HEAT CONDUCTIVITY OF GAS IN GRAVITATIONAL FIELD

V.S. Vasilenko, .A.A. Malgota

Odessa State Environmental University
Odessa State Research Institute of Transport Medicine

vladimir2.phd@gmail.com, malgota_aa@ukr.net

An exact solution was got for heat conductivity of gas in the gravitational field with the use of model in that vector of speeds of molecules equiprobable distributions for everything to directions as a result of collision in an elementary volume dV. The thermal stream in horizontal direction is described by the law of Fourier: $j_E^x = -\lambda \frac{dT}{dx}$, and in vertical - $j_E^z = -\lambda \frac{dT}{dz} - \lambda \frac{g}{C_v}$. Coefficient of heat conductivity $\lambda = -\frac{1}{3} c_V \rho < v > < l >$ coincides with the coefficient got in the model of discrete equiprobable distribution of vectors of speeds of molecules in parallel and антипараллельно to the cartesian axes of coordinates 0x, 0y, 0z and discrete dispersion of molecules in select planes. At the same time number of molecules flying from one side through an arbitrary single ground (n<v>) /4 in 1,5 time exceeds a value (n<v>) /6, given by the classic theory of distribution of speeds of molecules along Cartesian axes of coordinates.

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ГАЗА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

В.С. Василенко, А.А. Мальгота

Одесский Государственный Экологический Университет
Одесский Государственный НИИ Медицины Транспорта

Получено точное решение для теплопроводности газа в гравитационном поле с использованием модели, в которой вектора скоростей молекул равновероятно распределения по все направлениям в результате столкновения в элементарном объёме dV. Тепловой поток в горизонтальном направлении описывается законом Фурье: $j_E^x = -\lambda\frac{dT}{dx}$, а в вертикальном - $j_E^z = -\lambda\frac{dT}{dz} - \lambda\frac{g}{C_v}$. Коэффициент теплопроводности - $\lambda = -\frac{1}{3}c_V\rho < v > < l >$ совпадает с коэффициентом, полученным в модели дискретного равновероятного распределения векторов скоростей молекул параллельно и антипараллельно декартовым осям координат 0X, 0Y, 0Z и дискретного рассеяния молекул в избранных плоскостях. В то же время число молекул пролетающих с одной стороны через произвольную единичную площадку $\frac{n<v>}{4}$ в 1,5 раза превышает значение $\frac{n<v>}{6}$, даваемое классической теорией распределения скоростей молекул вдоль декартовы осей координат.

Закон Фурье для теплопроводности газа в горизонтальном направлении имеет вид [1]:

$$J_E = -\lambda\frac{dT}{dx}, \qquad (1)$$

здесь J_E - плотность теплового потока, величина, определяемая энергией, переносимой в форме теплоты в единицу времени через единичную площадку S = 1, перпендикулярную оси X. $\frac{dT}{dx}$ - градиент температуры, равный скорости изменения температуры на единицу длины в направлении нормали к этой площадке. λ – коэффициент теплопроводности, численно равен плотности теплового потока при градиенте теплового потока равном единице:

$$\lambda = -\frac{1}{3}c_v\rho < v > < l >, \qquad (2)$$

где c_v- удельная теплоёмкость газа при постоянном объёме, -плотность газа, $< v >$ - средняя скорость теплового движения, $< l >$ - средняя длина свободного пробега молекулы.

Выражения (1) и (2) получены с применением приближения о равном распределении скоростей молекул параллельно и антипараллельно декартовым осям координат X, Y, Z. Это, первое, приближение используется при выводе основного уравнения молекулярно-кинетической теории. Второе приближение заключается в том, что все молекулы, которые проходят через площадку S, претерпевают последнее столкновение на расстоянии $< l >$ средней длины свободного пробега от этой площадки.

Такие приближения весьма грубы, поэтому в настоящей работе ставилась задача получить более корректное решение для закона Фурье. Использовались следующие более аккуратные приближения.

1. После столкновения в элементарном объёме dV (Рис.1) молекулы распределены равномерно в телесном угле 4π.

2. Вероятность прохождения молекулой расстояния L без столкновения составляет $w(L) = e^{-\frac{L}{<l>}}$. Где L – расстояние от места последнего столкновения в элементарном объёме dV до заданной горизонтальной единичной площадки S вдоль траектории движения молекулы (Рис.1), длина свободного пробега $<l>$ не зависит от тепловой энергии молекулы.

3. Изменение вертикальной координаты Δz сопровождается по закону сохранения энергии переходом потенциальной $-mg\Delta z$ энергии в тепловую и наоборот.

4. В пределах нескольких длин свободного пробега$<l>$ от выбранной единичной площадки S, можно считать неизменными: а)длину свободного пробега $<l>$, б)концентрацию молекул n, в)плотность газа ρ, г)среднюю скорость теплового движения $<v>$, г) градиент температуры $\frac{dT}{dz}$.

Введём важнейшее понятие этой работы - число столкновений N в объёме V. Среднее число столкновений одной молекулы за 1 с составит $\frac{<v>}{<l>}$ [1]. Следовательно, число столкновений в единице объёма за 1 с составит $\frac{n<v>}{2<l>}$. Результат получен умножением числа столкновений одной молекулы на число молекул в единице объёма и деления на 2, поскольку в столкновении участвуют две молекулы. Число столкновений в объёме V за

1 с составит $\widetilde{N} = \frac{n<v>}{2<l>}V$. Выберем элементарный объём dV такой, чтобы повторным столкновением молекул в этом объёме можно было пренебречь. Тогда число испытавших столкновение и покинувших объём молекул за 1 с будет вдвое больше числа столкновений $\widetilde{N}$:

$$dN = \frac{n<v>}{<l>} dV \, . \qquad (3)$$

Причём после столкновений в элементарном объёме молекулы будут распределены равномерно в телесном угле 4π. Телесный угол, образованный двумя соосными конусами (Рис.1) с углами между осью и образующими α и α+dα $(0 \le \alpha < \frac{\pi}{2})$ составит $d\Omega=2\pi \bullet \sin\ \alpha\ d\alpha.$ Поделив величину элементарного угла $d\Omega$ на полный телесный угол 4π, получим вероятность попадания молекулы в угол $d\Omega$ после столкновения в объёме dV:

$$w(d\Omega) = \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{1}{2}\sin\alpha\, d\alpha \, . \qquad (4)$$

Вероятность для молекулы из элементарного объёма dV пройти расстояние L до выбранной единичной площадки составит:

$$w(L) = e^{-\frac{L}{<l>}} , \qquad (5а)$$

или с учётом того, что $L = -\frac{|z|}{\cos\alpha <l>}$

$$w(L) = w(z, \alpha) = e^{-\frac{|z|}{\cos\alpha <l>}} \, . \qquad (5б)$$

Вероятность для молекулы после столкновения в элементарном объёме dV пройти в элементарном угле dΩ расстояние L через площадку S= 1равна произведению соответствующих вероятностей:

$$w(z, d\Omega) = w(d\Omega) w(L) = \frac{1}{2} e^{-\frac{|z|}{\cos\alpha <l>}} \sin\alpha\, d\alpha \, . \qquad (6)$$

Общее число молекул из объёма $dV = dz\, dS$ с координатой z, за 1 с без столкновений в телесном угле dΩ через выбранную единичную площадку:

$$dN = dV\, Nw\,(z, d\Omega) = \frac{n<v>}{2<l>} e^{-\frac{|z|}{\cos\alpha <l>}} \sin\alpha\, d\alpha\, dz\, dS \, . \qquad (7)$$

Интегрирование по углу $d\alpha$ приводит к неберущемуся интегралу, который нужно затем интегрировать по высоте. Поэтому для решения данной задачи интегрирование будет производиться сначала по площади S=1 затем по высоте, и телесному углу.

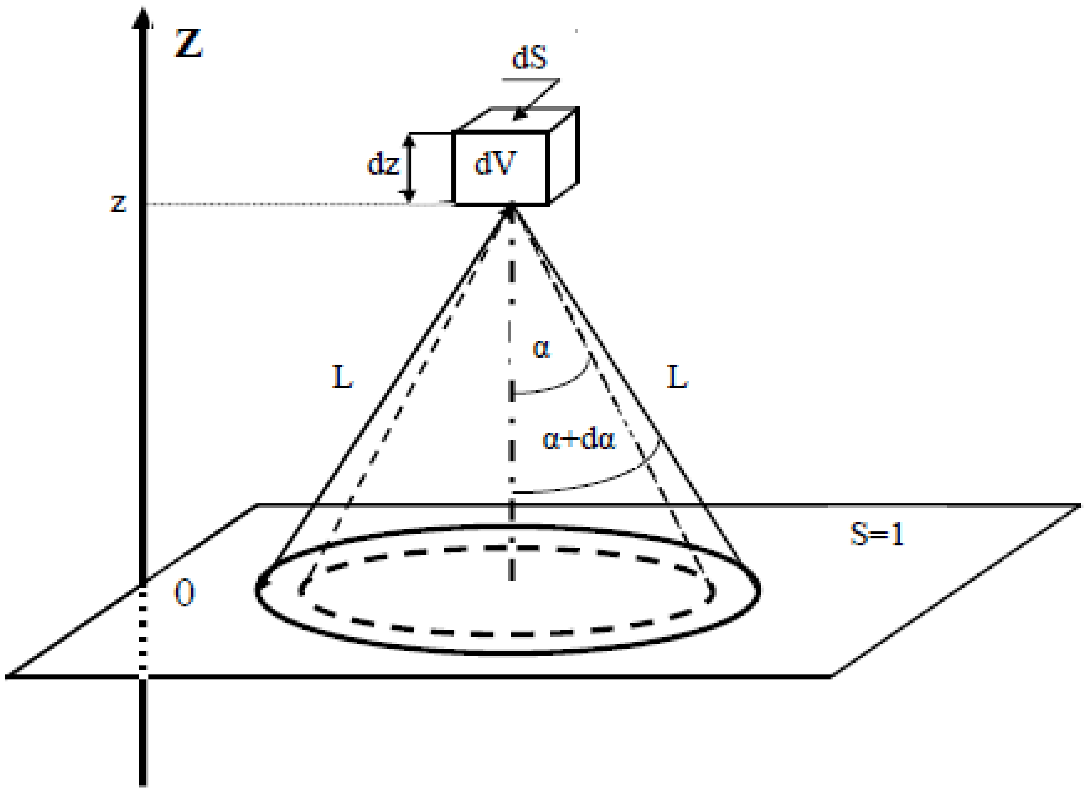

Рис.1. Перенос молекул после столкновения в элементарном объёме dV=dS•dz с координатой z через единичную площадку S=1, перпендикулярную вертикальной оси z. L – образующая конуса. Телесный угол между двумя соосными конусами $d\Omega=2\pi\cdot\sin\ \alpha\ d\alpha$, вероятность попадания в элементарный телесный угол $w(d\Omega) = w(\alpha, d\alpha) == \frac{1}{2}\sin\alpha\ d\alpha$. Расстояние, которое проходит молекула газа после столкновения в элементарном объёме до единичной площадки, $L = \frac{|z|}{\cos\alpha}$. Вероятность для молекулы после столкновения в dV пройти без столкновений расстояние L составит $w(L) = e^{-\frac{L}{<l>}}$, или $w(z,\alpha) = e^{-\frac{|z|}{\cos\alpha<l>}}$.

Поскольку подынтегральное выражение не зависит от S, то интегрирование по площади сводится к умножению на единицу.

Применение формулы (7), определяющей общее число молекул из объёма $dV = dz\,dS$ с координатой z, пролетающих за 1 с без столкновений в телесном угле dΩ через выбранную единичную площадку S=1, позволяет рассчитать: a) плотность потока молекул через любую площадку, b) коэффициент теплопроводности.

a) Плотность потока молекул сверху через единичную площадку S=1:

$$J_n = \frac{n<v>}{2<l>} \int_0^S \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{|z|}{\cos\alpha <l>}} \sin\alpha \, dz \, d\alpha \, dS \qquad (8)$$

$$J_n = -\frac{n<v>}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{|z|}{\cos\alpha <l>}} \Big|_0^{\infty} \cos\alpha \sin\alpha \, d\alpha =$$

$$= \frac{n<v>}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\alpha \sin\alpha \, d\alpha \qquad (9)$$

$$J_n = -\frac{n<v>}{4}. \qquad (10)$$

Следовательно, точный расчёт даёт число молекул проходящих через единицу поверхности S с одной стороны в полтора раза большее, чем плотность потока молекул в модели дискретного распределения векторов скоростей по осям координат, где $J_n = -\frac{n<v>}{6}$.

b) Расчёт коэффициента теплопроводности.

Энергия, которую переносят молекулы из объёма $dV = dz \, dS$ с координатой z, пролетающие за 1 с без столкновений в телесном угле dΩ через выбранную единичную площадку S=1:

$$dj_E = -dN\,(<E> + mgz)\, w(z, d\Omega) =$$

$$= -\frac{n<v>}{2<l>}(<E> + mgz)\, e^{-\frac{|z|}{\cos\alpha <l>}} \sin\alpha \, d\alpha \, dz \, dS\,. \qquad (11)$$

Здесь знак “-” указывает, что поток dj_E движется против оси Z, <E> - энергия теплового движения молекул, mgz – потенциальная энергия молекулы в гравитационном поле, переходящая в тепловую. Вероятность перемещения от dVдо S=1экспоненциально сильно зависит от координаты z (5б). Это означает, что основной вклад в поток энергии дают молекулы с длиной свободного пробега в несколько срелних длин свободного пробега. Это позволяет записать температуру в элементарном объёме [2]:

$$T = T_0 + \frac{dT}{dz} z\,, \qquad (12)$$

T_0 – температура в плоскости S с координатой z=0. Средняя энергия теплового движения молекулы

$$E = \frac{ik}{2}T = \frac{ik}{T}(T_0 + \frac{dT}{dz}z)\ . \qquad (13)$$

Плотность теплового потока сверху через площадку S

$$j_E^{\text{в}} = -\frac{n<v>}{2<l>}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty}\int_0^1 \frac{ik}{T}\left[T_0 + \left(\frac{ik}{T}\frac{dT}{dz} + mg\right)z\right]\ e^{-\frac{|z|}{\cos\alpha<l>}}\sin\alpha\ dS\ dz\ d\alpha\ , \quad (14)$$

здесь знак “-” указывает, что поток $j_E^{\text{в}}$ движется против оси Z. Аналогично, плотность теплового потока, идущего через площадку снизу вверх

$$j_E^{\text{н}} = \frac{n<v>}{2<l>}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\infty}^{0}\int_0^1 \frac{ik}{T}\left[T_0 + \left(\frac{ik}{T}\frac{dT}{dz} + mg\right)z\right]\ e^{-\frac{|z|}{\cos\alpha<l>}}\sin\alpha\ dS\ dz\ d\alpha\ , \qquad (15)$$

Результирующий поток

$$j_E = j_E^{\text{в}} + j_E^{\text{н}}. \qquad (16)$$

$$j_E = \frac{n<v>}{2<l>}\left\{\frac{ik}{T}T_0\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}[\int_{-\infty}^{0}\ e^{-\frac{|z|}{\cos\alpha<l>}}dz - \int_0^{\infty}\ e^{-\frac{|z|}{\cos\alpha<l>}}\ dz] + \left(\frac{ik}{2}\frac{dT}{dz} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + mg\right)[\int_{-\infty}^{0} z\ e^{-\frac{|z|}{\cos\alpha<l>}}dz - \int_0^{\infty} z\ e^{-\frac{|z|}{\cos\alpha<l>}}dz]\sin\alpha\ \ d\alpha\right\}. \qquad (17)$$

Подынтегральные функции в первой квадратной скобке – чётные, пределы интегрирования симметричные, интегралы равны и с разными знаками. Следовательно, интегралы сокращаются. Во второй квадратной скобке функции нечётные, пределы интегрирования симметричные, интегралы с разными знаками одинаковые, складываются. Т.е.

$$j_E = -\frac{n<v>}{<l>}\left(\frac{ik}{2}\frac{dT}{dz} + mg\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty}\ z\ e^{-\frac{|z|}{\cos\alpha<l>}}\sin\alpha\ \ dz\ d\alpha\ . \qquad (18)$$

Табличный интеграл

$$\int_0^{\infty}\ z\ e^{-\frac{|z|}{\cos\alpha<l>}}\sin\alpha\ \ dz\ = -< l >^2\ \cos\alpha\, z\ e^{-\frac{|z|}{\cos\alpha<l>}}\Big|_0^{\infty} -$$

$$- < l >^2\ \int_0^{\infty} e^{-\frac{|z|}{\cos\alpha<l>}}\cos\alpha\ dz = < l >^2\ (\cos\alpha)^2 \qquad (19)$$

Подставляя (22) в (21) и интегрируя по α, получим

$$j_E = \frac{n<v>}{<l>}\left(\frac{ik}{2}\frac{dT}{dz} + mg\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}} < l >^2\ (\cos\alpha)^2\sin\alpha\ d\alpha =$$

$$= -\frac{1}{3}n < v >< l > \left(\frac{ik}{2}\frac{dT}{dz} + mg\right). \qquad (20)$$

Учтём, что

$$\frac{ik}{2}n = \frac{ik}{2}N_A\frac{\rho}{\mu} = C_V\frac{\rho}{\mu} = c_V\rho\,, \qquad (21)$$

где c_V - удельная теплоёмкость газа при постоянном объёме, N_A – число Авогадро, μ – молярная масса газа. Получим для плотности теплового потока в газе в гравитационном поле

$$j_E = -\frac{1}{3} < v >< l > \rho c_V\left(\frac{dT}{dz} + \frac{g}{C_V}\right). \qquad (22)$$

Получен закон Фурье для переноса теплоты в газе в гравитационном поле:

$$j_E = -\lambda\frac{dT}{dz} - \lambda\frac{g}{C_V}\,, \qquad (23)$$

где коэффициент теплопроводности

$$\lambda = \frac{1}{3} < v >< l > \rho c_V\,. \qquad (24)$$

Обсуждение

а) Значение плотности потока молекул $J_n = -\frac{n<v>}{4}$ может быть получено в модели равномерно распределённых по всем направлениям векторов скоростей молекул, движущихся без столкновений. Половина из всех молекул с плотностью n движется сверху вниз к единичной площадке (Рис.2), другая половина, $\frac{n}{2}$, движется вверх от площадки.

Проекция вектора скорости на вертикальную плоскость $v_z = v\cos\alpha$. Усреднение по нижней половине полного телесного угла 2π даёт и

$$v_z = \int_0^{\frac{\pi}{2}} v\cos\alpha\sin\alpha\,d\alpha = -\frac{v}{2} \qquad (25)$$

Т.е. за одну секунду из слоя толщиной v пройдёт половина молекул из той половины, скорости которых направлены вниз. Усреднение по скорости молекул даёт плотность потока молекул сверху вниз $J_n = -\frac{n<v>}{4}$, что совпадает с выражением (10).

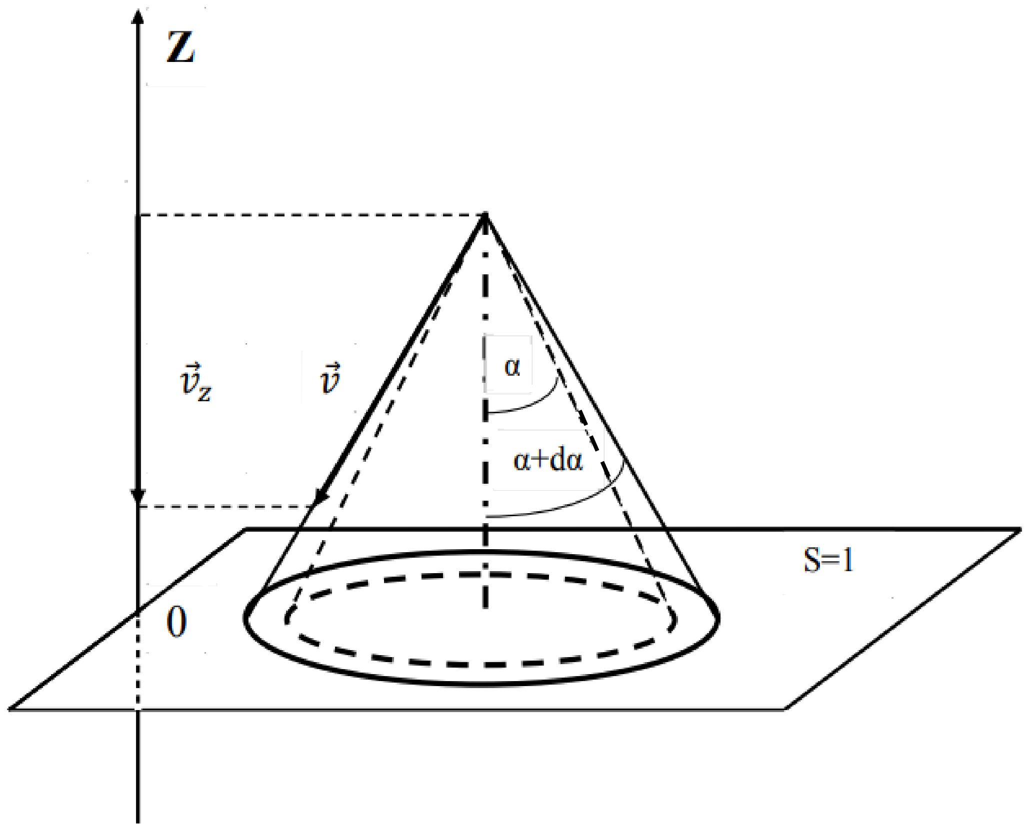

Рис.2. К расчёту средней проекции скорости движения молекулы на вертикальную ось z.

b) Из формулы (23) следует, что в гравитационном поле в идеальном газе с однородной по объёму температурой будет существовать тепловой поток $j_E^0 = -\lambda\frac{g}{C_V}$. . Для сухого воздуха при нормальных условиях расчёты дают $j_E^0 = 1{,}3 \cdot 10^{-4}\ \frac{Вт}{м^2}$. Следовательно, гравитационным механизмом разогрева атмосферы К.Э.Циолковского можно пренебречь. Однако возможно доминирование этого процесса в ультрацентрифугах с ускорением десятки - сотни тысяч g.

Литература

1. Трофимова Т.И. Курс физики. М.: Высшая школа, 2001, - 542 с.
2. В.С. Василенко, А.А. Мальгота, Т.И. Маклыгина, В.О. Комар, А.Ю. Юрковская. Влияние гравитации на теплопроводность идеального газа. http://viXra.org/abs/1901.0321