Series de números cuyos factores son la lista de los números primos desde el principio y enumerando todos, sin excepción.

Pedro Hugo García Peláez

La suma de todos los números desde Fibonacci(n-1) hasta Fibonacci(n) tiene dos propiedades.

Si sumamos todos los números naturales desde Fibonacci(n-1) hasta Fibonacci(n).

Por ejemplo la suma entre 13 y 21 es:

$$\sum_{Fibonacci(7)}^{Fibonacci(8)} = 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 + 21 = 153$$

La suma inmediatamente inferior sera la suma de todos los naturales entre los dos números de Fibonacci anteriores.

$$\sum_{Fibonacci(6)}^{Fibonacci(7)} = 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 = 63$$

Podemos ver que el cociente se acerca a Phi al cuadrado.

En este caso 153/63 = 2.428 vemos que se acerca algo al número Phi^2 = 2.618...

La expresión matemática de esta relación es:

$$\lim_{x \to inf} \frac{\sum_{n=Fibonacci(x)}^{Fibonacci(x+1))} n}{\sum_{n=Fibonacci(x-1))}^{Fibonacci(x))} n} = \phi^2$$

Y la prueba es bastante fácil

Usando la fórmula de una suma aritmética

$$Sn = \frac{a_1 + a_n}{2} n$$

Vemos que (a1) es Fibonacci(x) (an) es Fibonacci (x+1) y (n) que es el número total de de términos es Fibonacci (x-1) al que hay que sumarle 1 ya que el número total de términos es:

n = Fibonacci(x+1) – Fibonacci (x) +1 = Fibonacci(x-1) + 1

$$\frac{\dfrac{(Fibonacci(x) + Fibonacci(x+1)) * (Fibonacci(x-1)+1)}{2}}{\dfrac{(Fibonacci(x-1) + Fibonacci(x)) * (Fibonacci(x-2)+1)}{2}}$$

Simplificando ambos 2 y por las propiedades de los números de Fibonacci

Fibonacci(x)+Fibonacci(x+1) = Fibonacci(x+2)
Fibonacci(x-1)+Fibonacci(x) = Fibonacci(x+1)

Por lo que tenemos

$$\frac{Fibonacci(x+2) * (Fibonacci(x-1)+1)}{Fibonacci(x+1) * (Fibonacci(x-2)+1)}$$

El primer término tiende a Phi y el segundo también tiende a Phi aunque se le sume una unidad a cada término para números de Fibonacci que tiendan a infinito esa unidad es despreciable, y por otra parte esa unidad va a ser fundamental para demostrar la siguiente propiedad.

La relación también funciona para sumas cuyo primer término sea 1 y el último un número de Fibonacci cualquiera.

O sea:

$$lim_{x->inf}\frac{\sum_{n=1}^{Fibonacci(x+1)} n}{\sum_{n=1}^{Fibonacci(x)} n} = \phi^2$$

Por otra parte cada término de estas series no contiene números primos

La prueba es:

Si observamos la fórmula de la suma aritmética

Tenemos la posibilidad de que Fibonacci(x)+Fibonacci(x+1) sea par entonces el resultado de la suma es divisible por F(x+2) / 2

Si Fibonacci(x)+Fibonacci(x+1) es impar significa que uno de los dos números es par y el otro impar con lo que la resta será un número impar, osea en este caso Fibonacci(x+1)-Fibonacci(x) será impar, con lo que Fibonacci(x-1) será impar y al sumarle 1 nos da un número par, por lo que el resultado de la suma es divisible entre (Fibonacci(x-1)+1) / 2

En cualquier caso no puede haber ningún número primo en los términos de estas sumas.

Estos números tienen una propiedad muy importante, por lo menos hasta donde he llegado a calcular.

Tienen un curiosa relación con sus permutaciones.

Si dividimos las permutaciones de un número de esta serie con las permutaciones del número inmediatamente anterior nos da un número cuyos factores son la lista de los números primos desde el principio y enumerando todos, sin excepción.

Las permutaciones de estos números obviamente son cifras muy grandes. A continuación detallo el último cálculo realizado.

El ejemplo va a ser con los factoriales de 153 y 385

El factorial de 153 es:

```
2006343905095682394778288746989117185662461496161611719342310992848
4094602523809233961329406260358843553039314504866304717305191350771
1632216305667129554900620296603188543122491838966881134795135997316
3056400715716299430410396578611200000000000000000000000000000000000
000000
```

El factorial de 385 es:

```
7778925820002268285726252461141530914984705583003303410988268965 02
```

521949696790850946250041606147771428400327497009600180168802571506
007609733870636254651519739779798797772387966375122498596369895634
883960793900534593215676317537476329592543545109117233552740097522
503021673187473807397908143222788674481178587577495625904846826489
297027870222627460510207286421817876401822851010097940376433869650
508927547884192162259601875597861476842621186793880884778355237322
973159034585174157438524589002638317612068101579842670618142271527
465820874530480379765491556993265804183489474196132360265360619437
032037025355682646278404978448305384867837791914952613317278558824
650270815748037120433119762669486679161877759742663529258702750409
2581724160000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000

Si dividimos el factorial de 385 entre el factorial de 153 tenemos el siguiente número ya factorizado.

387 716472 746545 008675 990020 112895 291029 842733 487663 682259 600860 866841 154103 311964 677157 468269 890908 182176 308444 474514 805274 475541 514948 116520 784292 610753 197282 369334 840796 442560 395723 489653 761220 826191 733626 468347 709543 163493 429643 549910 059652 172756 539746 506172 377219 135488 043931 967643 150092 648617 806095 323548 600959 430663 963448 324342 447349 312979 084206 570006 299500 598313 180517 946573 182961 142320 623192 381019 261718 844504 699324 787900 114288 724610 284133 644400 470280 199919 850957 647004 086897 279894 143823 962439 680000 000000 000000 000000 000000 000000 000000 000000 000000 000000 (561 digits) = $2^{233} \times 3^{115} \times 5^{58} \times 7^{39} \times 11^{24} \times 13^{20} \times 17^{14} \times 19^{13} \times 23^{10} \times 29^{8} \times 31^{8} \times 37^{6} \times 41^{6} \times 43^{5} \times 47^{5} \times 53^{5} \times 59^{4} \times 61^{4} \times 67^{3} \times 71^{3} \times 73^{3} \times 79^{3} \times 83^{3} \times 89^{3} \times 97^{2} \times 101^{2} \times 103^{2} \times 107^{2} \times 109^{2} \times 113^{2} \times 127^{2} \times 131 \times 137 \times 139 \times 149 \times 151 \times 157^{2} \times 163^{2} \times 167^{2} \times 173^{2} \times 179^{2} \times 181^{2} \times 191^{2} \times 193 \times 197 \times 199 \times 211 \times 223 \times 227 \times 229 \times 233 \times 239 \times 241 \times 251 \times 257 \times 263 \times 269 \times 271 \times 277 \times 281 \times 283 \times 293 \times 307 \times 311 \times 313 \times 317 \times 331 \times 337 \times 347 \times 349 \times 353 \times 359 \times 367 \times 373 \times 379 \times 383$

Para números de esa serie tambien funciona y cuanto más grandes sean los factoriales, más factores primos se añaden a la lista en perfecto orden y sin excepción.