Сомсиков А.И.

Определение комплексных чисел

Выявлен «физический смысл» (логическое содержание) комплексных чисел.

Если в системе координат XOY даны векторы $\vec{A}$ и $\vec{B}$, такие, что разность их аргументов равна φ, а начала совпадают, то вектор $\vec{B}$ может быть получен из вектора $\vec{A}$ путем простого суммирования:

$$\vec{B} = \vec{A} + \vec{C},$$

где $\vec{C}$ - вектор, соединяющий конец вектора $\vec{A}$ с концом вектора $\vec{B}$ (замыкающий вектор).

С изменением модулей векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ при неизменных аргументах модуль и аргумент вектора $\vec{C}$ меняются.

Можно, однако, производить векторное суммирование таким образом, чтобы аргумент замыкающего вектора не зависел от модулей векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$. Для этого спроектируем вектор $\vec{B}$ на вектор $\vec{A}$ и на перпендикуляр к вектору $\vec{A}$ и запишем векторную сумму:

$$B\cos\varphi\frac{\vec{A}}{A} + B\sin\varphi\frac{\vec{C}'}{C'} = \vec{B} \qquad (1)$$

Вектор $\vec{C}'$ перпендикулярен к вектору $\vec{A}$.

Итак, если внутри векторной суммы вместо вектора $\vec{A}$ брать вектор $\frac{B}{A}\cos\varphi\ \vec{A}$, т.е. попросту умножать вектор $\vec{A}$ на коэффициент $\frac{B}{A}\cos\varphi$, то замыкающий вектор $\vec{C}'$ приобретает вполне определенное и не зависящее от модулей векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ значение аргумента, а именно, он перпендикулярен к вектору $\vec{A}$.

Символически это обстоятельство может быть записано следующим образом: если для того, чтобы получить равенство аргументов у векторов $\vec{C}'$ и $\vec{A}$, вектор $\vec{A}$ следует повернуть на угол $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки:

$$\frac{\vec{C}'}{C'} = i\frac{\vec{A}}{A};$$

если для того, чтобы получить равенство аргументов у векторов $\vec{C}'$ и $\vec{A}$, вектор $\vec{A}$ следует повернуть на угол $\frac{\pi}{2}$ по часовой стрелке:

$$\frac{\vec{C}'}{C'} = -i\frac{\vec{A}}{A}.$$

Итак, символ i, стоящий рядом с вектором, означает, что данный вектор повернут на $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки.

С учетом введенных обозначений векторное уравнение (1) перепишется:

$$\frac{B}{A}\cos\varphi\ \vec{A} \pm i\ \frac{B}{A}\sin\varphi\ \vec{A} = \vec{B}.$$

Обозначим $\frac{B}{A}\cos\varphi = a$; $\frac{B}{A}\sin\varphi = b$.

$$a\vec{A} \pm ib\vec{A} = \vec{B}.$$

Последнее уравнение означает: для того, чтобы получить вектор $\vec{B}$, следует умножить вектор $\vec{A}$ на коэффициент a, затем умножить вектор $\vec{A}$ на коэффициент b и повернуть на $\frac{\pi}{2}$ по или против часовой стрелки и полученные векторы сложить.

Символически операции, которые нужно проделать над вектором $\vec{A}$, чтобы получить вектор $\vec{B}$, могут быть записаны следующим образом:

$$(a \pm bi)\vec{A} = \vec{B}.$$

Оператор $(a \pm bi)$ называется *комплексным числом*.

Итак, символический оператор вида $(a \pm bi)$ служит для перехода от одного вектора к другому на плоскости.

Чтобы показать, где может понадобиться подобный переход, рассмотрим систему векторных уравнений:

$$\vec{X}_1 + \vec{X}_2 = \vec{A},$$
$$(a_1 + b_1 i)\vec{X}_1 + (a_2 + b_2 i)\vec{X}_2 = \vec{B},$$

где $\vec{X}_1$ и $\vec{X}_2$ - векторы с неизвестными модулями и аргументами, а $\vec{A}$ и $\vec{B}$ - известные векторы.

Заметим, что, поскольку $\vec{A}$ и $\vec{B}$ известны, всегда можно найти $\vec{B} = (a_3 + b_3 i)\vec{A}$:

$$\vec{X}_1 + \vec{X}_2 = \vec{A}, \qquad (2)$$
$$(a_1 + b_1 i)\vec{X}_1 + (a_2 + b_2 i)\vec{X}_2 = \vec{B} = (a_3 + b_3 i)\vec{A}. \qquad (3)$$

Если бы вместо $\vec{X}_1$ в уравнении (2) стоял вектор $(a_1 + b_1 i)\vec{X}_1$, мы вычли бы из уравнения (2) уравнение (3), и при этом вектор $(a_1 + b_1 i)\vec{X}_1$ пропал бы. Мы получили бы уравнение с одним неизвестным $\vec{X}_2$. Сходным путем решаются системы обыкновенных алгебраических уравнений первой степени с двумя неизвестными.

Итак, нужно уметь применять оператор $(a + bi)$ к векторным уравнениям. Ближайшим образом нужно научиться применять оператор $(a + bi)$ к сумме (разности) векторов, а также повторно применять оператор $(a + bi)$ к вектору, к которому уже применен оператор такого вида.

Рассмотрим: $(a + bi)\vec{A}$.

Пусть $\vec{A} = \vec{B} + \vec{C}$.

По определению:

$$(a + bi)\vec{A} = a\vec{A} + bi\vec{A} = a(\vec{B} + \vec{C}) + bi(\vec{B} + \vec{C}).$$

И далее $i\vec{B} + i\vec{C} = i\vec{A} = i(\vec{B} + \vec{C}) \qquad (4)$

(векторы $\vec{A}$, $\vec{B}$ и $\vec{C}$, равно как и перпендикулярные к ним $i\vec{A}$, $i\vec{B}$ и $i\vec{C}$ образуют замкнутые треугольники).

Откуда: $bi(\vec{B} + \vec{C}) = i(b\vec{B} + b\vec{C}) = bi\vec{B} + bi\vec{C}$.

Итак: $(a + bi)(\vec{B} + \vec{C}) = a\vec{B} + a\vec{C} + bi\vec{B} + bi\vec{C} = (a + bi)\vec{B} + (a + bi)\vec{C}$.

Следовательно, уравнение (2) легко приводится к нужному виду:

$$(a_1 + b_1 i)(\vec{X}_1 + \vec{X}_2) = (a_1 + b_1 i)\vec{A};$$
$$(a_1 + b_1 i)\vec{X}_1 + (a_1 + b_1 i)\vec{X}_2 = (a_1 + b_1 i)\vec{A}.$$

Рассмотрим теперь:

$$\vec{A} \pm \vec{B} = (a_1 + b_1 i)\vec{C} \pm (a_2 + b_2 i)\vec{C} = a_1\vec{C} + b_1 i\vec{C} \pm a_2\vec{C} \pm b_2 i\vec{C} = (a_1 \pm a_2)\vec{C} + (b_1 \pm b_2)i\vec{C} =$$
$$= [(a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i]\vec{C}.$$

Символически этот результат можно записать так:

$(a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2) i$.

Эта символическая операция, соответствующая сложению (вычитанию) векторов, носит название сложения (вычитания) комплексных чисел.

Рассмотрим, наконец, $(a_1 + b_1 i)\vec{A}$, если $\vec{A} = (a_2 + b_2 i)\vec{B} = a_2\vec{B} + b_2 i\vec{B}$.

$(a_1 + b_1 i)\vec{A} = a_1\vec{A} + b_1 i\vec{A} = a_1(a_2\vec{B} + b_2 i\vec{B}) + b_1 i(a_2\vec{B} + b_2 i\vec{B}) = a_1 a_2\vec{B} + a_1 b_2 i\vec{B} + i(b_1 a_2\vec{B} + b_1 b_2\vec{B})$.

Согласно (4): $i(b_1 a_2\vec{B} + b_1 b_2 i\vec{B}) = b_1 a_2 i\vec{B} + b_1 b_2 ii\vec{B}$.

Повторное применение символа i означает, что вектор $b_1 b_2 i\vec{B}$, уже повернутый на $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки по отношению к вектору $b_1 b_2\vec{B}$, дополнительно поворачивается на $\frac{\pi}{2}$ в ту же сторону, что равносильно введению вектора противоположного $b_1 b_2\vec{B}$.

Следовательно: $b_1 b_2 ii\vec{B} = -b_1 b_2\vec{B}$.

Итак: $(a_1 + b_1 i)\vec{A} = a_1 a_2\vec{B} + a_1 b_2 i\vec{B} + b_1 a_2 i\vec{B} - b_1 b_2\vec{B} = (a_1 a_2 - b_1 b_2)\vec{B} + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i\vec{B} =$
$= [(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i]\vec{B}$.

Или: $(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)\vec{B} = [(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i]\vec{B}$.

Этот результат в символической записи:

$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i$

называется умножением комплексных чисел.

Деление комплексных чисел есть отыскание комплексного числа, которое, будучи умноженным на заданное комплексное число, дает второе заданное.

В рассмотренном выше примере эта задача возникает в том случае, когда коэффициент при $\vec{X}_1$ не равен единице, но также является комплексным числом, и его все-таки нужно превратить в $(a_1 + b_1 i)$.

Итак, пусть, например:

$$\alpha_1 = a + bi,$$
$$\alpha_2 = c + di.$$

Найти α_3, такое, чтобы $\alpha_1\alpha_3 = \alpha_2$.

Пусть $\alpha_3 = x + yi$.

Тогда, по определению: $\alpha_1\alpha_3 = (a + bi)(x + yi) = (ax - by) + (ay + bx)i$.

Получаем: $(ax - by) + (ay + bx)i = c + di$.

Равенство комплексных чисел означает равенство результирующих векторов, если исходные векторы равны.

Отсюда ясно требование выполнения равенства действительных и соответственно мнимых частей у равных комплексных чисел.

В самом деле, действительная часть дает проекцию результирующего вектора на исходный, а мнимая – проекцию на перпендикуляр к исходному вектору, а проекции равных векторов на одни и те же оси равны.

Следовательно:

$$ax - by = c,$$
$$ay + bx = d.$$

Решение этой системы:

$$x = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2},$$

$$y = \frac{ad - bc}{a^2 + b^2}.$$

Формально тот же результат можно получить, изображая искомое комплексное число в виде дроби и производя действия, аналогичные освобождению от иррациональности знаменателя:

$$x + yi = \frac{c + di}{a + bi} = \frac{(c + di)(a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{(ac + bd) + (ad - bc)i}{a^2 + b^2}.$$

Итак, пусть дана система векторных уравнений:

$$\alpha_1 \vec{X}_1 + \alpha_2 \vec{X}_2 = \vec{A}, \qquad (5)$$

$$\alpha_3 \vec{X}_1 + \alpha_4 \vec{X}_2 = \vec{B}, \qquad (6)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ - комплексные числа;

$\vec{A}, \vec{B}$ - векторы, модули и аргументы которых известны.

Требуется найти векторы $\vec{X}_1$ и $\vec{X}_2$.

Пусть $\vec{B} = (a + bi)\vec{A} = \alpha\vec{A}$.

$$\alpha_1 \vec{X}_1 + \alpha_2 \vec{X}_2 = \vec{A},$$

$$\alpha_3 \vec{X}_1 + \alpha_4 \vec{X}_2 = \alpha\vec{A}.$$

Применим к одному из уравнений, например, (5) комплексное число α_5 такое, чтобы, например, $\alpha_1\alpha_5 = \alpha_3 \quad (\alpha_5 = \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1})$.

Получим:

$$\alpha_3 \vec{X}_1 + \alpha_2\alpha_5 \vec{X}_2 = \alpha_5\vec{A},$$

$$\alpha_3 \vec{X}_1 + \alpha_4 \vec{X}_2 = \alpha\vec{A}.$$

Вычтем из уравнения (5) уравнение (6):

$$\alpha_3 \vec{X}_1 + \alpha_2\alpha_5 \vec{X}_2 - \alpha_3 \vec{X}_1 - \alpha_4 \vec{X}_2 = \alpha_5\vec{A} - \alpha\vec{A}.$$

Получим: $(\alpha_2\alpha_5 - \alpha_4)\vec{X}_2 = (\alpha_5 - \alpha)\vec{A}$.

Или окончательно:

$$\vec{X}_2 = \frac{\alpha_5 - \alpha}{\alpha_2\alpha_5 - \alpha_4}\vec{A}.$$

Точно так же решаются системы n векторных уравнений с n неизвестными векторами аналогично решениям систем линейных алгебраических уравнений.

Комплексные числа возникают при решении систем интегро-дифференциальных уравнений от гармонических функций в следующем порядке:

- производится решение интегро-дифференциальных уравнений, после чего система превращается в систему тригонометрических уравнений от гармонических функций,
- осуществляется переход от системы тригонометрических функций к векторной диаграмме,
- составляется система векторных уравнений, соответствующая полученной векторной диаграмме.

Решение системы векторных уравнений только что нами описано.