Сомсиков А.И.

Исторические проблемы математики. Число и арифметическое действие

Выявлен смысл (логическое содержание) понятия чисел. Дано определение арифметических действий.

Определение чисел

Всякий раз, когда встречается ситуация, описание которой, в силу ее сложности, затруднительно и требует многих слов, описание заменяется специальным термином (наименованием ситуации) с целью достижения краткости и связанной с ней ясности во всякого рода суждениях об этой ситуации, в которых она должна фигурировать в качестве члена предложения.

Сказанное относится, в частности, и к ситуациям, связанным с наличием интересующих нас объектов (ИНО).

Так, например, отсутствие ИНО обозначается термином "ноль", говорят: "имеется ноль объектов" или "задано число ноль" вместо: "ИНО не имеется", "ИНО отсутствуют".

Другая интересующая нас ситуация (ИНС): "ИНО имеется и, кроме него, нет никаких других объектов, подпадающих под определение ИНО" коротко обозначается термином "один", говорят: "имеется один объект" или "задано число один", не прибегая к описанию ситуации.

ИНС: "ИНО имеется и кроме него имеется еще и другой объект, подпадающий под определение ИНО, и, кроме упомянутых, никаких других объектов, подпадающих под определение ИНО, не имеется" обозначается термином "два", говорят: "имеется два объекта" или "задано число два".

Следующая ИНС: "имеется два ИНО и кроме них имеется еще один объект, подпадающий под определение ИНО и, кроме упомянутых, никаких других объектов, подпадающих под определение ИНО, не имеется" обозначается термином "три", говорят еще: "имеется три ИНО" или "задано число три" и т.д.

Числа, таким образом, это ***наименования различных ИНС, касающихся наличия ИНО.***

Итак, мы ***знает, что такое число.***

Определения математики

Здесь все обстоит очень просто.

В математике нет прямого определения чисел. Ни предварительного, требующего уточнений, как у Евклида, ни окончательного. Вообще *никакого*.

Есть утверждения о “многовековом опыте абстрагирования и обобщений” человечества, т.е. *не математиков*. Уживающиеся с противоположными утверждениями о неспособности к абстрагированию “дикарей”, т.е. того же человечества на большей части его истории.

Изредка об этом говорится прямо. Например:

> *“Понятие о натуральном числе является одним из простейших понятий. Его можно пояснить лишь предметным показом.*
> *Примечание: Евклид (III в до н.э.), определял число (натуральное) как "множество, составленное из единиц"; такого рода определения можно найти и во многих нынешних учебниках. Но слово "множество (или "собрание" или "совокупность" и т.п.) отнюдь не понятнее слова "число"”* [1].

Здесь термин “элементарная математика” использован для введения в заблуждение. Чтобы изучающий постеснялся задавать какие-либо вопросы. То есть для его *отключения*, поскольку здесь все ведь “элементарно”. Из-за такого намеренного отключения вопрос этот до сих пор остается все еще не решенным. Хотя освоивший “элементарную” математику считается имеющим не элементарное, а уже “среднее” образование. Но и при “высшем” образовании к этому больше не возвращаются. Такой вопрос считаются вполне изученным еще на “элементарном” уровне. Или предметом излишних философских умствований.

Это первый универсальный способ сокрытия незнания: *то, что не удается определить, следует называть очевидным или элементарным.*

В математике “знание чисел” сводится к знанию правил обращения с ними. Обеспечивающих выполнение “арифметических действий”. Смысл которых тоже может быть *не известен*.

Вот сообщение того же источника:

> *“Понятие о том, что такое сложение, возникает из таких простых фактов, что оно не нуждается в определении и не может быть определено формально.*
> *Примечание: Часто даются "определения" вроде таких: "сложение есть действие, посредством которого несколько чисел соединяются в одно", или "действие, посредством которого находится, сколько единиц содержится в нескольких числах вместе". Но тот, кто не знал бы, что значит "сложить", не знал бы и что такое "соединить числа", так что все подобные "определения" сводятся лишь к замене одних слов другими”.*

Взамен объяснения смысла сложения дается утверждение, что все это “простые факты”. Хотя с вопроса именно о таком “простом факте” и начинается с подачи Лейбница критика Канта [2]. Вылившаяся в толстый том философских рассуждений. Это как раз по Канту слагаемые “соединяются в одно число” (сумму), как бы сливаясь или “синтезируясь” в нем, подобно атомам в составе молекулы. Такая поверхностная аналогия не дает реального понимания смысла данного действия.

Приведенная цитата в части отсутствия определения, конечно, правильна.

Но утверждение, что действие сложения *“не может быть определено формально”* никак отсюда не вытекает и остается всего лишь мнением автора. Чем-то вроде “неизвестно, следовательно, невозможно”. Простая логическая ошибка.

Другие цитаты

Можно привести много цитат, характеризующих нынешнее понимание математики.

Автор, имеющий неосторожность озаглавить свое сочинение “Что такое число?”, вынужден сразу же уходить от прямого ответа:

> *“Когда школьник впервые знакомится с математикой, ему говорят, что это – наука о числах и геометрических фигурах. Вузовский курс математики обычно начинается с аналитической геометрии, основная цель которой – выразить геометрические понятия на языке чисел. Таким образом, получается, что числа – это единственный предмет изучения в математике.*
> *Правда, если вы откроете современный научный журнал и попробуете прочитать какую-нибудь статью по математике, то вполне вероятно, что вы не встретите в этой статье ни одного числа “в чистом виде”. Вместо них речь идет о множествах, функциях, операторах, категориях, мотивах и т.д. Однако, во-первых, почти все эти понятия так или иначе опираются на понятие числа, а, во-вторых, конечный результат любой математической теории, как правило, выражается на языке чисел.*

Поэтому мне кажется небесполезным обсудить со студентами-математиками вопрос, поставленный в заголовке этой книги.
Разумеется, одно только описание исторического развития понятия числа или обсуждение его философского смысла требует много времени и места. Об этом уже написано немало толстых книг. Моя цель более проста и конкретна – показать, какой смысл придается понятию числа в современной математике, рассказать о задачах, которые возникают в связи с разным пониманием чисел, и о том, как эти задачи решаются. Конечно, в каждом случае я смогу лишь кратко описать самые начала соответствующей теории. Для тех читателей, которые захотят разобраться в ней подробнее, я указываю подходящую литературу” [3].

Здесь нет ответа на главный вопрос: ***что же такое*** *число*? На деле такой вопрос даже не ставится.

Изящным маневром само “понятие числа” сразу же заменяется его “историческим развитием” (что означает также замену самой математики какой-то ее *историей*). Или же упоминается “обсуждение его философского смысла” (что тоже означает замену математики *философией*, проще говоря, неопределенными рассуждениями *на тему* о числах). И все это вводится вовсе не в основной части текста, а всего лишь к нему предисловии. Как если бы этот вопрос был абсолютно несущественным и второстепенным. Чуть ли не в разделе “да, чуть не забыли”.

И при этом нарочито небрежно, походя, одной фразой. Поскольку, видите ли, требует *много времени и места*. Так много, что в книге, должно быть, просто *не уместилось*. Хотя и сообщается, что об этом *уже написано* много *других* книг. Которые сам автор, надо думать, уже прочел. Ну и что он там вычитал?

Где требуемое определение этого *основного* понятия математики? Являющегося также *исходным* или *первичным*.

Ответом служит глубокомысленное молчание.

А вот другое сообщение, тоже увиливающее от прямого ответа в область *исторического развития* понятия числа. Предназначенное для учителей. Это, вероятно, максимум того, что можно вообще узнать в институте:

“ **§ 2.** ***Что такое число?***
В XYIII веке математики считали понятие числа совершенно простым и ясным. “Ничто не является более простым и более известным людям, - указывал Боссю, - чем идея числа”.
Они полагали возможным дать о б щ е е определение понятия числа, способное быть д е й с т в е н н ы м началом логического развития арифметики л ю б ы х ч и с е л. “Надлежит прежде всего о числах иметь ясное понятие”, - писал Эйлер и тут же добавлял, что т о л ь к о п о н и м а н и е п р и р о д ы ч и с е л г а р а н т и р у е т п о н и м а н и е в о з м о ж н ы х д е й с т в и й н а д н и м и и о с т а л ь н ы х и х с в о й с т в. “... всякий способ изображения чисел, - пишет Эйлер, - требует к арифметическим действиям особых правил, которые надлежит производить от свойств оных чисел, кои употребляются”.
Учебники арифметики этого времени часто начинались категорическим утверждением: изучить арифметику может только тот, кто знает, что есть число. Такое утверждение гармонически сочеталось с трактовкой математики как науки о величинах.
В первой половине XYIII века авторы руководств по арифметике, статей в энциклопедиях и т.п. обычно определяли понятие числа по Евклиду: число есть множество единиц. Так по существу трактовал понятие числа Л. Магницкий. Определение Евклида сохраняется и во второй половине XYIII века, правда, как увидим, не в прежнем его толковании как общего понятия числа. Еще до XYIII века применение

определения Евклида встретилось с рядом трудностей. Именно, опираясь на него, нужно было признать, что 0 и 1 не являются числами: нуль есть только знак для “ничто”; единица означает только одну вещь, она – основание, “причина” числа, но не число. Известно, что такая трактовка понятия единицы была развита в древней Греции. Потом она перешла к математикам Среднего востока и Западной Европы и имела последователей еще в XYII веке. Решающим, однако, было то, что определение Евклида по видимости мирилось с существованием дробных чисел, но не охватывало числа иррациональные. Этот факт учитывал Лейбниц и некоторые другие математики XYII века. “Понятие числа во всем объеме, - писал Лейбниц, - охватывает числа целые, дробные, иррациональные и трансцендентные”. Все возрастающая роль иррациональных чисел в механике, математическом анализе и алгебре способствовала тому, что во второй половине XYIII века чаще появляются и, наконец, завоевывает господствующее положение иное общее определение числа, выдвинутое Ньютоном: “число есть отношение одной величины к другой, того же рода, принятой за единицу”. Это определение охватывало как равноправные положительные целые, дробные, и иррациональные числа. Именно в этом обстоятельстве Даламбер и Котельников усматривали превосходство определения Ньютона. Единица становилась полноправным числом: измеряемая величина могла оказаться равной единице меры. Нуль, однако, по-прежнему выступал как знак “ничто”. Правда, в алгебре наметилось иное толкование нуля, как “середины” между положительными и отрицательными величинами, но в арифметику оно не проникло. Взгляд на нуль, как на число, стал завоевывать всеобщее признание с конца XYIII века в связи с разработкой вопросов обоснования арифметических действий. И это естественно, если учесть господствующую в это время чисто количественную трактовку понятия числа. На определение Ньютона опирались Эйлер, Лагранж и Лаплас. Его придерживались С. Котельников, А. Барсов и многие другие.

Во второй половине XYIII века большинство математиков рассматривало ньютоново определение понятия числа не только как целесообразное, но и как предельно широкое, охватывающее все возможные его виды. Определение Евклида начинает правильно трактоваться только как определение целого числа” [4].

Тематика книги отнюдь не случайно обрывается началом XIX века. Ее идея, видимо, такова. Да, действительно, понятие числа вызывало какие-то затруднения. Но это было довольно *давно*. Еще в эпоху античности или на рубеже XYII - XYIII веков. В крайнем случае, XIX. Но уж никак не в XX веке или того позже. Эвклид предварительно определил, Ньютон существенно уточнил. После чего все стало если и не совсем, то почти хорошо. А в общем числа это все: и целые, и дробные, и относительные, и рациональные, и иррациональные, и комплексные, такая вот сборная солянка. И нет никакой проблемы. Нужно только все это хорошенько выучить. Чтобы затем *применять*.

Чего стоит, однако, ньютоновское “уточнение”, когда *одно* неизвестное (число) определяется через *два* других неизвестных (величину и отношение). Они-то что значат? Ведь их не иначе как через число придется определять, совершая логический круг.

А как это излагается в начальной школе, где и закладывается фундамент образования?

Цитата:

*“**I. НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА**.*

*§ 1. **Счет как основа арифметики. Натуральный ряд чисел.***

***Арифметика – это наука, изучающая числа и действия над ними.** Счет является основой арифметики.*

Прежде чем научиться вычислять, надо научиться считать и уметь записывать числа. Для счета люди пользуются названиями чисел и особыми знаками для краткого их обозначения.

__Знаки для изображения чисел называются цифрами__. Мы пользуемся десятью цифрами: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, и 9. Эти цифры называются а р а б с к и м и.
Для обозначения отсутствия предметов употребляется число __нуль__, которое изображается цифрой 0 (рис. 1 – ветка с птичками и надписью “На ветке сидело 5 птиц” и “Птицы улетели. На ветке осталось 0 птиц”).
Все числа: 1, 2, 3, 4, ..., 9, 10, 11, ..., 16, 17, 18 и так далее без конца называют __натуральным рядом чисел,__ а сами числа – __натуральными числами__. В натуральном ряду каждое число, начиная с 2, на единицу больше предыдущего.
Натуральные числа являются ц е л ы м и числами. К целым числам относится и число нуль, но оно не принадлежит к натуральным числам.
Не следует смешивать понятия “числа” и “цифры”. Различных чисел можно написать сколько угодно, а цифр – только десять. Любое натуральное число мы записываем с помощью этих десяти цифр.
Слово “цифра” в обычной речи часто употребляется в том же смысле, в каком в арифметике употребляется термин “число”; например говорят о цифрах семилетнего плана.
Каждое из первых девяти натуральных чисел 1, 2, 3, ..., 9 записывается одной цифрой, эти числа называются __однозначными числами__. Число нуль относится к однозначным числам. Все остальные натуральные числа записываются с помощью нескольких цифр и называются __многозначными числами__.
По количеству входящих в них цифр многозначные числа делятся на двузначные, трехзначные, четырехзначные и т.д.
П р и м е р ы: 22, 35 и 47 – двузначные числа; 305; 666 и 700 – трехзначные числа; 506 066 – шестизначное число” [5].

Где здесь определение чисел? – Его просто нет. Ни в каком, хотя бы сколько-нибудь приблизительном или описательном виде. Как можно **“изучать числа”**, не зная, что это такое?

Зато в одном этом параграфе вводится сразу целый букет производных терминов: *натуральные* числа, *счет, натуральный ряд* чисел, *действия* над числами, *запись* чисел, *особые знаки, краткое обозначение* чисел, *знаки для изображения* чисел, *цифры, арабские* цифры, число *нуль, не принадлежащее* к натуральным числам и поясняемое метафорой “птицы улетели”, число, записываемое **с** *помощью десяти цифр, цифра, понимаемая как число,* число *на единицу больше* предыдущего, *целые* числа, *целое число нуль, однозначные и многозначные* числа, числа в виде *нескольких цифр*, двузначные, трехзначные и шестизначные числа. И все это практически без пояснений.

Здесь обозначен второй универсальный способ сокрытия незнания: *если определение отсутствует, число неопределяемых понятий следует увеличить.* Чтобы так сказать “проскочить за дымом”.

Это и есть то, что называется школьной подготовкой, определяющей понимание чисел, к которому в последующих курсах уже больше не возвращаются.

Из этого, к сожалению, не вытекает, что *математики знают, что такое число.*

Еще цитата:

“__Часть первая__.
Натуральные числа
Глава 1.
НУМЕРАЦИЯ
§ 1. Счёт
Уже в очень отдаленные времена людям приходилось считать окружающие их предметы: членов своей семьи, домашних животных, оружие, убитых или пойманных на охоте зверей и т.д.

История говорит нам, что первобытные люди умели сначала отличать только один предмет от многих; затем они стали считать до двух и до трех, а все, что было больше трех, обозначали словом "много".
С течением времени люди овладели счетом на пальцах; если же предметов было больше, чем пальцев у человека, то наши отдаленные предки уже испытывали затруднения.
Для выполнения счета пользовались также различными простыми приспособлениями, например: зарубками на палке, пучками прутиков, камешками и различными бусами. Предметами, которые сосчитывались, было немного, поэтому и счет был не сложный.
Считая эти предметы, люди пришли к понятию числа предметов. Они поняли, что на вопрос, сколько охотник убил зверей, можно ответить, показав пять пальцев своей руки. С другой стороны, если у человека имеется пять стрел, то он тоже может показать пять пальцев.
Таким образом, хотя предметы совершенно различны (звери и стрелы), но их имеется поровну, т.е. стрел столько же, сколько и зверей. Значит, и группе зверей, и пучку стрел соответствует одно и то же число – пять.
Прошло очень много времени, прежде чем люди освоились с большими числами. Они шли от числа один, или единица, к большим числам очень медленно" [6].

О счете до трех и "много" - это из "Робинзона Крузо". Но где здесь определение чисел? Или хотя бы более менее вразумительное их описание?

К чему эти исторические фантазии? Что они объясняют? Или без этой выдуманной "истории" числа "не объяснимы"?

И снова куча дополнительных терминов: "нумерация", "счет", "один предмет", "многие", "два", "три", "больше", приспособления для счета, "пять" пальцев или стрел, "столько же", "большие числа". При этом ни одного определения.

Это чисто гуманитарное описание. Образуемое ворохом неопределяемых слов, каждое из которых само по себе почти ничего не значит, но в совокупности "отражающих" разные "стороны" или "грани" рассматриваемого объекта. Создающее *общее впечатление* или *интуитивное понимание*, составленное из разнородных признаков.

И на такой рыхлой базе строится основание математики. Справедливо гордящейся логической безупречностью. Это, конечно, правильно, но лишь на позднем, а не на раннем ее этапе. Как и в других старых науках, включая физику.

К этому можно добавить много других примеров, но это уже излишне. Главное состоит в том, что математики *не возражают* против таких пособий. Значит, считают их допустимыми и, стало быть, правильными.

Что можно извлечь из подобных текстов?

Это конечно "несерьезные" школьные книжки. В дальнейшем, однако, никак не комментируемые или уточняемые. Просто принимаемые за "базу".

Виды чисел

Не имея определения чисел, т.е. еще не зная, *что это такое*, математики сразу же переходят к классификации "видов чисел".

Есть числа натуральные, дробные, относительные, рациональные, иррациональные, комплексные, даже именованные. В сочетании с правилами их использования образуется интуитивное *как бы понимание* (знание) чисел.

Дроби делятся на "простые" и "десятичные".

Простая дробь есть два числа, сопоставляемых между собой (числитель и знаменатель). Десятичная дробь есть частный случай и другая форма записи простой дроби, знаменатель которой выражен степенью числа 10.

С точки зрения логики дробь вовсе не является каким-то “новым числом”, т.к. она образована *парой чисел*, сопоставляемых между собой, притом в определенной последовательности (порядок сопоставления не безразличен: 2/3 не то же самое, что 3/2).

Относительное число есть тоже пара, но образованная уже числом и *неравенством* (т.е. *не числом)*, сокращенно обозначаемой единой записью, выражающей координату [7]. Это тоже почему-то считается “числом особого рода”.

Рациональное и иррациональное числа есть выражение “абсолютно точного значения” координаты. Выражаемое тоже дробью, но уже “бесконечной”, в соответствии с определением “точности измерений”. Здесь тоже нет никаких “новых чисел” [8].

Комплексные числа есть пара чисел, являющихся множителями вектора, одно из которых не вызывает его угловых поворотов, другое же вызывает [9] .

Их тоже, конечно, можно назвать “*числом особого рода*”, но с точки зрения логики оснований для этого решительно никаких, кроме разве что экономии терминов, имеющих совершенно не совпадающий смысл.

Так в принципе можно назвать “тоже числом” что угодно, хоть “Войну и мир” Л. Толстого, тоже определяемой парой чисел, например, слов и букв.

А *именованные чис*ла есть просто результат измерения разными эталонами. Здесь тоже нет никаких “новых чисел”.

Поэтому определение чисел как наименований ИНС, касающихся наличия ИНО, является ***всеобщим и полным***. Дающим окончательное их понимание. Никаких других чисел, кроме указанных в данном определении, не существует. В математике они называются “натуральными числами”.

Понятие чисел, будучи *исходным* или *первичным*, действительно является довольно простым. Однако же не настолько, чтобы считать, что числа и вовсе не требуют или не имеют определений.

Использование одного термина для обозначения логически разнородных понятий, конечно же, затрудняет понимание. Создавая впечатление не существующей глубины, недоступной уму обычного человека. Вызванное простым нарушением логики построения.

Система счисления

Числа являются просто наименованиями ИНС. Поэтому их изучение сводится к разработке способа присвоения наименований. Их может быть всего два – *произвольное* и *непроизвольное* присвоения. Причем применяются сразу оба. Образуя комбинированный способ, именуемый *системой счисления* СС.

В состав ИНС всегда может быть включен один или не один дополнительный ИНО, в свою очередь образующий некоторую ИНС. Различия ИНС, получаемых посредством такого соединения других ИНС, могут быть бесконечны.

Проблемой СС является именно это бесконечное разнообразие ИНС, требующее такого же разнообразия наименований. Теоретически нетрудно вообразить это бесконечное разнообразие. Однако его практическое осуществление *невозможно*, т.к. такой список не может быть окончен, не то чтобы выучен. Поэтому вся *бесконечность* различных ИНС должна охватываться *конечным* набором различных наименований. Возможности памяти тоже ограничены и могут потребовать небольшого числа различных наименований. Поэтому в письменной записи применяется всего лишь десять произвольных наименований: 0, 1, 2, …, 9, хотя их может быть и меньше, например, 0, 1, или больше десяти.

Прочие наименования являются *описаниями* способа получения ИНС.

Они образуются следующим образом.

Произвольные наименования используются неоднократно для обозначения *разных* ИНС. Эти ИНС различаются между собой не наличием ИНО, которое при совпадении произвольных наименований, по определению, одинаково, а самими ИНО.

Исходный ИНО является произвольным, все остальные *не произвольны* и образованы ИНС.

Эти ИНС каждый раз образованы наибольшей из предыдущих ИНС, включающей один дополнительный ИНО.

ИНС 1 рода или ИНС$_1$ есть ИНС, образуемая ИНО 1 рода (ИНО$_1$), который может быть произвольно выбираемым объектом. ИНС$_1$ имеет произвольно задаваемые наименования: 0, 1, 2, 3, …, 9.

ИНС 2 рода или ИНС$_2$ образована ИНО$_2$, в свою очередь являющимся ИНС$_1$ = 9ИНО$_1$ + 1ИНО$_1$ (“+” означает включение, “=” - тождественность) или ИНО$_2$ = (9 + 1) ИНО$_1$.

ИНС$_2$ имеет те же произвольные наименования, что ИНС$_1$: 0, 1, 2, 3, …, 9.

ИНС 3 рода (ИНС$_3$) есть ИНС, образованная ИНО$_3$ = (9 + 1) ИНО$_2$. В свою очередь ИНС$_3$ носит те же произвольно задаваемые наименования, что ИНС$_1$, ИНС$_2$: 0, 1, 2, 3, …, 9.

ИНС$_4$ есть ИНС, образованная ИНО$_4$ = (9 + 1) ИНО$_3$, и т.д.

Таким образом, используя всего 10 исходных произвольных наименований, относящихся к разным ИНС$_1$, ИНС$_2$ и т.д. можно получить сколько угодно *составных наименований* произвольно задаваемым ИНС, различаемым между собой.

Итак, кроме произвольных наименований в пределах от 0 до 9 имеются составные наименования.

Составные наименования является *описаниями* способа получения ИНС.

Арифметическое действие

Одна и та же ИНС может быть получена разными способами, имея при этом разные описания.

Например, 7 + 5 или 12. В первом случае ИНС получена объединением ИНС$_1$= 7 ИНО$_1$ с ИНС$_1$ = 5 ИНО$_1$, а во втором - объединением ИНС$_2$ = 1 ИНО$_2$ с ИНС$_1$ = 2 ИНО$_1$.

В итоге одна и та же ИНС имеет разные описания, определяемые способом ее получения. Что и выражается равенством: ИНС = 7 + 5 = 12.

В зависимости от способа ее получения, любая ИНС может иметь не одно, а множество разных описаний.

Как опознать такую ИНС, имеющую разные описания, используемые в качестве наименований?

Ответ такой: из всех возможных только *одно* описание принимается в качестве *стандартного* описания. По которому только ИНС и опознается. Все прочие описания являются *нестандартными*. Они могут свободно использоваться для описания фактического способа получения ИНС. Однако при этом сама ИНС считается *не опознанной*. Для ее опознания необходимо выполнить переход от произвольного нестандартного описания, к стандартному описанию.

Такой ***переход от нестандартного описания к стандартному называется арифметическим действием***.

Это относится к любому действию - сложению, вычитанию, умножению, делению, возведению в степень или извлечению корня. Хотя одни из них и могут формально определяться через другие, например, вычитание – как действие, обратное сложению. Но *первое*, которое, по мнению математика, “не может быть определено формально”, - согласно указанному определению.

Стандартное описание

Стандартное описание составляется по следующим правилам:

1. Произвольные наименования ИНС$_1$, ИНС$_2$, ИНС$_3$ и т.д. располагаются в определенной последовательности - справа налево.

2. При наличии ИНС, образованной $ИНО_2$, $ИНО_3$ и т.д. все ИНС, образованные предыдущими ИНО должны быть указаны.
3. Крайняя левая ИНС не может быть равна нулю.
4. ИНС, образованная только одной $ИНС_1$, может быть равна нулю.
5. Каждая $ИНС_1$, $ИНС_2$ и т.д. может использоваться в описании однократно.
6. Каждая $ИНС_1$, $ИНС_2$ и т.д. может входить в состав описания ИНС посредством только одного действия – включения, выражаемого знаком “+”.

Только лишь в этом случае обозначения всех $ИНО_1$, $ИНО_2$, …, образующих описание ИНС, могут быть опущены вместе со знаками их включения в состав задаваемой ИНС без нарушения ее понимания.

Нестандартные описания

Прочие описания ИНС, задающие различные способы ее получения, являются нестандартными. Они выражаются арифметическими действиями вычитания, умножения, деления, возведения в степень или извлечения корня. Или сложения, в случае, если какая-нибудь $ИНС_1$, $ИНС_2$ и т.д. использована в описании более одного раза.

Для опознания ИНС любое нестандартное описание должно быть приведено к стандартному описанию, выражаемому через произвольные наименования $ИНС_1$, $ИНС_2$ и т.д. В этом и состоит смысл арифметических действий.

Поясняющие примеры

1. Описание ИНС = 7 $ИНО_1$ + 5 $ИНО_1$ является не стандартным, т.к. в нем $ИНС_1$ встречается больше одного раза. Здесь сами обозначения $ИНО_1$ могут быть опущены без ущерба для понимания, а описание сокращено до ИНС = 7 + 5. Но знак включения “+” не может быть опущен, т.к. это описание не стандартное.

2. Описание этой же ИНС = 1 $ИНО_2$ + 2 $ИНО_1$ является стандартным. В нем могут быть опущены без ущерба для понимания как обозначения самих $ИНО_1$, $ИНО_2$, так и знак “+” включения образуемых ими $ИНС_1$, $ИНС_2$ в состав описываемой ИНС.

Поэтому описание ИНС может быть без ущерба для понимания максимально сокращено до ИНС = 12.

3. Описание этой же ИНС = 2 $ИНО_1$ + 1$ИНО_2$, выражающее возможный реальный способ ее получения, является нестандартным, т.к. в нем нарушена правильная последовательность расположения $ИНС_1$, $ИНС_2$. Поэтому в ней должен быть изменен порядок, после чего она получает стандартное описание, выражаемое сокращенной записью 12.

4. Описание ИНС = 1$ИНО_2$ является нестандартным, т.к. в нем отсутствует ИНС, образуемая $ИНО_1$. Стандартное описание должно иметь вид ИНС = 1 $ИНО_2$ + 0 $ИНО_1$, после чего могут быть опущены без ущерба для понимания как обозначения самих $ИНО_1$, $ИНО_2$, так и знак включения образуемых ими $ИНС_1$, $ИНС_2$ в состав описываемой ИНС. Это дает стандартное сокращенное описание ИНС = 10.

5. Описание ИНС = 7 $ИНО_1$ – 5 $ИНО_1$ является нестандартным, т.к. она образована не посредством включения $ИНС_1$, обозначаемого знаком “+”, а изъятия, обозначаемого знаком “-”. Ее стандартное произвольное наименование ИНС = 2.

То же относится к операциям умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня. Описания ИНС, выражаемые посредством указанных операций, являются нестандартными. Требующими приведения ИНС для ее опознания к стандартному описанию. В этом и состоит смысл арифметических действий.

Литература:

1. *М.Я. Выгодский "Справочник по элементарной математике".*
2. *И. Кант "Критика чистого разума".*
3. *А.А. Кириллов "Что такое число?" (Современная математика для студентов) ВО "Наука" - М. "Физматлит" 1993.*
4. *В.Н. Молодший "Основы учения о числе в XVIII и начале XIX века". Пособие для учителей. Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР. Москва, 1963, с. 33 – 35.*
5. *Н.А. Принцев "Арифметика" Учебное пособие для 5 – 6 классов вечерней (сменной) средней общеобразовательной школы. Издательство пятое. Изд. "ПРОСВЕЩЕНИЕ", Москва, 1966, тир. 170 000 экз. Суммарно полмиллиона экземпляров.*
6. *И.Н. Шевченко "Арифметика". Учебник для 5 – 6 классов восьмилетней школы. Издательство "Просвещение", Москва, 1965.*
7. ***www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/8176.html***.
8. ***www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/8512.html***.
9. ***www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/8514.html***.