 모두 더해 M을 구성할 수 있다.
그래도 여전히 $M\notin M$이며, 모순은 발생하지 않는다.

한편 V에 대해서 $\{V\}$를 생각해보자. 이때 아까 구축한 공리에 의해 $\{V\}$도 V의 원소이고 $V\cup\{V\}$도 V의 원소다. 따라서 V를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$V=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\cdots,V,\{V\},\{\{V\}\},\{V,\{V\}\},\cdots\}$$

V가 V를 포함해도 문제는 없다. V는 여전히 이 공리계에서 모든 것의 집합이다.

한편 $M=\{x \mid x\notin x\}$라고 했을 때, $x \mid x\notin x$라는 규칙 자체는 V에 포함되지 않는다는 것도 기억해 둘 만하다.

$(x \mid x\notin x)\notin V$

2.2 공리를 집합으로 다루기

공집합의 가능한 모든 멱집합군 V을 구성했으니, 이외의 집합을 구성하기 위해서는 V에 무언가를 추가해야 한다. 그것에 무엇을 추가할 수 있을까. 가능하면 이미 존재하는 도구를 사용하기 위해 다음과 같이 생각해보자.

공집합은 존재한다.=ㄱ
임의의 집합 n에 대해, n을 원소로 하는 집합이 존재한다.=ㄴ
임의의 집합 A, B에 대해 그 집합들의 원소를 모두 원소로 가지는 집합이 존재한다.=ㄷ
공집합 외에 원소가 없는 집합은 존재하지 않는다.=ㄹ
임의의 집합 A, B에 대해, 두 집합이 같은 원소를 가진다면 두 집합은 같다.=ㅁ
V의 부분집합 X에 대해, $\varnothing \in X$이고, X의 임의의 집합 n, m에 대하여 $\{n\} \in X$, $\{m\} \in X$이고, $(n \cup m) \in X$인 X는 V이다.=ㅂ

이렇게 하면 집합 {ㄱ,ㄴ,ㄷ,ㄹ,ㅁ,ㅂ}는 가능한가?

기존 집합들의 정의를 생각하면 쉽게 가능할 것 같지만 사실은 불가능하다. ㄱ,ㄴ,ㄷ,ㄹ,ㅁ,ㅂ는 공리계를 구성하고 있으며 공리계에 의해 구성된 집합개념은 $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \dots, \}$ 안에서만 적용 가능한 개념이다. 또한 ㄱ,ㄴ,ㄷ,ㄹ,ㅁ,ㅂ 명제들은 스스로 구성한 논의영역의 모든 집합 V 안에 존재하지 않기 때문에 V 내에서 원소가 될 수 없다.
여기서 공리모임 ㄱ,ㄴ,ㄷ,ㄹ,ㅁ,ㅂ와 V은 굉장히 독특한 관계다. ㄱ,ㄴ,ㄷ,ㄹ,ㅁ,ㅂ는 V과 분명히 관계가 있지만 V의 원소는 아니며, V으로부터 귀납적으로 추론해낼 수는 있지만 V이 존재한다는 사실으로부터 ㄱ,ㄴ,ㄷ,ㄹ,ㅁ,ㅂ를 연역적으로 도출해낼 수는 없다. ㄱ,ㄴ,ㄷ,ㄹ,ㅁ,ㅂ는 V의 논리적 귀결이 아니며 증명도 불가능하다.

한편 ㄱ,ㄴ,ㄷ,ㄹ,ㅁ,ㅂ는 적절한 공리가 추가된다면 충분히 집합으로 다룰 수 있을 것으로 보인다. 따라서 ㄱ,ㄴ,ㄷ,ㄹ,ㅁ,ㅂ를 집합으로 다룰 수 있도록, 해당 공리들을 원소로 가질 수 있도록, 이미 구축한 공리계와는 다른 위상의 공리계를 새로 구축해보자.
일단 집합이 필요하니 공리모임 ㄱ,ㄴ,ㄷ,ㄹ,ㅁ,ㅂ를 다시 가져오자. 유의해야 할 점이 한 가지 있는데, 지금 구축하는 공리계는 이미 구축한 공리계와는 다른 위상에 있으며 별도의 논의영역, 이미 구축한 공리를 대상으로 하는 논의영역을 가진다는 점이다. 편의상 V이 구성된 위상을 위상 A, 그리고 공리모임 ㄱ,ㄴ,ㄷ,ㄹ,ㅁ,ㅂ가 존재하는 위상을 위상 B라고 정의하자.
먼저 할 일은 일단 ㄱ,ㄴ,ㄷ,ㄹ,ㅁ,ㅂ로 B위상에 집합 개념과 V을 다시 만들어내는 것이다. 해당 위상에 집합 개념을 구성하기 위해서는 우선 ㄱ,ㄴ,ㄷ,ㄹ,ㅁ,ㅂ를 별도의 위상C에서 다시 공리로 구축해야 한다.
먼저 위상 A와 위상 B의 상태를 다시 표현해보자.

[위상 A에 구성된 것]

$\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \dots\}=V$

다시 표현하면, 현재 위상 A에 존재하는 모든 것들의 집합은 V이며, V은 존재한다.

[위상 B에 있는 것]

ㄱ,ㄴ,ㄷ,ㄹ,ㅁ,ㅂ

다시 표현하면, 위상 B에는 ㄱ,ㄴ,ㄷ,ㄹ,ㅁ,ㅂ가 존재한다.

이제 위상 C에서 공리를 구축해 위상 B에 집합 개념을 구축하자.

위상 B에서 ㄱ
위상 B에서 ㄴ
위상 B에서 ㄷ
위상 B에서 ㄹ
위성 B에서 ㅁ
위상 B에서 ㅂ

이제 위상 B에서 V과 집합개념을 사용할 수 있다. 다시 말하면 위상 B에 V이 구성되었다.
여기서 알 수 있는 사실은, 사실 처음에 사용했던 ㄱ,ㄴ,ㄷ,ㄹ,ㅁ,ㅂ의 앞에는 '위상 A에서'라는 말이 생략되었다는 것이다.
여기에 명제 ㄱ,ㄴ,ㄷ,ㄹ,ㅁ,ㅂ를 위상 B에서 집합으로 표현하기 위해서는 다음과 같은 명제들을 위상 C에 추가해야 한다.

{ㄱ,ㄴ,ㄷ,ㄹ,ㅁ,ㅂ}는 존재한다.

이 이외의 별도의 공리가 필요없는 이유는, V을 구축할 때 공집합에서 파생 가능한 모든 멱집합을 함께 구축했고, 멱집합이 존재는 곧 부분집합의 존재를 의미하기 때문이다.
한편 ㄴ='임의의 집합 n에 대해, n을 원소로 하는 집합이 존재한다.'에서, 공집합을 제외한 n에 대해 n의 원소가 존재함을 알 수 있다.(동치) 따라서 {ㄱ,ㄴ,ㄷ,ㄹ,ㅁ,ㅂ}가 (위상 B에)존재하면 ㄱ,ㄴ,ㄷ,ㄹ,ㅁ,ㅂ도 (위상 B에)각각 존재한다.
이제 원한다면 이제 페아노 공리계든, 다른 구성 가능한 체계든 무리없이 위상 B에 넣을 수 있다. 위상 C에 페아노 공리계의 공리들을 두면 위상 B에 자연수가 포섭된다.
{ㄱ,ㄴ,ㄷ,ㄹ,ㅁ,ㅂ}를 공리집합 H라고 부르면, 공리집합 H의 멱집합군도 B 공리계에서 성립한다.
이제 위상 C, B, A를 각각 살펴보자.

[위상 C에 있는 것]

(위상 B에서)ㄱ
ㄴ
ㄷ

ㄹ
ㅁ
ㅂ
H={ㄱ,ㄴ,ㄷ,ㄹ,ㅁ,ㅂ}는 존재한다.

위의 명제들이 위상 C에 존재한다.

[위상 B에 구성된 것]

V을 포함한 H={ㄱ,ㄴ,ㄷ,ㄹ,ㅁ,ㅂ}의 멱집합군

이때 H의 멱집합군은 위상 B에 존재하는 모든 것들의 집합이다.

[위상 A에 구성된 것]

$\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \ldots\}=V$

다시 말하면 위상 A에 V이 존재한다.

한 가지 언급해두자면, 위상 B와 위상 A의 모든 집합에 대해 각각의 원소들은 실제로 구성되었으며, 하나도 빠짐없이 (각 위상에)존재한다.
위로부터 알 수 있는 사실은, 위상 A에 구축한 뒤 위상 B에 집합 공리H를 도입하고, 위상 B에 대해서 위상 C에 H 공리를 도입해도 모순이 일어나지 않으며, 첫 위상 A에 아무런 영향을 주지 않는다는 점이다.

수학적 귀납법을 통해 각각의 위상에 대해 다음과 같은 사실을 증명할 수 있다.

위상 B에 공리집합 H를 도입함으로써 위상 A에 V을 만들어낼 수 있다.
위상 C에 공리집합 H를 도입함으로써 위상 B에 V을 포함한 위상B의 모든 것의 집합을 만들 수 있다.
.....
위상X_n(위상 X_n은 위상 A에서 n-1번째 다음 위상이며 n은 자연수)에 공리집합 H를 도입함으로써 위상X_{n-1}에 V을 포함한 위상X_{n-1}의 모든 것의 집합을 만들 수 있다.

따라서 다음과 같이 정리할 수 있다. 임의의 위상 X_n에 대해 X_n에 집합을 구성할 수 있는 공리집합 H가 항상 위상 X_{n+1}에 존재할 수 있다.
임의의 위상 X_n에 대해 공리집합 H를 도입하면 위상 X_{n-1}에서 항상 집합 체계를 사용 가능하며 존재하는 모든 것의 집합을 구성할 수 있다.
하위 위상에 이미 집합이 구성되었다면, 그 상위 위상에 계속 공리집합 H를 도입해도 하위 위상에 아무런 영향을 미치지 않는다는 것을 알 수 있으므로 상위 위상에 무한 번 공리집합 H을 도입해도 모순이 발생하지 않는다.

2.3 위상과 명제를 통해 공리집합의 구성 요건 알아내기

공리집합 H로 돌아가 보자.
H의 원소 ㄱ,ㄴ,ㄷ,ㄹ,ㅁ,ㅂ는 사실 엄밀하게 따지면 위상 B에서는 부정의용어인 상태다.(위상 C에서 공리집합 H의 원소들의 관계를 규정한 바 없는 상태) 즉, 진짜 공리계를 구성하려면 ㄱ,ㄴ,ㄷ,ㄹ,ㅁ,ㅂ 사이의 관계를 공리적 관계로 만들어야 한다고 추측할 수 있는데, 이때 의문이 발생한다. '공리적 관계란 무엇인가.'
이때 우리는 괴델에게 도움을 받아 몇 가지 조건을 추측할 수 있다.(공리집합을 구성할 수 있는 공리집합이 있다면 위상 B에서는 불가능하다. 이런 공리집합은 위상 C이상에서만 구성할 수 있다. 그리고 아직 공리집합을 구성하는 방법은 밝혀진 바 없으므로 추측해야 한다.)

괴델의 불완전성 정리[4]을 압축하면 '어떤 공리체계가 무모순이면, 그 체계에서는 참이면서도 증명할 수 없는 명제가 적어도 하나 이상 존재한다.' '그 공리체계는 자기 자신의 무모순에 대한 정리를 포함할 수 없다.'이다. 후자를 여태 구축한 개념들로 해석하면 '임의의 공리집합X에 대해, X는 자신의 무모순성을 증명하는 공리를 원소로 가질 수 없다'이다. 그런데 이미 구성해놓은 위상들을 봤을 때, 위상 A에 존재하는 것을 규정한 명제들은 위상 B에 존재하고, 위상 B에 존재하는 것을 규정한 명제들은 위상 C에 존재한다. 어떠한 공리집합도 이미 자기 자신의 무모순성을 해당 집합의 명제들로 증명할 수 없다. 이는 위상 X_n에 존재하는 어떤 명제 X의 논의영역이 항상 위상 X_{n-1}에 존재한다는 것을 의미한다.

한편 아까 공리집합 H와 집합 V에 대해 특이한 사실을 언급했었다.

> '여기서 공리모임 ㄱ,ㄴ,ㄷ,ㄹ,ㅁ,ㅂ와 V은 굉장히 독특한 관계다. ㄱ,ㄴ,ㄷ,ㄹ,ㅁ,ㅂ는 V과 분명히 관계가 있지만 V의 원소는 아니며, V으로부터 귀납적으로 추론해낼 수는 있지만 V이 존재한다는 사실으로부터 ㄱ,ㄴ,ㄷ,ㄹ,ㅁ,ㅂ를 연역적으로 도출해낼 수는 없다. ㄱ,ㄴ,ㄷ,ㄹ,ㅁ,ㅂ는 V의 논리적 귀결이 아니며 증명도 불가능하다.'

이는 위상 A의 V으로부터 위상 B의 공리집합 H를 온전히 도출하는 게 불가능하다는 것을 의미한다. 단지 귀납법을 통한 추측만이 가능하다는 의미다.

이제 앞서 언급한 불완전성 정리의 앞부분을 해석하면, '공리집합의 원소들 사이에 모순이 없다면, 참이면서도 증명할 수 없는 원소(명제)가 하나 이상 존재한다'이다. 이때 우리는 모든 공리집합의 원소가 명제임을 귀납적으로 추측할 수 있다.
이때 공리집합에서 참인지 거짓인지 증명할 수 없는 원소(명제)가 있느냐는 문제에 대해서는 대답할 수 있는데, 예를 들면 아까 구축한 위상 B 내의 공리집합 원소 ㄱ,ㄴ,ㄷ,ㄹ,ㅁ,ㅂ 명제들은 논의영역을 C로 두고 있으므로, 위상 B 내에서는 ㄱ,ㄴ,ㄷ,ㄹ,ㅁ,ㅂ 명제의 참,거짓을 판별할 수 없다. (한편 이미 위상 A에 V이 구성되었으므로, 위상 A에 V이 있다고 말할 수 있다. 따라서 공리집합 H의 공리들은 참이라고 말할 수 있다. 이는 불완전성 정리와 모순되지 않는다.)

따라서 공리집합을 규정하는 공리집합 L(집합 개념을 상위 위상에 무한 도입하면 공리 집합을

구성하는 공리들을 집합으로 다룰 수 있다)에 대하여, L이 임의의 위상 X_n에 위치한다고 했을 때 L의 원소 중 하나는 다음과 같다.

'위상 X_{n-1}에서 위상 X_{n-2}의 존재를 지시체로 삼는 명제가 존재한다'=ㅌ

한편 공리계(임의의 공리집합이 구성한, 공리집합이 위치한 위상보다 한 단계 아래 위상에 존재하는 모든 것의 집합)를 구성할 때, 공리들(공리집합의 원소들) 간에 모순이 없어야 공리계를 제대로 구성할 수 있다.

*모순이란, 임의의 명제 p, q에 대해 p와 q가 동시에 참이면, p, q의 논의영역이 같은 위상일 수 없을 때를 말한다.
예) 어떤 위상에 존재하는 '(해당 위상에)아무것도 존재하지 않는다'와 '(해당 위상에)사람이 존재한다' 라는 두 명제가 동시에 참이면, 해당 명제들은 같은 위상을 논의영역으로 둘 수 없다.

모순이 있으면 임의의 공리 p, q로 하나의 공리계를 구축할 수 없다. 따라서 공집합이 아닌 공리계를 구성하려면 공리들 사이에 모순이 없어야 한다고 추측할 수 있다.
따라서 공리집합을 구성하는 공리집합 L의 원소에는 다음과 같은 명제도 포함된다.

'임의의 명제 p에 대해, p와 무모순 관계인 q가 존재한다.'=ㅍ

여기까지 했는데 한 가지 오류가 파악됐다. 명제의 존재를 주장하려면 우선 위상X_n이 구성되어야하기 때문이다. 한편 위상을 구성할 수 있다면, 위상을 구성하는 명제들이 존재하는 메타위상도 있다고 말할 수 있다.
일단 '위상 X_{n-1}에서 위상 X_{n-2}를 논의영역으로 삼는 명제가 존재한다', 고 말하려면 위상 간의 관계를 정의해야하기 때문에, 이를 이미 있는 도구들을 통해 귀납적으로 정의해 보자.
이미 어떠한 위상 공간에도 집합이 존재할 수 있음을 확인했으므로, 위상 내의 모든 것의 집합이 $\varnothing$인 공위상이 존재한다, 고 말할 수 있을 것이다. (모든 것을 집합 안에 넣으면 공집합으로 표현할 수 있다는 것뿐이지, 해당 위상에 공집합이 존재하는 것은 아니다.)

공위상은 존재한다.
임의의 위상X_n에 대해, 이 위상에 집합을 발생시키는, 공리집합 H가 존재할 수 있는 위상 X_{n+1}이 존재한다.
어떤 위상 X_a와 X_b에 대해, $X_a=X_b$이라면 $X_{a+1}=X_{b+1}$다.
공위상에는 아무것도 존재하지 않는다.
임의의 위상집합 Y에 대해, 공위상이 집합 Y의 원소이고, 임의의 위상 X_n에 대해 X_{n+1}도 집합 Y의 원소이면 집합 Y는 공위상의 상위위상들의 집합 W로 정의할 수 있다.

집합 W가 존재하는 위상을 이제 메타위상A라고 부르자. 그리고 메타위상을 발생시키는 위 공리가 존재하는 위상을 메타위상 B라고 부르면 되겠다. 그렇다면 메타위상 A와 메타위상 B는 위상일까, 아닐까? 메타위상A가 위상이라고 하면 곧바로 러셀의 역설이 발생한다. 그런데 메타위상 A와 메타위상 B를 정의하려면 메타'메타위상'에서 가능하므로, 현재 시점에서 메타위상 A와 메타위상 B는 서로 간의 관계가 정의된 바 없다. 메타'메타위상'에서 공리를 구축하더

라도 이는 메타위상의 구성과 관련이 있으며, 위상과는 관련이 없다.

한편 어떤 위상에 공리집합을 구성하려면, *ㅌ*와 *ㅍ*를 동시에 만족해야 공리집합을 구성할 수 있다고 추측할 수 있다. 그런데 과연 *ㅌ*, *ㅍ*은 (위상집합 W내의 임의의 위상 X_n내에)공리집합이 존재하기 위한 필요충분조건일까?

이를 알려면 우선 *ㅎ*='임의의 위상 X_n에 위상 X_{n-1}을 논의영역으로 삼는 명제가 존재한다'라고 말하기 이전에, 먼저 명제의 존재부터 정의해야 한다.
명제를 정의하기 위해 다음과 같은 공리들을 생각해 보았다. 우리는 공집합으로부터 위와 같은 개념들을 구성했으므로, 명제도 비슷한 방법들로 구축할 수 있을 것이다.
위상 X_n에 존재하는 가능한 모든 명제들의 집합을 *M*하자.

공위상을 논의영역으로 삼는 (위상 X_{n-1}의 아무것도 지시체로 삼지 않는) 공명제가 *M*의 원소에 존재한다.=*ㅅ*

*(예) 위상 X_{n-1}에는 아무것도 존재하지 않는다.

임의의 명제 p에 대해, (p의 지시체의 개수)+1개의 지시체를 위상X_{n-1}에서 가지는 모든 명제 q도 *M*의 원소다.=*ㅇ*
공명제의 지시체 개수는 0이다.=*ㅈ*
임의의 명제 p, q에 대해, p와 q이 (p의 지시체)=(q의 지시체)이면 p=q이다.=*ㅊ*

*(예) (위상 X_n-1에서) 1은 존재한다=(위상 X_n-1에서) 일은 존재한다=(위상 X_n-1에서) One은 존재한다.

전체 명제집합 *M*의 부분집합 *X*에 대해, (공명제)∈*X*이고, 임의의 o∈*X*에 대해 (o의 지시체의 개수+1)개의 지시체를 가진 모든 p에 대해서도 p∈*X*이면, *X*=*M*이다.=*ㅋ*

이때 지시체란 위상 X_{n-1}에 존재하는 집합이다. 예를 들면 ‘대한민국의 도시들 중 수도는 서울이다’고 했을 때, (해당 위상에서) {x | x는 대한민국의 도시들}와 {x | x는 대한민국의 수도}의 교집합은 {x | x는 서울}이라는 뜻이다. 이때 지시체는 3개라고 할 수 있다.

이제 한 위상에 존재하는 모든 명제집합을 정의할 수 있게 됐다.(구성됐다고 하기는 어렵다.)
이제 {*ㅅ*, *ㅇ*, *ㅈ*, *ㅊ*, *ㅋ*}를 공리집합 *J*라고 하자. 명제를 정의하는 공리집합 *J*를 아까 구성한 위상 *C*에 도입하면 위상 *B*에서 명제들을 다룰 수 있게 된다. 따라서 부정의용어가 아닌 공리집합 H를 통해 위상 *A*에 *V*를 구성할 수 있다. 한편 위상 *A*에도 명제개념을 도입 가능하므로 위상 *A*의 하부 위상도 구성 가능하다. 따라서 공리집합 *J*를 상위, 하위 위상에 무한 번 구성하고, 공리집합 *H* 또한 상위, 하위 위상에 무한 번 구성하면 모든 위상에서 집합과 명제 개념을 사용할 수 있다.

자 이제 위상, 집합, 명제가 정의되었으므로, 어떤 위상에 있는 명제들 중 일부를 공리집합으로 규정하려면 그 위상에 있는 모든 명제들 중 특정한 몇 가지를 골라내는 규칙을 만들기만 하면 된다.

이를테면 {x | x는 공리집합을 구성하는 명제}다. 이때 'x는 공리집합을 구성하는 명제'라는 문장은 사실 '공리집합을 구성하는 명제 x가 존재한다'와 동치인데, {x | x는 공리집합을 구성하는 명제}라는 집합이 위상 X_n에 있을 때, '공리집합을 구성하는 명제 X가 존재한다.'라는 명제는 위상 X_{n+1}에 존재하니 헷갈리면 안 된다. 물론 위상 X_n에도 동일한 명제가 존재할 수 있지만, 위상 X_n과 X_{n+1}의 명제는 서로 다르게 취급되어야 한다. {x | x는 공리집합을 구성하는 명제}라고 했을 때, 'X는 공리집합을 구성하는 명제'라는 규칙(명제)이 상위 위상에 추가되었다고 보아야 한다.
자 이제 '임의의 명제 p에 대해, p와 무모순 관계인 q가 존재한다.'=ㅍ로 돌아와보자. 명제 p, q가 서로 무모순이기만 하면 공리집합을 구성할 수 있을까?
그런데 공위상의 경우, '(해당 위상에)아무것도 존재하지 않는다'라는 공명제만으로도 공위상을 구성할 수 있다. 즉 해당 위상에 명제 개념이 존재하기만 한다면, 하위 위상에 공리 하나로도 위상을 구성할 수 있다. 한편 아까 구축했던 위상 B에 공명제를 도입하면, 위상 B의 하위에 위상 A와는 다른(위상 A에는 집합이 존재하므로) 새로운 위상 A'가 존재하게 된다. 이로부터 어떤 위상 X_n에 대해 X_{n-1}에 해당하는 위상을 무한개 구성할 수 있음을 알 수 있다. 즉, 모순된 명제가 같은 위상에 존재하면, 해당 위상의 하위 위상계에 서로 다른 위상을 만들게 된다.
한편 같은 위상에 존재하는 명제 A, B가 서로 무모순이면 A, B는 공리집합을 구성할 수 있을 가능성이 존재한다. 그러나 다음과 같은 명제로 구성된 집합이 공리집합일까?

p='1이 존재한다.'
q='2가 존재한다.'

언뜻 보면 p, q가 무모순할 뿐더러 아무런 문제도 없어 보인다. 그러나 1, 2의 서로 간의 관계가 규정되지 않았으므로 1과 2는 서로에게 아무런 의미도 없다. 1, 2가 서로 다른 위상에 존재하는 것이나 다름없는 상태인데, '2 이상의 수만 존재한다', '1 이하의 수만 존재한다'라는 명제를 각각 추가하면 실제로 다른 위상으로 분리되어 버린다. 따라서 공리집합을 구성하기 위해서는, 공리집합의 원소들 사이가 무모순해야 하고, 공리들이 규정하는 대상들 간의 관계가 규정되어야 한다. 이를테면 이렇다.

p='1이 존재한다.'
q='임의의 n에 대해 n+1이 존재한다.'

즉 명제 두 개 만으로도 공리계가 구성된다. 이때 페아노 공리계와 다른 점은, 1이나 그 다음 수나 유일하지 않다는 점이다. 예를 들면 1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,3,3,3,3,3이 해당 공리계에 존재할 수 있다. p, q를 다음과 같이 만들 수도 있다.

p='여자가 존재한다'
q='함께 아이를 가질 수 있는 남자가 존재한다. 이때 아이는 (생물학적으로)남자 혹은 여자다'

그렇다면 해당 공리계에는 남자들과 여자들이 무한히 존재한다. 공위상이 아닌 어떤 위상을 구성할 때, 이를 위해 필요한 공리집합 최소한의 요건은 다음과 같이 추측할 수 있다.

n개의 지시체를 가지는 명제가 존재한다(n은 자연수)=ㅌ
임의의 명제 p에 대해, p와 무모순한 q가 존재한다.=ㅍ
공리집합을 구성하는 의해, 해당 공리계의 모든 지시체들의 상호관계가 규정된다.=ㅎ

ㅎ이 필요한 이유는, 관계가 규정되지 않은 존재는 다른 위상에 존재하는 것이나 마찬가지이기 때문이다.
예를 들면 페아노 공리계의 공리들에 '이백현이 존재한다'라는 공리를 추가할 경우, 해당 공리계에는 자연수 N과 이백현이 존재한다. 근데 자연수와 이백현의 관계가 규정되지 않았으므로, 이백현은 페아노 공리계에 존재하지 않는 것이나 마찬가지다. 따라서 공리집합의 요건에는 ㅎ도 포함된다.
이제 위상 *C*로 돌아가서 ㅌ, ㅍ, ㅎ라는 규칙을 추가하면, 위상 *B*에 구성된 공리집합 *H*가 {*X* | *X*는 ㅌ, ㅍ, ㅎ를 만족하는 명제}임을, 즉 공리집합임을 알 수 있다.
그리고 공리집합 *H*를 통해, 위상 *A*에 진정한 의미로 집합이 구성된다.

Ⅲ. 결론

본문과 같이 집합을 구성하면, 러셀의 역설에 빠지는 일 없이 한 위상에 존재하는 '모든 것의 집합'을 구성 가능하다. 또한 본문의 모델에 따르면, 우리가 생각해내는 명제들이 실제로 우리와 같은 위상의 대상을 지시하는 것이 아니라, 우리가 머릿속에 존재하는 하위위상에 우리가 사는 세계의 실체들을 전사하여 지시체로 삼고 있음을 알 수 있다.

내 연구에 모순이 없다면, 수학과 철학의 발전에 도움이 되리라 기대한다.

참고 문헌

[0]폰 노이만 전체
https://ko.wikipedia.org/wiki/%EA%B3%84%EC%8A%B9%EC%A0%81_%EC%A7%91%ED%95%A9

[1]페아노 공리계
https://ko.wikipedia.org/wiki/%ED%8E%98%EC%95%84%EB%85%B8_%EA%B3%B5%EB%A6%AC%EA%B3%84
https://namu.wiki/w/%EC%9E%90%EC%97%B0%EC%88%98?from=%ED%8E%98%EC%95%84%EB%85%B8%20%EA%B3%B5%EB%A6%AC%EA%B3%84#s-2.1

[2]ZFC 공리계
https://namu.wiki/w/ZFC%20%EA%B3%B5%EB%A6%AC%EA%B3%84
https://ko.wikipedia.org/wiki/%EC%B2%B4%EB%A5%B4%EB%A9%9C%EB%A1%9C-%ED%94%84%EB%A0%9D%EC%BC%88_%EC%A7%91%ED%95%A9%EB%A1%A0#%EC%A0%95%EC%B9%99%EC%84%B1_%EA%B3%B5%EB%A6%AC

[3]러셀의 역설
https://namu.wiki/w/%EB%9F%AC%EC%85%80%EC%9D%98%20%EC%97%AD%EC%84%A4

[4]불완전성 정리
https://namu.wiki/w/%EB%B6%88%EC%99%84%EC%A0%84%EC%84%B1%20%EC%A0%95%EB%A6%AC

이외) 윌러드 밴 오먼 콰인
https://namu.wiki/w/%EC%9C%8C%EB%9F%AC%EB%93%9C%20%EB%B0%B4%20%EC%98%A4%EB%A8%BC%20%EC%BD%B0%EC%9D%B8?from=%EC%BD%B0%EC%9D%B8#s-3.4