

L' attraction des nombres par la force Syracusienne

29 Décembre 2018

M.Sghiar

msghiar21@gmail.com

9 Allée capitaine Jean Bernard Bossu, 21240, Talant

FRANCE

Abstract : I study in which cases $x \in \mathbb{N}^*$ and $1 \in \mathcal{O}_S(x) = \{S^n(x), n \in \mathbb{N}^*\}$ where $\mathcal{O}_S(x)$ is the orbit of the function S defined on \mathbb{R}^+ by $S(x) = \frac{x}{2} + (\frac{q-1}{2}x + \frac{1}{2})\sin^2(x\frac{\pi}{2})$, $q \in 2\mathbb{N}^* + 1$. And I deduce the proof of the Syracuse conjecture.

Résumé : J' étudie dans quels cas $x \in \mathbb{N}^*$ et $1 \in \mathcal{O}_S(x) = \{S^n(x), n \in \mathbb{N}^*\}$ où $\mathcal{O}_S(x)$ est l'orbite de la fonction S définie sur \mathbb{R}^+ par $S(x) = \frac{x}{2} + (\frac{q-1}{2}x + \frac{1}{2})\sin^2(x\frac{\pi}{2})$, $q \in 2\mathbb{N}^* + 1$. Et j'en déduis une preuve de la conjecture de Syracuse.

Keywords : la conjecture de Syracuse, Syracuse, conjecture de Collatz, conjecture d'Ulam, conjecture tchèque, problème $3x+1$.

The Subject Classification Codes : 11A99 - 11B83 - 46G99 - 26A09- 26A42 - 10A25

Introduction, notations et définitions :

La conjecture de Syracuse, introduite par Lothar Collatz et ouverte depuis 1928 ([2], [3], [1]) est encore appelée conjecture de Collatz, conjecture d'Ulam, conjecture tchèque ou problème $3x+1$.

Le but de cet article est de démontrer cette belle conjecture dont Paul Erdos a dit [4] " les mathématiques ne sont pas encore prêtes pour de tels problèmes " .

La suite de Syracuse d'un nombre entier N est définie par récurrence, de la manière suivante :

$$u_0 = N, \text{ et pour tout entier } n \geq 0, u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair} \end{cases}$$

Je définis la fonction S définie sur \mathbb{R}^+ par $S(x) = \frac{x}{2} + (x + \frac{1}{2})\sin^2(x\frac{\pi}{2})$.

$\mathcal{O}_S(x) = \{S^n(x), n \in \mathbb{N}^*\}$ est l'**orbite** de x sous l'action de S .

Si $\exists m \in \mathbb{N}^*$ tel que $S^m(x) = x$, alors l'orbite $\mathcal{O}_S(x) = \{S^1(x), \dots, S^m(x)\}$ est dite un cycle de cardinale m .

On dit qu'une orbite est convergente si elle rencontre un cycle . Et on dit qu'une orbite converge vers a si elle converge vers un cycle contenant a .

D'abord dans le corollaire 2 je démontre que l'orbite de tout nombre non nul est fini si il ne passe pas par le nombre 1. Puis dans le corollaire 3 je démontre que le seul cycle qui puisse exister sous l'action de la force syracausienne est le cycle $\{1, 2\}$ (classiquement c'est le cycle $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2$). Et on conclut que tout nombre non nul (assimilé à un corps), sous l'action de l'attraction de la force Syracusienne, finira par tomber sur 1 dans le vaste océan des nombres.

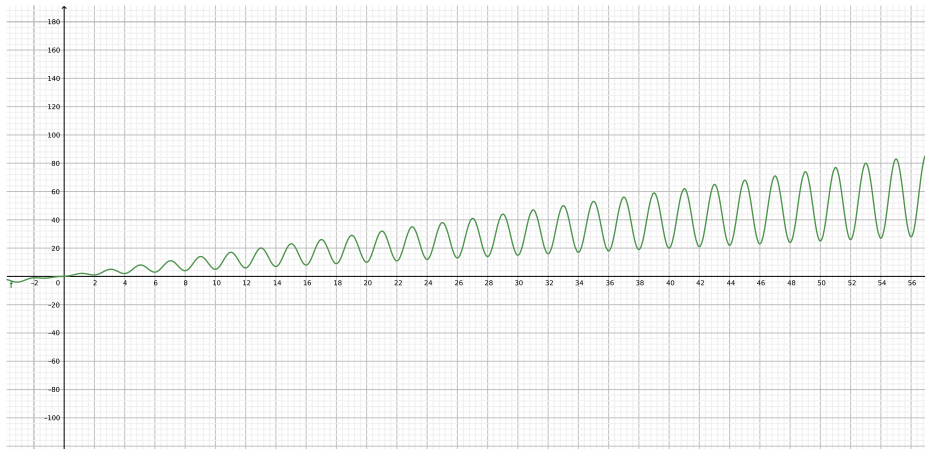


FIGURE 1 – Courbe de Sghiar-Syracuse

Théorème 1 (Conjecture de Syracuse). *Pour tout entier $u_0 = N > 0$, il existe un indice n tel que $u_n = 1$.*

La preuve de ce théorème 1 va résulter de cette proposition 4 :

Proposition 1 (Théorème de Sghiar-Collatz). *Soit S la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par $S(x) = \frac{x}{2} + (x + \frac{1}{2})\sin^2(x\frac{\pi}{2})$. Si $x \in \mathbb{N}^*$, alors $1 \in \mathcal{O}_S(x)$*

Lemme 1. *Si S est la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par $S(x) = \frac{x}{2} + (x + \frac{1}{2})\sin^2(x\frac{\pi}{2})$, alors $S(x) = x - \frac{x}{2}\cos(x\pi) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos(x\pi)$*

Démonstration. Il suffit d'utiliser le fait que $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$

□

Lemme 2. $\int_0^{S^n(x)} S(t)dt = \frac{1}{2}(S^n(x))^2 + \frac{1}{4}S^n(x) - \frac{1}{4\pi}\sin(\pi S^n(x)) - \frac{1}{2\pi}S^n(x)\sin(\pi S^n(x)) + \frac{1}{2\pi^2}\cos(\pi S^n(x)) - \frac{1}{2\pi}$

Démonstration. D'après le lemme 1, on a : $S(t) = t - \frac{t}{2}\cos(t\pi) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos(t\pi)$, donc $\int_0^{S^n(x)} S(t)dt = \int_0^{S^n(x)} (t - \frac{t}{2}\cos(t\pi) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos(t\pi))dt$ et le résultat s'en déduit par intégration.

□

Corollaire 1. *Si $S^n(x) \rightarrow +\infty$ alors $\lim_{S^n(x) \rightarrow +\infty} \int_0^{S^n(x)} \frac{S(t)}{(S^n(x))^2} dt = \frac{1}{2}$*

Lemme 3. *Si $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times (2\mathbb{N} + 1)$, avec $a \leq b$, alors on a :*

i- $S(a) \leq S(t) \leq S(b), \forall t \in]a, b[$ si a est pair.

ii- $S(a + 1) \leq S(t) \leq S(b), \forall t \in]a + 1, b[$ si a est impair.

iii- De même $S(a - 1) \leq S(t) \leq S(b), \forall t \in]a - 1, b[$ si a est impair.

Démonstration. On a : $\frac{t}{2} \leq S(t) \leq \frac{3t+1}{2}$. Donc $\frac{a}{2} \leq \frac{t}{2} \leq S(t) \leq \frac{3t+1}{2} \leq \frac{3b+1}{2}$, soit $S(a) \leq S(t) \leq S(b), \forall t \in]a, b[$ si a est pair.

Et $\forall t \in]a + 1, b[$ on a : $\frac{a+1}{2} \leq \frac{t}{2} \leq S(t) \leq \frac{3t+1}{2} \leq \frac{3b+1}{2}$, soit $S(a + 1) \leq S(t) \leq S(b), \forall t \in]a + 1, b[$ si a est impair. (Voir Figure 1)

□

Lemme 4. *Si $S^n(x) \neq 1 \forall n \in \mathbb{N}$, alors $\int_{S(S^{m-1}(x)-1)}^{S(S^{m-1}(x))} \frac{S(t)}{(S^m(x))^2} dt \geq \frac{1}{32}$ pour $S^{m-1}(x)$ impair.*

Démonstration. En utilisant le lemme 3 deux cas se présentent :

Cas 1 : Si $S(S^{m-1}(x) - 1)$ est pair :

$$\int_{S(S^{m-1}(x)-1)}^{S(S^{m-1}(x))} \frac{S(t)}{(S^m(x))^2} dt \geq (S(S^{m-1}(x)) - S(S^{m-1}(x) - 1)) \frac{S(S(S^{m-1}(x)-1))}{(S^m(x))^2}.$$

$$\text{Or } S(S^{m-1}(x)) - S(S^{m-1}(x) - 1) = S^{m-1}(x) + \frac{1}{2} \geq S^{m-1}(x) \text{ et } \frac{S(S(S^{m-1}(x)-1))}{(S^m(x))^2} =$$

$$\frac{1}{2} \frac{S^{m-1}(x)-1}{(S^m(x))^2}, \text{ et par suite } (S(S^{m-1}(x)) - S(S^{m-1}(x) - 1)) \frac{S(S(S^{m-1}(x)-1))}{(S^m(x))^2} \geq$$

$$\frac{1}{4} \left(\frac{S^{m-1}(x)}{S^m(x)} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{S^{m-1}(x)} \right) \geq \frac{1}{8} \left(\frac{S^{m-1}(x)}{S^m(x)} \right)^2 \text{ car } S^{m-1}(x) \geq 2 \text{ puisque } S^{m-1}(x) \neq 1.$$

$$\text{Et comme } S^{m-1}(x) \text{ est impair, alors } S^m(x) = \frac{3S^{m-1}(x)+1}{2}. \text{ Et par suite } \frac{1}{8} \left(\frac{S^{m-1}(x)}{S^m(x)} \right)^2 \geq$$

$$\frac{1}{8} \left(\frac{2}{3 + \frac{1}{S^{m-1}(x)}} \right)^2 \geq \frac{1}{32}.$$

Cas 2 : Si $S(S^{m-1}(x) - 1)$ est impair :

$$\int_{S(S^{m-1}(x)-1)}^{S(S^{m-1}(x))} \frac{S(t)}{(S^m(x))^2} dt \geq (S(S^{m-1}(x)) - S(S^{m-1}(x) - 1)) \frac{S(S(S^{m-1}(x)-1)+1)}{(S^m(x))^2}.$$

$$\text{Or } S(S^{m-1}(x)) - S(S^{m-1}(x) - 1) = S^{m-1}(x) + \frac{1}{2} \geq S^{m-1}(x) \text{ et } \frac{S(S(S^{m-1}(x)-1)+1)}{(S^m(x))^2} =$$

$$\frac{1}{2} \frac{S(S^{m-1}(x)-1)+1}{(S^m(x))^2} \geq \frac{1}{2} \frac{S(S^{m-1}(x)-1)}{(S^m(x))^2} = \frac{1}{2} \frac{3(S^{m-1}(x)-1)+1}{(S^m(x))^2}, \text{ et par suite } (S(S^{m-1}(x)) -$$

$$S(S^{m-1}(x) - 1)) \frac{S(S(S^{m-1}(x)-1))}{(S^m(x))^2} \geq \frac{3}{4} \left(\frac{S^{m-1}(x)}{S^m(x)} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{S^{m-1}(x)} \right) \geq \frac{3}{8} \left(\frac{S^{m-1}(x)}{S^m(x)} \right)^2 \text{ car}$$

$$S^{m-1}(x) \geq 2 \text{ puisque } S^{m-1}(x) \neq 1.$$

$$\text{Et comme } S^{m-1}(x) \text{ est impair, alors } S^m(x) = \frac{3S^{m-1}(x)+1}{2}. \text{ Et par suite } \frac{3}{8} \left(\frac{S^{m-1}(x)}{S^m(x)} \right)^2 \geq$$

$$\frac{3}{8} \left(\frac{2}{3 + \frac{1}{S^{m-1}(x)}} \right)^2 \geq \frac{3}{32}.$$

D'où le résultat. □

Remarque 1. En prolongeant \mathbb{R} par $\overline{\mathbb{R}} = \langle \mathbb{R}, +\infty, -\infty \rangle$ le plus petit anneau contenant \mathbb{R} , $+\infty$ et $-\infty$. $+\infty$ et $-\infty$ sont considérés comme des nombres et on peut effectuer dans $\overline{\mathbb{R}}$ le même calcul que dans \mathbb{R} , en particulier on a :

$$1 \times (-\infty) = -\infty, 1 \times (+\infty) = +\infty, a(-\infty) = -a(+\infty), a(+\infty) + b(+\infty) =$$

$$(a + b)(+\infty), a(+\infty) \times b(+\infty) = (a \times b)(+\infty)^2, \frac{a(+\infty)}{c(+\infty)} = \frac{a}{c}, \forall (a, b, c) \in$$

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* . \text{ On peut même aller plus loin : Par exemple : } \frac{1}{2} = \int_0^x \frac{t}{x^2} dt \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t}{x^2} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \times \int_0^x t dt \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t dt = \frac{1}{(+\infty)^2} \times \int_0^{+\infty} t dt = \frac{1}{(+\infty)^2} \times \frac{1}{2} (+\infty)^2 = \frac{1}{2}.$$

En utilisant la remarque 1, on va montrer le corollaire 2 suivant :

Corollaire 2. Si $x \in \mathbb{N}^*$, et si $1 \notin \mathcal{O}_S(x)$, alors $\text{card}(\mathcal{O}_S(x)) < +\infty$.

Démonstration. En effet, si $\text{card}(\mathcal{O}_S(x)) = +\infty$ alors l'ensemble $I = \{m \in \mathbb{N}, S^{m-1}(x) \text{ est impair}\}$ est fini car sinon en utilisant le corollaire 1 et la remarque 1 on a :

$$\frac{1}{2} = \lim_{S^n(x) \rightarrow +\infty} \int_0^{S^n(x)} \frac{S(t)}{(S^n(x))^2} dt = \lim_{S^n(x) \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{S(t)}{(S^n(x))^2} dt \geq$$

$\sum_{m \in I} \left(\int_{S(S^{m-1}(x)-1)}^{S(S^{m-1}(x))} \frac{S(t)}{(S^m(x))^2} dt \right) \geq \sum_{m \in I, S^m(x) \geq S^n(x)} \left(\int_{S(S^{m-1}(x)-1)}^{S(S^{m-1}(x))} \frac{S(t)}{(S^m(x))^2} dt \right) \geq 32 \times \frac{1}{32} \geq 1$ (d'après le lemme 4), ce qui est absurde, et il s'en suit que $P = \{m \in \mathbb{N}, S^{m-1}(x) \text{ est pair}\}$ est fini. Donc $\text{card}(\mathcal{O}_S(x)) \neq +\infty$, ce qui est absurde.

□

Lemme 5. Si $S^n(x) = x$ avec $x \in \mathbb{N}^{+*}$ alors $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, il existe un unique couple (A_{n-i}, B_{n-i}) tel que $S^{n-i}(x) = A_{n-i}x + B_{n-i}$ avec $B_{n-i} + 1 \leq A_{n-i}$, $A_n = 1$ et $B_n = 0$. Et les A_{n-i} sont minimales.

De plus si $\exists i \in \{1, \dots, n-2\}$ tel que $S^{n-i}(x) = 2S^{n-\{i-1\}}(x) = 2(A_{n-\{i-1\}}x + B_{n-\{i-1\}})$, alors $B_1 + 1 \leq A_1$.

Enfin $(A_1, B_1) = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$

Démonstration. - On a $A_n = 1, B_n = 0$, et $B_n + 1 \leq A_n$. Montrons le résultat par récurrence.

Si $B_{n-i} + 1 \leq A_{n-i}$ avec $S^{n-i}(x) = A_{n-i}x + B_{n-i}$, alors, comme

$S^{n-i}(x) = S(S^{n-\{i+1\}}(x))$, on a :

Soit $S^{n-\{i+1\}}(x) = 2(A_{n-i}x + B_{n-i}) = 2A_{n-i}x + 2B_{n-i} = 2S^{n-i}(x)$ avec $2B_{n-i} + 1 \leq 2A_{n-i}$

Soit $S^{n-\{i+1\}}(x) = \frac{2(A_{n-i}x + B_{n-i}) - 1}{3} = \frac{2A_{n-i}}{3}x + \frac{2B_{n-i} - 1}{3}$ avec $\frac{2B_{n-i} - 1}{3} + 1 \leq \frac{2A_{n-i}}{3}$

Dans le premier cas :

$$A_{n-\{i+1\}} = 2A_{n-i} \text{ et } B_{n-\{i+1\}} = 2B_{n-i}$$

Et dans le deuxième cas :

$$A_{n-\{i+1\}} = \frac{2A_{n-i}}{3} \text{ et } B_{n-\{i+1\}} = \frac{2B_{n-i} - 1}{3}$$

- L'unicité se déduit de la minimalité

- $S^1(x) = A_1x + B_1 = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$. Donc $B_1 = (\frac{3}{2} - A_1)x + \frac{1}{2}$.

Or $B_1 + 1 \leq A_1 \implies (\frac{3}{2} - A_1)x + \frac{3}{2} \leq A_1 \implies \frac{3}{2} \leq A_1$, donc $(A_1, B_1) = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ par minimalité.

□

Corollaire 3. Si $x \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$ alors $S^n(x) \neq x, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Démonstration. 1 cas : Si $n \geq 3$

Si $S^n(x) = x$ alors du lemme 5, si $\exists i \in \{1, \dots, n-2\}$ tel que $S^{n-i}(x) = 2S^{n-\{i-1\}}(x) = 2(A_{n-\{i-1\}}x + B_{n-\{i-1\}})$, alors $B_1 + 1 \leq A_1$, or si x est impair

, on a $B_1 = \frac{1}{2}$ et $A_1 = \frac{3}{2}$ (car $S(x) = \frac{3}{2} \times x + \frac{1}{2}$), mais on n'a pas : $B_1 + 1 \leq A_1$
. Et si x est pair alors $B_1 = 0$ et $A_1 = \frac{1}{2}$ (car $S(x) = \frac{x}{2}$), mais on n'a pas :
 $B_1 + 1 \leq A_1$

Donc $\forall i \in \{1, \dots, n-2\}$, $S^{n-i}(x) = \frac{2(A_{n-i}x + B_{n-i}) - 1}{3}$ avec $B_{n-i} + 1 \leq A_{n-i}$.

Mais dans ce cas la récurrence impose que $\forall i \in \{1, \dots, n-2\}$, $B_{n-i} \leq 0$ et
 $A_{n-i} \leq \frac{2}{3}$ pour $i \geq 2$.

Pour $i = 1$, on aura : $S^{n-1}(x) \leq x$ et $S^{n-1}(x) = \frac{2x-1}{3}$. En poursuivant comme
dans la preuve du lemme 5 on aura $S^1(x) = A_1x + B_1$ avec $B_1 + 1 \leq A_1$. Or
du lemme 5 $S^1(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ mais on a pas $B_1 + 1 \leq A_1$.

On conclut donc que dans ce cas on ne peut pas avoir $S^n(x) = x$.

2 cas : Si $n \leq 2$

Dans ce cas $S^n(x) = x \implies x \in \{0, 1, 2\}$

□

Preuve de la proposition 4 :

Démonstration. Si $x \in \mathbb{N}^*$, alors $1 \in \mathcal{O}_S(x)$: En effet le résultat est évident
pour $x \in \{1, 2\}$.

Si $x \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$, du corollaire 2, si $1 \notin \mathcal{O}_S(x)$ alors $\text{card}(\mathcal{O}_S(x)) < +\infty$. Donc
il existe un $y \in \mathcal{O}_S(x)$, tel que $S^n(y) = y$ avec $y \in \mathbb{N}^*$ (Facile à voir), or du
corollaire 3 $y \in \{0, 1, 2\}$ donc $y \in \{1, 2\}$, et $1 \in \mathcal{O}_S(y)$. Et par suite $1 \in \mathcal{O}_S(x)$.

□

Si l'on remplace $3n+1$ par $qn+1$ où $q \in 2\mathbb{N}^* + 1$, $q \geq 5$ dans la suite de Syracuse
on peut trouver (voir [1],[5], [6]) des orbites finis qui ne passent pas par 1 : par
exemple pour le cas $5n+1$ on a :

$$13 \rightarrow 33 \rightarrow 83 \rightarrow 208 \rightarrow 104 \rightarrow 52 \rightarrow 26 \rightarrow 13.$$

$$17 \rightarrow 86 \rightarrow 43 \rightarrow 216 \rightarrow 108 \rightarrow 54 \rightarrow 27 \rightarrow 136 \rightarrow 68 \rightarrow 34 \rightarrow 17$$

Et l'on peut se demander pourquoi avec $qn+1$ où $q \in 2\mathbb{N}^* + 1$, $q \geq 5$ il y a
des trajectoires ne passant pas par 1 alors que pour $3n+1$ tout les trajectoires
(d'un point non nul) passent par 1? la réponse est que dans le raisonnement de
la preuve du corollaire 3 (ou du lemme 5) on a $\frac{1}{2} + 1 \leq \frac{q}{2}$ alors que pour le cas
 $3n+1$ on n'a pas $\frac{1}{2} + 1 \leq \frac{3}{2}$.

Autrement dit contrairement au cas $3n+1$, dans le cas $qn+1$ où $q \in 2\mathbb{N}^*+1$, $q \geq 5$, la possible présence des cycles autres que le cycle $\{1, 2\}$ risque d'empêcher l'itération $S^n(x)$ d'arriver toujours à 1.

Par ailleurs pour le cas $5n+1$ la trajectoire du nombre 7 semble être divergente car le calcul de ses termes a été poussé jusqu'à son 21 millionième terme sans converger (c'est à dire sans rencontrer un cycle fini), cela laisse penser qu'il y a des trajectoires divergentes avec $\frac{5n+1}{2}$.

Un autre remarquable cas [1] est le problème $7n+1$, pour lequel il peut ne pas y avoir de trajectoires cycliques infinies. Ce qui rend le problème $7n+1$ d'autant plus intéressant, c'est l'observation empirique que le nombre $m=3$ donne lieu à une trajectoire atteignant 10^{2000} sans aucune tendance apparente pour revenir. Contrairement à ces apparences, en appliquant les preuves faites dans le cas $3n+1$ on peut annoncer le corollaire osé suivant :

Corollaire 4. Soit S la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par $S(x) = \frac{x}{2} + (\frac{q-1}{2}x + \frac{1}{2})\sin^2(x\frac{\pi}{2})$, $q \in 2\mathbb{N}^*+3$. Si $x \in \mathbb{N}^*$, alors $\mathcal{O}_S(x)$ est convergent (mais pas toujours vers 1 contrairement au cas $q=3$).

Conclusion :

Les difficultés rencontrés pour démontrer la conjecture de Syracuse, en dépit de l'application acharnée de méthodes mathématiques puissantes par des esprits brillants a conduit certains chercheurs à se demander si la conjecture de Syracuse est un problème indécidable. D'autres, comme Paul Erdos qui a dit de la dite conjecture [4] " les mathématiques ne sont pas encore prêtes pour de tels problèmes ", pensaient que la preuve de cette conjecture ne rentre pas dans les trajectoires mathématiques.

J'ai prouvé dans cet article que, comme les nombres qui ne peuvent pas s'échapper à la force Syracusienne et finiront par tomber sur le nombre 1, la preuve de la conjecture Syracusienne, elle aussi, ne peut s'échapper à la force des mathématiques contrairement à ce que a dit Paul Erdos et d'autres [4].

Remerciements :

Je tiens à remercier tout ceux qui ont contribué pour la réussite du résultat de cet article.

Références

- [1] R. E. Crandall. On the “ $3x + 1$ ” problem. *Math. Comp.*, 32 :1281–1292, 1978.
- [2] Jean-Paul Delahaye. La conjecture de syracuse. *Pour la science*, <http://crystal.univ-lille.fr/~jdelahay/pls/053.pdf>, (247), Mai 1998.
- [3] Luc-Olivier Pochon et Alain Favre. La suite de syracuse, un monde de conjectures. *Hal.archives-ouvertes.fr* , <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01593181>, Sep 2017.
- [4] R. K. Guy. Don’t try to solve these problems! *Amer. Math. Monthly*, 90 :35–41, 1983.
- [5] R. Steiner. On the “ $qx + 1$ problem”, q odd. *Fibonacci Quarterly*, 19(3) :285–288, 1981.
- [6] Stanislav Volkov. A probabilistic model for the $5x+1$ problem and related maps. *Stochastic Processes and their Applications*, 116 :662–674, 2006.