Sobre la distribución de los números primos

Moreno Borrallo, Juan

December 25, 2018

e-mail: juan.morenoborrallo@gmail.com

"Entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem" (Ockam, W.)
"Dios no juega a los dados con el Universo" (Einstein, Albert)
"Te doy gracias, Padre, porque has ocultado estas cosas a los sabios y entendidos y se las has revelado a la gente sencilla" (Mt 11,25)

Abstract

En este artículo se propone y demuestra una fórmula exacta para la función contadora de números primos menores o iguales que un número dado. Como corolarios de esta prueba, se establece una relación con la función zeta de Riemann, y se demuestran varias conjeturas y teoremas clásicos de la teoría de números.

2010MSC: 11A41

1 Principio de inclusión-exclusión aplicado a la función contadora de primos $\pi(n)$

Los números compuestos menores o iguales que n pueden hallarse mediante la aplicación directa del principio de inclusión-exclusión de la siguiente forma:

- Si quisieramos hallar los compuestos menores o iguales que n, y $p_{m+1} \geq \sqrt{n} \geq p_m$, entonces todo compuesto menor o igual que n tiene un divisor primo menor o igual que p_m. Por tanto, será múltiplo de 2, múltiplo de 3,..., o múltiplo finalmente de p_m.
- Consideramos entonces:

$A_1 = \{Números\, compuestos\, múltiplos\, de\, 2\} = \left\{2x \,:\, 2 \leq x \leq \frac{n}{2}\right\}$. Por tanto, $\mid A_1 \mid = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$.

$A_2 = \{Números\, compuestos\, múltiplos\, de\, 3\} = \left\{3x \,:\, 3 \leq x \leq \frac{n}{3}\right\}$. Por tanto, $\mid A_2 \mid = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$.

$A_3 = \{Números\, compuestos\, múltiplos\, de\, 5\} = \left\{5x \,:\, 5 \leq x \leq \frac{n}{5}\right\}$. Por tanto, $\mid A_3 \mid = \lfloor \frac{n}{5} \rfloor - 1$. ...

$A_{p_m} = \{Números\, compuestos\, múltiplos\, de\, p_m\} = \left\{p_m x \,:\, p_m \leq x \leq \frac{n}{p_m}\right\}$. Por tanto, $\mid A_{p_m} \mid = \lfloor \frac{n}{p_m} \rfloor - 1$.

El número de compuestos menores o iguales que n será exactamente $\mid A_1 \cup A_2 \cup A_3 ... \cup A_{p_m} \mid$.

El principio de inclusión-exclusión nos da una solución exacta para obtener $\mid A_1 \cup A_2 \cup A_3 ... \cup A_{p_m} \mid$. En concreto,

$$\mid A_1 \cup A_2 \cup A_3 ... \cup A_{p_m} \mid = \sum_{i=1}^{p_m} \mid A_i \mid - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq p_m} \mid A_{i_1} \cap A_{i_2} \mid + ...$$

$$... + (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq p_m} \mid A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k} \mid + ... + (-1)^{m+1} \mid A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{p_m} \mid$$

Empezando por el último término, es fácil ver que, sustituyendo,

$$\mid A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{p_m} \mid = \lfloor \frac{n}{\prod_1^m p_m} \rfloor$$

Los dos términos inmediatamente anteriores son:

$$| A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{p_{m-1}} |= \lfloor \frac{n}{\prod_1^{m-1} p_m} \rfloor$$

$$| A_2 \cap A_2 \cap ... \cap A_{p_m} |= \lfloor \frac{n}{\prod_2^{m} p_m} \rfloor$$

Si sumamos los términos,

$$| A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{p_m} | + | A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{p_{m-1}} | + | A_2 \cap A_2 \cap ... \cap A_{p_m} |=$$

$$= \lfloor \frac{n}{\prod_1^{m} p_m} \rfloor + \lfloor \frac{n}{\prod_1^{m-1} p_m} \rfloor + \lfloor \frac{n}{\prod_2^{m} p_m} \rfloor$$

Es fácil ver que, si tomamos $\prod_1^m p_m$ como denominador común,

$$| A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{p_m} | + | A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{p_{m-1}} | + | A_2 \cap A_2 \cap ... \cap A_{p_m} |=$$

$$= \frac{n + p_1 n + p_m n}{\prod_1^{m} p_m}$$

Sacando factor común n,

$$| A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{p_m} | + | A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{p_{m-1}} | + | A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_{p_m} |=$$

$$= \left(n \left(\frac{1 + p_1 + p_m}{\prod_1^{m} p_m} \right) \right)$$

Si hicieramos lo mismo para todos los términos $| A_1 \cap ... \cap A_n \cap A_{n+2} \cap ... \cap A_{p_m} |$ y los sumáramos a los anteriores tomando $\prod_1^m p_m$ como denominador común y sacando factor común n, tendríamos que:

$$| A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{p_m} | + | A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{p_{m-1}} | + ... + | A_1 \cap ... \cap A_n \cap A_{n+2} \cap ... \cap A_{p_m} |=$$

$$= \left(n \left(\frac{1 + p_1 + p_2 + ... + p_m}{\prod_1^{m} p_m} \right) \right) = n \left(\frac{1 + (\sum_1^m p_m)}{\prod_1^{m} p_m} \right)$$

Es fácil comprobar que si siguiéramos el mismo proceso para todos los términos $| A_1 \cap ... \cap A_n \cap A_{n+3} \cap ... \cap A_{p_m} |$ y los sumáramos a los anteriores tomando $\prod_1^m p_m$ como denominador común y sacando factor común n, tendríamos que:

$$| A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{p_m} | + | A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{p_{m-1}} | + | A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_{p_m} | + ...$$

$$... + | A_1 \cap ... \cap A_n \cap A_{n+2} \cap ... \cap A_{p_m} | + ... + | A_1 \cap ... \cap A_n \cap A_{n+3} \cap ... \cap A_{p_m} |=$$

$$= n \left(\frac{1 + (\sum_1^m p_m) + (\sum_2^m p_m p_{m-1})}{\prod_1^{m} p_m} \right)$$

Por otro lado, si hacemos este proceso con los primeros términos $\sum_{i=1}^{p_m} \mid A_i \mid$, tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{p_m} \mid A_i \mid = \left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\right) + \left(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1\right) + ... + \left(\lfloor \frac{n}{p_m} \rfloor - 1\right)$$

$$\sum_{i=1}^{p_m} \mid A_i \mid = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + ... + \lfloor \frac{n}{p_m} \rfloor - \pi\left(\sqrt{n}\right)$$

Si tomamos $\prod_1^m p_m$ como denominador común, y sacando factor común n, tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{p_m} \mid A_i \mid = n\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\prod_1^m p_m}{p_i}\right) - \pi\left(\sqrt{n}\right)$$

Operando del mismo modo con el resto de intersecciones $\sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq p_m} \mid A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k} \mid$, y aplicando $(-1)^{k+1}$ a cada término, obtenemos finalmente que:

$$\mid A_1 \cup A_2 \cup A_3 ... \cup A_{p_m} \mid =$$

$$= \lfloor n \left(\frac{(-1)^{m+1}\left(1 + (\sum_1^m p_m) + (\sum_2^m p_m p_{m-1}) + ... + \left(\sum_{i=1}^m \frac{\prod_1^m p_m}{p_i}\right)\right)}{\prod_1^m p_m}\right) \rfloor - \pi\left(\sqrt{n}\right)$$

Y por tanto,

$$\pi(n) =$$

$$= \lfloor n - n\left(\frac{(-1)^{m+1}\left(1 + (\sum_1^m p_m) + (\sum_2^m p_m p_{m-1}) + ... + \left(\sum_{i=1}^m \frac{\prod_1^m p_m}{p_i}\right)\right)}{\prod_1^m p_m}\right) \rfloor + \pi\left(\sqrt{n}\right) - 1$$

Puede observarse que la expresión

$$\lfloor n - n\left(\frac{(-1)^{m+1}\left(1 + (\sum_1^m p_m) + (\sum_2^m p_m p_{m-1}) + ... + \left(\sum_{i=1}^m \frac{\prod_1^m p_m}{p_i}\right)\right)}{\prod_1^m p_m}\right) \rfloor =$$

$$= \pi(n) - \pi\left(\sqrt{n}\right) + 1$$

No es otra que la conocida fórmula de Legendre para la función contadora de primos, que puede expresarse como

$$\pi(n) - \pi\left(\sqrt{n}\right) + 1 = \lfloor n \rfloor - \sum_{p_i \leq \sqrt{n}} \lfloor \frac{n}{p_i} \rfloor + \sum_{p_i < p_j \leq \sqrt{n}} \lfloor \frac{n}{p_i p_j} \rfloor - ...$$

2 Fórmula exacta para la función contadora de primos $\pi(n)$

Sea $m = \pi\left(\sqrt{n}\right)$. Entonces, puede establecerse que

$$\pi(n) =$$

$$= \lfloor n - n\left(\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{1}{5}\right) + ... + \left(\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{7}...\frac{p_{m-1}-1}{p_{m-1}}\frac{1}{p_m}\right)\right)\rfloor + \pi\left(\sqrt{n}\right) - 1$$

DEMOSTRACIÓN.

La expresión propuesta también se puede reordenar del siguiente modo:

$$\pi(n) =$$

$$= \lfloor n - n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{5} + ... + \frac{p_{m-2}-1}{p_{m-2}}\left(\frac{1}{p_{m-1}} + \frac{p_{m-1}-1}{p_{m-1}}\left(\frac{1}{p_m}\right)\right)\right)\right)\right)\rfloor + \pi\left(\sqrt{n}\right) - 1$$

Empezando desde el último término, se puede ver que

$$\left(\frac{1}{p_{m-1}} + \frac{p_{m-1}-1}{p_{m-1}}\left(\frac{1}{p_m}\right)\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{p_{m-1}} + \frac{p_{m-1}-1}{p_{m-1}p_m}\right) = \frac{p_m + p_{m-1} - 1}{p_{m-1}p_m}$$

Acumulando el resultado con el término anterior, y desarrollando,

$$\left(\frac{1}{p_{m-2}} + \frac{p_{m-2}-1}{p_{m-2}}\left(\frac{1}{p_{m-1}} + \frac{p_{m-1}-1}{p_{m-1}}\left(\frac{1}{p_m}\right)\right)\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{p_{m-2}} + \frac{p_{m-2}-1}{p_{m-2}}\left(\frac{p_m + p_{m-1} - 1}{p_{m-1}p_m}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{p_{m-2}} + \frac{p_{m-2}p_m + p_{m-2}p_{m-1} - p_{m-2} - p_m - p_{m-1} + 1}{p_{m-2}p_{m-1}p_m} =$$

$$= \left(\frac{p_{m-1}p_m + p_{m-2}p_m + p_{m-2}p_{m-1} - p_{m-2} - p_m - p_{m-1} + 1}{p_{m-2}p_{m-1}p_m}\right)$$

Acumulando el resultado con el término anterior, y desarrollando,

$$\frac{1}{p_{m-3}}+\frac{p_{m-3}-1}{p_{m-3}}\left(\frac{1}{p_{m-2}}+\frac{p_{m-2}-1}{p_{m-2}}\left(\frac{1}{p_{m-1}}+\frac{p_{m-1}-1}{p_{m-1}}\left(\frac{1}{p_m}\right)\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{p_{m-3}}+\frac{p_{m-3}-1}{p_{m-3}}\left(\frac{p_{m-1}p_m+p_{m-2}p_m+p_{m-2}p_{m-1}-p_{m-2}-p_m-p_{m-1}+1}{p_{m-2}p_{m-1}p_m}\right)=$$

$$=\frac{p_{m-2}p_{m-1}p_m+p_{m-3}p_{m-1}p_m+p_{m-3}p_{m-2}p_m+p_{m-3}p_{m-2}p_{m-1}-p_{m-3}p_{m-2}-}{p_{m-3}p_{m-2}p_{m-1}p_m}$$

$$\frac{-p_{m-3}p_m-p_{m-3}p_{m-1}+p_{m-3}-p_{m-1}p_m-p_{m-2}p_m-p_{m-2}p_{m-1}+p_{m-2}+p_m+p_{m-1}-1}{p_{m-3}p_{m-2}p_{m-1}p_m}$$

Puede observarse que, siendo p_{m-k} el primer primo de la sucesión, todas las combinaciones de primos distintos tales que el número de factores sea de la misma paridad que k se expresan sumando, mientras que las combinaciones de paridad distinta a la de k restan. El elemento "1" se suma para k par, y se resta para k impar.

Por tanto, continuando el desarrollo del mismo modo, podemos llegar a una fórmula general, que es:

$$\pi(n)=$$

$$=\lfloor n-n\left(\frac{(-1)^{m+1}\left(1+(\sum_1^m p_m)+(\sum_2^m p_m p_{m-1})+...+\left(\sum_{i=1}^m\frac{\prod_1^m p_m}{p_i}\right)\right)}{\prod_1^m p_m}\right)\rfloor+\pi\left(\sqrt{n}\right)-1$$

Puede verse que la fórmula obtenida a partir de la aplicación del principio de inclusión-exclusión es la misma que la obtenida a partir de la fórmula propuesta. Por tanto, la fórmula propuesta y la obtenida a partir de la aplicación del principio de inclusión-exclusión son equivalentes, lo que que concluye la demostración.

3 Relación con el teorema de los números primos

Puede verse que

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{5}+...+\frac{p_{m-2}-1}{p_{m-2}}\left(\frac{1}{p_{m-1}}+\frac{p_{m-1}-1}{p_{m-1}}\left(\frac{1}{p_m}\right)\right)\right)\right)\right)=$$

$$=1-\prod_{p\leq\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

Esta igualdad puede verse más claramente con la siguiente transformación:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{5}+...+\frac{p_{m-2}-1}{p_{m-2}}\left(\frac{1}{p_{m-1}}+\frac{p_{m-1}-1}{p_{m-1}}\left(\frac{1}{p_m}\right)\right)\right)\right)\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}+\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{5}+...+\left(1-\frac{1}{p_{m-2}}\right)\left(\frac{1}{p_{m-1}}+\left(1-\frac{1}{p_{m-1}}\right)\left(\frac{1}{p_m}\right)\right)\right)\right)\right)$$

Por ejemplo, si tomamos $m=2$, y desarrollamos el producto

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{3}$$

Y lo comparamos con

$$\frac{1}{2}+\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\frac{1}{3}$$

Vemos que

$$\frac{1}{2}+\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\frac{1}{3}=$$

$$=1-\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\frac{1}{3}$$

Por tanto, podemos establecer que la fórmula exacta para la función contadora de primos es:

$$\pi(n)=$$

$$=\lfloor n-n\left(1-\prod_{p\leq\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)\rfloor+\pi\left(\sqrt{n}\right)-1$$

Por otro lado, el tercer teorema de Mertens establece que

$$\lim_{n\to\infty} \log(n) \prod_{p\leq n} \left(1-\frac{1}{p}\right) = e^{-\gamma}$$

También puede expresarse como

$$\prod_{p\leq n} \left(1-\frac{1}{p}\right) = \frac{e^{-\gamma}+o(1)}{\log(n)}$$

En 1983, Guy Robin demostró que la diferencia

$$\log(n) \prod_{p\leq n} \left(1-\frac{1}{p}\right) - e^{-\gamma}$$

Cambia infinitas veces de signo. Así pues,

$$\prod_{p\leq \sqrt{n}} \left(1-\frac{1}{p}\right) = \frac{e^{-\gamma}\pm o(1)}{\log(\sqrt{n})} = \frac{2e^{-\gamma}\pm o(1)}{\log(n)} =$$

$$= \frac{1}{\log(n)} + \frac{(2e^{-\gamma}-1\pm o(1))}{\log(n)}$$

Y por tanto,

$$\pi(n) =$$

$$= \lfloor n - n\left(1-\left(\frac{1}{\log(n)} + \frac{(2e^{-\gamma}-1\pm o(1))}{\log(n)}\right)\right)\rfloor + \pi\left(\sqrt{n}\right) - 1 =$$

$$= \lfloor n - n + \frac{n}{\log(n)} + \frac{n\,(2e^{-\gamma}-1\pm o(1))}{\log(n)}\rfloor + \pi\left(\sqrt{n}\right) - 1 =$$

$$= \lfloor \frac{n}{\log(n)} + \frac{n\,(2e^{-\gamma}-1\pm o(1))}{\log(n)}\rfloor + \pi\left(\sqrt{n}\right) - 1$$

4 Aplicaciones de la fórmula obtenida

En las siguientes secciones se trabajará con la expresión obtenida para $\pi\left(n\right)$ para acotar el mínimo valor de k que verifique que

$$\pi(n+k)-\pi\left(n\right)\geq 1$$

4.1 Mínimo valor de k para el caso $p_m^2 \leq n < n+k < p_{m+1}^2$

Puede observarse que, si $p_m^2 \leq n < n{+}k < p_{m+1}^2$, entonces

$$\pi(n+k)=$$

$$=\lfloor(n+k)-(n+k)\left(\left(1-\prod_{p\leq\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)\right)\rfloor+\pi\left(\sqrt{n}\right)-1$$

Haciendo la diferencia con $\pi(n)$,

$$\pi(n+k)-\pi\left(n\right)=$$

$$=\left(\lfloor(n+k)-(n+k)\left(\left(1-\prod_{p\leq\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)\right)\rfloor+\pi\left(\sqrt{n}\right)-1\right)-$$

$$-\left(\lfloor n-n\left(\left(1-\prod_{p\leq\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)\right)\rfloor+\pi\left(\sqrt{n}\right)-1\right)$$

Cancelando términos, nos queda que:

$$\pi(n+k)-\pi\left(n\right)=$$

$$=\lfloor(n+k)-(n+k)\left(\left(1-\prod_{p\leq\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)\right)\rfloor-$$

$$-\lfloor n-n\left(\left(1-\prod_{p\leq\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)\right)\rfloor$$

Minimizando $\pi(n{+}k)$ es claro que

$$\lfloor (n+k)-(n+k)\left(\left(1-\prod_{p\leq\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)\right)\rfloor >$$

$$> (n+k)-(n+k)\left(\left(1-\prod_{p\leq\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)\right)-1$$

Y maximizando $\pi\left(n\right)$, es claro que

$$\lfloor n-n\left(\left(1-\prod_{p\leq\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)\right)\rfloor \leq$$

$$\leq n-n\left(\left(1-\prod_{p\leq\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)\right)$$

Por tanto, podemos afirmar que

$$\pi(n+k)-\pi\left(n\right) >$$

$$> \left((n+k)-(n+k)\left(\left(1-\prod_{p\leq\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)\right)-1\right)-$$

$$-\left(n-n\left(\left(1-\prod_{p\leq\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)\right)\right)$$

Cancelando términos, nos queda que:

$$\pi(n+k)-\pi\left(n\right) >$$

$$> k-k\left(\left(1-\prod_{p\leq\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)\right)-1$$

Entonces, para acotar el mínimo valor de k que verifique que

$$\pi(n+k)-\pi\left(n\right)\geq 1$$

Podemos intentar establecer para qué valor de k se verifica que:

$$k - k\left(\left(1 - \prod_{p\leq\sqrt{n}}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\right)\right) - 1 \geq 1$$

Operando,

$$k - k\left(\left(1 - \prod_{p\leq\sqrt{n}}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\right)\right) \geq 2$$

$$k\left(1 - \left(\left(1 - \prod_{p\leq\sqrt{n}}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\right)\right)\right) \geq 2$$

$$k \geq \frac{2}{1 - \left(\left(1 - \prod_{p\leq\sqrt{n}}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\right)\right)}$$

$$k \geq \frac{2}{\prod_{p\leq\sqrt{n}}\left(1 - \frac{1}{p}\right)}$$

Como

$$\prod_{p\leq\sqrt{n}}\left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{e^{-\gamma} \pm o\left(1\right)}{\log\left(\sqrt{n}\right)} = \frac{2e^{-\gamma} \pm o\left(1\right)}{\log\left(n\right)}$$

Entonces, reemplazando,

$$k \geq \frac{2}{\frac{2e^{-\gamma} \pm o(1)}{\log(n)}}$$

$$k \geq \frac{\log\left(n\right)}{e^{-\gamma} \pm o\left(1\right)}$$

Parece que podría afirmarse que, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\sqrt{n} > \frac{\log\left(n\right)}{e^{-\gamma} \pm o\left(1\right)}$$

Sin embargo, no lo podemos asegurar, ya que no conocemos el valor exacto de $e^{-\gamma} \pm o(1)$, que por definición es variable. Este valor se puede acotar con otro método; sabemos que

$$\lfloor n - n\left(1 - \prod_{p \leq \sqrt{n}}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\right)\rfloor =$$

$$= \pi(n) - \pi\left(\sqrt{n}\right) + 1$$

Para hallar el valor máximo $\left(1 - \prod_{p \leq \sqrt{n}}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\right)$ (valor que maximiza el valor de k mínimo) tenemos que hallar el valor mínimo de la expresión $\pi(n) - \pi\left(\sqrt{n}\right) + 1$

Aplicando el Teorema de los Números Primos, y en concreto las cotas no asintóticas establecidas por Pierre Dusart, puede establecerse que:

$$\frac{n}{\log(n) + 2} < \pi(n) < \frac{n}{\log(n) - 4}$$

Para $n \geq 55$. Por tanto, el valor mínimo de la expresión $\pi(n) - \pi\left(\sqrt{n}\right) + 1$ es

$$\pi(n) - \pi\left(\sqrt{n}\right) + 1 > \frac{n}{\log(n) + 2} - \left(\frac{\sqrt{n}}{\log\left(\sqrt{n}\right) - 4}\right) + 1$$

Y por tanto,

$$\lfloor n - n\left(1 - \prod_{p \leq \sqrt{n}}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\right)\rfloor > \frac{n}{\log(n) + 2} - \left(\frac{\sqrt{n}}{\log\left(\sqrt{n}\right) - 4}\right) + 1$$

La expresión $\left(1 - \prod_{p \leq \sqrt{n}}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\right)$ queda optimizada cuando

$$\lfloor n - n\left(1 - \prod_{p \leq \sqrt{n}}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\right)\rfloor =$$

$$= n - n\left(1 - \prod_{p \leq \sqrt{n}}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\right)$$

Por tanto, para hallar el valor máximo de $\left(1-\prod_{p\leq\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)$, debemos asumir que

$$n-n\left(1-\prod_{p\leq\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)>\frac{n}{\log(n)+2}-\left(\frac{\sqrt{n}}{\log(\sqrt{n})-4}\right)+1$$

$$\frac{\sqrt{n}}{\log(\sqrt{n})-4}=\frac{2\sqrt{n}}{\log(n)-8}$$

Operando,

$$\left(1-\prod_{p\leq\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)<\frac{n-\frac{n}{\log(n)+2}+\frac{2\sqrt{n}}{\log(n)-8}-1}{n}$$

$$\left(1-\prod_{p\leq\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)<1-\frac{1}{\log(n)+2}+\frac{2}{(\log(n)-8)\sqrt{n}}-\frac{1}{n}$$

Reemplazando en la inecuación que habíamos hallado para hallar el valor mínimo de k, tenemos que

$$k\geq\frac{2}{1-\left(1-\frac{1}{\log(n)+2}+\frac{2}{(\log(n)-8)\sqrt{n}}-\frac{1}{n}\right)}$$

$$k\geq\frac{2}{\frac{1}{\log(n)+2}+\frac{1}{n}-\frac{2}{(\log(n)-8)\sqrt{n}}}$$

Se puede verificar que, para $72\leq n\leq e^8$, y para $n\geq 4634$,

$$\frac{1}{\log(n)+2}+\frac{1}{n}-\frac{2}{(\log(n)-8)\sqrt{n}}>\frac{2}{\sqrt{n}}$$

Por tanto, reemplazando,

$$k\geq\sqrt{n}$$

Y en consecuencia, para $72\leq n\leq e^8$, y para $n\geq 4634$, si $p_m^2\leq n<n+k<p_{m+1}^2$,

$$\pi(n+\sqrt{n})-\pi(n)\geq 1$$

De hecho, se verifica que

$$\frac{2}{\frac{1}{\log(n)+2}+\frac{1}{n}-\frac{2}{(\log(n)-8)\sqrt{n}}}=\log^{\varepsilon}(n)$$

Con

$$\varepsilon=\frac{\log\left(\frac{2}{\frac{1}{n}+\frac{1}{\log(n)+2}+\frac{2}{(8-\log(n))\sqrt{n}}}\right)}{\log\left(\log\left(n\right)\right)}$$

$$k\geq\log^{\varepsilon}(n)$$

Y en consecuencia, para $n\geq 55$, si $p_m^2\leq n<n+k<p_{m+1}^2$,

$$\pi(n+\log^{\varepsilon}(n))-\pi(n)\geq 1$$

Es interesante observar que $\varepsilon<2$ para $8\leq n\leq 4110$, y para $n\geq 4601$, y por tanto para estos casos,

$$\pi(n+\log^{2}(n))-\pi(n)>1$$

4.2 Mínimo valor de k para el caso $p_m^2 < n < p_{m+1}^2 \le n+k$

En este caso,

$$\pi(n+k) =$$

$$= \lfloor (n+k) - (n+k)\left(\left(1-\left(\prod_{p\le\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)\left(1-\frac{1}{p_{m+1}}\right)\right)\right)\rfloor + \pi\left(\sqrt{n}\right)$$

Haciendo la diferencia con $\pi(n)$,

$$\pi(n+k) - \pi(n) =$$

$$= \left(\lfloor (n+k) - (n+k)\left(\left(1-\left(\prod_{p\le\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)\left(1-\frac{1}{p_{m+1}}\right)\right)\right)\rfloor + \pi\left(\sqrt{n}\right)\right) -$$

$$-\left(\lfloor n - n\left(\left(1-\prod_{p\le\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)\right)\rfloor + \pi\left(\sqrt{n}\right) - 1\right)$$

Cancelando términos, nos queda que:

$$\pi(n+k) - \pi(n) =$$

$$= \lfloor (n+k) - (n+k)\left(\left(1-\left(\prod_{p\le\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)\left(1-\frac{1}{p_{m+1}}\right)\right)\right)\rfloor -$$

$$-\lfloor n - n\left(\left(1-\prod_{p\le\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right) - 1\right)\rfloor$$

Minimizando $\pi(n{+}k)$ es claro que

$$\lfloor (n+k) - (n+k)\left(\left(1-\left(\prod_{p\le\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)\left(1-\frac{1}{p_{m+1}}\right)\right)\right)\rfloor >$$

$$> (n+k) - (n+k)\left(\left(1-\left(\prod_{p\le\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)\left(1-\frac{1}{p_{m+1}}\right)\right)\right) - 1$$

Y maximizando $\pi\left(n\right)$, es claro que

$$\lfloor n-n\left(\left(1-\prod_{p\leq\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)\right)\rfloor\leq$$

$$\leq n-n\left(\left(1-\prod_{p\leq\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)\right)$$

Por tanto, podemos afirmar que

$$\pi(n+k)-\pi\left(n\right)>$$

$$>\left((n+k)-(n+k)\left(\left(1-\left(\prod_{p\leq\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)\left(1-\frac{1}{p_{m+1}}\right)\right)\right)-1\right)-$$

$$-\left(n-n\left(\left(1-\prod_{p\leq\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)\right)-1\right)$$

Cancelando términos, nos queda que:

$$\pi(n+k)-\pi\left(n\right)>$$

$$>k-k\left(\left(1-\left(\prod_{p\leq\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)\left(1-\frac{1}{p_{m+1}}\right)\right)\right)-n\left(\left(\prod_{p\leq\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)\left(\frac{1}{p_{m+1}}\right)\right)$$

Entonces, para acotar el mínimo valor de k que verifique que

$$\pi(n+k)-\pi\left(n\right)\geq 1$$

Podemos intentar establecer para qué valor de k se verifica que:

$$k-k\left(\left(1-\left(\prod_{p\leq\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)\left(1-\frac{1}{p_{m+1}}\right)\right)\right)-n\left(\left(\prod_{p\leq\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)\left(\frac{1}{p_{m+1}}\right)\right)\geq 1$$

Operando como en la subsección anterior,

$$k\geq\frac{1+n\left(\left(\prod_{p\leq\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)\left(\frac{1}{p_{m+1}}\right)\right)}{\left(1-\left(1-\left(\prod_{p\leq\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)\left(1-\frac{1}{p_{m+1}}\right)\right)\right)}$$

$$k\geq\frac{1+n\left(\left(\prod_{p\leq\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)\left(\frac{1}{p_{m+1}}\right)\right)}{\left(\prod_{p\leq\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)\left(1-\frac{1}{p_{m+1}}\right)}$$

Como

$$\prod_{p\leq\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{e^{-\gamma}\pm o\left(1\right)}{\log\left(\sqrt{n}\right)}=\frac{2e^{-\gamma}\pm o\left(1\right)}{\log\left(n\right)}$$

Entonces, reemplazando y operando,

$$k\geq\frac{1+n\left(\frac{2e^{-\gamma}\pm o(1)}{\log(n)}\right)\left(\frac{1}{p_{m+1}}\right)}{\left(\frac{2e^{-\gamma}\pm o(1)}{\log(n)}\right)\left(1-\frac{1}{p_{m+1}}\right)}$$

$$k\geq\frac{1}{\left(\frac{2e^{-\gamma}\pm o(1)}{\log(n)}\right)\left(1-\frac{1}{p_{m+1}}\right)}+\frac{\left(\frac{n}{p_{m+1}}\right)}{\left(1-\frac{1}{p_{m+1}}\right)}$$

$$k\geq\frac{1}{\left(\frac{2e^{-\gamma}\pm o(1)}{\log(n)}\right)\left(\frac{p_{m+1}-1}{p_{m+1}}\right)}+\frac{\left(\frac{n}{p_{m+1}}\right)}{\left(\frac{p_{m+1}-1}{p_{m+1}}\right)}$$

$$k\geq\frac{1}{\left(\frac{2e^{-\gamma}\pm o(1)}{\log(n)}\right)\left(\frac{p_{m+1}-1}{p_{m+1}}\right)}+\left(\frac{n}{(p_{m+1}-1)}\right)$$

Como

$$\frac{n}{(p_{m+1}-1)}<\sqrt{n}$$

Entonces podemos asumir que

$$k\geq\frac{1}{\left(\frac{2e^{-\gamma}\pm o(1)}{\log(n)}\right)\left(\frac{p_{m+1}-1}{p_{m+1}}\right)}+\sqrt{n}$$

$$k\geq\frac{\log\left(n\right)\left(p_{m+1}\right)}{\left(2e^{-\gamma}\pm o\left(1\right)\right)\left(p_{m+1}-1\right)}+\sqrt{n}$$

Parece que podría afirmarse que, para todo $n\in\mathbb{N}$

$$\sqrt{n}>\frac{\log\left(n\right)\left(p_{m+1}\right)}{\left(2e^{-\gamma}\pm o\left(1\right)\right)\left(p_{m+1}-1\right)}$$

Sin embargo, no lo podemos asegurar, ya que no conocemos el valor exacto de $2e^{-\gamma}\pm o(1)$, que por definición es variable. Este valor se puede acotar recurriendo al mismo método empleado en la subsección anterior.

Cuanto más pequeño sea el valor de la expresión $\left(\left(\prod_{p\leq\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)\left(1-\frac{1}{p_{m+1}}\right)\right)$, mayor será el valor de k, por lo que tenemos que hallar el valor mínimo de esta expresión. Esta expresión se minimiza cuanto más pequeño sea el valor de la expresión $\prod_{p\leq\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)$. Este valor es mínimo cuando la expresión $\pi(n)-\pi\left(\sqrt{n}\right)+1$ es mínima.

Conforme al desarrollo de la subsección anterior,

$$n-n\left(1-\prod_{p\leq\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)>\frac{n}{\log(n)+2}-\left(\frac{\sqrt{n}}{\log\left(\sqrt{n}\right)-4}\right)+1$$

$$\frac{\sqrt{n}}{\log\left(\sqrt{n}\right)-4}=\frac{2\sqrt{n}}{\log(n)-8}$$

Operando,

$$\prod_{p\leq\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)>\frac{1}{\log(n)+2}-\left(\frac{2}{\left(\log(n)-8\right)\sqrt{n}}\right)+\frac{1}{n}$$

Reemplazando en la inecuación que habíamos hallado para hallar el valor mínimo de k, tenemos que

$$k\geq\frac{p_{m+1}}{\left(\frac{1}{\log(n)+2}-\left(\frac{2}{\left(\log(n)-8\right)\sqrt{n}}\right)+\frac{1}{n}\right)\left(p_{m+1}-1\right)}+\sqrt{n}$$

Como se ha señalado en la subsección anterior, se puede verificar que, para $72\leq n\leq e^8$, y para $n\geq 4634$,

$$\frac{1}{\log(n)+2}+\frac{1}{n}-\frac{2}{\left(\log(n)-8\right)\sqrt{n}}>\frac{2}{\sqrt{n}}$$

Por tanto, reemplazando,

$$k\geq\frac{p_{m+1}}{\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)\left(p_{m+1}-1\right)}+\sqrt{n}$$

$$k\geq\frac{\left(\sqrt{n}\right)p_{m+1}}{2\left(p_{m+1}-1\right)}+\sqrt{n}$$

Como

$$\frac{\left(\sqrt{n}\right)p_{m+1}}{2\left(p_{m+1}-1\right)}<\sqrt{n}$$

Podemos asumir que

$$k \geq 2\sqrt{n}$$

Y en consecuencia, para $72 \leq n \leq e^8$, y para $n \geq 4634$, si $p_m^2 < n < p_{m+1}^2 \leq n + k$,

$$\pi(n + 2\sqrt{n}) - \pi(n) \geq 1$$

Uniendo la demostración de esta subsección con la de la subsección anterior, quedan establecidos nuevos intervalos máximos de distancia entre números primos, y como corolarios se pueden demostrar numerosas conjeturas y teoremas sobre la distribución de los números primos.

En la última sección se expone únicamente a modo ejemplificativo la demostración de la conjetura de Oppermann, de la que posteriormente se deducen fácilmente como corolarios la demostración de las conjeturas de Legendre, Brocard y Andrica.

5 Corolarios

5.1 Primer corolario: Demostración de la conjetura de Oppermann

La conjetura de Oppermann puede enunciarse como:

$$\forall n > 1 \in \mathbb{N}, \exists P_a, P_b / n^2 - n < P_a < n^2 < P_b < n^2 + n$$

Puede comprobarse fácilmente que la conjetura se cumple para $n \leq 72$ y para $e^8 \leq n \leq 4634$.

Es claro que si $p_m^2 \leq n^2$, entonces necesariamente $p_m^2 < n^2 + n < p_{m+1}^2$. Por tanto, en este caso $p_m^2 \leq n^2 < n^2 + n < p_{m+1}^2$, y podemos establecer que existe un primo entre n^2 y $n^2 + n$, y por tanto queda demostrada la conjetura de Oppermann para el caso $n^2 + n$.

En cambio, en el segundo caso puede suceder tanto que $p_m^2 < n^2 - n < n^2 < p_{m+1}^2$, como que $p_{m-1}^2 < n^2 - n < p_m^2 = n^2$.

En el primer subcaso, como sucede con $n^2 + n$, podemos afirmar que existe un primo entre $n^2 - n$ y n^2, y por tanto queda demostrada la conjetura de Oppermann para este subcaso concreto.

En el segundo subcaso, es claro que si $p_m^2 = n^2$, entonces existe un primo entre $n^2 - n$ y $n^2 - n + \left(\sqrt{n^2 - n}\right)$, ya que $p_{m-1}^2 < n^2 - n < n^2 - n + \left(\sqrt{n^2 - n}\right) < p_m^2$. Así pues, podemos establecer que existe un primo entre $n^2 - n$ y n^2, y por tanto queda demostrada la conjetura de Oppermann para este subcaso concreto.

En consecuencia, queda demostrada la conjetura de Oppermann en su totalidad.

5.2 Segundo corolario: Demostración de la conjetura de Legendre

La conjetura de Legnedre establece que, para cada número natural, existe al menos un número primo tal que $n^2 < p < (n+1)^2$.

Como $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$, y conforme a la conjetura de Opperman demostrada como primer corolario,

$$n^2 < P_a < n^2 + n < P_b < (n+1)^2$$

En consecuencia,
$$n^2 < P_a < P_b < (n+1)^2$$
Así pues, queda demostrada la conjetura de Legendre.

5.3 Tercer corolario: demostración de la conjetura de Brocard

La conjetura de Brocard sugiere que, si p_n y p_{n+1} son dos números primos consecutivos mayores que dos, entonces entre p_n^2 and p_{n+1}^2 existen al menos cuatro números primos.

Conforme al enunciado de la conjetura,
$$2 < p_n < p_{n+1}$$
Como la distancia mínima entre números primos impares es de dos, podemos establecer que:
$$p_n < M < p_{n+1}$$
Donde M es un número natural entre p_n and p_{n+1}. En consecuencia,
$$p_n^2 < M^2 < p_{n+1}^2$$
Como $M \geq p_n + 1$, y conforme a la conjetura de Oppermann demostrada,
$$p_n^2 < P_a < p_n^2 + p_n < P_b < M^2$$
De igual modo, como $p_{n+1} \geq M + 1$, y conforme a la conjetura de Oppermann demostrada,
$$M^2 < P_c < M^2 + M < P_d < p_{n+1}^2$$
Por tanto,
$$p_n^2 < P_a < P_b < P_c < P_d < p_{n+1}^2$$
En consecuencia, queda demostrada la conjetura de Brocard.

5.4 Cuarto corolario: Demostración de la conjetura de Andrica

La conjetura de Andrica establece que, para cada par de primos consecutivos p_n and p_{n+1}, se verifica que $\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n} < 1$

Conforme a la conjetura de Oppermann demostrada, la máxima distancia entre p_n y p_{n+1} es:
$$n^2 + n + 1 \leq P_n < (n+1)^2 < p_{n+1} \leq n^2 + 3n + 1$$
Es fácilmente verificable que, para $\forall n \in \mathbb{N}$:
$$\sqrt{n^2 + 3n + 1} - \sqrt{n^2 + n + 1} < 1$$
Como $n^2 + 3n + 1 \geq p_{n+1}$, y $P_n \geq n^2 + n + 1$, entonces $\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n} < 1$

En consecuencia, queda demostrada la conjetura de Andrica.

Bibliografía

Harrison, John (2009). "*Formalizing an analytic proof of the Prime Number Theorem*". Journal of Automated Reasoning. 43 (3): 243–261.

Goldfeld, Dorian (2004). "*The elementary proof of the prime number theorem: an historical perspective*". In Chudnovsky, David; Chudnovsky, Gregory; Nathanson, Melvyn. Number theory (New York, 2003). New York: Springer-Verlag. pp. 179–192.

O'Rourke, Ciarán (2013). *"The prime number theorem: analytic and elementary proofs".*

Tesoro, Rafael (2011). "*Aspectos analíticos del Teorema de los Números Primos*". pp. 11–16.

Jakimczuk, Rafael (2014). "*Sums of Primes: An Asymptotic Expansion*". International Journal of Contemporary Mathematical Sciences. 16 (9): 761–765

Apostol, Tom (1976). *"Introduction to Analytic Number Theory"*. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag.

Sinha, Nilotpal Kanti (2015). "*On the asymptotic expansion of the sum of the first n primes*". arXiv:1011.1667.

Newman, Donald J. (1980). "*Simple analytic proof of the prime number theorem*". American Mathematical Monthly. 87 (9): 693–696.

Cilleruelo, Javier (2000). "*La demostración elemental del teorema de los números primos*".

García Miranda, Jesús (2005). "*Capítulo 4. Combinatoria*".

Conrad, Keith. "*Infinite series*".

Schoenfeld, Lowell (1976). "*Sharper Bounds for the Chebyshev Functions (x) and (x). II*". Mathematics of Computation. 30 (134): 337–360.

Dusart, Pierre (1998). "*Autour de la fonction qui compte le nombre de nombres premiers*" (PhD thesis) (in French).

F. Mertens. J. reine angew. *"Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie".* Math. 78 (1874), 46–62.

Goldmakher, Leo. *"A quick proof of Merten's Theorem".*

Weisstein, Eric W. "*Legendre's Formula.*" From MathWorld--A Wolfram Web Resource.

Robin, G. (1983). "Sur l'ordre maximum de la fonction somme des diviseurs". Séminaire Delange–Pisot–Poitou, Théorie des nombres (1981–1982). Progress in Mathematics. 38: 233–244.