УДК 512.1

Доказательство гипотезы Эндрю Била в контексте «Полного доказательства великой теоремы Ферма методом деления»

Ведерников Сергей Иванович – пенсионер, г. Москва

Аннотация. Методы доказательства Гипотезы Била, использованные в статье, заключаются в возможности показать базовое уравнение в виде равноценного ему, позволяющего представить значение выражения разностью квадратов двух нечётных чисел и использовать особенности его разложения на множители.

Ключевые слова: разность квадратов, общий делитель, разложение на множители.

The proof of Andrew Beal's hypothesis

Vedernikov Sergey Ivanovich – Retired, Moscow

Abstract. The methods of proof of the Andrew Beal's hypothesis, used in the article, show a basic equation equivalent to the original one, which allows to present the value of the expression by the difference of squares of two odd numbers and to use the features of its factorization.

Keywords: difference of squares, common divisor, factorization.

Имеется:

$A^x + B^y = C^z$, (1) A, B, C, x, y, z – целые, положительные числа. x, y, z >2 .

Доказать: A, B, C имеют общий простой делитель.

Доказательство.

Пусть C > A > B. Определимся с чётностью A, B, C. А именно: два из этих чисел должны быть нечётными, а одно чётным. (Случай одновременной чётности A, B, C можно исключить из детального рассмотрения, поскольку эти числа заведомо имеют общий простой делитель 2.) Примем A и C нечётными числами, а B чётным числом, поскольку принципиальной разницы между числами A и B нет. (О возможности чётного C будет обговорено ниже.)

Примем за основу утверждение, что любое чётное число, имеющее делителем 2^n при n $\geq$ 3, можно выразить разностью квадратов двух нечётных чисел.

Легко показать, что сумма и разность двух нечётных чисел числа чётные, но одно из них имеет множителем только одно число 2, а второе – минимум 2^2, а в общем случае 2^{n-1}, где $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ при n > 2 есть множитель чётного числа, выраженного произведением этой суммы и этой разности. Особое место при этом занимает уравнение $X^2 + Y^2 = Z^2$, где квадрат чётного числа простейшей Пифагоровой тройки, обязательно имеющей множителем число 4, можно выразить числом, содержащим множитель $4^2 = 2^4$. Т. е. случаи целочисленных решений уравнения $X^2 + Y^2 = Z^2$ попадают под выше обозначенное условие о разложении разности квадратов двух нечётных чисел на произведение суммы и разности этих чисел. Строго говоря, формула $X^2 + Y^2 = Z^2$ для простейшей Пифагоровой тройки должна выглядеть так: $X^2 + 2^4 \cdot Y_1^2 = Z^2$, подразумевая Y чётным числом, а именно: $Y = 4 \cdot Y_1$.

Преобразуем ф. (1).

$$C^z - A^x = B^y. \quad (2)$$

Прибавим к левой и правой частям ф. (2) $2 \cdot A^x$.

$$C^z + A^x = B^y + 2 \cdot A^x. \quad (3)$$

Выразим ф. (2) и ф. (3) следующим образом:

$$C^z - A^x = 2^y \cdot B_1^y. \quad (3)$$

$$C^z + A^x = 2^y \cdot B_1^y + 2 \cdot A^x = 2 \cdot (2^{(y-1)} \cdot B_1^y + A^x). \quad (4)$$

В формуле (4) число $(2^{(y-1)} \cdot B_1^y + A^x)$ нечётное. Примем $\left(2^{(y-1)} \cdot B_1^y + A^x\right) = B_2^y$, где B_2 целое число, возможность чего обоснована ниже. Однако даже если целое положительное число B_2^y не есть степень целого числа, поскольку любое целое положительное число можно выразить n–ой степенью дробного числа, но имеет общий простой множитель с числом B^y, то и это обстоятельство не противоречит дальнейшему доказательству.

Запишем ф. (3) и ф. (4) следующим образом:

$$C^z - A^x = B^y; \qquad (5)$$

$$C^z + A^x = 2 \cdot B_2^y. \quad (6)$$

Примем для простоты $C^z = C_1$, а $A^x = A_1$.

Тогда ф. (5) и ф. (6) примут вид:

$$C_1 - A_1 = B^Y; \qquad (7)$$

$$C_1 + A_1 = 2 \cdot B_2^y. \qquad (8)$$

Перемножим левые и правые части ф. (7) и ф. (8).

$$C_1^2 - A_1^2 = 2 \cdot B^y \cdot B_2^y. \quad (9)$$

Формула (9) не что иное, как выражение чётного числа $2 \cdot B^y \cdot B_2^y$ разностью квадратов двух нечётных чисел.

Вариантов разложения чётного числа в степени n≥ 3 по формуле разности квадратов двух нечётных чисел может быть столько, сколько возможно сочетаний пар множителей числа, удовлетворяющих этому условию, однако для каждой пары возможен только один вариант такого разложения. В рассматриваемом случае важна одна особенность такого разложения, заключающаяся в том, что его нужно разделить на два способа.

1 - ый способ: множители разложения кроме числа 2 имеют ещё один или несколько простых делителей.

2 – ой способ: множители разложения не имеют общего делителя, кроме числа 2.

Выполним действия, аналогичные рассмотренным автором в Случае 2 «Полного доказательства Великой теоремы Ферма методом деления» ф.(6) и ф.(7). [1]

Выведем значения C_1 и A_1, т. е. C^z и A^x, сложив почленно левые и правые части ф. (7) и ф. (8).

$$2 \cdot C_1 = 2 \cdot B_2^y + B^y; \quad C_1 = \frac{(2 \cdot B_2^y + B^y)}{2} = 2 \cdot \frac{B_2^y + 2^{(y-1)} \cdot B_1^y}{2}.$$

$$C_1 = B_2^y + 2^{(y-1)} \cdot B_1^y. \quad (10)$$

Вычтем почленно ф. (7) из ф. (8).

$$2 \cdot A_1 = 2 \cdot B_2^y - B^y; \quad A_1 = \frac{2 \cdot B_2^y - B^y}{2} = 2 \cdot \frac{B_2^Y - 2^{(y-1)} \cdot B_1^Y}{2}.$$

$$A_1 = B_2^y - 2^{(y-1)} \cdot B_1^y. \quad (11)$$

Рассмотрим 1-ый способ.

Из ф. (10) и ф. (11) видно, что если B_2^y и B_1^y имеют общий нечётный делитель, поскольку B_2^y нечётное число, то этот делитель имеют числа A_1 и C_1 .

Проиллюстрируем это на примере разложения на множители числа 6^3. Примем $6^3 = 6 \cdot 36 = (2 \cdot 3)(2^2 \cdot 3^2)$. В данном случае условие для разложения чётного числа на множители по формуле разности квадратов двух нечётных чисел соблюдено, и первый множитель имеет сомножителем только одно число 2. Кроме того оба множителя имеют общий простой делитель 3.

Сложим оба множителя: 6 + 36 = 42. Найдём средне арифметическое: $42 : 2 = 21$. Это первое нечётное число. Вычтем из него второй множитель: 21 – 6 = 15. Это второе нечётное число. Имеем: (21 - 15)(21 + 15) = $6 \cdot 36$, где все числа выражения имеют общий простой делитель 3. Этот вариант разложения на множители возможен, когда числа A, B, C не есть взаимно простые.

Следовательно, предположение о том, что числа A, B, C могут иметь общий делитель, обосновано.

Рассмотрим 2 - й способ, когда множители разложения не имеют общего делителя кроме числа 2.

Из ф. (10) и ф. (11) видно, что при отсутствии общего делителя в числах B_2^y и B_1^y, общего делителя не будет и у чисел A, B, C, что подразумевает их взаимную простоту, соответствующую условию о взаимно простых числах X, Y, Z в «Полном доказательстве Великой теоремы Ферма методом деления».

Обратимся к числу 6^3, имеющем два степенных сомножителя. $6^3 = 2^3 \cdot 3^3$. Выразим $6^3 = 216 = 54 \cdot 4$. Условия для выражения числа 6^3 разностью квадратов двух нечётных чисел соблюдены: 54 = 2$\cdot$ $27 \cdot 4 = (2 \cdot 3^3) \cdot (2^2 \cdot 1^3)$. (Нужно пояснить значение 2^2. В ф. (10) и ф. (11) она выражена как $2^{(y-1)}$.)

Сложим множители 54 и 4. 54 + 4 = 58.

Найдём средне арифметическое. 58 : 2 = 29 – это первое нечётное число.

Вычтем из него второй множитель. 29 – 4 = 25 – это второе нечётное число.

Имеем: (29 – 25)(29 + 25) = $4 \cdot 54$.

Здесь члены выражения не имеют общего делителя, а число $8 = 2^3$, множитель числа $6^3 = 2^3 \cdot 3^3$, поделено на 2 и 4. Подобным образом происходит разложение на множители любой простейшей пифагоровой тройки. [2] Рассмотрим порядок выделения множителей числа Y^n и целочисленных $Z,\ X$ на примере Пифагоровой тройки (5; 12; 13).

Имеем: $X^2 + Y^2 = Z^2 \leftrightarrow 5^2 + 12^2 = 13^2$. Преобразуем это выражение: $Z^2 - X^2 = Y^2 \leftrightarrow 13^2 - 5^2 = 12^2$. (1а) Разложим ф. (1а) на множители.

$Z + X = Y_1 \leftrightarrow 13 + 5 = 18;$ (2а) $Z - X = Y_2 \leftrightarrow 13 - 5 = 8.$ (3а)

Из ф. (2а) и ф. (3а) видно, что разложение Y^2 на множители по формуле разности квадратов двух нечётных чисел соответствует выше изложенному условию о наличии у одного множителя только одного числа 2, а именно: $18 = 2 \cdot 9 = 2 \cdot 3^2$, а у другого минимум 2^2. То есть: $8 = 2 \cdot 2^2 = 2 \cdot 4 \cdot 1^2$. (Нужно заметить, что число 4 имеет определяющее значение во всех Пифагоровых тройках, как и в данном случае, где $12^2 = 3^2 \cdot 4^2$.)

Сложим почленно ф. (2а) и ф. (3а).

Имеем: $2 \cdot Z = Y_1 + Y_2 = 18 + 8 = 26;$ $Z = \frac{Y_1 + Y_2}{2} = \frac{2\cdot(9+4)}{2} = 13.$ (4а)

Вычтем почленно ф. (3а) из ф. (2а).

Имеем: $2 \cdot X = Y_1 - Y_2 = 18 - 8 = 10;$ $X = \frac{Y_1 - Y_2}{2} = \frac{2\cdot(9-4)}{2} = 5.$ (5а)

Из ф. (2а) и ф. (3а), а также из ф. (4а) и ф. (5а) видно, что в случае n = 2 уравнения $X^n + Y^n = Z^n$ возможно выделение целочисленных множителей Y^n и целочисленных значений X и Z, как при $Y^2 = 12^2 = 3^2 \cdot 4^2 = 3^2 \cdot 2^4$, т. е. при определённых условиях, соответствующих только пифагоровым тройкам. В остальных случаях целочисленных решений для уравнения $X^2 + Y^2 = Z^2$ нет. Нужно обратить внимание, что числа в скобках ф. (4а) и ф (5а), составляющие сумму и разность чисел 9 и 4, есть степень чисел 3 и 2.

Рассмотрим ещё раз разложение на множители числа 6^3 по 2 – ому способу разложения на множители, где имеем:

$$6^3 = 54 \cdot 4 = 29^2 - 25^2 = (29+25)(29-25).$$

Согласно ф. (10) $29 = \frac{2 \cdot 27 + 4 \cdot 1^3}{2} = 2 \cdot \frac{(27 + 2 \cdot 1^3)}{2} = 3^3 + 2 \cdot 1^3.$

Согласно ф. (11) $25 = \frac{(2 \cdot 27 - 2 \cdot 2 \cdot 1^3)}{2} = 2 \cdot \frac{27 - 2 \cdot 1^3}{2} = 3^3 - 2 \cdot 1^3.$

Ещё нагляднее разложение на множители подобным способом числа 12^3.

$$12^3 = 3^3 \cdot 4^3 = 3^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = 54 \cdot 32 = (2 \cdot 3^3) \cdot (2^2 \cdot 2^3).$$

Выразим 12^3 разностью квадратов двух нечётных чисел по 2 – ому способу разложения на множители. Имеем:

$$12^3 = 43^2 - 11^2 = (43+11) \cdot (43-11) = 54 \cdot 32.$$

Согласно ф. (10) $43 = \frac{2 \cdot 3^3 + 2^2 \cdot 2^3}{2} = 2 \cdot \frac{3^3 + 2 \cdot 2^2}{2} = 3^3 + 2 \cdot 2^3.$

Согласно ф. (11) $11 = \frac{(2 \cdot 3^3 - 2^2 \cdot 2^3)}{2} = 2 \cdot \frac{3^3 - 2 \cdot 2^3}{2} = 3^3 - 2 \cdot 2^3.$

Отсюда можно сделать вывод о том, что это общее правило разложения на множители по формуле разности квадратов двух нечётных чисел любого чётного числа в степени n при $n > 2$, если множители разложения не имеют общего делителя, кроме чисел 2 и $2^{(n-1)}$, т. е. вторые составляющие этих множителей должны быть в степени n .

Ранее было принято, что $\left(2^{(y-1)} \cdot B_1^y + A^x\right) = B_2^y$, что согласуется с верхним абзацем, а ф.(10) и ф. (11) аналогичны ф.(4а) и ф.(5а). Значит, такое принятие обосновано, и B_2^y может быть степенью целого числа B_2. Даже если B_2^Y является степенью положительного дробного числа B_2, то и это обстоятельство не отвергает дальнейшее доказательство, заключающееся в рассмотрении возможности разложения степенных A^x и C^z на целочисленные множители.

Основной вывод следует из ф. (10) и ф. (11), где C_1 и A_1, а следовательно, C^z и A^x невозможно разложить на целочисленные множители, поскольку невозможно разложить правую часть ф. (11) на целочисленные множители по формуле разложения на множители разности n – x степеней, а правую часть ф. (10) - на целочисленные множители по формуле разложения на множители суммы n – x степеней при $n = 2 \cdot k + 1$. [3]

Рассмотрим возможность такого разложения.

$$A_1 = B_2^y - 2^{(y-1)} \cdot B_1^y = \left(B_2 - \sqrt[y]{2^{(y-1)}} \cdot B_1\right)\left(B_2^{(y-1)} + \cdots + 2^{\frac{(y-1)^2}{y}} \cdot B_1^{(y-1)}\right).$$

(12)

$$C_1 = B_2^y + 2^{(y-1)} \cdot B_1^y = \left(B_2 + \sqrt[y]{2^{(y-1)}} \cdot B_1\right)\left(B_2^{(y-1)} - \cdots + 2^{\frac{(y-1)^2}{y}} \cdot B_1^{(y-1)}\right).$$

(13)

Из ф. (12) и ф. (13) видно, что множители правой части уравнений есть иррациональные числа, т. е. разложение A_1 и C_1 не целочисленное. При этом надо помнить, что B_2^y число нечётное.

Вывод: при отсутствии общих множителей в числах A, B, C уравнение $A^x + B^y = C^z$ не имеет решения в целых числах.

Поскольку уравнение $X^n + Y^n = Z^n$, при n > 2, является частным случаем уравнения (1), то этот вывод относится и к теореме Ферма.

Нами рассмотрен случай, когда число B ф. (1) - чётное. Предположим, что чётным является число C, а числа A и B - нечётные.

Преобразуем ф. (1), вычтя из левой и правой её частей $2 \cdot B^y$. Имеем:

$$A^x - B^y = C^z - 2 \cdot B^y. \quad (14)$$

Перемножим левые и правые части ф. (1) и ф. (14). Имеем:

$$A^{2x} - B^{2y} = C^z \cdot (C^z - 2 \cdot B^y). \quad (15)$$

Доказательство, следующее за ф.(15), аналогично рассмотренному выше.

Следовательно, утверждение, что целые числа A, B, C имеют общий простой делитель при $A^x + B^y = C^z$, где x, y, z > 2 доказано, а значит Теорема (гипотеза) Била доказана.

Список литературы:

1. Ведерников С. И. Полное доказательство Великой теоремы Ферма методом деления. Журнал «Наука через призму времени», № 19, (октябрь) 2018. Стр. 47 – 48.
2. Серпинский В. Пифагоровы треугольники. М.: Учпедгиз, 1959. Стр. 5.
3. Гусев В. А., Мордкович А. Г. Математика: Справочные материалы. М.: Просвещение, 1990. Стр. 89.