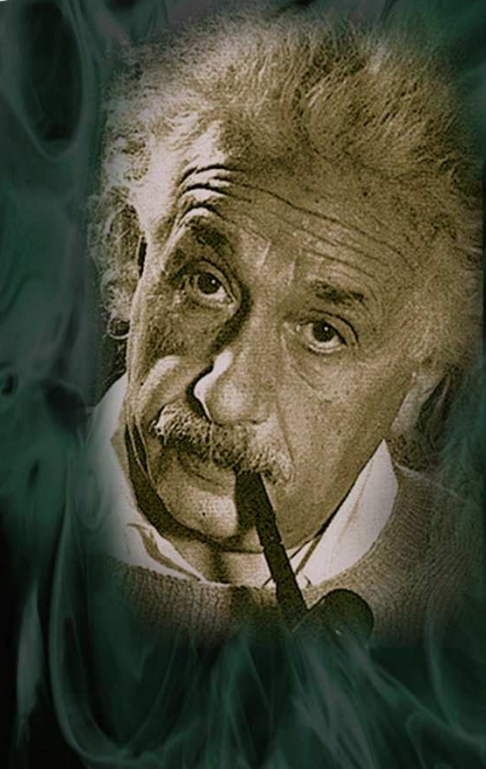


ВА Касимов

Теория Относительности



2.

В.А. Касимов

Теория относительности

СИБПРИНТ
Новосибирск
2014

Теория относительности.

4.
ББК 22.313
УДК 530.12
К 28

К 28

В.А. Касимов

Специальная теория относительности (без второго постулата). Новосибирск: ООО агентство "СИБПРИНТ" 2013.

Рассматривается возможность построения СТО без второго постулата. Обсуждается необходимость отказа от метрической факторизации свойств пространственно-временных отношений в пользу аффинных. А из анализа парадокса близнецов предлагается различать динамический и эволюционный упорядочивающие временные факторы.

ISBN 978-5-94301-489-5

© В.А. Касимов В.А. 2010

В.А. Касимов

Общая теория относительности (принципы). Новосибирск: ООО агентство "СИБПРИНТ", 2013

Рассматриваются принципы построения общей теории относительности (ОТО), как обобщающей СТО, и принципы построения релятивистской теории гравитации (РТГ), как теории, наполняющей ОТО метрической конкретикой.

ISBN 978-5-94301-496-3

© В.А. Касимов 2010

Оглавление

1. Специальная теория относительности	7
Введение	9
Глава 1. <i>Эмпирические основы СТО</i>	15
Эксперименты	15
Эталоны	23
Резюме к главе 1	25
Глава 2. <i>Время, пространство, движение</i>	26
Время	26
Пространство	34
Движение	40
Четырёхмерное пространство-время. Связь с трёхмерием	43
Арифметизация и метризация пространственно-временных отношений	52
Пространственно-временные измерения	56
Резюме к главе 2	59
Глава 3. <i>Кинематика</i>	61
Системы отсчёта. Физические законы. Ковариантность	61
Инерциальные системы отсчёта. Принцип относительности	64
Связь между инерциальными системами отсчёта. Преобразования координат	67
“Парадокс близнецов”	77
Резюме к главе 3	99
Глава 4. <i>Динамика</i>	101
Интервал – новый динамический упорядочивающий фактор	101
Основное уравнение динамики точки. “Второй закон Ньютона”	110
Координатные преобразования физических величин	115
Динамика электромагнитного поля. Уравнения Максвелла	119
Резюме к главе 4	130
Приложение. <i>Четырёхмерие. Векторы. Тензоры</i>	132
Предварительные замечания	132
Четырёхмерие	137
Библиография	150
2. Общая теория относительности	151
Введение	153
Глава 1. <i>“Снятие инерциальной печати”</i>	163
Обобщение СТО	163
Пространственно-временные отношения в ОТО	171
Системы координат. Системы отсчёта. Синхронная система отсчёта	176
Резюме к главе 1	181
Глава 2. <i>Динамика</i>	182
Ковариантное дифференцирование	182
Уравнение движения материальной точки. “Второй закон Ньютона”	192
Уравнения электродинамики	198

6.

Резюме к главе 2	204
Глава 3. <i>Материя, геометрия, связь с гравитацией</i>	205
Тензор энергии импульса	205
Тензор Эйнштейна	214
Уравнения Эйнштейна-Гильберта	216
“Феномен” Калуцы	223
Резюме к главе 3	232
Глава 4. <i>Общие свойства уравнений Эйнштейна-Гильберта</i>	233
Неоднозначность решения, асимптотика	233
Резюме к главе 4	244
Глава 5. <i>Масса и энергия</i>	245
Определение массы в РТГ	246
Энергетические условия	253
Теорема о положительной энергии	259
Резюме к главе 5	262
Глава 6. <i>Экспериментальные основания ОТО и РТГ</i>	264
Эйнштейновский принцип эквивалентности (ЕЕР)	264
Резюме к главе 6	288
Заключение	289
Приложение 1. <i>Тензоры. Криволинейные координаты</i>	296
Приложение 2. <i>Материалы (2010 г.)</i>	309
Библиография	333

Учителю - Анатолию Владимировичу Михайлову, на уроках которого, в школе, я впервые услышал слова "Теория относительности"

1. Специальная теория относительности

(без второго постулата)

... необходима предопределённость – к тому, чтобы существовать в лабиринте. И семикратный опыт одиночества.

/ Ф. Ницше /

Введение

С чего лучше всего начать изложение специальной теории относительности, по поводу которой до сих пор не утихают страсти? Наверное, со слов доклада, сделанного Г. Минковским 21 сентября 1908 г. на собрании немецких естествоиспытателей и врачей: *“Милостивые господа! Воззрения на пространство и время, которые я намерен перед вами развить, возникли на экспериментально-физической основе. В этом их сила. Их тенденция радикальна. Отныне пространство само по себе и время само по себе должны обратиться в фикции, и лишь некоторый вид соединения обоих должен ещё сохранить самостоятельность”*.

Так в чём же состоит радикальность тенденции? Если говорить коротко, то в замене ньютоновой концепции субстанциональных пространства и времени на лейбницеву концепцию отношений. Собственно, лейбницева концепция пространственно-временных отношений является истоком и первопричиной сегодняшнего релятивизма или относительности.

Ньютон рассматривал пространство как пустоеместилище вещей. Оно бестелесно, то есть - абсолютно проницаемо, ни на что не действует и не подвергается воздействию. Оно трёхмерно, непрерывно, бесконечно, однородно, изотропно, его части ничем не отличаются друг от друга. Это - “бесконечный ящик без стенок” иместилище материальных вещей, *чистая протяжённость* как таковая. Пространственные отношения везде одни и те же. Геометрия пространства универсальна, ею является геометрия Евклида.

Время в концепции Ньютона само по себе есть нечто абсолютное и ни от чего не зависящее, *чистая длительность* как таковая, равномерно текущая от прошедшего к будущему. Оно являетсяместилищем событий; ход событий не влияет на течение

10.

времени. Время одномерно, непрерывно, бесконечно, везде одинаково, однородно.

Оказывается, что наличие перечисленных свойств пространства и времени достаточно для логического вывода о существовании в природе “максимально” возможной скорости перемещения материальных тел (а потому с единственным значением на множестве) и вывода преобразований Лоренца. Поэтому необходимость в сохранении эйнштейновского постулата о постоянстве скорости света для логического построения СТО просто-напросто отпадает. Но истинные причины необходимости отказа от ньютоновых представлений о пространственно-временных отношениях лежат гораздо глубже. И именно на это обстоятельство и направлен пафос выступления Г. Минковского.

Основное отличие лейбницево́й концепции пространства и времени от ньютоновой состоит в том, что Лейбниц отвергает представление о пространстве и времени как самостоятельных началах бытия, существующих наряду с материей и независимо от неё. По Лейбницу, пространство - это порядок взаимного расположения множества индивидуальных тел, существующих вне друг друга, а время – порядок сменяющих друг друга явлений или состояний тел. Лейбниц пишет: *“Я неоднократно подчёркивал, что считаю пространство, так же как и время, чем-то чисто относительным: пространство – порядком сосуществований, а время – порядком последовательностей”*.

Для желающих придерживаться ньютоновой концепции, предлагается прояснить – что же такое упоминаемое в определениях пространства и времени “чистое”, которое обладает свойствами протяженности и длительности? Дать, в конце концов, какие-то конкретные определения пространства и времени, как объектов. Ведь только объекты можно наделять свойствами, поскольку они-то и являются носителями этих свойств! Пространство ещё можно представить как некое вместилище или как “большой ящик” без границ. Но, ведь, и это представление обманчиво. А насчёт времени – вообще, полная неопределённость! Никому ещё не удалось сказать – что это такое? Но его уже и “замедляют” и “убыстряют” и наделяют какими-то фантастическими свойствами многомерности, замкнутости! На самом деле и пространство, и время в ньютоновой

концепции - это ничто или "пустота", которую пытаются наделить реальными атрибутами

Но как возникла ньютонова концепции? Было ли оправдано её существование? И насколько она перспективна для построения СТО?

До наступления эпохи картезианской причинности не существовало никаких возможностей каким-то рациональным образом описывать даже механическое движение. Можно, наверное, сказать, что и самой науки-то в её современном понимании не существовало. Наступление же эпохи рационализма связано с именем Р. Декарта. И, вот, на фоне картезианского понимания явлений природы появляются первые попытки описать механическое движение, рассчитать орбиты известных планет.

Существенным шагом вперёд на этом пути явилась факторизация целостности движения как явления, и его разделение на две составляющие – пространственную и временную определённости: ведь не существовало даже возможности измерять скорость движения непосредственно. А с введением абстракций времени и длины эта возможность появилась. Появились и способы, и инструменты для их измерения – *линейка* и *часы*. Скорость была определена как отношение пути, пройденного телом, ко времени, затраченному на это прохождение или, что более важно, как производная функции расстояния по времени. Именно из потребностей динамики и усилиями уже целой плеяды выдающихся умов своего времени создавался и развивался аппарат математического анализа и дифференциальных уравнений. На основе этого математического аппарата была создана вся классическая физика и, в частности, современная динамика. Можно утверждать, что интеллектуальному прорыву в построении рациональной науки способствовало именно это. Основоположниками начала всей этой истории были И. Ньютон и В. Лейбниц. А факторизация динамики, введение абстрактных понятий пространства и времени, это гениальное "изобретение", принадлежит, безусловно, И. Ньютону, что чётко выражено в его работе: *“Математические начала натуральной философии”*. Ньютонова же концепция пространства-времени как революционная для своего времени, зарекомендовала себя весьма основательно и “авторитет” этой концепции стал непоколебим.

12.

На этом фоне и возникла специальная теория относительности. Но именно эта теория и вынудила внести поправки в концепцию пространственно-временных отношений и предложить новую парадигму. Введение новой парадигмы пространственно-временных отношений диктовалось необходимостью разрешения возникающих парадоксов, решение которых было невозможно в прежней концептуальной схеме. Собственно это и было зафиксировано в словах Г. Минковского, что означало необходимость восстановления целостности движения: *пространственно-временные отношения должны рассматриваться как некоторый вид соединения обоих*. Это, в конечном счёте, и обусловило необходимость принятия релятивистской лейбницево́й концепции пространственно-временных отношений.

Очень часто причины парадоксов, возникающих в рамках СТО, видят во втором постулате Эйнштейна - постулате о постоянстве скорости света и следующем из него законе сложения скоростей. Однако - это весьма распространённое заблуждение. Как уже упоминалось выше, наличие свойств симметрии у ньютонова пространственно-временного многообразия и требование выполнения принципа относительности для инерциальных систем отсчёта - всё это ведёт к логическому выводу *общего закона сложения скоростей*, следствием которого является вывод о существовании “максимально” возможной скорости перемещения материальных тел. *Преобразования же Лоренца* выводятся в этом случае автоматически. Это означает, что второй постулат Эйнштейна не имеет никакого отношения к возникающим парадоксам СТО - он сам является следствием базовых свойств пространственно-временных отношений субстанциональной ньютоновой концепции. Это обстоятельство осознавал и сам А. Эйнштейн, решая задачи аксиоматизации СТО. В настоящее время второй постулат используется всего лишь для того, чтобы сделать вывод преобразований Лоренца короче и компактнее. Эти же цели преследуют и преподаватели, вводя постулат при изложении дисциплины СТО.

Именно здесь и возникает парадоксальная противоречивость, внутренне присущая самой ньютоновой концепции пространства и времени, поскольку, как известно, в классической ньютоновой механике из геометрического правила сложения векторов выводятся

как классический закон сложения скоростей, так и преобразования Галилея. Таким образом, мы имеем ситуацию сосуществования преобразований Лоренца и Галилея, релятивистского закона сложения скоростей и классического: ведь и то и другое выводимо из общей парадигмы – ньютоновой.

Собственно, в этом и состоит суть внутренней противоречивости ньютоновой концепции пространства и времени: сосуществование преобразований Лоренца и Галилея; релятивистского закона сложения скоростей и классического.

Ознакомиться с выводом преобразований Лоренца без привлечения второго постулата о постоянстве скорости света можно, например, в работах^[20,21], которые помогут постичь СТО без этого постулата.

Следующая книга^[22] даёт возможность ознакомиться с предметом в объёме теоретического минимума физического образования. Обсуждение же предмета СТО, по нашему мнению, возможно только при условии овладения этим минимумом.

Для вдумчивого читателя этих работ станет ясно, что все парадоксы, приписываемые СТО и связанные с эффектами сокращения длин, одновременностями, “замедлением времени”, различным течением времени (парадоксы типа “близнецов”) – всё это обязано ньютоновой концепции пространства-времени, по существу разрушившей концептуально единый процесс движения!

Теперь по поводу “момента истины” и обозначенной “точки бифуркации” (ньютонова или лейбницева концепции): те, кому по душе парадоксы СТО, могут оставаться в пределах ньютоновой пространственно-временной парадигмы. Она и дальше будет озадачивать их. Но при попытках разрешения своих парадоксов они вряд ли найдут общий язык со сторонниками лейбницевой концепции!

Для практической работы с пространственно-временным многообразием необходимо его “арифметизировать”, то есть “набросить” на него так называемую “координатную сетку”. Термин *арифметизация* по отношению к пространственно-временному многообразию был впервые введён отечественным учёным – Фридманом А.А. в книге^[23] – автором первого сценария

14.

расширяющейся Вселенной, сценария, который в своё время поразил даже А. Эйнштейна. По прошествии стольких лет эта книга не только не потеряла своей актуальности и ценности, но и приобрела качества одного из методологических стандартов посвящения в тайны нашего геометрического бытия.

В ньютоновой концепции пространства и времени нарушена целостность процесса движения факторизацией его на пространственную и временную независимые составляющие. Субстанциональность же как пространства, так и времени, их свойства симметрии приводят к внутренней противоречивости самой концепции: сосуществование преобразований Галилея и Лоренца, двух законов сложения скоростей – релятивистского и классического.

Преодоление возникших противоречий возможно только при восстановлении целостности движения, что приводит к необходимости замены ньютоновой концепции на релятивистскую концепцию (лейбницеву) пространственно-временных отношений.

Глава 1. Эмпирические основы СТО

Эксперименты

Опыт Майкельсона – Морли. Возникновение специальной теории относительности

Для объяснения феномена распространения электромагнитных волн в конце 19-го века была выдвинута гипотеза эфира. Эфир рассматривался как среда распространения электромагнитных волн (света). Распространение же света описывалось уравнениями Максвелла как волновой процесс, а эфир - как среда распространения волнового процесса. Скорость распространения света в этом случае должна была определяться параметрами среды. Величина же скорости относительно этой среды должна быть вполне определённой и постоянной, зависящей только от характеристик среды. При таких условиях свет, испущенный вдоль движения Земли, должен распространяться, согласно галилеевскому сложению скоростей, со скоростью $c - V$, а испущенный против движения Земли - со скоростью $c + V$, поскольку скорость светового сигнала относительно неподвижного эфира должна быть равной c . То есть распространение света должно обладать свойством анизотропии (разные скорости распространения в разных направлениях).

Для подтверждения гипотезы существования эфира как среды распространения света, была проведена серия экспериментов. Классический результат этих экспериментов был опубликован в совместной работе А. Майкельсона и Е. Морли^[1]. Результат оказался отрицательным. Скорость распространения света в пределах точности измерений оказалась одинаковой и независимой от направления его распространения, что указывало на несостоятельность гипотезы существования эфира как среды распространения света.

На основе отрицательных результатов опытов Майкельсона - Морли был выдвинут постулат: свет в пустоте всегда распространяется с определённой скоростью c , не зависящей от состояния движения излучающего тела. По существу это составляло суть так называемого второго постулата специальной теории относительности.

16.

Вместе с принципом относительности (первый постулат) оба постулата привели к созданию специальной теории относительности (СТО), которая была опубликована практически в одно время независимо А. Эйнштейном и А. Пуанкаре. В теории относительности гипотеза эфира оказалась лишней, а электромагнитное поле стало рассматриваться как самостоятельная физическая сущность, которая не требовала для своего существования и распространения какой-либо среды. Более того, при весьма общих предположениях и на основе эмпирически подтверждённых законов Кулона и взаимодействия заряда с электромагнитным полем (силы Лоренца) стали выводимы все уравнения Максвелла для электромагнитного поля. Таким образом, необходимость в гипотезе эфира отпала!

Суть свершившегося прорыва в физике, которую не поняли представители или сторонники гипотезы эфира: *электромагнитное поле стало рассматриваться как самостоятельная распределенная сущность*. Для изменения её пространственно-временных характеристик вовсе не требуется присутствия какой бы то ни было другой субстанции, как и для любого локализованного физического объекта. Оказалось, что локализованные физические объекты и распределённые могут сосуществовать в пространственно-временном многообразии вполне независимо.

Основная же ошибка “эфиристов” заключалась в том, что они для описания этой новой сущности требовали рамок старых парадигм. Они хотели “втиснуть” описание электромагнитных процессов в рамки существующих моделей: если звуковые волны - значит должна присутствовать воздушная среда; если морские волны - значит должно присутствовать море. То есть возможность проявления волновых процессов рассматривались как *свойство* какой-то среды, способной распространять возмущения в этой среде. Конечно, для упомянутых примеров – так оно и есть, но это не годилось для электромагнитного поля. На основной же вопрос: *является ли электромагнитное поле самостоятельной сущностью?* – “эфиристы” ответили отрицательно! Однако в реальности картина оказалась совершенно другой: кроме локализованных форм “плотных тел” материя может существовать и в других - нелокализованных формах. Этот мировоззренческий подход успешно подтвердился и укрепился в

дальнейшем в связи с появлением совершенно новой квантовомеханической парадигмы описания микроявлений.

Второй постулат СТО фактически содержит два утверждения:

- 1) скорость света постоянна для произвольного направления распространения (свойство *изотропии* распространения света);
- 2) скорость света не зависит от скорости источника излучения.

С критики второго утверждения постулата началась проверка СТО на прочность.

Баллистическая теория излучения. Её опровержение

Сразу же после создания СТО В. Ритц выступил против второго утверждения^[10,11], выдвинув так называемую баллистическую теорию излучения, которая предполагает алгебраическое сложение скорости света со скоростью источника излучения по отношению к наблюдателю. Однако, проведённые в разное время эксперименты К. Майораны^[12], Р. Томашека^[13] и А.М. Бонч-Бруевича^[14] продемонстрировали ошибочность баллистической гипотезы В. Ритца. Аналогичные эксперименты, проведённые с γ -лучами, также показали, что в пределах точности измерения, скорость света не зависит от скорости источника излучения^[15]. Отметим, что попытка экспериментального доказательства справедливости баллистической гипотезы В. Ритца предпринимались У. Кантором^[16,17,18,19]. Эксперименты Кантора и их последующие опровержения подробно рассмотрены в обзоре^[2].

Хронология экспериментов типа Майкельсона-Морли.

Попытки “реанимировать” эфир

Непринятие “эфирстами” электромагнитного поля, как вновь открытой сущности, привело к сохранению и дальнейшему употреблению своеобразной терминологии, описывающей несуществующий эфир, как сущность, и наделяющей его весьма противоречивыми и неопределёнными свойствами. Здесь мы вынуждены пользоваться этой терминологией, поскольку другой нет.

Цель эксперимента, предложенного и осуществлённого А. Майкельсоном в 80-х годах 19 века, заключалась в попытке обнаружить *смещение эфира* на поверхности Земли. Ожидалось, что скорость *эфирного ветра* составит около 30 км/сек, что соответствует скорости движения Земли вокруг Солнца. Майкельсон воспользовался

Теория относительности.

18.

изобретённым им интерферометром с перпендикулярными лучами света. Результаты эксперимента оказались отрицательными: достигнутая точность измерения не позволила обнаружить ожидаемого эффекта.

В дальнейшем опыты по обнаружению *эфирного ветра* Майкельсон доверил Э. Морли и Д. Миллеру, а далее работу продолжал один Миллер. В результате в 1904 году было надёжно установлено, что наблюдаемая скорость *эфирного ветра* равна нулю.

Наступил 1905 год, ознаменовавшийся появлением СТО. Совершенно очевидной стала необходимость ревизии физических понятий, а само электромагнитное поле предстало самостоятельной физической сущностью. Однако сторонники концепции эфира продолжали рассматривать распространение электромагнитного поля, как свойство эфира, который по мере продолжения экспериментов приобретал всё новые и новые характеристики, противоречащие друг другу. Однако попытки реанимировать эфир продолжались.

1905 год. Морли и Миллер на основе своеобразной интерпретации свойств эфира (наделение эфира свойствами вязкой сплошной среды, обладающей упругостью и абсолютной проницаемостью) произвели очередной опыт на высоте около 250 метров над уровнем моря близ озера Эри. На этот раз измерения дали положительный результат: было обнаружено смещение интерференционных полос, соответствующее скорости *эфирного ветра* относительно поверхности среды, равной 3 км/сек . В 1919 году прибор был размещён в обсерватории Маунт Вилсон, на высоте 1860 м над уровнем моря; измерения, выполненные в 1920, 1924 и 1925 годах, дали для скорости *эфирного ветра* значения, лежащие в пределах $8 - 10 \text{ км/сек}$. При этом было также замечено, что скорость *эфирного ветра* зависела как от положения прибора в пространстве, так и от времени суток и времени года, что вызывало естественные сомнения в чистоте экспериментов.

В сообщении 1925 года Д. Миллер делает следующий вывод: существует определённое смещение интерференционных полос, такое, которое могло быть объяснено относительным движением Земли в эфире на Маунт Вилсон со скоростью примерно 10 км/сек , то есть около одной трети орбитальной скорости Земли. При сравнении этого результата с прежними наблюдениями в Кливленде

напрашивалась мысль о частичном увлечении эфира, которое уменьшается с высотой.

При подведении итогов этих экспериментов, были отмечены следующие факты. Во-первых, скорость эфирного ветра становилась не равной нулю с увеличением высоты. Во-вторых, скорость *эфирного ветра* зависела от направления в пространстве и менялась со временем. В-третьих, скорость *эфирного ветра* составляла на высоте 250 м всего лишь около 1/3 орбитальной скорости Земли, причём её максимум наблюдался при ориентации прибора не в плоскости земной орбиты, а в направлении звезды ζ созвездия Дракона, отстоящей на 26° от полюса Мира (ни с чем не связанная мистика).

По результатам работ Миллера в обсерватории Маунт Вилсон была проведена конференция, посвящённая измерениям скорости *эфирного ветра*. Участники конференции признали результаты Миллера заслуживающими внимания; труды конференции были опубликованы. Однако после публикации и обсуждения результатов, полученных Миллером, другие физики провели аналогичные эксперименты. Полученные независимые результаты сильно отличались друг от друга, что, естественно, бросило тень на материалы Миллера, а значимость их резко снизилась.

В 1929 году А.Майкельсоном совместно с Ф.Писом и Ф.Пирсоном были проведены очередные эксперименты, давшие очередное значение для скорости *эфирного ветра*. Она получилась равной - 6 км/сек. В соответствующей публикации авторы отметили, что скорость *эфирного ветра* составляет примерно 1/50 скорости перемещения Земли в Галактике, равной 300 км/сек. (обусловленность таких соотношений, взаимосвязей и основанные на них выводы вызывают естественные сомнения). Очередное изменение цифр объяснялось тем, что первоначально Майкельсон пытался измерить орбитальную скорость Земли, совершенно упустив из виду, что Земля вместе с Солнцем движется вокруг центра Галактики с гораздо большей скоростью - дескать, не учитывалось и то, что сама Галактика движется в пространстве относительно других галактик, и т. д. Утверждалось и казалось естественным, что, если учитывать все эти движения, то относительные изменения орбитальной составляющей окажутся незначительными, что вполне оправдывало противоречивые результаты предыдущих экспериментов.

20.

Для объяснения того, что все положительные результаты получались только на значительной высоте, были привлечены соображения теории сплошных сред - движение тела в вязкой газообразной среде. Между тем, эта среда должна была обладать противоречащими одно другому свойствами: абсолютной упругости и абсолютной проницаемости. Газовая же среда должна быть представлена элементом таблицы Менделеева, который сам Менделеев помещал в своей периодической системе элементов левее атома водорода. Таким образом для сохранения идеи эфира, ради сохранения понятия о субстанции, которая была гипотетически введена как среда для распространения электромагнитного поля - того поля, которое после создания специальной теории относительности больше не нуждалось в привлечении этой субстанции для оправдания своего существования, выдвигались всё более и более фантастические предположения.

К концу 50-х годов прошлого века техника позволяла в принципе значительно повысить точность экспериментов по измерению скорости света. И в 1958 году в Колумбийском университете (США) была сделана попытка измерить скорость *эфирного ветра* путём обнаружения разности частот микроволнового излучения двух мазеров, ориентированных в противоположных направлениях относительно движения земли. Точность измерений была очень высокой, поэтому нулевой результат эксперимента был истолкован как окончательный приговор *мировому эфиру*.

Дальнейшие экспериментальные работы

Эксперименты типа Майкельсона-Морли много раз повторялись. Большинство результатов экспериментов приведено в сборнике^[3], а их подробное рассмотрение приводится в известной монографии С.И. Вавилова^[4] и в обзоре^[2]

Как уже упоминалось, в 1958 году в Колумбийском университете (США) был проведён точный эксперимент с использованием противонаправленных лучей двух мазеров, показавший неизменность частоты от движения Земли с точностью около 10^{-9} %. Ещё более точные измерения в 1974 довели чувствительность до 0,025 м/с. Современные варианты эксперимента Майкельсона используют оптические и криогенные микроволновые

резонаторы и позволяют обнаружить отклонение скорости света, если бы оно составляло несколько единиц на 10^{-16} . Сутью экспериментов типа Майкельсона-Морли является подтверждение или опровержение факта *изотропии скорости света* в вакууме. Результаты же современных экспериментов показывают высокую точность в подтверждении именно свойства изотропии.

Так, последние эксперименты, проведенные Х Мёллером^[5], демонстрируют равенство скоростей света для ортогональных направлений распространения на уровне $(2 \div 3) * 10^{-15}$. Очень трудно представить, что для встречных направлений распространения света будет иметь место другая ситуация. Эксперименты типа Гека – Рагульского^[6-8] показывают изотропию с точностью на уровне $5 * 10^{-8}$ и $5 * 10^{-10}$.

Кроме того, проводились и однонаправленные эксперименты, однако точность интерференционных измерений может на много порядков превышать точность временных измерений, поскольку первые позволяют регистрировать до 10^{-7} – 10^{-8} периода световых колебаний, точность же однонаправленных экспериментов ограничена несколькими периодами световых колебаний.

Последние эксперименты по состоянию на 2007год

(по данным The American Physical Society)

1. [Holger Müller](#)^{*}
Physics Department, Stanford University, 382 Via Pueblo Mall, Stanford, California 94305, USA
2. [Paul Louis Stanwix](#), [Michael Edmund Tobar](#), and [Eugene Ivanov](#)
School of Physics, M013, University of Western Australia, 35 Stirling Highway, Crawley 6009 WA, Australia
3. [Peter Wolf](#)
LNE-SYRTE, Observatoire de Paris, 61 Av. de l'Observatoire, 75014 Paris, France
4. [Sven Herrmann](#), [Alexander Senger](#), [Evgeny Kovalchuk](#), and [Achim Peters](#)
Institut für Physik, Humboldt-Universität zu Berlin, Hausvogteiplatz 5-7, 10117 Berlin, Germany

Received 4 April 2007; published 30 July 2007

22.

Самым важным выводом долгой истории экспериментов с распространением света является надёжное и с высокой точностью подтверждение свойства изотропии его распространения.

Эталоны

Эталон времени

Каждый атом или молекула избирательно поглощает или излучает не только свет, но и радиоволны определённой длины волны λ , или частоты f , которые характеризуются непревзойдённым постоянством. Это позволило создать квантовые стандарты частоты, а следовательно, и времени (вспомним, что частота — величина, обратная периоду, то есть времени одного колебания) и построить шкалу атомного времени - AT , задаваемую конкретным атомным или молекулярным эталоном. Шкала AT равномерна по определению.

В AT единицей измерения служит атомная секунда — промежуток времени, в течение которого совершается 9 192 631 770 колебаний, соответствующих резонансной частоте энергетического перехода между уровнями сверхтонкой структуры основного состояния атома цезия-133 (^{133}Cs).

Другими словами, за атомную секунду совершается число периодов колебаний цезиевого генератора, равное его частоте, составляющей 9 192 631 770 Гц ($\sim 9,2$ ГГц). Стабильность этой частоты очень высока (то есть относительная нестабильность $\Delta f/f$, где Δf — "уход частоты", очень мала). Кроме цезиевого генератора в качестве стандартов частоты используют также рубидиевый и водородный генераторы (последний наиболее стабилен).

Существует Международное атомное время TAI (от французского названия *Temps Atomic International*). Оно устанавливается на основе показаний атомных часов в различных метрологических учреждениях в соответствии с приведённым выше определением атомной секунды.

Эталон длины (переход от "парижского" эталона к атомному)

С развитием точных методов интерферометрических измерений появилась идея выразить метр в длинах световых волн, и в 1927 году VII Генеральная конференция по мерам и весам постановила: 1 метр равен 1 553 164,13 длинам, равным длине волны

Теория относительности.

24.

красной линии кадмия при определённых условиях (температуре, давлении и пр.) К 30-м годам XX века точность интерферометрических измерений превысила ширину штрихов на жёстком эталоне метра и его копиях.

В 1960 году XI Генеральная конференция по мерам и весам приняла новое определение метра: он стал равен $1\,650\,763,73$ длинам, равным длине волны излучения в вакууме, соответствующей оранжевой линии спектра изотопа криптона с атомным весом 86 (^{86}Kr). Поскольку эта линия намного более узкая, чем у кадмия (чему, в частности, способствует то, что криптоновую лампу помещают в криостат с жидкой углекислотой), новое определение метра повысило точность эталона длины примерно в 100 раз.

Измерение скорости света

В начале 1970-х годов в США, Англии и СССР были выполнены эксперименты по уточнению скорости света c в вакууме, основанные на независимом измерении частоты ν и длины волны λ высокостабильного лазера (произведение $\nu\lambda$ равно c). Обработка результатов этих экспериментов дала значение $c = 299\,792\,458 \pm 1,2$ м/сек с относительной погрешностью $4 \cdot 10^{-9}$. До этих экспериментов погрешность составляла величину $3 \cdot 10^{-7}$, то есть измерения скорости света с использованием стабилизированных лазеров повысили точность примерно на два порядка. Но дальнейшее уточнение значения c было невозможно, так как величина $4 \cdot 10^{-9}$ практически целиком обусловлена недостаточной точностью криптонового эталона длины, сравнением с которым вычислялась длина волны λ . Выход из этого положения оказался довольно неожиданным и оригинальным.

Новый эталон длины

Было решено: не стремиться уточнять c , а *принять полученное значение $299\,792\,458$ м/сек за мировую константу*. Поскольку скорость связывает расстояние и время, это позволило дать новое определение метра — через единицу времени. И в 1983 году на XVII Генеральной конференции по мерам и весам постановили: *метр — это расстояние, проходимое светом в вакууме за $1/299\,792\,458$ долю секунды*.

Установленное с высокой точностью свойство изотропии распространения света позволило пересмотреть приоритеты эталонов измерения пространственно-временных отношений. Скорость распространения эталонного светового сигнала получила самый высокий приоритет и приобрела значение мировой константы. Эталон времени получил больший приоритет перед эталоном длины. Эталон длины стал определяться с использованием эталона времени и значения мировой константы – скорости света.

Резюме к главе 1

Последнее решение Генеральной конференции по мерам и весам явилось результатом прояснения ситуации, возникшей в физике с начала включения в практический и научный обиход явлений, связанных с распространением света.

Произошло это благодаря закономерной смене приоритетов использования эталонов пространственно-временных измерений. Эталон скорости получил больший приоритет перед эталоном длины. Это избавило науку от забот о постоянном экспериментальном уточнении численного значения величины скорости света: она стала мировой постоянной.

Такое стало возможным благодаря “связке” длины, времени и скорости в едином процессе распространения света, который конференция и приняла за стандарт, обеспечив тем самым в последующем возможности достижения в пространственно-временных экспериментах беспрецедентной точности.

Глава 2. *Время, пространство, движение*

Время

Здесь мы опишем некоторые базовые моменты упорядочивания событий в процессах их становления, а перед тем как перейти к процедурам арифметизации пространственно-временных отношений уточним - что же мы будем понимать под временем в контексте его измерения, поскольку временная координата какого-либо движущегося объекта будет являться его важнейшей характеристикой, определяемой в системах отсчёта.

Существуют объекты – простые и сложные. Они представляются материальными точками, физическими телами, системами, подсистемами и т. д. Объекты наделены разными свойствами - каждый объект своими. Эти свойства могут изменяться. Изменения мы замечаем и описываем в процессе наблюдения или с помощью определённых процедур измерения. Пространственно-временные же изменения должны быть описаны в терминах изменений координат в заданных системах отсчёта. Всё это необходимо последовательно определить и представить в понятийной форме.

Пространственная определённость сосуществования физических объектов фиксируется как их взаиморасположение; временная определённость существования фиксируется нами как изменения, происходящие вокруг нас. Меняются характеристики тел, систем, подсистем; меняется их взаимное расположение. Даже, если ничего не меняется в ближайшем окружении, можно с уверенностью сказать, что где-то далеко или близко что-то меняется и эволюционирует. Хотя поведение некоторых подсистемы может и не меняться, однако всегда найдётся такое окружение, которое меняется. Застывшего Мира не существует.

Согласно Лейбницу, *время – порядок последовательности (различных) состояний*. Но каждый объект имеет собственные индивидуальные характеристики, которые при изменении состояния принимают свои значения, то есть и состояния, и порядок сменяющих друг друга состояний в последовательности их становления для каждого объекта - свои. Это значит, что каждый объект

характеризуется своим временем, как некоторой характеристикой, упорядочивающей его изменения в становлении или эволюции. Таким образом, время - характеристика локальная и для каждого объекта своя: *каждый объект обладает своим собственным локальным временем*. Как формально описать это? Ответ очевиден: перечислением уже наступивших состояний в их естественном порядке становления. В результате мы получим упорядоченное множество уже реализованных состояний объекта. Время здесь выступает как упорядочивающий фактор в становлении событий в едином эволюционном процессе. Этот упорядочивающий фактор будем называть в общем случае *эволюционным* временем.

Временной фактор, связанный с упорядочением положения точечного объекта в движении будем называть *динамическим* временем.

Основной задачей физики, как впрочем, и других наук является нахождение законов изменения состояний систем и, что немаловажно, в координации с другими событиями. А физику мы традиционно понимаем как науку о процессах, протекающих во времени. Роль же физики как науки, сводится к предсказанию будущего на основе настоящего и прошедшего.

Пусть A – представляет множество параметров, описывающих состояние некоторой системы (или один заданный параметр системы), а ряд $A(1), A(2), A(3), \dots A(k) \dots$ – последовательные значения, наблюдаемые в процессе эволюции этой системы. Разумеется, любое состояние должно отличаться как от предыдущего, так и последующего. В противном случае его следует “склеить” с тождественным соседним состоянием: нас, ведь, интересует последовательность различных (отделимых друг от друга) состояний. Для наглядности нам удобнее будет записать это ряд в таком виде:

$$A = \{A(1), A(2), A(3), \dots A(k)\} \quad (1.2.1)$$

Если какой-либо параметр системы удаётся представлять в виде непрерывного множества и соответственно измерять с любой степенью точности, то обычно зависимость его от времени обозначают так:

$$a = a(t) \quad (1.2.2)$$

Сопоставляя (1.2.1) и (1.2.2), мы видим, что индекс k в (1.2.1) играет ту же роль, что и переменная t в (1.2.2), только в первом случае индекс k дискретен, во втором случае индекс, как переменная t – непрерывен. В первом случае мы непосредственно задали все возможные состояния A , а во втором – значения параметра a определяются функционально. Но и в том, и в другом случаях по значениям аргументов k и t (индексов), мы можем восстановить соответствующее значение параметра. Эти индексы – дискретный в первом случае и непрерывный во втором, мы и будем называть параметром *времени*; A и a – динамическими переменными, а $\{A(1), A(2), A(3), \dots, A(k) \dots\}$ и $a(t)$ – временной зависимостью, динамикой или эволюцией.

Определим понятие *интервала времени*. В случае (1.2.1) интервалом времени между j и i состояниями будем называть величину

$$\tau = (j - i + 1) \quad (1.2.3)$$

а в случае (1.2.2) интервалом между моментами времени t_2 и t_1 величину

$$\tau = t_2 - t_1 \quad (1.2.4)$$

что является, вообще говоря, всего лишь *жордановой мерой* упорядоченного множества (отрезка) $[t_1, t_2]$

Первое, что необходимо отметить – это то, что эмпирическое время всегда дискретно (1.2.1) и дискретность эта обязана, прежде всего, практической реализации процедур наблюдения и измерения. Представление (1.2.2) является распространённой аппроксимацией упорядочивающего параметра с помощью непрерывного множества.

Для описания динамики параметров или эволюции системы традиционно используют непрерывное время. Можем ли мы перейти от дискретной формы описания к непрерывной? Да, можем.

Для начала рассмотрим – как “измерить” изменения одной системы, фиксируя изменения другой. Здесь у нас в первый раз возникнет необходимость выполнения такой важной процедуры, как *процедуры синхронизации*, которая, как мы увидим, вобщем-то, и обуславливает появление парадоксов, связанных с рассмотрением так называемых эффектов “изменения хода часов”.

В качестве эталонной системы, с помощью которой мы будем “измерять” изменения другой системы мы можем использовать какой-либо периодический процесс, например, колебания осциллятора. Для наглядности будем использовать математический маятник. Но почему именно периодический процесс, а не изменения какой-либо другой эволюционирующей системы? Да потому, что свойство периодического процесса таково, что этот процесс каждый раз сам себя восстанавливает в изначальной ипостаси. Отвлекаясь от промежуточных положений математического маятника, можно считать, что у маятника есть всего лишь одно чётко различаемое состояние, например, крайнее левое положение, которое каждый раз автоматически восстанавливается и продолжаться это может бесконечно долго. Пересчитывая же эти последовательные состояния, мы получаем динамический ряд для стандартной системы, представленной периодическим процессом. Здесь появляется искушение сказать, что мы измеряем ньютоново время. Нет, мы пересчитываем события автоматического становления одного и того же состояния выбранной нами эталонной системы. Способность же таких систем к самовосстановлению – эмпирический факт, не вызывающий ни сомнений, ни неясностей.

Может возникнуть такой вопрос. У нашего осциллятора всего-навсего одно состояние. Выписывая же члены последовательности (1.2.1) мы договорились “склеивать” смежные тождественные состояния. Тогда во всей последовательности (1.2.1) должен будет остаться всего лишь один член! Но дело в том, что мы абстрагировались от промежуточных состояний, именно тех состояний, которые и позволяют *отделить* друг от друга периодически возобновляющиеся состояния крайнего левого положения и *различить*, то есть не допустить возможности “склеить” на самом деле не вполне тождественные состояния. То есть мы просто “огрубил” механизм нашей эталонной системы, не нарушив идеи измерения.

Кроме того (важно для систем с одним, но *отделимым* состоянием), мы всё же рассматриваем не изолированный осциллятор, а осциллятор в среде, то есть в некотором окружении. В этом случае мы будем пересчитывать уже не состояния осциллятора, а состояния всего окружения, которое нельзя назвать застывшим. Это окружение и позволяет отделить, различать и пересчитывать периодически восстанавливающиеся состояния осциллятора. Даже просто пересчитывая эти

30.

очередные состояния, отвлекаясь от дальнего окружения, мы вовлекаем себя, как элемент уже ближнего окружения, вместе с биоритмами и “движениями” нашего организма, и, что самое интересное – вовлекая себя уже как “сознание” или “отражение”!

И самое главное: возможность различения “тождественных” состояний осциллятора, возможность отделить их друг от друга и *пересчитать* – это эмпирический факт и мы воспользовались этим для “изобретения” измеряющего прибора.

При реализации описанной процедуры “измерения”, а по сути дела при *синхронизации* двух процессов с помощью сопоставления рассматриваемой системы с эталонной (осциллятором) могут возникнуть такие ситуации:

А)	{A(1),	A(1),	A(1),	A(2),	A(3),	A(3)...	A(i)...	A(j)...
	1	2	3	4	5	б...	к...	м

В)	{A(1),	A(3),	A(5),	A(7),	A(8),	A(10)...	A(i)...	A(j)...
	1	2	3	4	5	б...	к...	м

В первом случае число зафиксированных осцилляций превысило число различных состояний системы, что привело к необходимости добавить во временной ряд дополнительные члены, во втором – наоборот, число зафиксированных осцилляций оказалось меньше числа состояний исходной системы, что привело к потере некоторых членов ряда для исходной системы.

В первом случае “измеренное время” исходной системы стало больше его собственного, во втором – меньше! Не эти ли эффекты мы пытаемся объяснить в рамках “парадоксальности” СТО? В дальнейшем, при разборе конкретных парадоксов, связанных с “изменением хода часов” мы вынуждены будем вернуться к этим замечаниям.

Далее. Выбирая в качестве эталонного процесса системы с всё большей “частотой” возникающих осцилляций по сравнению с “частотой” изменений сравниваемой системы (случай **А**), мы увеличиваем плотность точек-состояний эталонной системы. В конце концов, при достижении ситуации, когда число осцилляций эталонной системы становится значительно больше числа изменений исходной системы, в качестве *макроприближения* мы можем рассматривать эталонную систему как систему, воспроизводящую непрерывную

последовательность. Вот, с этого момента мы и можем начать использовать модель с непрерывным временем. Следует отметить, что именно эта аппроксимация и обуславливает появление парадоксов, связанных с интерпретацией измерений пространственно-временных зависимостей.

При описании пространственно-временных отношений, как непрерывных, вводится понятие точечного события. Под точечным событием подразумевается положение материальной точки в заданный момент времени относительно какой-либо системы отсчёта и что представляет собой некоторую систему, размерами которой можно пренебречь, а характерные времена заведомо больше единицы измерения времени. В этом случае можно представить пространство заполненным “маленькими” системами. Тогда эволюционное время, как характеристика изменения каждой системы, становится *пространственно локальным*. Это означает отказ от единого пространственного времени.

Об используемых осцилляторах в некоторых реальных процедурах измерениях времени

Система исчисления времени, применяемая в повседневной жизни, основывается на солнечных сутках, а соответствующая единица времени – *секунда солнечного времени* определяется как $1/86400$ среднесолнечных суток (в году содержится 365.2422 среднесолнечных суток). Эталонным осциллятором здесь является Земля, вращающаяся вокруг своей оси.

Более регулярным процессом является обращение Земли вокруг Солнца, период которого весьма постоянен, а его возмущения под влиянием других планет малы. Это дало возможность определить секунду, как $1/31556925.9747$ часть длительности тропического года (*секунда эфемеридного времени*). Эталонным осциллятором здесь является Земля, вращающаяся вокруг Солнца.

Развитие радиоспектроскопии и квантовой электроники привело к созданию двух типов атомных эталонов частоты и времени – цезиевого эталона и водородного генератора, позволяющих измерять секунду с относительной погрешностью 10^{-13} . Генеральная конференция по мерам и весам приняла новую единицу времени – *атомную секунду*, определив её как 9192631770.0 периодов электромагнитных колебаний, соответствующих определённому квантовому переходу атома ^{137}Cs . Нуль после точки означает, что эта величина, полученная из сравнений с эфемеридной секундой, принята за определение и не подлежит дальнейшему уточнению, а если последующие астрономические наблюдения этого потребуют, то должна быть уточнена величина эфемеридной секунды. Эталонными осцилляторами здесь являются атомы.

Создание оптических стандартов частоты позволит объединить в одном физическом процессе эталоны времени, длины и скорости! Период электромагнитных колебаний, соответствующий избранной спектральной линии, станет основой эталона времени, длина волны этой спектральной линии – основой эталона длины, а скорость

Теория относительности.

32.

света – эталоном скорости. Именно на этом принципе и будет в дальнейшем основываться процедура “метризации” пространственно-временных отношений. Эта процедура не требует факторизации целостности движения, его “насильственного” разделения на пространственную и временную составляющую и находится в полном соответствии с пониманием пространственно-временных отношений в духе лейбницево́й парадигмы. При такой стандартизации эталонов длины и времени отпадает необходимость измерения скорости света. Она всегда будет равной 1 в так называемой *релятивистской системе единиц измерения (РСИ)*.

При осуществлении процедуры арифметизации пространственно-временного многообразия нам потребуются в большом количестве приборы, которые мы называем часами. В дальнейшем мы будем называть часами те приборы, которые реализуют возможности поддержки оптических стандартов частоты на основе единого стандартного процесса. *Одинаковость* этого процесса (описание его одними и теми же уравнениями физики) в различных точках пространства принимается по определению. Конечно, под нашими часами можно подразумевать и обыкновенные хронометры, часы, маятники, “будильники”, “ходики” и т.д., но обладающие достаточной точностью и возможностью их синхронизации с выбранным стандартным процессом.

В пределах точности измерений и возможности исключения влияния присутствия других тел будем считать эмпирическим фактом сохранение синхронизации любой пары тождественных разноместных идеальных часов, отсчитывающих каждые своё эволюционное время в пустом пространстве.

Это обстоятельство позволит установить соответствие локальных эволюционных времен разноместных часов с динамическим временем движущихся часов и говорить о едином времени, обладающим свойством *однородности*. Установление соответствия эволюционного и динамического времен составляет суть синхронизации всех часов. Результатом завершения этой процедуры станет введение динамического *координатного* времени.

Возникновение концепции единого времени является тем приближением, которое нашло своё воплощение в ньютоновой концепции времени.

Учитывая это обстоятельство, мы сможем работать в заведомо определённых рамках и в ньютоновой концепции. Но самое существенное здесь то, что при возникновении парадоксов, мы можем

возвратиться к истокам лейбницевой концепции. Можно сразу сказать, что при лейбницевом подходе к определению понятия времени мы можем навсегда избавиться от парадоксов типа “парадокса близнецов”. Ни “замедление”, ни “убыстрение” времени, как некой субстанции, становятся невозможными вовсе. Этой субстанции просто-напросто нет. Конечно, мы можем замечать различия в показаниях часов между собой, скажем, которые встретились в одной точке, но всё это будет объясняться вполне рационально и без всяких парадоксов. Сами же парадоксы обуславливаются просто неадекватностью интерпретаций процедур измерения.

Время выступает как *упорядочивающий фактор*. Каждый объект характеризуется своим временем, как некоторым параметром, упорядочивающим изменения именно этого объекта в становлении или эволюции. Время, определяемое таким образом, называется *собственным временем* объекта.

Сопоставление изменений одной системы (измеряемой) с помощью изменений другой (стандартной) называется измерением времени.

Увеличивая плотность точек-состояний эталонной системы, при достижении ситуации, когда сопоставляемое число осцилляций эталонной системы становится значительно больше числа изменений исходной системы, в качестве *приближения* становится возможным рассматривать эталонную систему как систему, воспроизводящую непрерывную последовательность. При этом становится возможным рассматривать время как непрерывное. Однако этот шаг необходимо рассматривать как аппроксимацию, которая обуславливает появление парадоксов, связанных с сопоставлением мер дискретного и непрерывного множеств состояний.

При описании пространственно-временных отношений, как непрерывных, вводится понятие точечного события. Точечное событие это положение материальной точки в заданный момент координатного времени относительно какой-либо системы отсчёта и представляется некоторой системой, размерами которой можно пренебречь, а характерные её времена заведомо больше единицы измерения времени. В этом случае можно представить пространство заполненным “маленькими” системами. Тогда время, как характеристика упорядочения становится *пространственно локальным*. Это означает, что координатное время, связанное с упорядочением положения точечной частицы при движении в общем случае локально.

Свойства однородности пространственно-временных отношений в отсутствии материи позволяют использовать (при синхронизации локальных часов), как приближение, ньютонову концепцию времени, где время рассматривается как глобальный и универсальный упорядочивающий фактор

Пространство

Что мы имеем в виду, когда говорим о визуальном пространстве, не нагружая разговор излишними ассоциациями, связанными с его характеристикой, как вместилища для всего сущего? *Прежде всего, мы имеем в виду феномен пребывания одних объектов подле других, то есть их совместного сосуществования. Именно этот факт мы и фиксируем как наличие пространственных отношений между объектами. Когда же мы говорим о пространстве как о некоем обозримом и видимом фрагменте сосуществующих объектов, мы используем термин “пространство” не более, чем элемент сленга, доставшегося в “наследство” от субстанциональной ньютоновой концепции.*

Под часто встречающимися фразами: “свойства реального пространства”, “реальное пространство” и аналогичными “фигурами речи”, следует понимать только лишь: “свойства пространственных отношений между реальными физическими объектами”, “пространственные отношения между реальными физическими объектами” и т. д. — именно *свойствами отношений* объектов, а не самого пространства как *объекта*.

Реальные объекты пространства¹⁾ концептуально представляются соответствующими геометрическими образами - точками, линиями, поверхностями, объёмными фигурами, важными свойствами которых являются их меры – расстояния, длины, площади, объёмы. Оперирование образами представляет собой предмет геометрии, а сами образы – суть объекты геометрии как математической дисциплины.

Начало формализованного описания свойств геометрических объектов восходит ещё к временам Евклида и Пифагора, что явило собой начало становления геометрии как науки. Эта геометрия известна нам как геометрия Евклида со школьной скамьи. Тождественность этой геометрии свойствам пространственных

¹⁾ Ещё раз уточним смысл фразы: ... *реальные объекты пространства концептуально представляются геометрическими образами...* Здесь мы имеем в виду следующее: пространственные отношения между реальными объектами представляются модельными отношениями между концептуальными объектами геометрии. О пространстве, как некой субстанции, здесь нет и речи: реальными мы считаем только объекты, находящиеся в отношениях быть друг подле друга

отношений реальных объектов казалась самоочевидной. Основным же признаком этой геометрии является выполнимость пятого постулата Евклида или теоремы Пифагора. Предметом же геометрии являлось в основном описание геометрических свойств отдельных объектов.

Свойства упорядоченности сосуществования объектов стали описываться гораздо позже – со времён Декарта. Декарт и его современники предложили инструмент или способ удобного геометрического описания фактов пребывания одних объектов подле других. Было ясно, что при описании взаиморасположения многих объектов относительно опять-таки многих других, возникает слишком большое разнообразие, которое может стать труднообозримым. Поэтому было предложено описывать положение любых объектов относительно одного объекта, но общего для всех.

Образ этого общего объекта, *относительно* которого и должно описываться положение всех других, был назван *системой координат*.

Каждый объект, имеющий конечные размеры, можно рассматривать как состоящий из других, более мелких и находящихся в тех же отношениях пребывания друг подле друга. Здесь мы приходим к геометрическому понятию материальной точки, размеры которой малы по сравнению с размерами рассматриваемых объектов. Чаще всего в достаточном приближении можно говорить об отсутствии размеров у материальных точек. Тогда задача пространственного описания упрощается и представляется как описание положения материальной точки относительно выбранной системы координат. Концептуальное же пространство наделяется атрибутом бесконечной делимости и непрерывности. Так возникает точечно-метрическая классическая топологическая модель (*ТМК-топология*).

На свойстве концептуальной непрерывности пространственных отношений следует остановиться особо. Основанием для этого служат известные факты возникновения сингулярностей при решении физических уравнений для достаточно малых масштабов (пространственное описание поведения квантовых объектов на микроуровне). Дело в том, что на микроуровне отсутствуют объекты соответствующие описанию в ТМК-топологии. Поэтому, как и при

Теория относительности.

36.

введении непрерывного координатного времени, введение координатной и непрерывной меры пространственного положения необходимо рассматривать как факт использования макроскопической аппроксимации, когда при формальном описании физических явлений размерами мельчайших *классических объектов* можно пренебречь по сравнению с размерами описываемых макрообъектов. В работоспособности такой аппроксимации (кроме классической механики) мы убеждаемся и на примере работы с волновыми функциями квантовых частиц как проекциями квантовых состояний на координатное представление. При всей неопределённости (в силу соотношений Гейзенберга) описания положения частиц, волновая функция, как функция координат и координатного времени, тем не менее, является вполне работоспособным инструментом в описании микроявлений.

Эмпирическим фактом является необходимость задания *трёх* чисел для однозначного определения местоположения материальной точки относительно заданной системы координат. Этот факт называют *трёхмерностью* пространства.

Многовековой опыт, начиная с древней Греции, свидетельствует о том, что свойства пространственных отношений реальных объектов описываются, как уже отмечалось, евклидовой геометрией. Однако следует заметить, что речь шла о пространстве, опосредованном существовавшей практикой, то есть о “ближнем” пространстве.

Между тем, в середине XIX века появились работы по геометрии, связанные с именами Н. Лобачевского, И. Больяйи, К. Гаусса, Б. Римана и другими. Был предложен ряд геометрий, свойства которых существенно отличались от свойств евклидовой геометрии, но которые могли описывать новые абстрактные пространства. В этих же работах напрямую ставился вопрос о необходимости эмпирического обоснования свойств пространственных отношений между реальными физическими объектами, то есть ставился вопрос о геометрии этих отношений. Таким образом, вопрос о соответствии реальных свойств пространственных отношений геометрии Евклида стал неотложным и неотвратимым.

Оказывается, что новые геометрии при отсутствии каких-либо метрических особенностей описывают пространства, которые в

общем случае в окрестности любой точки можно считать евклидовыми, что вполне соответствует эмпирическим данным о свойствах нашего ближнего пространства. Таким образом, вопрос о соответствии новых геометрий свойствам реального ближнего пространства был снят. Именно это обстоятельство в своё время и дало возможность эмпирического обоснования “Начал” Евклида для ближнего пространства и появления теоремы Пифагора - первого знакового воплощения вида евклидовой метрики.

Однако следует иметь в виду, что даже при евклидовости ближнего пространства, свойства дальнего пространства также должны определяться эмпирически и эти свойства, как ожидается, будут в существенной степени зависеть от распределения материи в нём.

Важным геометрическим объектом абстрактных неевклидовых пространств (римановых) является метрический тензор $g_{\alpha\beta}$, определяющий все геометрические свойства абстрактного метрического пространства, то есть его метрику. Метрический тензор задаёт расстояние между двумя бесконечно близкими точками этого пространства:

$$dl^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (1.2.5)$$

Здесь по дважды повторяющимся индексам α и β подразумевается суммирование от 1 до 3.

Относительно общепринятых определений и обозначений.

Нижние индексы в выражениях наподобие (1.2.5) называются ковариантными, а верхние – контравариантными. Для упрощения записи используется следующее правило суммирования, введённое А. Эйнштейном. Если один и тот же индекс входит в какой-либо одночлен дважды: один раз как ковариантный, другой раз как контравариантный, то написанное выражение означает сумму одночленов, в котором этот индекс пробегает все свои значения. Причём в рамках СТО и ОТО принимается, что греческие индексы пробегают значения от 1 до 3, а латинские – от 0 до 3.

Например,

$$dl^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \text{ но}$$

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = \sum_{i=0}^3 \sum_{k=0}^3 g_{ik} dx^i dx^k$$

38.

При обозначении координат могут использоваться две нотации. Соответствие между ними таково: $t, x, y, z \leftrightarrow x_0, x_1, x_2, x_3$. Вторая нотация приспособлена для использования правила суммирования А. Эйнштейна; в этой нотации могут использоваться и верхние индексы.

Перейдём теперь к построению локальной системы координат, то есть системы координат для ближнего пространства. В качестве начала координат выберем любую точку и обозначим её как 0, а в качестве самой системы координат выберем такую, чтобы направления трёх осей (орт), исходящих из начала координат были взаимно перпендикулярны. Это всегда можно сделать, поскольку пространственные отношения между реальными физическими объектами локально евклидовы. В евклидовом пространстве можно выбрать метрику таким образом, что бы дифференциал длины радиус-вектора какой-либо точки пространства и дифференциалы длин его проекций были связаны теоремой Пифагора. Именно благодаря этому, выбранная метрика пространства называется евклидовой, а система координат – декартовой. В этом случае метрический тензор в (1.2.5) представляется диагональной трёхмерной единичной матрицей, а само выражение (1.2.5) принимает вид теоремы Пифагора:

$$dl^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (1.2.6)$$

Поскольку построенная система координат – локальная, все свойства, характерные для евклидовой метрики будут действительны только в достаточно малой окрестности начала координат 0. Между тем, при осуществлении процедур “глобальной” метризации, при самых общих предположениях относительно геометрии реального пространства, необходимо будет задавать, продолжать и распространять некоторые свойства на “большие расстояния”. В евклидовой геометрии эти процедуры осуществляются с помощью параллельных переносов вдоль заданных направлений. Например, оси в декартовой системе координат (прямые) получаются именно таким образом - параллельным переносом соответствующего орта вдоль его собственного направления.

Для римановых (неевклидовых) пространств роль прямых линий играют так называемые *геодезические*. Геодезические линии получаются таким же образом, как и в евклидовом пространстве прямые – параллельным переносом направляющего вектора вдоль его собственного направления. Геодезические линии наследуют основное

свойство прямых: они являются линиями наименьшей длины среди всех, которые соединяют две заданные точки. Если из начала координат пустить узкий луч света в направлении орта оси, то свет как раз и пройдёт по этой оси координат, то есть вдоль геодезической.

Однородность пространственных отношений конкретизируется в глобальной евклидовости: локальные свойства в любой окрестности распространяются на пространственные отношения любой пары точек, то есть на всё "пространство".

Кроме непрерывности, ньютоново субстанциональное пространство изначально наделено такими фундаментальными атрибутами, как однородностью и изотропностью. Это связано, прежде всего, с абсолютизацией ньютоновой концепции мер длины и времени. Однако, в связи с необходимостью смены приоритетов в определении мер длины, времени и скорости в лейбницево концепции пространственно-временных отношений, мы будем рассматривать эти свойства после рассмотрения процедур метризации пространственно-временных отношений. То есть рассмотрение этих свойств станет возможным в метризованном пространстве и в координатном представлении.

Визуальное пространство трёхмерно и *локально евклидово*. Общий объект, относительно которого описывается положение других объектов называется системой координат. Для описания пространственных отношений между реальными физическими объектами, для описания свойств ближнего пространства всегда можно построить *декартову систему координат*. В декартовой системе координат евклидова пространства метрический тензор в (2.5) принимает диагональный единичный вид.

Непрерывность пространственных отношений необходимо рассматривать как макроаппроксимацию.

Движение

Согласно общепринятому определению, движение - это изменение *пространственного* положения физического тела во *времени*. В понятийном представлении ньютоновой механики мы фактически вынуждены разделить движение как процесс на две независимые составляющие – пространственную и временную. Фактор, упорядочивающий положение точечного объекта по отношению к другим, называется *динамическим временем* или просто временем, если не оговорено противное. Необходимость разделения движения на две составляющие наиболее чётко выражено в операциональном определении скорости, как основной характеристики движения: *скоростью называется отношение пройденного пути ко времени, затраченному на прохождение этого пути*. Здесь прямо сказано: чтобы определить скорость, необходимо измерить путь, затем время, и найти отношение этих величин. Для реализации же процедуры измерения скорости требуется *наличие предметных стандартов длины, времени и их мер*. Нарушение концептуальной целостности самого процесса движения при измерении скорости здесь очевидно.

Противоречия, обусловленные нарушением целостности движения, известны ещё с древнегреческих времён, а формулировка известных противоречий связывается с именем древнегреческого философа Зенона (ок. 490-430 до н.э., Элея, Южная Италия).

В частности, по Зенону, чтобы разделить движение на две части – пространственную и временную, необходима третья составляющая – разделяющая. В нашем разложении движения на пространственную и временную составляющие такой разделяющей нет. Вполне возможно, что отсутствие третьей составляющей и обусловило возникновение парадоксов и, в частности, апорий Зенона.

Апории Зенона

Дихотомия. Прежде чем пройти весь путь, движущееся тело должно пройти половину этого пути, а ещё до этого - четверть и т. д.; поскольку процесс такого деления бесконечен, то тело вообще не может начать двигаться (или движение не может окончиться).

“*Ахилл*”. В противоречие с чувственным опытом, быстроногий Ахилл никогда не сможет догнать черепаху, так как пока он пробегает разделяющее их

расстояние, она всё же успеет проползти некоторый отрезок, пока он будет пробегать этот отрезок, она ещё немного отползёт и т. д.

Стрела. Если считать, что пространство, время, и процесс движения состоят из некоторых “неделимых” элементов, то в течение такого неделимого элемента тело (например, стрела) двигаться не может (ибо в противном случае “неделимое” разделилось бы), а поскольку “сумма покоев не может дать движения”, движение вообще невозможно, хотя мы его на каждом шагу наблюдаем.

Эти и другие зеноновские апории подчёркивают относительный и противоречивый характер *математических* описаний реальных процессов движения, необоснованность претензий на полную адекватность таких описаний и спорность привычных мнений об однозначной определённости фигурирующих в них понятий. Ни один из формализмов, способов анализа и разрешения выявленных в апориях противоречий, возникающих при отображении движения, не может претендовать на всеобъемлющую общность.

Приведём *физическое* решение зеноновских апорий, связанных с пространственно-временными отношениями и движением, наделённых атрибутами непрерывности на примере решения апории “Ахилл”.

Мы не будем анализировать этот парадокс на уровне составляющих движение. Мы решим эту апорию с соблюдением целостности движения – просто мы перейдём в систему отсчёта, связанную с черепахой. В результате этого черепаха будет “остановлена”, а поскольку Ахилл движется по направлению к черепахе, то, в конце концов, он достигнет её. По нашему мнению именно движущиеся системы и являются недостающим третьим элементом факторизации движения на пространственную и временную составляющие. И именно движущиеся системы являются их объединяющим и базовым началом. Таким образом, ньютонова факторизация преодолена просто восстановлением исходной целостности движения.

Противоречия в двух других апориях также исчезают, если восстановить целостность движения и рассматривать его как неделимое явление.

Восстановление концептуальной целостности движения ведёт к необходимости отказаться и от разделённых концептуальных сущностей пространства и времени. Пространство и время теперь

42.

необходимо рассматривать как *единое и целостное четырёхмерное пространственно-временное многообразие отношений реального Мира. С этого момента мы должны говорить о четырёхмерном пространстве-времени с его геометрическими объектами и свойствами.*

Учитывая эти замечания, уточним определение движения: движение - это *процесс* изменения положения физического тела по отношению к другим телам *между* исходным и конечным состояниями, описываемыми в 4-пространстве-времени. В этом определении первичным является уже сам процесс движения, а основной характеристикой этого процесса является *скорость*.

В трёхмерном пространстве мы не можем отобразить движение физического тела целиком. Мы можем отобразить только траекторию его движения. Тем более мы не сможем этого сделать и в одномерном временном подпространстве. В четырёхмерном же пространстве-времени “умещается” вся история движения – целиком и полностью, вместе со всеми атрибутами непрерывности и гладкости.

Восстановление концептуальной целостности движения ведёт к необходимости рассматривать физические закономерности в четырёхмерном пространстве-времени.

Четырёхмерное пространство-время. Связь с трёхмерием

В классической физике мы привыкли иметь дело с пространственными и временными характеристиками по отдельности. В ньютоновой механике пространство - трёхмерно и каждая точка описывается координатами (x, y, z) ; время - одномерно и каждому точечному моменту времени сопоставляется временная координата t на действительной оси. "Координатные сетки" 3-пространства и 1-времени, служащие для отображения событий, описываемых ньютоновой динамикой, "набрасываются" совершенно независимо одна от другой.

Восстановление концептуальной целостности движения требует перехода от раздельного пространственного и временного $(3+1)$ -представления к единому координатному 4-представлению динамики и кинематики, и к единой и общей "координатной сетке": $(ct, x, y, z) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$. Теперь нам предстоит привыкнуть к словосочетанию *пространственно-временное многообразие* как к единой сущности, и описывать *события*, которые геометрически будут представляться также точками, не имеющими размеров, но уже в четырёхмерном концептуальном пространстве-времени²⁾.

Для решения практических задач динамики реальное многообразие пространственно-временных отношений должно быть *арифметизировано*, то есть на него с помощью физически реализуемых процедур должна быть "наброшена координатная сетка".

Вообще говоря, процесс арифметизации совершенно произволен: выбор четвёрок чисел для каждого события ничем не ограничен. Выбрав каким-либо образом один способ арифметизации, мы можем перейти и к другому. Четвёрки чисел, с помощью которых арифметизируется пространственно-временное многообразие, называются *координатами*; функциональный (хотя и необязательно) переход от одного способа арифметизации к другому называется *преобразованием координат*:

²⁾ Таким образом, при переходе $(3 + 1) \rightarrow 4$ меняется и ТМК-топология пространственно-временных отношений.

44.

$$\begin{aligned}x &= f_1(x', y', z', t'), \\y &= f_2(x', y', z', t'), \\z &= f_3(x', y', z', t'), \\t &= f_4(x', y', z', t').\end{aligned}\tag{1.2.7}$$

Здесь: (x, y, z, t) и (x', y', z', t') - четвёрки координат одного и того же события при старой и новой арифметизации, соответственно.

Устанавливая отношения между объектами четырёхмерного многообразия и выясняя их взаимосвязи, мы можем двояко характеризовать свойства пространственно-временных зависимостей. Одни будут целиком зависеть от избранной (по нашему произволу) арифметизации, другие останутся неизменными, каким бы образом (заведомо регламентированным) мы не производили арифметизацию. Первую группу свойств мы условимся называть *несобственными*, вторую – *собственными*.

Изучая несобственные свойства, мы, в сущности, будем исследовать данный способ арифметизации. И только когда мы перейдём к собственным свойствам, только тогда мы сможем изучать пространственно-временные отношения как таковые, вне зависимости от их арифметизации.

Собственные свойства пространственно-временного многообразия должны быть выражены уравнениями, соотношениями, форма которых не должна меняться при переходе от одного способа арифметизации к другому с помощью формул преобразования (1.2.7). Этого рода обстоятельство выражают словами: собственные характеристики пространственно-временных отношений должны быть *инвариантны* по отношению к преобразованиям координат (1.2.7), а функциональные зависимости должны обладать свойством *ковариантности*, то есть сохранять форму зависимостей относительно этих же преобразований. Требование ковариантности функциональных зависимостей, как мы увидим позже, является очень сильным требованием и его выполнимость приводит к достаточно содержательным выводам.

Специальным типом арифметизации пространственно-временного многообразия является его метризация. *Метризация*, произведённая с помощью *реальных физических процедур* и с использованием эталонов *длины и времени* или единого эталона

скорости и даст нам возможность формулировать и рассматривать собственные свойства пространственно-временного многообразия. При приведении в соответствие эталонов длины и времени с эталоном скорости результаты метризации для одной и той же системы отсчёта в обоих случаях будут одинаковыми. Однако собственные свойства и характеристики, выражаемые инвариантностью и ковариантностью относительно преобразований (1.2.7) будут разными. Именно здесь и необходимо решить вопрос: в каком пространстве “строить” физику - в ньютоновом (3+1) или четырёхмерном пространственно-временном многообразии, то есть, что принять за эталоны, инвариантные при преобразованиях (1.2.7) - длину и время или единый эталон скорости? Учитывая факт существования предельно возможной (максимальной, а значит с определённым и единственным числовым значением) скорости распространения, что логически выводится из субстанциональных свойств симметрии ньютонова пространства и времени, в теории относительности выбирается второй вариант. Именно постоянная величина этой скорости и принимается за эталон скорости.

Полная информация о собственных свойствах метрического 4-пространства-времени содержится в метрическом тензоре g_{ik} , определяющем квадрат элемента “длины” ds^2 четырёхмерного пространства-времени. Перейдя к индексной нотации и используя правило суммирования Эйнштейна, выражение для квадрата элемента длины можно записать в виде аналогичном (1.2.5):

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k \quad (1.2.8)$$

Если не оговорено противное, тензоры $g_{\alpha\beta}$ и g_{ik} будут считаться различными. Первый тензор определяет метрику трёхмерного пространства, а его индексы пробегают значения 1, 2, 3. Второй тензор определяет метрику четырёхмерного пространственно-временного многообразия, а его индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3. Эти тензоры отличаются и по входящим в них элементам.

При переходе от трёхмерия к четырёхмерию возникает главный вопрос: *каким образом этот переход должен коснуться чисто практических моментов измерения скоростей, расстояний и времени* - тех свойств ньютонова Мира, которые рассматривались как собственные свойства трёхмерного пространства, существующего в абсолютном времени? При ответе на этот вопрос необходимо иметь в

46.

виду то, что сценой “разыгрывающихся” событий по новым сценариям, будет Мир больших скоростей: для макрорасстояний - это микромир с квантовой механикой (малые времена); для макровремени – это мегамир (большие расстояния) с общей теорией относительности³⁾. Говорить о применении линеек и часов в подобных случаях просто-напросто бессмысленно.

Ньютонова факторизация движения привела к тому, что, образно говоря, для измерения скорости движения какого-либо тела, необходимо сначала “съездить в Париж за эталоном длины, а в Лондон - за эталоном времени”. При всей очевидной ясности и определённости процедуры этого измерения, было не понятно – в соответствии с каким эталоном скорости мы измерим в результате искомую скорость? Ведь, измерение - это всегда сравнение с каким-то “однородным” эталоном или процессом. Но, ни в Париже, ни в Лондоне такого эталона, просто-напросто, нет. Взамен этого там предложат лишь некоторые “составляющие”, из которых мы и должны будем “сконструировать” процедуру измерения скорости. Однако нет никакой уверенности в том, что ни эталон метра, ни эталон секунды не изменятся при “транспортировке” их в другую точку пространства.

Становится очевидным, что с восстановлением целостности движения должны смениться понятийные приоритеты (по первичности), и порядок воспроизведения измерительных процедур (по эталонам).

Были: *длина и время*, стандарты *длины и времени*. Здесь движение и скорость разделялись на независимые составляющие, через которые они определялись и измерялись. Скорость, являясь характеристикой движения, определялась как “конструкция” (отношение) из величины перемещения и величины затраченного времени на перемещение. Считалось, что эталоны метра и секунды абсолютны и не изменялись при транспортировке их в другую точку пространства. Благодаря этому процедура измерения скорости получала свою определённую, законченную и независимость от

³⁾ Здесь можно заметить, что лейбницава концепция относительности по существу должна позволить установить связь между двумя ипостасями единого Мира (*микро-* и *мега-*) через наш реально осязаемый *макромир*.

того, где и при каких условиях происходило движение и его измерение.

Стали: *движение, скорость* стандартного процесса распространения сигнала. Движение получает статус первичного явления, а скорость – первичной характеристики. Пространственно-временные отношения приобретают свойство целостности в едином четырёхмерном пространственно-временном многообразии, а их объединяющим началом становится движение. Ясно, что в этом случае гарантией определённости и законченности для пространственно-временных измерений должна стать возможность воспроизведения стандартного процесса движения. Мы должны иметь возможность воспроизводить этот процесс на основе одного и того же физического закона в любой точке визуального пространства, в любой момент ощущаемого времени и при достаточно произвольных условиях. Величина же предельной скорости распространения сигнала, возбуждаемого этим стандартным процессом, должна стать эталоном и по определению эталона - инвариантом. Величина этой скорости принимается равной безразмерной единице (в системе измерения *РСИ*).

Возникает вопрос: как обеспечить измерение скорости при сохранении целостности движения: ведь, движущееся тело не приложишь к “вещественному” эталону скорости? Как величина скорости будет преобразовываться при переходах между системами отсчёта? Ответ такой: *метризацией пространственно-временных отношений с помощью выбранного стандартного сигнала, распространяющегося с предельно возможной скоростью, и формальной констатацией её инвариантности при 4-координатных преобразованиях (1.2.7)*. Именно на этих принципах и будет построена процедура метризации четырёхмерного пространственно-временного многообразия и выведены формулы преобразования 4-координат, что будет описано в следующих разделах.

Здесь могут возникнуть такие сомнения. Например. Образы “эталона метра”, вроде бы одинаковые и в неподвижной системе, и в движущейся - ведь, у них одинаковое механическое происхождение. А что можно сказать по отношению к эталонной скорости? С точки зрения наблюдателя неподвижной системы, рассматривающего процессы распространения сигналов, инициированных как в своей

48.

системе отсчёта, так и в движущейся системе, эти скорости должны отличаться - об этом говорит классический закон сложения скоростей. Попробуем развеять эти сомнения.

Во-первых, у нас нет никаких оснований считать, что наблюдатель неподвижной системы увидит эталон длины подвижной системы таким же по длине, как и свой эталон. Ведь, измерения движущего эталона он не сможет произвести старым способом. И, тем не менее, и первый, и второй наблюдатели пользовались своими “метрами” как эталонами длины.

Во-вторых, ситуация с эталонными скоростями выглядит гораздо убедительнее. Для инициации процесса возбуждения сигнала наблюдатели используют один и тот же физический процесс, подчиняющийся одному и тому же закону распространения. Он должен выполняться и в неподвижной системе, и в движущейся. Каждый из наблюдателей зафиксирует “одинаковость” условий его проявления (в силу справедливости принципа относительности). Поэтому величина эталонной скорости, как максимально возможная и для первого, и для второго наблюдателей, должна быть одной и той же.

В-третьих. Для измерений в больших масштабах и с большими скоростями у нас просто-напросто нет альтернативы, кроме как измерять расстояния с помощью сигналов.

В-четвёртых. Как такового “закона сложения скоростей не существует”. Есть галилеевские преобразования координат, которые дают возможность найти закон преобразования скоростей при переходе от одной инерциальной системы к другой в рамках ньютоновой механики. Однако одной из наших задач в связи со сменой эталонов и является выяснить, как изменятся эти преобразования, и как при этом будут преобразовываться скорости.

В-пятых. Новый эталон инициации стандартного процесса возбуждения сигнала, принятый Генеральной конференцией по мерам и весам обладает свойством единства мер длины, времени и скорости.

Однако самый важный аргумент появляется при восстановлении целостности и неделимости процесса движения, при отказе от свойств субстанциональности пространства и времени, поскольку появляется возможность непосредственного сравнения

искомой скорости движения с заранее выбранной - эталонной. Именно поэтому скорость мы и должны выбрать в качестве первичного эталона при наделении четырёхмерного пространственно-временного многообразия метрикой. Только после этого единицы мер длины и времени получают свою определённую и реальное физическое воплощение.

При таком подходе, отдельно пространственные и отдельно временные отношения становятся проекциями более общих пространственно-временных отношений четырёхмерного многообразия. Однако само определение скорости и процедура её измерения для любых движущихся тел останутся прежними. Измерение же скоростей будет производиться в системе координат, полученной при метризации пространственно-временных отношений с использованием инвариантной скорости эталонного сигнала.

Скорость движения любого тела мы будем измерять и вычислять обычным способом, как отношение пути пройденного телом ко времени, затраченному на прохождение этого пути. Ясно, что расстояния и промежутки времени будут представляться как *проекции* из четырёхмерного многообразия. Величина же измеренной таким образом скорости и получит своё сравнение с базовой или эталонной в единицах скорости распространения стандартного сигнала.

При смене эталонов измерения пространственно-временных зависимостей должна быть обеспечена преемственность и переход к ньютоновой динамике для масштабов макромира. Новые методы измерений не должны противоречить ньютоновой динамике для масштабов макромира, а результаты измерений в рамках новой методологии должны совпадать с результатами, полученными в рамках традиционных методик в пределах общей области применимости.

Впервые необходимость объединения пространственно-временных отношений в четырёхмерное многообразие была высказана Г. Минковским в 1908 году. Значимость высказанных им идей трудно переоценить. Гораздо позже это признал и автор уже общей теории относительности А. Эйнштейн. С этого момента теория относительности, основные принципы которой уже были сформулированы, начала своё существование в новом качестве.

Пространство Минковского – четырёхмерное концептуальное пространство, объединяющее трёхмерное пространство и время. Точки в этом четырёхмерном пространстве соответствуют *событиям* специальной теории относительности, которые задаются четырьмя координатами – тремя пространственными и одной временной. Для задания трёхмерного пространственного положения обычно используется прямоугольная, декартова система координат. Геометрические свойства пространства Минковского определяются выражением для квадрата дифференциала *интервала* (“расстояния”) ds^2 между двумя бесконечно близкими событиями:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (1.2.9)$$

Пространство с такой метрикой называется *псевдоевклидовым*.

Согласно (1.2.8) и (1.2.9) тензор g_{ik} представляется диагональной четырёхмерной матрицей с элементами по диагонали $(1, -1, -1, -1)$. Формальная “конструкция” $(+, -, -, -)$ называется *сигнатурой* метрического тензора. Вместо этой сигнатуры могла бы использоваться и $(-, +, +, +)$. Тогда выражение (1.2.9) для элемента интервала ds^2 больше бы напоминало (1.2.6). Однако, как мы увидим в дальнейшем - это непринципально. По традиции же мы используем сигнатуру, соответствующую (1.2.9).

В четырёхмерном пространстве-времени Минковского важную роль играют преобразования координат события (x^0, x^1, x^2, x^3) , соответствующие поворотам четырёхмерной системы координат. При таких поворотах, как и в трёхмерном случае, элемент длины (1.2.9) не меняется, а сами преобразования совпадают с *преобразованиями Лоренца* четырёхмерного пространства-времени.

Движение в пространстве Минковского описывается *мировой линией*, которая включает в себя всю информацию о движении. В трёхмерном же пространстве аналогов подобной линии не может существовать. В трёхмерном пространстве есть понятие траектории движения, однако информация о движении в подобном представлении представляется лишь косвенно, как производная $d\vec{r}/dt$ вектора положения \vec{r} по времени t , которая и представляет собой определение скорости \vec{v} . Из этого определения видим, что *скорость \vec{v} реализует топологическую связь непрерывности и близости между точками континуальных множеств пространства и моментов времени*. То есть непрерывность времени обуславливает необходимость рассматривать и пространство как непрерывное.

Чтобы понять различие в представлениях движения с помощью мировой линии четырёхмерного пространства-времени и с помощью траектории трёхмерного пространства рассмотрим это подробнее.

Любая трёхмерная гиперповерхность $t = \text{const}$ четырёхмерного пространства-времени будет представлять моментальную съёмку “ньютонова вместилища”. Но оно “мертво”, в нём абсолютно отсутствует движение. Проекция же мировой линии на любую трёхмерную гиперповерхность будет представлять собой просто застывшую траекторию движения. Но известно, что проецирование объекта на подпространство меньшей размерности всегда связано с потерей информации. Именно таким образом и теряется информация о движении.

Любое одномерное подпространство $x = \text{const}, y = \text{const}, z = \text{const}$ будет представлять собой “чистую” длительность в одной точке пространства. Но здесь нечему меняться. Здесь одна точка – даже без размеров, которая тождественна сама себе.

И то и другое полностью лишено движения и изменения: *в первом случае – ничего не меняется, во втором – нечему меняться.* При “механическом” соединении этих фрагментов (как в определении скорости) движения получиться не может, поскольку информация о самом движении при их разделении уже потеряна и тем самым подготовлены условия для возникновения парадокса Зенона с названием “Стрела”.

Status quo вместе с неявной атрибутикой изменения может быть восстановлен только при восстановлений целостности движения. А это и означает необходимость перехода в четырёхмерный Мир Минковского.

Четырёхмерное представление движения в пространстве-времени Минковского обеспечивает целостность его описания. Мир Ньютона (пространство, и отдельно – время) получается как две проекции из четырёхмерного пространства-времени на соответствующие подпространства: трёхмерное $t = \text{const}$, и одномерное $x = \text{const}, y = \text{const}, z = \text{const}$.

Процедура же проецирования приводит к потере информации о целостности движения, что обуславливает появление парадоксов типа апорий Зенона. Эти противоречия оказываются неразрешимыми в рамках ньютоновой концепции.

Арифметизация и метризация пространственно-временных отношений

В данном разделе мы опишем способ задания четвёрки чисел каждому событию реального пространственно-временного многообразия с использованием физических процессов. Поскольку эталоны скорости, длины и времени “завязаны” в одном процессе распространения эталонного сигнала⁴⁾, мы фактически определим метрику четырёхмерных пространственно-временных отношений. Так как при арифметизации пространственно-временных отношений используются реальные процессы, объекты и их свойства, эту процедуру можно назвать *метризацией*.

Пространственная метризация

1. Выбираем точку для начала координат и восстанавливаем три взаимно *перпендикулярных* направления. Эти направления будут представлять оси координат – X, Y и Z . В точке начала координат размещаем наблюдателя – N_0 . У наблюдателя N_0 имеется зеркало для отражения сигналов.
2. Вдоль одного из направлений (X) на заданном расстоянии размещаем ещё одного наблюдателя – N_{x_1} . Расстояние между наблюдателями N_0 и N_{x_1} будет служить по определению в качестве *основной единицы измерения длины*. У наблюдателя N_{x_1} имеется зеркало для отражения сигнала, поступившего из начала координат.
3. Вдоль направлений Y и Z также размещаем наблюдателей N_{y_1} и N_{z_1} с зеркалами.
4. Из точки начала координат наблюдателем N_0 периодически посылаются сферические световые сигналы, которые отражаются от зеркал наблюдателей N_{x_1}, N_{y_1} и N_{z_1} .
5. Наблюдатель N_0 , располагающийся в начале координат, регистрируя отраженные сигналы от наблюдателей по всем трём осям координат, корректирует удаление наблюдателей N_{y_1} и N_{z_1}

⁴⁾ в качестве эталонного сигнала выбирается световой, поскольку распространение света удовлетворяет главному требованию для стандартного процесса: эмпирически установлено, что скорость распространения света совпадает с предельной максимальной скоростью.

вдоль своих осей по отраженному сигналу от наблюдателя N_{x_1} . Это продолжается до тех пор, пока отраженные сигналы от всех трех наблюдателей по осям координат не будут приходить синхронно. После завершения этой процедуры мы будем говорить, что наблюдатели N_{x_1}, N_{y_1} и N_{z_1} равноудалены от центра координат или от наблюдателя N_0 .

6. Полная координатная разметка вдоль оси X .
 - 6.1. Вслед за наблюдателем N_{x_1} размещаем вдоль оси X следующего наблюдателя N_{x_2} с зеркалом. Теперь уже наблюдатель N_{x_1} периодически начинает посылать сферические сигналы, которые отражаются от зеркал N_0 и N_{x_2} . Координируя положение наблюдателя N_{x_2} по совпадению отраженных сигналов от N_0 и N_{x_2} , наблюдатель N_{x_1} добивается равноудалённости наблюдателей N_0 и N_{x_2} , что достигается корректировкой положения наблюдателя N_{x_2} .
 - 6.2. Добавлением очередного наблюдателя по оси X , этот шаг повторяется до тех пор, пока “не закончится” ось X . Последовательность действий такая же, как при выполнении п. 6.1. Здесь в качестве “организатора” проведения очередного шага выступает вновь “от’арифметизированный” наблюдатель, в качестве эталона – предыдущий, а в качестве корректируемого – вновь размещённый наблюдатель.
7. Полная координатная разметка вдоль оси Y . Выполняется точно так же, как и в п.б.
8. Полная координатная разметка вдоль оси Z . Выполняется точно так же, как и в п.б.

В результате выполнения описанной процедуры метризации положение каждой точки евклидова пространства может быть однозначно представлено тройкой чисел (x, y, z) – координат этой точки. Координаты любой точки получаются восстановлением перпендикуляров из точки до соответствующих осей. Для евклидова пространства операция восстановления перпендикуляра из точки до прямой определяется однозначно.

54.

Иначе обстоит дело в случае общего риманова пространства. Здесь достаточно привести пример геометрии сферы, где из условного полюса можно восстановить, например, к экватору бесконечно много перпендикуляров.

Таким образом, процедуры арифметизации и метризации пространства для евклидова случая в специальной теории относительности можно считать полностью определёнными. Рассмотрение же арифметизации и метризации для случая римановой геометрии должно быть продолжено, что представляет собой предмет общей теории относительности.

Временная метризация

1. Предварительно договариваемся со всеми размещёнными во время выполнения арифметизации пространства наблюдателями, чтобы они устанавливали на своих часах время, равное их порядковому номеру в момент прихода сигнала от наблюдателя N_0 , размещённого в центре координат. Единицей измерения времени здесь будет величина, равная затраченному “времени” на переход сигнала от одного наблюдателя до ближайшего смежного, по оси, выходящей из центра координат.
2. Наблюдатель N_0 запускает сферический сигнал и ждёт сообщения о конце операций регистрации этого сигнала последним наблюдателем.

В результате выполнения описанной процедуры часы, расположенные в местах нахождения наблюдателей, будут синхронизованы. Однако нельзя сказать, что этим завершается синхронизация всех часов. Здесь синхронизованы часы только тех наблюдателей, которые расположены по осям координат. Дальнейшее обобщение процедуры синхронизации по любым направлениям, исходящих из начала координат очевидно. Кроме того, возможно включение процедур и попарной синхронизации часов, находящихся в разных точках пространства. Весьма существенным обстоятельством здесь является то, что часы сохраняют свою синхронизацию и в дальнейшем, что следует из предположения однородности времени в "пустом" пространстве Минковского. Однако это не так для пространства, заполненного материей. Рассмотрение влияния распределения материи на ход часов в разных точках пространства — предмет ОТО.

После выполнения процедур пространственной и временной арифметизации, в принципе, каждая точка пространства-времени или событие может быть описана с помощью четвёрки чисел (x, y, z, t) – координат этой точки.

“Измельчая” основную единицу длины, мы в принципе можем получить арифметизацию пространственно-временных отношений с такой точностью, которая требуется в контексте решаемых задач. “Измельчение” единицы времени будет произведено автоматически в силу существования топологической связи $c = \frac{\Delta l}{\Delta t}$.

Замечание. Описанная процедура арифметизации не единственная. Но именно она завершается построением понятной декартовой системы координат для евклидова пространства с часами, синхронизированными во всех точках пространства или, другими словами, построением метрики для четырёхмерного псевдоевклидова пространства.

В этом разделе представлен способ арифметизации и метризации четырёхмерного пространственно-временного многообразия с помощью эталонного сигнала. В качестве основной единицы измерения выбрана скорость эталонного сигнала, которая равна по определению безразмерной единице.

Идея использования эталонного стандартного процесса возбуждения и распространения сигнала находится в полном соответствии с принятым *стандартом* Генеральной конференцией по мерам и весам. Свойства этого стандарта таковы, что он объединяет в себе меры длины, времени и скорости (света). В нашей системе единицы измерения длины, времени и скорости безразмерны и все равны единице. Однако мы *нигде не пользовались специфическими свойствами эталонного сигнала и не связывали его со световым сигналом*. Сигнал же, который мы использовали для арифметизации, измерения расстояний и синхронизации мог быть любым, а скорость его не имела значения. Важно было одно – чтобы во всех процедурах именно этот сигнал, как стандартный, и использовался.

Пространственно-временные измерения

Системы СИ и РСИ

При формальном описании процедуры метризации пространственно-временных отношений использовались произвольные единицы измерения длины и времени. Единственным требованием было выполнение соотношения

$$\text{ед. длины} = \text{ед. времени} \quad (1.2.10)$$

В этой системе единиц измерения (РСИ), как уже упоминалось, скорость распространения сигнала, с помощью которого арифметизировалось пространство-время тождественно равна 1. Тем не менее, необходимо всё же определить одну базовую единицу измерения – либо длины, либо времени. Выберем в качестве базовой единицы нашей новой системы единиц измерений традиционную секунду. В этом случае и *длина будет измеряться в секундах*, а эталоном единицы длины будет расстояние проходимое сигналом в течение секунды.

Однако единицей длины в системе СИ является *метр*. Каково же соотношение между новой единицей измерения длины и традиционной – *метром*? Связь между ними даётся очевидным соотношением: $1 \text{ сек.} = 2.99\ 792\ 458 * 10^8 \text{ м.}$

Таким образом, переход от системы РСИ к системе СИ осуществляется следующим образом: пусть (λ, τ) – длина и время, заданные в системе РСИ, а (l, t) – длина и время, заданные в системе СИ. Тогда,

$$t = \tau \text{ и } l = c \cdot \lambda \quad (1.2.11)$$

где $c = 2.99\ 792\ 458 * 10^8 \text{ м/сек.}$ – скорость света в вакууме.

Поскольку, в соответствии с соглашением Генеральной конференции по мерам и весам, $1 \text{ сек.} = 9\ 192\ 631\ 770$ колебаниям для заведомо определенного перехода $_{133}\text{Cs}$ длинам волн света, изначально всё же единица времени – безразмерная величина.

Наиболее важные процедуры измерений

Одним из важных обобщающих моментов предыдущего изложения является введение понятия точечного *события*. Точечным событием называется четвёрка чисел (x, y, z, t) или, другими словами,

точечное событие определяется координатами точки в четырёхмерном пространстве-времени. *В связи с этим основным принципом измерения пространственно-временных характеристик является измерение и сопоставление координат событий.* Все процедуры измерения линейками, все сопоставления показаний часов разноместных событий и тем более их комбинации должны быть оставлены только для “бытовых нужд”.

Измерение расстояний

Трудно ожидать, что прилетев, скажем, на Луну, мы обнаружим этикетку с её координатами x, y, z , полученными в результате процедуры арифметизации, и сможем вычислить расстояние от Земли до Луны по формуле:

$$l = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Говорить же о применении линеек в подобных процедурах, так же не приходится.

В подобных случаях для измерения расстояния между двумя точками необходимо воспользоваться той процедурой с отсылкой и приёмом сигналов, которая была описана при арифметизации пространства-времени. Необходимо просто послать сигнал из первой точки во вторую и дождаться отраженного сигнала. Тогда расстояние между двумя точками в системе РСИ будет равно половине времени затраченному на прохождение сигнала туда и обратно, а для получения результата в системе СИ, то есть в *метрах* необходимо умножить полученный результат на скорость распространения сигнала согласно (1.2.11), если сигнал световой.

В соответствии с сформулированным принципом измерений здесь сопоставляются координаты событий (x, y, z, t_1) и (x, y, z, t_2) , где x, y, z – координаты исходной точки, t_1 – момент отсылки сигнала, t_2 – момент прихода отражённого сигнала. Этот метод измерения расстояний является единственным самосогласованным с принятой процедурой арифметизации пространственно-временных отношений. В системе РСИ скорость распространения сигнала по определению равна 1. Поскольку координаты целевой точки отсутствуют, этот метод является и логически единственно возможным прямым измерением расстояния.

Синхронизация разноместных часов

Такая синхронизация может быть осуществлена опять-таки с помощью обмена сигналами между обеими точками. Рассмотрим процесс распространения сигналов между двумя точками.

Одновременным с моментом t в первой точке следует считать показание часов во второй точке, лежащее посередине отрезка временной оси между моментами отправления и обратного прибытия сигнала в эту точку.

Синхронизация же показаний двух разноместных часов осуществляется так же как это описано в процедуре арифметизации - в два этапа. Сначала мы определяем расстояние между двумя точками, как это описано в предыдущем пункте. В системе РСИ это расстояние будет в точности равно промежутку времени, требуемому для прохождения сигнала от первой точки до второй. Тогда сообщив наблюдателю время отправки второго сигнала и время прохождения сигнала, мы дадим ему возможность синхронизировать свои часы с часами первого наблюдателя.

Здесь сопоставляются координаты событий (x_1, y_1, z_1, t_1) , (x_2, y_2, z_2, t_2) и (x_1, y_1, z_1, t_3) . Здесь: x_1, y_1, z_1 , - координаты исходной точки, x_2, y_2, z_2 - координаты второй точки; t_1 - момент отправки сигнала из первой точки, t_2 - момент прибытия сигнала во вторую точку, t_3 - момент прихода отражённого сигнала в первую точку.

Пространственно-временные измерения в метризованном четырёхмерном пространстве-времени проводятся в декартовой системе координат с синхронизированными часами обычными средствами; скорость движения тела определяется также известным образом, как отношение пути пройденного телом ко времени, затраченному на время движения.

В одном случае у нас может возникнуть необходимость в представлении численного значения скорости света: для того, что бы перейти от безразмерных единиц измерения длины, времени и скорости к традиционным - метру, секунде и м/сек., то есть при переходе от системы единиц измерения, которую мы условно назвали РСИ, к системе СИ.

Резюме к главе 2

Концептуальное преодоление факторизации движения, восстановление его целостности позволяет по-новому взглянуть на пространственно-временные отношения. *Пространство и время в СТО необходимо становятся единым четырёхмерным многообразием - пространством-временем Минковского со своей геометрической атрибутикой.*

Признание же концептуальной первичности движения привело к необходимости признать первичность эталонов скорости перед эталонами длины и времени.

В связи с этим арифметизацию и метризацию четырёхмерного пространственно-временного многообразия необходимо производить с помощью эталонного сигнала. В качестве основной единицы измерения была выбрана скорость эталонного сигнала. Эта скорость в системе РСИ равна по определению безразмерной единице. Свойства этого стандарта таковы, что он объединяет в себе меры длины, времени и скорости.

Сигнал же, который мы использовали для арифметизации, измерения расстояний и синхронизации мог быть любым, а скорость его не имела значения. Важно было одно – чтобы во всех процедурах именно этот сигнал и использовался, как стандартный.

Факторизация движения на пространственную и временную составляющие сохраняет право на своё существование - просто необходимо расставить новые приоритеты в измерениях. А пространственные и временные отношения по отдельности необходимо рассматривать как проекции более общих отношений четырёхмерного пространственно-временного многообразия.

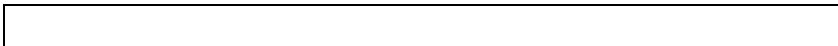
На протяжении изложения всей главы мы нигде не пользовались специфическими свойствами эталонного сигнала и не связывали его со световым сигналом.

Один раз у нас возникла необходимость в представлении численного значения скорости света. Но это было сделано лишь для того, что бы перейти от безразмерных единиц измерения длины, времени и скорости к традиционным – *метру, секунде и м/сек.*, то есть

60.

при переходе от системы единиц измерения, которую мы условно назвали РСИ, к системе СИ.

Однако при выводе формул преобразования координат, при переходе из одной инерциальной системы отсчёта в другую необходимо будет использовать свойство единственности, а значит и инвариантности максимально возможного допустимого значения скорости эталонного сигнала. Эмпирические данные наделяют этим свойством распространение светового сигнала.



Глава 3. Кинематика

Системы отсчёта. Физические законы. Ковариантность

Представив себе пространство с некоторой системой координат, в каждой точке которого размещены свои часы и, что все часы при этом синхронизированы, мы получим систему отсчёта⁵⁾. В таких системах отсчёта любое точечное физическое событие будет характеризоваться четвёркой пространственно-временных координат (t, x, y, z) .

Самое же простое представление о системе отсчёта - это представление о трёх перпендикулярных осях (пространственная система координат) с синхронизированными часами в каждой точке. Это - так называемая, *декартова* система отсчёта, удобная для описания движений и других физических явлений, связанных с трёхмерными пространственными отношениями, описываемыми *евклидовой метрикой*. В этих системах наиболее просто и наглядно представляются векторные соотношения трёхмерного пространства. Здесь расстояние между двумя точками с заданными координатами определяется с помощью *теоремы Пифагора*, которая представляет собой самый наглядный признак евклидовости трёхмерных пространственных отношений. Поскольку наше ближнее пространство локально евклидово, именно эта система отсчёта в дальнейшем чаще всего и будет использоваться.

Без пространственной системы координат и средств измерения “единого времени” при описании физических явлений никак не обойтись, а наличие этого инструментария должно обуславливаться в определении любой системы отсчёта. Однако, попробуем уточнить – что всё же мы будем понимать под системами отсчёта в общем случае и как системы отсчёта соотносятся с физическими законами.

⁵⁾ фраза построена в традиционной ньютоновской форме. В лейбницевой форме она прозвучала бы так: представим себе упорядоченное процедурой метризации множество разноместных синхронизированных часов...

62.

В каждой системе отсчёта, кроме пространственно-временных изменений, описываемых динамикой, мы наблюдаем и другие физические явления. Закономерности этих явлений формулируются в виде определённых законов и представляются в знаковых формах – в виде дифференциальных соотношений, законов сохранения, правил отбора, законов симметрий и т. д.

Неизменным атрибутом системы отсчёта является также и присутствие там наблюдателя, который, в конечном счете, и отображает физические явления в понятийной и знаковой формах для последующего практического использования. Метризацию пространственно-временных отношений также осуществлял некий неперсонифицированный наблюдатель. В этом смысле использование систем отсчёта привносит элемент активного присутствия человека.

В связи со сказанным возникает вопрос: вправе ли мы требовать от физических законов, сформулированных в одной системе отсчёта, однозначного и безусловного выполнения их в любых других системах отсчёта? Если вправе то, в каком виде мы должны их формулировать, в какой форме и для каких систем отсчёта?

Основой рационального описания физических явлений, описания - общего для различных систем отсчёта, является использование свойств *ковариантности* (соизменения) и *инвариантности* (неизменения). Первое свойство предполагает сохранение форм зависимостей при переходе от одной системы отсчёта к другой, второе – сохранение значений. Других форм рационального выражения постоянства просто не существует. Собственно, только на основе этих постоянств и могут описываться сценарии физических явлений при изменении условий наблюдения за ними. Требование выполнимости этих свойств связывают с соблюдением *принципа ковариантности*. Поэтому, если мы рассматриваем описание явлений в различных системах отсчёта, мы обязаны учитывать необходимость выполнения принципа ковариантности. Именно зависимости, удовлетворяющие принципу ковариантности, и будут выражать физические законы, то есть необходимые, существенные, устойчивые и повторяющиеся отношения между явлениями.

Совершенно ясно, что требование соблюдения принципа ковариантности при переходах из одной системы отсчёта в другую, то есть при преобразованиях координат, связано с необходимостью работать с *собственными* свойствами метризованного пространственно-временного многообразия. Это же обстоятельство должно обеспечить *целостность описания и восприятия физических явлений*, то есть “одинаковую видимость” из разных систем отсчёта.

Обобщающую силу принципа ковариантности мы увидим при формулировке закона Кулона в релятивистски-ковариантной форме. Эта обобщённая формулировка (**Будкер ГИ. Новосибирск. НГУ. 1967г.**) будет представлять ни много, ни мало, а все четыре уравнения Максвелла для электромагнитного поля.

Системы отсчёта, какими бы произвольными они не были, должны обеспечивать целостность восприятия физической реальности, возможность описания явлений с помощью физических законов. Физическими же законами мы должны называть те факты и их взаимосвязи, проявление которых не зависит от систем отсчёта, а формы знакового представления их — ковариантны. Неизменным же атрибутом системы отсчёта является также и присутствие там наблюдателя.

Инерциальные системы отсчёта. Принцип относительности

В динамике существует понятие *свободного движения*. Свободным движением называют движение тела при отсутствии на него воздействий со стороны. Это движение сохраняется (по определению). Утверждение о сохранении движения тела при отсутствии на него воздействий называется *обобщённым законом инерции*. Изменения же движения тела при воздействии на него внешних сил описываются *уравнениями динамики*.

Система отсчёта может покоиться (лабораторная система отсчёта) или двигаться относительно лабораторной системы (движущаяся система). В связи с этим возникают вопросы: как изменятся уравнения динамики при переходе из лабораторной системы отсчёта в движущуюся? Можно ли назвать уравнения динамики, описывающие изменение движения, “самодостаточными” законами движения? Будет ли справедлив закон инерции в движущейся системе отсчёта?

В связи с рассмотрением свободного движения в псевдоевклидовом пространстве (а пространственно-временные отношения реальных физических тел являются локально псевдоевклидовыми) можно выделить класс *инерциальных систем отсчёта*. Инерциальными системами отсчёта называют такие системы, в которых свободное движение происходит с постоянной по величине и направлению скоростью. Утверждение о сохранении движения тела с постоянной по величине и направлению скоростью относительно инерциальной системы отсчёта, при отсутствии на него внешних воздействий, называется *классическим законом инерции*⁶⁾. Очевидно, что, если существует хотя бы одна исходная инерциальная система отсчёта, то и любая другая, движущаяся относительно неё равномерно и прямолинейно, также будет инерциальной. Этот вывод непосредственно следует из общих свойств макроскопических

⁶⁾ В дальнейшем, в рамках СТО, мы будем иметь дело именно с классическим законом инерции, называя его просто законом инерции. С обобщённым же законом инерции обычно связывают движение по так называемым *геодезическим линиям* в псевдоримановом пространстве.

пространственно-временных отношений – непрерывности, однородности, изотропности и *инерциальной симметрии*⁷⁾. В этом случае мы можем себе представить существование бесконечного множества инерциальных систем отсчёта, движущихся друг относительно друга прямолинейно и равномерно. Во всех этих системах отсчёта пространственно-временные соотношения сохраняют свои базовые свойства непрерывности, однородности и изотропности.

Именно в инерциальных системах отсчёта выполняется классический закон инерции. Выполнимость этого закона в инерциальных системах отсчёта обеспечивается принципом инерциальной симметрии. *Однако физика идёт дальше, утверждая, что не только законы свободного движения, но и все физические законы должны выполняться в инерциальных системах. То есть инерциальные системы будут полностью эквивалентными по отношению к выполнению всех физических законов.* Это утверждение составляет содержание так называемого *принципа относительности* – одного из важнейших принципов физики, обобщающего принцип инерциальной симметрии.

Всё сказанное достаточно ясно свидетельствует об исключительности свойств инерциальных систем отсчёта. А эквивалентность инерциальных систем отсчёта по отношению к выполнимости физических законов показывает в то же время, что не существует “абсолютной” инерциальной системы отсчёта, которую можно было бы предпочесть другим инерциальным системам.

Инерциальную систему отсчёта необходимо представлять как идеальную систему отсчёта в псевдоевклидовом пространстве-времени; возможность же существования инерциальных систем отсчёта необходимо рассматривать как фундаментальное свойство симметрии “пустого пространства-времени”, именно как потенциальную возможность их существования.

7) Инерциальной симметрией мы называем свойство сохранять атрибуты непрерывности, однородности и изотропности пространственно-временных отношений при переходе из одной инерциальной системы отсчёта в другую инерциальную систему.

66.

Наконец, возникает такой вопрос: *при каких условиях уравнения динамики, представленные в виде дифференциальных соотношений или в других формах, можно будет назвать выражающими законы динамики?* Или в более общей постановке: *как реализуется принцип относительности при переходах из одних инерциальных систем в другие для зависимостей, претендующих на статус выражать физические законы?*

Ответ должен быть таким: если физические законы выражены в виде дифференциальных соотношений или других знаковых формах, то принцип ковариантности должен обеспечить неизменность формы этих соотношений при преобразованиях координат, соответствующих переходу из одной инерциальной системы в другую.

Таким образом, *принцип ковариантности приобретает статус координатного представления принципа относительности.*

Естественен вопрос: *существуют ли инерциальные системы отсчёта?* Реально такие системы могут существовать вдали от гравитационных полей или, например, в свободно падающем лифте, в свободно движущемся космическом корабле, но с разной степенью приближения.

Выделен класс систем отсчёта, который замечен и отмечен особой "инерциальной печатью". Согласно принципу относительности эти системы полностью эквивалентны по отношению к проявлению физических законов и их описанию. Ковариантная форма представления соотношений, выражающих физические законы, является математическим оформлением принципа относительности.

Важный момент общности: *класс инерциальных систем отсчёта гарантирует целостность восприятия физической реальности.*

Связь между инерциальными системами отсчёта. Преобразования координат

Рассмотрим, как решаются вопросы установления координатной связи событий между наблюдателями разных инерциальных систем отсчёта. Здесь в первую очередь будет идти речь о формулах преобразования координат событий четырёхмерного пространства-времени:

$$\begin{aligned}x &= f_1(x', y', z', t'), \\y &= f_2(x', y', z', t'), \\z &= f_3(x', y', z', t'), \\t &= f_4(x', y', z', t').\end{aligned}\tag{1.3.1}$$

В связи с этим рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. Наблюдатель лабораторной инерциальной системы S назначил встречу наблюдателю движущейся инерциальной системы отсчёта S' . Для этого он сообщил наблюдателю движущейся инерциальной системы S' место и время встречи, то есть передал свои координаты целевого точечного события x, y, z, t . В какую точку пространства-времени должен прибыть наблюдатель системы S' , чтобы встретиться с инициатором встречи — наблюдателем системы S ? Каковыми будут координаты назначенного события в системе отсчёта S' ?

Преобразования Лоренца (лоренцевская симметрия)

Здесь и далее при изложении релятивистской динамики мы будем использовать систему единиц РСИ.

Рассмотрим две инерциальные системы отсчёта — лабораторную систему S и движущуюся систему S' , в которых предварительно проведены независимые процедуры метризации с использованием идентичных стандартных процессов возбуждения и распространения сигналов и *синхронизация часов в начале координат*. В результате выполнения этих процедур, каждое событие, наблюдаемое из обеих систем отсчёта, сможет получить свою четвёрку координат из каждой системы. Пусть система S' движется с постоянной скоростью V относительно S вдоль оси X (рис. 1.1).

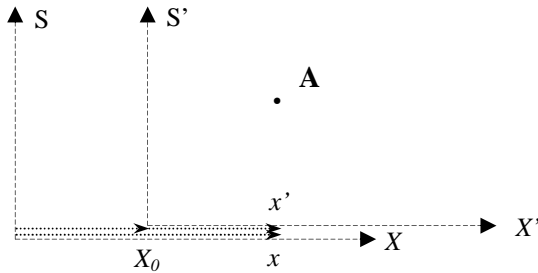


Рис.1. 1. Здесь: x – координата точки A в системе S , X_0 – координата начала системы координат S' в системе S , x' – координата точки A в системе S' .

Пусть по предварительному договору наблюдатели обеих систем отсчёта должны будут зафиксировать координаты двух точечных событий. Первое событие заключается в возбуждении наблюдателем лабораторной системы отсчёта процесса распространения сигнала, использовавшегося при метризации. Отсчёт пространственных и временных координат в данном эксперименте должен начинаться именно от этого события, то есть от точки и момента возбуждения сигнала. Координаты этого события принимаются в обеих системах отсчёта, равными нулевым значениям: $x' = y' = z' = t' = x = y = z = t = 0$. Это можно всегда сделать, произведя сдвиговые поправки к значениям координат, полученным во время проведения процедур изначальной метризации.

Таким образом, по условию, в момент времени $t = t' = 0$ был инициирован процесс распространения стандартного сигнала, того сигнала, который использовался обоими наблюдателями в процедурах метризации пространства-времени. Из двух рассматриваемых точечных событий это событие является первым. Второе точечное событие должно остановить процесс наблюдения в какой-либо удалённой точке пространства. Пусть это событие заключается в отражении сигнала, достигшего этой точки. Фиксируем пары координаты второго события в обеих системах отсчёта: x, t и x', t' .

Из базовых свойств пространственно-временных отношений – непрерывности, псевдоевклидовости, однородности, изотропности, инерциальной симметрии и принципа относительности, следует, что координатные преобразования (1.3.1) должны быть линейными и в общем виде могут быть записаны в виде (см., например, ^[20]):

$$\begin{aligned}x &= k(V)(x' + V t') \\y &= y' \\z &= z' \\t &= \mu(V)t' + \alpha(V) V x'\end{aligned}\tag{1.3.2}$$

По сути дела, при движении системы S' относительно S вдоль общего направления, совпадающего с направлениями x-осей обеих систем координат, преобразованию подвергаются лишь две координаты: x и t .

Для упрощения выкладок в последнем соотношении (1.3.2) введём обозначение $\alpha(V) = \mu(V)/\eta(V)$. Тогда первая и последняя формулы преобразования координат примут вид:

$$\begin{aligned}x &= k(V)(x' + V t) \\t &= \mu(V) \left(t' + \frac{V}{\eta(V)} x' \right)\end{aligned}\tag{1.3.3}$$

В точке отражения сигнала, при наступлении второго точечного события, с учётом определения скорости эталонного сигнала, в обеих системах отсчёта должны выполняться соотношения:

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0, \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 - t'^2 = 0\tag{1.3.4}$$

Поскольку $y = y'$ и $z = z'$, получаем:

$$x^2 - t^2 = x'^2 - t'^2 = 0\tag{1.3.5}$$

Подставляя (1.3.3) в (1.3.5), получаем:

$$k^2 \left(1 - \frac{V^2}{\eta(V)} \right) x'^2 - k^2 \eta(V) \left(1 - \frac{V^2}{\eta(V)} \right) t'^2 = x'^2 - t'^2\tag{1.3.6}$$

Из (3.6) следует:

$$k^2 \left(1 - \frac{V^2}{\eta(V)} \right) = 1, \quad \eta(V) = 1\tag{1.3.7}$$

или

$$k = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}}\tag{1.3.8}$$

Окончательно, искомые преобразования приобретают вид:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(прямые)} & \text{(обратные)} \\
 x = \frac{x' + V t'}{\sqrt{1 - V^2}} & x' = \frac{x - V t}{\sqrt{1 - V^2}} \\
 y = y' & y' = y \\
 z = z' & z' = z \\
 t = \frac{t' + V x'}{\sqrt{1 - V^2}} & t' = \frac{t - V x}{\sqrt{1 - V^2}}
 \end{array} \quad (1.3.9)$$

Преобразования (1.3.9) называются преобразованиями Лоренца.

Поставленная в начале раздела **Задача 1** решается с помощью обратных преобразований (1.3.9).

Интервал

Четырёхмерное пространственно-временное многообразие можно представлять как воображаемое четырёхмерное пространство, на осях которого откладываются три пространственные координаты и время. *Событие*, как уже упоминалось ранее, определяется в пространственно-временном многообразии местом, где оно произошло, и временем, когда оно произошло. Таким образом, событие можно будет изображать точкой в четырёхмерном пространстве. Эти точки называются *мировыми точками*. Всякой частице соответствует некоторая линия (*мировая линия*) в этом четырёхмерном пространстве. Точки этой линии определяют координаты частицы во все моменты времени. Равномерно и прямолинейно движущейся частице соответствует прямая мировая линия.

Если x_1, y_1, z_1, t_1 и x_2, y_2, z_2, t_2 – координаты каких-либо двух событий, то величина

$$s_{12} = [(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2]^{1/2} \quad (1.3.10)$$

называется *интервалом* между этими двумя событиями.

Если два события бесконечно близки друг другу, то для квадрата интервала ds^2 между ними приобретает вид:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (1.3.11)$$

Форма выражения (1.3.10) или (1.3.11) позволяет рассматривать интервал, с формальной математической точки зрения,

как расстояние между двумя точками в воображаемом четырехмерном пространстве. Имеется, однако, существенное отличие в правиле составления этого выражения по сравнению с правилом обычной геометрии: при образовании квадрата интервала квадраты разностей координат по пространственным осям и временной оси суммируются не с одинаковыми, а с различными знаками. Четырёхмерную геометрию, определяемую квадратичной формой (1.3.11) называют *псевдоевклидовой* в отличие от обычной геометрии. Эта геометрия была введена в связи с теорией относительности Г. Минковским.

Непосредственно из преобразований Лоренца (1.3.9) следует, что при переходе из одной инерциальной системы в другую интервал между двумя событиями не меняется, то есть *интервал является инвариантом преобразований Лоренца*. В этом случае можно говорить о преобразования Лоренца как о вращениях в четырёхмерном псевдоевклидовом пространстве-времени. Это вращение характеризуется гиперболическим тангенсом угла поворота $\text{th}\psi = V$. Особенностью же этих вращений является то, что они происходят в псевдоевклидовом пространстве. Это обстоятельство приводит к тому, что вместо тригонометрических функций (как в евклидовом пространстве) в формулах преобразования координат будут присутствовать гиперболические функции.

Преобразования Лоренца (1.3.9) делят множество пар событий (соответственно и интервалы для этих событий) на два непересекающихся класса: *времениподобные* и *пространственноподобные*. Ко *времениподобным* парам событий относятся те из них, для которых квадрат интервала положителен, а сам интервал - вещественен. К *пространственноподобным* относятся пары событий, не удовлетворяющие последнему условию положительности или вещественности. Существенным же обстоятельством здесь является то, что *времениподобные* события составляют класс событий, которые могут быть причинно-связанными, а свойство *времениподобности* (как и *пространственноподобности*) является инвариантом преобразований Лоренца. Важным следствием этого является вывод о том, что *причинная обусловленность событий является инвариантом преобразований Лоренца*.

Замечания к выводу преобразований (1.3.9)

Выполнение соотношений (1.3.4) и (1.3.5) обусловлено событиями, связанными распространением эталонного сигнала, скорость которого одинакова для обеих систем отсчёта. Однако учитывая, что скорость эталонного сигнала может быть произвольной, а интервал в силу преобразований Лоренца – величина инвариантная, вывод преобразований Лоренца сохраняет свою общность и для произвольных событий, не связанных распространяющимся эталонным сигналом.

Релятивистский “закон сложения скоростей”

Из прямых преобразований (1.3.9) получаем формулу для преобразования скорости тела при переходе из движущейся системы S' в лабораторную систему S :

$$v = \frac{v' + V}{1 + Vv'} \quad (1.3.12)$$

В системе единиц измерения СИ или CGSe эта формула приобретает вид:

$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{Vv'}{c^2}} \quad (1.3.13)$$

В этих формулах: v' – скорость движения тела относительно движущейся системы S' ; v – скорость того же тела, но относительно лабораторной системы S ; V – скорость движения подвижной системы S' относительно лабораторной S .

Важные выводы, следующие из релятивистского “закон сложения скоростей”

1. Если в какой-либо инерциальной системе отсчёта скорость тела не превышает скорости эталонного сигнала $v' < 1$, то и в любой другой инерциальной системе сохранится неравенство $v < 1$. То есть при переходе из одной системы отсчёта в другую *скорость тела не может превзойти стандартной скорости эталонного сигнала.*
2. Если в какой-либо инерциальной системе отсчёта скорость тела превышает скорость эталонного сигнала $v' > 1$, то и в любой другой инерциальной системе сохранится неравенство $v > 1$. То есть при переходе из одной системы отсчёта в другую *скорость тела не может стать меньше величины стандартной скорости эталонного*

сигнала. В литературе тела, обладающие этим свойством, называют *тахיוнами*. Возникновение же тахионов означает необходимость перекалибровать метрику пространственно-временного многообразия с использованием процесса распространения тахионов, а в качестве эталонной скорости выбрать скорость распространения вновь найденного тахиона.

Замечания.

- По нашему мнению не стоит делать далеко идущие выводы о невозможности превзойти величину стандартной скорости эталонного сигнала. Ситуация напоминает ту, которая возникает при намерении измерить объект, длина которого больше метра, с помощью эталона длиной метр. Здесь, просто-напросто, необходимо увеличить эталоны.
- Возникновение тахионов также означает необходимость перекалибровать метрику пространственно-временного многообразия с использованием процесса распространения тахионов, а в качестве эталонной скорости выбрать скорость распространения вновь найденного тахиона.

Асимптотика

При $V \ll 1$ формулы (1.3.9), как и ожидалось, принимают вид галилеевых преобразований:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(прямые)} & \text{(обратные)} \\
 x = x' + V t' & x' = x - V t \\
 y = y' & y' = y \\
 z = z' & z' = z \\
 t = t' & t' = t
 \end{array} \tag{1.3.14}$$

Формулы преобразования скоростей (1.3.12), (1.3.13) принимают форму “классического закона сложения скоростей”:

$$v = v' + V \tag{1.3.15}$$

Преобразования Галилея (*галилеевская симметрия*)

Для полноты изложения приведём вывод классических преобразований Галилея и “закона сложения скоростей”, вытекающего из этих преобразований. Проанализируем эти выводы на предмет возникновения противоречий при использовании, казалось бы, самоочевидных посылок.

Выясним, как связаны координаты точки **A**, представленные в двух инерциальных системах отсчёта – неподвижной *S* и движущейся *S'* с постоянной скоростью \vec{V} относительно системы *S* вдоль направления радиус-вектора \vec{R} . Из правила сложения векторов следует (рис. 1.2):

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}' \tag{1.3.16}$$

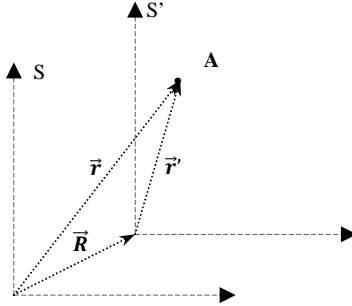


Рис.1.2. Инерциальная система S' движется относительно покоящейся системы S со скоростью $\vec{V} = d\vec{R}/dt$; \vec{r} и \vec{r}' – радиус-векторы движущейся точки A

Здесь \vec{r} – вектор, описывающий положение точки A в системе координат S , а \vec{r}' – вектор, описывающий её же положение, но в системе S' . Точка A движется в произвольном направлении. Система координат S' движется относительно S с постоянной скоростью в направлении вектора \vec{R} . Таким образом, положение точки A изменяется как относительно S , так и относительно S' . Кроме того, изменяется и положение системы S' относительно системы S .

Учитывая, что $\vec{R} = \vec{V} t$, получаем

$$\vec{r} = \vec{V} t + \vec{r}' \quad (1.3.17)$$

Время в ньютоновой классической механике – абсолютно и неизменяемое. Можно представить себе ситуацию, когда из одной точки “рассылаются” совершенно одинаковые часы, синхронизированные и показывающие одно и то же время. Эта операция – не совсем корректная замена физической процедуре синхронизации, описанной в предыдущей главе. Но в классической физике она допустима.

Таким образом, часы лабораторной и движущейся системы отсчёта показывают одно и то же время всегда и везде. Поэтому можно записать:

$$t = t' \quad (1.3.18)$$

Учитывая (1.3.18), окончательно запишем

$$\vec{r} = \vec{V} t' + \vec{r}', \quad t = t' \quad (1.3.19)$$

При движении системы S' относительно S вдоль оси X со скоростью V соотношения (1.3.19) принимают вид:

$$\begin{aligned} x &= x' + V t' \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= t' \end{aligned} \quad (1.3.20)$$

Соотношения (1.3.19), (1.3.20) называются *преобразованиями Галилея*.

Замечания к выводу преобразований (1.3.19), (1.3.20)

В выводе преобразований Галилея присутствуют два момента, на которые необходимо обратить внимание:

- a) в исходной формуле (1.3.16) складываются вектора, относящиеся не просто к разным системам координат, а, более того, к разным системам отсчёта. Здесь мы должны просто сказать, что нарушается принцип ковариантности: складываются величины без приведения их к одной системе отсчёта, то есть складываются величины разного “качества” и разной принадлежности;
- b) в связи с выполнением процедуры метризации пространства-времени наблюдателем движущейся системы S' , истинность соотношения $t = t'$ должна вызывать сомнение у наблюдателя неподвижной системы. Действительно, стандартный сигнал при выполнении процедуры метризации в S' по мнению наблюдателя системы S будет то догонять зеркало очередного наблюдателя, то двигаться навстречу к зеркалу исходного наблюдателя.

Классический “закон сложения скоростей”

Выражение – “сложение скоростей”, подразумевает некоторую условность. Ведь, скорость – это не аддитивная характеристика как, например, масса, энергия, импульс и складывать скорости – просто нет такой необходимости. Необходимость же в условном сложении скоростей возникает в случае, если мы пытаемся выяснить величину изменения скорости движения какого-либо тела *при переходе из неподвижной системы в движущуюся относительно первой*. Здесь уже весь опыт говорит, о том, что “быстрота” движения воспринимается по-разному. Формульное и численное представление изменения этой “быстроты” и связывают с законом сложения скоростей. Как же получается классический закон сложения скоростей и *что, собственно, он утверждает?*

Для ответа на эти вопросы обратимся снова к рис. 1.2 и рассмотрим движение точки A относительно двух инерциальных систем отсчёта – неподвижной S и движущейся S' с постоянной скоростью \vec{V} относительно S -системы вдоль направления радиус-вектора \vec{R} . Нас интересуют скорости точки A относительно обеих систем и как они связаны между собой.

Скоростью по определению называется изменение положения, соотнесённое ко времени пребывания в изменении, измеренному в данной системе отсчёта. Поэтому:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt}, \quad \vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'}$$

Дифференцируя соотношение (1.3.16) по t , получаем

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt'} \frac{dt'}{dt} \quad (1.3.21)$$

Если $dt = dt'$, то из (1.3.20) следует

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}' \quad (1.3.22)$$

76.

Здесь \vec{v} и \vec{v}' - скорости движения точки **A** относительно систем **S** и **S'**, соответственно, а \vec{V} – скорость движения системы **S'** относительно **S**.

Дифференциальное соотношение $dt'/dt = 1$ означает, что времена t и t' могут отличаться только постоянным слагаемым. При синхронизации часов в системах отсчёта **S** и **S'** в момент совпадения начал координат эта константа должна обратиться в нуль и равенство примет вид:

$$t = t' \quad (1.3.23)$$

Соотношение (1.3.22) и представляет собой классический закон сложения скоростей.

Замечание к выводу ((1.3.22))

Предполагается, что времена dt и dt' пребывания в движении точки **A** при изменении её положения на $d\vec{r}$ и $d\vec{r}'$ одинаковы относительно систем **S** и **S'**. А так ли это? Сохраняется ли одновременность событий при метризации пространственно-временных отношений с помощью сигнала, имеющего конечную скорость распространения? Известный пример показывает, что это не так. Представим себе движущийся вагон, по обоим концам которого расположены двери. Двери должны открываться, когда до них дойдет сигнал, инициированный в середине вагона. Не вызывает сомнения, что двери с точки зрения наблюдателя, находящегося в вагоне, откроются одновременно. Однако, для наблюдателя, находящегося на неподвижной платформе сначала откроется задняя дверь (сигнал движется навстречу двери), а затем – передняя (сигнал “догоняет” дверь).

Центральным моментом в выводе преобразований Лоренца (1.3.9) является использование соотношения (1.3.5). Это соотношение фиксирует равенство (инвариантность) скоростей и единицы измерения по определению эталонного сигнала для инерциальных систем отсчёта. Основанием для такого определения является принцип относительности для инерциальных систем отсчёта, который утверждает “одинаковость” как процессов инициирования сигналов, так и их распространения в этих системах.

При выводе же преобразований Галилея неявно подразумевается, что скорость распространения тестового сигнала, используемого для арифметизации и метризации пространственно-временных отношений, является бесконечно большой. Только при этом условии можно считать корректными соотношения (1.3.19) и равенство $t = t'$. А эти соотношения являются ни чем иным, как результатом факторизации пространственно-временных отношений и соответствующей абсолютизацией единиц измерения длины и времени. Но именно факторизация пространственно-временных отношений и является первопричиной возникающих парадоксов и противоречий ньютоновой или галилеевой механики.

“Парадокс близнецов”

Постановка задачи. Космический корабль (система S') отправляется в длительное путешествие к планете A и обратно. Земля находится в начале координат системы S . За ходом этого путешествия наблюдают два брата-близнеца – один из системы S , другой из системы S' . Возраст братьев в начале путешествия одинаков. *Останутся ли они "одногодками" после завершения путешествия?*

Отметим, что мы ставим вопрос конкретно о возможности возникновения расхождений в оценке их *возрастов* в результате предпринятого путешествия.

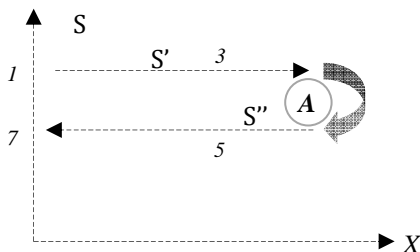


Рис. 3

Необходимо сразу отметить, что средствами СТО эту задачу напрямую не разрешить, поскольку в движущейся системе отсчёта три раза нарушается свойство инерциальности и применение преобразований Лоренца становится неправомерным. Поэтому полное решение задачи оказывается за пределами дисциплины СТО. Но в этом случае можно говорить лишь о неполноте возможного решения, а говорить о противоречиях теории, в связи с решениями этой задачи, по крайней мере, некорректно. Мы рассмотрим модель, которая сможет прояснить ситуацию в рамках СТО, но не разрешить её “до числа”. Многие авторы связывают возможность решения задачи, в рамках ОТО или, вообще говоря, обобщённой метрической теории при описании неинерциального движения второго путешественника от начала и до конца.

Однако, как мы увидим, и эти рамки не снимают в полной мере возникающей неопределённости и не дают полного ответа на вопрос, поставленный в задаче. Для снятия же неопределённости нам потребуются дополнительные соображения о свойствах

78.

преобразований Лоренца и параметра, называемого *собственным временем* системы, подсистемы, физического тела - точечного представителя более общего *эволюционного времени*.

Обозначим ключевые моменты путешествия - периоды и события. Всё путешествие представляется следующими периодами: начало путешествия (1), разгон (2), длительное движение с постоянной скоростью (3), поворот (4), длительное движение в обратном направлении (5), торможение (6), конец путешествия (7).

В самом начале путешествия фиксируются положения и моменты времени обеих систем. Затем идёт период ускорения, начинающийся с момента запуска ракетных двигателей. В конце этого периода скорость корабля достигает требуемой величины V . Равномерное движение с этой скоростью V продолжается во время третьего, более длительного этапа. На четвёртом этапе вблизи далёкой планеты A вновь включаются ракетные двигатели с тем, чтобы изменить направление движения корабля на обратное к Земле. За этим следует очередной этап длительного равномерного движения со скоростью V , теперь по направлению к Земле. На шестом этапе ракетные двигатели включаются вновь, что бы затормозить и остановить ракету для возвращения на Землю. Последний этап завершается фиксацией и сравнением показаний часов обоих путешественников.

В нашей модели неинерциальные участки движения - разгон (2) и торможение (6), мы заменим одномоментными событиями - синхронизацией часов неподвижного и движущегося наблюдателей (конец периода 2) и снятием показаний с часов движущегося наблюдателя (начало периода 6). Ведением третьей инерциальной системы S'' , движущейся по направлению к системе S (Земле), дополнительной синхронизацией и “сшивкой” разорванного процесса движения с помощью этой вновь введённой системы, мы заменим этап поворота системы S' .

Будем считать, что система S' в начале путешествия приближается к системе S вдоль оси X с постоянной скоростью, то есть удовлетворяет свойству инерциальности. Оси X и X' совпадают. В момент, когда начала координат систем совпадут, наблюдатели обеих систем одномоментно устанавливают нулевые значения показаний часов, то есть производят синхронизацию своих часов.

Такая замена позволит нам не рассматривать этап начального ускорения движения системы S' .

При сближении с планетой A не возникнет необходимости в торможении системы S' , поскольку к этой же планете навстречу S' движется новая инерциальная система S'' . Начальные условия для системы S'' выбраны таким образом, чтобы встреча систем S' и S'' произошла в точке нахождения планеты A . В момент встречи S' и S'' производится синхронизация часов, расположенных в началах систем координат: наблюдатель системы S' “сбрасывает” показания своих часов наблюдателю системы S'' . Эта операция позволит “сшить” прошлую историю движения системы S' с предстоящей историей системы S'' .

После очередной синхронизации часов система S'' продолжает своё инерциальное движение по направлению к системе S , сохраняя факт первой и изначальной синхронизации S и S' .

При достижении системой S'' системы S (Земли) теперь уже наблюдатель S'' “сбрасывает” показания своих часов наблюдателю системы S . Эта операция не требует торможения и остановки системы S'' , то есть инерциальность системы S'' не нарушается.

На этом “эксперимент” заканчивается. Его результаты представлены в таблице 3.1.

Первая строка таблицы фиксирует факт синхронизации показаний часов в системах S и S' на этапе 1.

Вторая строка фиксирует событие достижения системой S' планеты A . Исходными данными являются координаты этого события в системе S . По формулам преобразования Лоренца (1.3.9) определяются координаты этого же события и в системе S' .

Третья строка представляет результаты “сшивки” историй S' и S'' . Задача, которую необходимо решить здесь – связать координаты системы S и новой системы S'' . Возникающая здесь особенность заключается в том, что стандартные преобразования (1.3.9) получены при условии синхронизации неподвижной и движущейся систем в тот момент, когда они находились в одной точке пространства. Однако в этот же момент времени система S'' находилась совершенно в другом месте и, кроме того, двигалась в обратном направлении. Разрешение этого момента возможно при определении начальных координатных

80.

данных для системы S'' в нулевой момент времени по часам S и S' . Для этого представим преобразования Лоренца в виде:

$$x'' = \frac{x + Vt}{\sqrt{1-V^2}} + A; \quad t'' = \frac{t + Vx}{\sqrt{1-V^2}} + B \quad (1.3.24)$$

Таблица 3.1

№ п/п	Событие	Координаты	
		Система S	Система S'
1	1(начало)	$x_1 = 0; t_1 = 0$	$x'_1 = 0; t'_1 = 0$
2	3(конец)	$x_3 = l; t_3 = T$	$x'_3 = 0; t'_3 = T\sqrt{1-V^2}; T = l/V$
3	“сшивки”	$x_5 = l; t_5 = T$	Система S'' $x''_5 = 0; t''_5 = T\sqrt{1-V^2}$
4		Система S	Система S''
5	5(начало)	$x_5 = l; t_5 = T$	$x''_5 = 0; t''_5 = T\sqrt{1-V^2}$
6	7	$x_7 = 0; t_7 = 2T$	$x''_7 = 0; t''_7 = 2T\sqrt{1-V^2}$

Здесь изменены знаки перед скоростью движения системы V , поскольку направление движения системы S'' происходит в противоположном направлении; A и B представляют координаты начала эксперимента в системе S'' . Выражения для A и B получаются как результат подстановки значений строки 3 таблицы 3.1 в формулы (1.3.24) и решения полученных уравнений. В результате несложных вычислений получаем:

$$A = -\frac{2VT}{\sqrt{1-V^2}}; \quad B = -\frac{2TV^2}{\sqrt{1-V^2}} \quad (1.3.25)$$

Строка 5 фиксирует начальные данные для системы S'' , продолжающей своё инерциальное движение по направлению к системе S (Земле). Связь координат системы S и S'' описывается преобразованием (1.3.24) совместно с (1.3.25).

Строка 6 фиксирует прибытие системы S'' в точку начала путешествия. Подставляя значения координат этого события в системе S , с помощью (1.3.24) и (1.3.25) получаем временную координату этого события в системе S'' :

$$t''_7 = 2T\sqrt{1-V^2} \quad (1.3.26)$$

Выражение (1.3.26) оценивает время, затраченное на полный “облёт” планеты A из исходной общей точки систем S и S' по часам путешественника. При выполнении описанной технологии

"эксперимента" это время должны показать часы наблюдателя системы S'' при встрече.

Таково одно из стандартных решений задачи о близнецах, которое считается одним из самых корректных в рамках СТО. Однако утверждение о корректности вызывает вполне обоснованные сомнения.

Из преобразований Лоренца несложно получить такой результат: *отставать всегда будут те часы, которые сравниваются с парой или более других — разноместных, но находящихся в одной системе отсчёта*⁸⁾. Дело в том, что сопоставление с разноместными часами требует движения тех часов, которые существуют в одном экземпляре и находятся в одном месте своей системы отсчёта. Время (t) системы S и время (t') движущейся системы S' , связанные согласно преобразованиям Лоренца, существенно отличаются. В первом случае мы будем говорить о *динамическом* времени, во втором об *эволюционном*. Динамическое время для своего определения требует синхронизации всех разноместных точечных часов (по крайней мере, вдоль траектории движения в точках сравнения показаний), а для определения эволюционного времени этой процедуры не требуется. Необходимость различия динамического и эволюционного времён становится очевидной.

Часы, находящиеся в одной точке своей системы отсчёта, показывают на самом деле точечное эволюционное время (t'), которое мы будем называть *собственным* временем. Часы же наблюдателя, фиксирующие траекторию движения в заданной системе отсчёта выступают как фактор (t), упорядочивающий положение движущейся точки в пространстве. Оно должно быть единым (синхронизированным) для всей системы отсчёта S . Это время будет называться *координатным*.

⁸⁾ Это обстоятельство, казалось бы, позволяет надеяться на разрешение парадокса близнецов. Например, на участке 3 (см. рис. 3) в единственном экземпляре предстают часы космонавта, которые сравниваются с парой часов системы отсчёта S' . Согласно предыдущему утверждению, именно они и должны отставать относительно обеих систем отсчёта, то есть космонавт и является реальным претендентом на "омоложение". Однако, здесь необходимо отметить, что часы космонавта при рассмотрении результатов сравнения на самом деле будут сравниваться с несинхронизированными часами системы S , поскольку синхронизация часов этой системы будет нарушена при переходе в систему S'

Считая часы точечными, мы приходим к описанию эволюционного и динамического времён в единой геометрической интерпретации, в так называемой точечной метрической классической топологии (*ТМК-топологии*). При этом собственное время выступает, как точечное представление эволюционного времени.

Рассматривая ситуацию в системах отсчёта, связанных с космонавтом и с землянином, можно заметить их симметричное отношение к процессу движения и наблюдения. Каждый из них будет утверждать, что при сравнении показаний всегда будут отставать часы именно его партнёра. Здесь мы должны отметить очевидный факт проявления *концептуальной симметрии СТО*.

Решение вопроса о том, чьи часы реально будут отставать (кто окажется моложе) часто связывают с проявлением несимметрии и необходимости привлечения методов расчёта ОТО: дескать, система отсчёта, связанная с космонавтом испытывает реальные ускорения, поэтому космонавт и зафиксирует фактическое отставание своих часов. Но здесь, по существу, предпринимается попытка заменить концептуальную симметрию СТО решением на основе проблемной несимметрии условия задачи. Однако, как мы увидим далее, рассмотрение задачи в рамках ОТО возвращают концептуальную симметрию уже в рамках теории относительности (и СТО, и ОТО). Поэтому становится очевидным, что проблемная несимметрия должна быть преодолена в рамках дальнейшего обобщения понятия времени для метрических теорий.

Тем не менее, часто в разрешении "парадокса близнецов" вводят несимметрию, как дополнительное условие к задаче и фиксируют (1.3.26) как окончательный результат решения. Это вызывает серьёзные возражения, поскольку по сути, проблемная несимметрия в противовес концептуальной симметрии выставляется как аргумент против самой теории СТО, что приводит к извращённой трактовке выводов самой теории.

Таким образом, представив одно из самых корректных решений, мы должны засвидетельствовать факт: *средствами СТО "парадокс близнецов" напрямую не разрешается*. Возникновение же проблемной несимметрии необходимо разрешать расширением рамок теории и продолжением анализа задачи, но никак не включением её, как аргумента получения конечного решения.

Развитие релятивистской (лейбницево́й) концепции времени

Ньютонова концепция пространственно-временных отношений предполагает существование абсолютного и единого времени для всех систем отсчёта. После однократной и тотальной синхронизации часов, во всех системах отсчёта нарушение синхронизации может быть вызвано только механическим вмешательством в механизмы часов. Однако такие факторы, как и любое искусственное вмешательство, мы не рассматриваем. В этом случае для любой пары систем отсчёта всегда будут выполняться условия: $t = t'$; $dt = dt'$. Первое из этих соотношений означает одинаковый ход часов во всех системах отсчёта, второе – инвариантность промежутков времени между двумя событиями по отношению ко всем системам отсчёта.

Очевидно, что при таких условиях "парадокса близнецов" и ему подобных возникнуть не может. А часы вернувшегося из путешествия космонавта, будут показывать ту же дату и время, которые покажут и часы его земного брата-близнеца.

После проведения синхронизации во всех системах отсчёта любые движущиеся часы при встрече с любыми неподвижными или другими движущимися часами при сравнении всегда будут показывать одинаковое время. *В ньютоновой концепции время играет роль всеобщего упорядочивающего фактора*, что позволяет сравнивать временные отношения единым образом – везде и всегда.

При переходе к временным отношениям, описываемым *специальной теорией относительности* последнее утверждение теряет силу. Встаёт вопрос: что в этом случае называть “настоящим временем”?

Будем, как и прежде, обозначать через S лабораторную инерциальную систему отсчёта (неподвижную), а через S' – движущуюся относительно S инерциальную систему. Синхронизация часов в обеих системах отсчёта происходит в два этапа. Первый этап – общий: установка начала отсчёта времени для обеих систем отсчёта в момент совпадения их начал координат: $x = y = z = t = x' = y' = z' = t' = 0$. Второй этап выполняется в каждой системе отсчёта отдельно и

84.

независимо друг от друга: установка всех часов каждой из систем в соответствии с заданными начальными нулевыми моментами.

После выполнения процедур синхронизации всех часов в лабораторной и движущейся системах отсчёта в каждой из них будет существовать своя независимая пространственно-временная “метрологическая служба”, задающая каждому событию координату времени. Связь между этими “службами”, заданная начальной синхронизацией, осуществляется с помощью преобразований Лоренца. В каждой же системе отсчёта часы будут показывать единое время но, разумеется, только в рамках своей системы.

Связь между “метрологическими службами” систем отсчёта устанавливается следующим образом: пусть в лабораторной системе отсчёта S заданы координаты какого-либо события: t, x, y, z . Тогда координаты *этого же события* в движущейся системе отсчёта S' должны определяться согласно преобразованиям Лоренца (1.3.9). Преобразования Лоренца не сохраняют инвариантности интервалов времени, синхронности событий при переходе из одной инерциальной системы отсчёта в другую. Поэтому время лишаются статуса всеобщего и универсального упорядочивающего фактора, с помощью которого можно было упорядочивать последовательности событий в их становлении безотносительно систем отсчёта.

Таким образом, в специальной теории относительности *статус универсального упорядочивающего фактора за временем сохраняется только в пределах каждой отдельной инерциальной системы отсчёта*. Возможных же “служб времени” будет ровно столько, сколько и всех инерциальных систем отсчёта, а их – бесконечно много. Согласно формулам преобразований Лоренца (1.3.9), при переходе из одной системы отсчёта в другую может меняться и пространственная, и временная упорядоченность событий.

Рассмотрим подробнее фрагмент путешествия космонавта от Земли до планеты A . Мы хотим узнать – какое время займёт это путешествие? Будем рассматривать путешествие из произвольной инерциальной системе отсчёта Σ' , двигающейся вдоль оси X со скоростью U .

Зафиксируем координаты двух событий в системе отсчёта S : старт с Земли и достижение планеты A . Обозначим координаты первого события через (t_1, x_1) , а координаты второго события через

$(t_2 = t_1 + T, x_2 = x_1 + L)$. Здесь T – время, затраченное путешественником для достижения планеты; L – расстояние до планеты. Обе величины T и L заданы в системе отсчёта S ; очевидно, что $L/T = V$, где V – скорость космического корабля, заданная опять-таки в системе отсчёта S . Координаты этих же событий в системе Σ' обозначим через (t'_1, x'_1) и (t'_2, x'_2) , соответственно.

Для установления связи между координатами событий, измеренными в неподвижной Σ и движущейся Σ' системах отсчёта, воспользуемся обратными преобразованиями Лоренца (1.3.9). Для событий старта и достижения планеты космическим кораблём относительно системы отсчёта Σ' в результате получаем:

$$\begin{aligned} x'_1 &= \frac{x_1 - Ut_1}{\sqrt{1 - U^2}}, & t'_1 &= \frac{t_1 - Ux_1}{\sqrt{1 - U^2}}, \\ x'_2 &= x'_1 + \frac{V'}{1 + UV'} T \sqrt{1 - U^2}, & t'_2 &= t'_1 + T \frac{1 - UV}{\sqrt{1 - U^2}} \end{aligned} \quad (1.3.27)$$

Выразив скорость корабля V относительно неподвижной системе отсчёта S через скорость корабля V' относительно системы Σ' с помощью (1.3.12), окончательно получаем координаты второго события (достижения планеты):

$$x'_2 = x'_1 + V'T \frac{\sqrt{1 - U^2}}{1 + UV'}, \quad t'_2 = t'_1 + T \frac{\sqrt{1 - U^2}}{1 + UV'} \quad (1.3.28)$$

Тогда для времени полёта космонавта $T' = t'_2 - t'_1$ по часам системы Σ' получаем:

$$T' = T \frac{\sqrt{1 - U^2}}{1 + V'U} \quad (1.3.29)$$

Рассмотрим два случая:

- а) в качестве инерциальной система Σ' выберем неподвижную лабораторную систему, связанную с Землёй. В этом случае имеем: $U = 0, V' = V$, а $T' = T$, что и было ожидаемо по условию;
- б) в качестве инерциальной система Σ' выберем систему отсчёта, связанную с космическим кораблём. Тогда, очевидно: $V = U, V' = 0$, а $T' = T\sqrt{1 - U^2}$.

В произвольно движущейся же инерциальной системе отсчёта Σ' время движения корабля даётся выражением (1.3.29). На вопрос: *сколько времени займёт путешествие от Земли до планеты А* – мы

86.

получим бесконечное множество ответов, в зависимости от того, из какой системы отсчёта, из их бесконечного числа, нам ответят. Так, что же такое время полёта? Ведь, все возможные времена этого полёта, получаемые из разных систем отсчёта, можно связать с разными изменениями возраста космонавта, а его брат землянин тогда мог бы получить возможность через посредников в разных системах отсчёта беседовать со своим братом в его разных ипостасях - от пионера до пенсионера. Конечно, строгое рассмотрение этого момента задачи лишит его надежд на возможность осуществления подобных бесед, но это отдельный вопрос и хорошее упражнение на тему преобразований Лоренца.

Введём важное понятие *собственной системы отсчёта*. Собственной системой отсчета для движущегося тела будем называть такую систему отсчёта, в которой это тело находится в состоянии покоя, а введённое ранее собственное время – это время (τ), измеряемое по часам этой системы отсчёта. При разделении упорядочивающих временных факторов на динамические и эволюционные, здесь, очевидно, мы будем иметь дело с эволюционным временем, поскольку в собственной системе отсчёта точечное тело не движется и отсутствует необходимость динамического упорядочивания его положения. Таким образом, *точечное эволюционное время здесь конкретизируется в понятии собственного времени или, другими словами, собственное время получает статус эволюционного*.

Пусть S – лабораторная система отсчёта, а S' – собственная инерциальная система отсчёта для тела, движущегося с постоянной скоростью V вдоль оси X . Тогда из инвариантности интервала и определения собственного времени τ получаем:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 = dt'^2 - dx'^2 = dt'^2 = d\tau^2$$

Здесь для движущихся часов $dx' = 0$. Из этого же соотношения следует, что квадрат дифференциала величины собственного времени $d\tau^2$ равен элементу длины мировой линии ds^2 . Имеем:

$$d\tau^2 = ds^2 = dt^2 - dx^2 \text{ или } d\tau = ds = \sqrt{1 - V^2} dt \quad (1.3.30)$$

Тогда,

$$\tau = \int \underset{\substack{\text{по} \\ \text{мировой} \\ \text{линии}}}{\sqrt{1 - V^2}} dt \quad (1.3.31)$$

Здесь интеграл берётся по интервалу времени движения в лабораторной системе отсчёта или, что то же самое, для данной задачи, по отрезку мировой линии, описывающей движение между двумя точками – началом и концом движения.

В соответствии со сказанным выше, соотношение (1.3.31) определяет по сути связь координатного временем t лабораторной системы отсчёта с эволюционным временем τ точечной системы. Поскольку скорость системы S' постоянна ($V = \text{const}$), из этого же соотношения следует, что для движущейся инерциальной системы отсчёта можно ввести своё единое координатное время (t'), не зависящее от координат точки в системе S' , синхронизированное с собственным временем τ , то есть с помощью собственного времени можно синхронизировать все часы этой системы.

Распространим понятие собственного времени для случая псевдориманова пространства-времени. Пусть, по-прежнему, S – лабораторная система отсчёта (для определённости - Земля) с метрикой g_{ik} , а S' – произвольно движущаяся система отсчёта (космический корабль) относительно лабораторной с метрикой g'_{ik} , в которой и находятся часы. Для обозначения координат перейдём к индексной нотации: $(t, x, y, z) \rightarrow (x^0, x^1, x^2, x^3)$. Здесь x^0 и x'^0 представляют собой координатные времена лабораторной и движущейся систем отсчёта.

Согласно определению собственного времени ($d\tau = ds$, $c = 1$), как длины отрезка мировой линии между двумя событиями, в силу инвариантности интервала можно записать:

$$d\tau^2 = ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = g'_{ik} dx'^i dx'^k = g'_{00} dt'^2 \quad (1.3.32)$$

В последней части равенства учтено, что два события, между которыми измеряется интервал времени, происходят в одном месте системы S' (в космическом корабле). Имеем:

$$d\tau^2 = ds^2 = g'_{00} dt'^2 \quad \text{или} \quad d\tau = ds = \sqrt{g'_{00}} dt' \quad (1.3.33)$$

Из второго выражения (1.3.33) следует, что *собственное время τ в системе отсчёта S' уже не является общим упорядочивающим фактором для всей системы отсчёта* и будет уже зависеть от координат расположения часов, поскольку g'_{00} является, вообще говоря, функцией всех координат (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) .

Ясно, что в этом случае *координатный* t' (*динамический*) и *собственный* τ *временные факторы будут различаться, а возможность их синхронизации становится проблемной*, в отличие от предыдущего случая (1.3.31).

Уже в специальной теории относительности “течение истинного времени” различно для движущихся друг относительно друга часов. В обобщённой же метрической теории “истинное время течёт” различным образом и в разных точках пространства в одной и той же системе отсчёта. Это значит, что интервал собственного времени между двумя событиями, происходящими в одной точке пространства, и интервал времени между одновременными с ними событиями в другой точке пространства, вообще говоря, отличны друг от друга.

Для того, чтобы получить возможность измерять собственное время движущегося объекта непосредственно в лабораторной системе, произведём замену переменных в (1.3.33) согласно равенству:

$$\sqrt{g'_{00}} dt' = \sqrt{g'_{00}} \frac{dt'}{dt} dt \quad (1.3.34)$$

Тогда

$$\tau = \int_{\substack{\text{по} \\ \text{мировой} \\ \text{линии}}} \sqrt{g'_{00}} \frac{dt'}{dt} dt \quad (1.3.35)$$

Для продолжения решения задачи о близнецах предположим, что метрика пространства-времени псевдоевклидова, а система отсчёта S' , связанная с космическим кораблём, движется с произвольной скоростью $V(t)$ вдоль оси X .

Применим преобразования Лоренца

$$S \Rightarrow S' \quad (1.3.36)$$

к правой части (1.3.35), где скорость движущейся системы $V(t)$ необходимо рассматривать уже как функцию времени t . То, что было нельзя сделать в СТО в рамках инерциальных систем отсчёта, в случае более общей метрической теории с произвольной метрикой вполне допустимо. В результате получим:

$$\sqrt{g'_{00}} \frac{dt'}{dt} dt = \sqrt{1 - V(t)^2} dt \quad (1.3.37)$$

Подставив (1.3.37) в (1.3.35) окончательно получаем:

$$\tau = \int_{\text{по мировой линии}} \sqrt{1 - V(t)^2} dt \quad (1.3.38)$$

В формулу (1.3.38) не вошло ускорение. По этому поводу необходимо сказать следующее. Ещё первые экспериментальные исследования, связанные с эффектом Мёссбауэра (температурное красное смещение), показали, что релятивистское “замедление времени” зависит только от скорости и не зависит от ускорения движущихся часов при сравнении их показаний с показаниями неподвижных (в инерциальной системе отсчёта) часов, мимо которых они в данный момент пролетают. Именно с подобной ситуацией мы и имели дело при решении задачи. А формула (1.3.38) позволяет производить сравнение показаний движущихся и неподвижных часов как уже выше отмечалось, в одной и той же точке пространства без дополнительных процедур синхронизации. В связи с этим приведём следующую цитату из книги Г. Вертхейма, посвящённой эффекту Мёссбауэра^[24]: *Ускорения, испытываемые атомами в твёрдом теле, очень велики и превосходят в 10^{14} раз гравитационное ускорение у поверхности Земли, однако это никоим образом не влияет на релятивистское “замедление времени”*. К аналогичному выводу на основе опытов Паунда и Регби пришёл и К. Шервин^[25]. Это обстоятельство служит хотя и косвенным, но, все же, экспериментальным подтверждением справедливости формулы (1.3.38).

К сожалению, это тот случай, когда из важного полученного результата делается вывод в другом контексте – придании проблемной несимметрии статуса концептуальной, о чём говорилось выше. Положительным же выводом, следующим из приведённых слов, должно явиться восстановление концептуальной симметрии. А это означает, что последующие слова (Г. Вертхейм): *космический путешественник вернётся более молодым, чем его близнец* нельзя считать правильными.

Выше было отмечено, что при развитии концепции времени, время, как сущность, теряет сначала атрибут *всеобщего упорядочивающего фактора*, сохраняя его в пределах отдельной инерциальной системы. Однако этот атрибут универсальности исчезает уже и для отдельной системы отсчёта в произвольной псевдоримановой метрике. Собственное время становится исключительно характеристикой точки псевдориманового

90.

пространства-времени и получает статус новой сущности - эволюционного времени.

Как уже отмечалось, различимыми объектами в геометрии пространственно-временных отношений являются точки четырёхмерного многообразия – события. Именно они являются геометрической идеализацией эволюционирующих (изменяющихся) систем, находящихся во взаиморасположении друг относительно друга. Это своего рода - бесструктурные системы с бесконечно малыми размерами. Поэтому, согласно сказанному выше, упорядочивающий временной фактор в псевдоримановой геометрии необходимо рассматривать как свой локальный и “индивидуальный” уже для каждого отдельного физического объекта, тела. Кроме этого, лейбницево обобщение концепции времени приводит к необходимости различать координатное время и собственное время какого-либо объекта, то есть динамический и эволюционный упорядочивающие факторы.⁹

“Парадокс близнецов” (продолжение)

Вернёмся к решению “задачи о близнецах”. В обобщённой метрической теории свободно движущиеся тела или системы отсчёта представляют собой аналоги инерциальности СТО. Эти движения осуществляются по так называемым геодезическим линиям – линиям наименьшей длины между двумя мировыми точками. Если движение тела происходит по геодезической, то есть без внешних возмущений, то это движение, рассматриваемое из другой системы отсчёта не подверженной внешним воздействиям, также будет происходить по геодезической, а вычисление собственного времени даст те же результаты в силу инвариантности интервала. Таким образом, симметричный характер прямых и обратных преобразований, как и в

⁹) В связи со сказанным, необходимо отметить следующее. Во многих случаях слова “замедление времени” или им подобные, употребляются как “фигура речи”, но только для краткости, добавление же кавычек должно это показывать. Между тем, результаты реальных экспериментов по красному смещению спектральных линий обязывают нас внести ясность. Различение координатного и собственного времён позволяет говорить об изменении масштабов интервала координатного времени (преобразование 4-координат при переходах между системами отсчёта) и изменении *темпа хода локальных часов* (красное смещение в ОТО). Это совершенно разные аспекты теории относительности. Однако контекст любого замечания или утверждения подразумевает возможность различения этих аспектов.

случае преобразований Лоренца для инерциальных систем отсчёта, здесь восстанавливается, благодаря инвариантности относительной скорости $V(t)$ в (1.3.38). Геометризовав проблему с помощью преобразования (1.3.37) мы фактически исключили несимметрию, связанную с ускорениями. Именно эта несимметрия и служила “камнем преткновения” в получении решения средствами СТО. Здесь же она преодолена.

Следует отметить, что движение тела, подверженного воздействию внешних сил (неучтённых в метрике) или переход в системы отсчёта, подверженные опять-таки воздействиям извне, выводят это движение из класса движений по геодезическим линиям и возвращает нас заботы по решению проблемы несимметрии, а интеграл (1.3.38) в этих случаях должен вычисляться уже по мировой линии, не совпадающей с геодезической. Здесь опять-таки может возникнуть соблазн заменить концептуальную симметрию, не дающей окончательного решения, подменить проблемной несимметрией (внешними силами) для аргументации возможности решения “до числа”.

По сравнению с предыдущим решением задачи в рамках СТО здесь появляется возможность, не выходя за пределы обобщённой метрической теории, вычислить по формуле (1.3.38) собственное время путешествия космического корабля от начала движения и до его завершения с возвратом в исходную точку. Как не трудно убедиться, в конце концов, по форме мы получим такой же результат (1.3.38), как и ранее. И если пренебречь временами ускорений, то этот результат будет совпадать с (1.3.26).

Итак, у нас появилась возможность с помощью (1.3.38) рассчитать собственное время движения космического корабля по замкнутой траектории. Технически проблема определения времён путешествия, фиксируемых в обеих системах отсчёта, решена, причём не с помощью предпринятых для случая СТО ухищрений, а непосредственно. Однако при более внимательном рассмотрении решения задачи мы опять обнаруживаем тень симметрии: если движение корабля происходит по геодезической, эта тень, как неопределённость, возникает сама собой при переходе в систему отсчёта, связанную с космическим кораблём. В этой системе отсчёта движение бывшего неподвижного наблюдателя, связанного с Землёй так же будет происходить по геодезической. Его собственное время, вычисленное по формуле (1.3.38) получится тем же самым, что и вычисленное для космического путешественника при возможном

92.

различии интервалов координатных времён. Возникает старый вопрос – так, кто же останется “молодым?”

Небольшое уточнение. Существует возможность обеспечения “инерциальности” (геодезичности движения) и возвратности путешественника - задать такие начальные параметры предпринимаемого путешествия, чтобы траектория стала замкнутой. Такие движения вполне возможны и рассчитываемы. Однако эти расчёты являются предметом решения задачи движения в реальном гравитационном поле с реальной метрикой, определяемой средствами ОТО.

Таким образом, в связи с интерпретацией результатов анализа “парадокса близнецов” и в СТО, и в обобщённой метрической теории, так или иначе, но возникают вопросы: *что же мы всё-таки мы должны измерять в разных системах отсчёта перед тем как сравнивать полученные значения? Каким временем измерять возраст космонавта? Необходимость различения эволюционного (собственного) и динамического (координатного) времён стала очевидной и настоящей.*

При анализе “парадокса близнецов” мы развели в разные стороны динамический и эволюционный временные упорядочивающие факторы. В *ТМК-топологии* оба они представляются безразмерными (нулевой длительности) точками, а оба множества точек представлялись непрерывными (континуальными) множествами.

Согласно лейбницевой концепции времени, для каждого объекта, для каждой системы, для каждого физического тела существует своя уникальная последовательность его состояний, последовательное становления которых и связывается с понятием локального времени.

Рассмотрим ещё один аспект – случай дискретного эволюционного времени, а в качестве системы с локальным собственным временем самого пилота. Разумеется, выбор человека как системы с локальным временем – чисто условен и взят только для образности. Вместо него вполне подойдёт и обыкновенный метроном или точнее – дискретный хронометр.

Но если в качестве системы рассматривать всё же человека, то его локальное время можно связать, например, с периодическим процессом работы сердца или с другими более тонкими биоритмами. Именно эти моменты и “проживает” человек и их более всего

следовало бы назвать "его собственным временем". Ведь, общее число таких сердечных сокращений за весь жизненный период человека, как и число прожитых лет вполне пригодно для оценки возраста и вполне сравнимо с такими же показателями другого человека. Но самое главное здесь то, что *число дискретных сердечных сокращений или биоритмических циклов, зафиксированных в течение всего периода полёта, как абсолютных событий, инвариантно и не подвержено изменениям в результате преобразований координат (например, Лоренца) при переходах из одной системы отсчёта в другую.* Это число наблюдаемо и, более того, связано с возможностью непосредственной фиксации обоими наблюдателями.

Уточним предлагаемую процедуру измерения собственного времени путешественника в дискретных "тиках". Для фиксации происходящих событий, то есть для объективизации процедуры измерения, процесс путешествия будем сопровождать посылкой дискретных сигналов от обоих наблюдателей друг другу. Отсылку сигналов "привяжем" к выдаваемым "тикам" метронома. На каждый принятый от космонавта сигнал в сторону Земли, землянин посылает для космонавта ответный сигнал. В конце путешествия братья-близнецы пересчитывают отосланные и принятые сигналы.

Обозначим всё время путешествия по часам землянина через $2T$. Этому времени путешествия будет соответствовать величина $2T'$ по часам космонавта. Связь между этими величинами определены соотношениями (1.3.31) и (1.3.38).

Теперь рассмотрим непрерывный интервал времени $[0, 2T']$, соответствующий времени путешествия туда и обратно близнецом-космонавтом в системе отсчёта космонавта. Пусть за это время космонавт отправил n' сигналов, то есть за время путешествия произошло n' "тиков" времени метронома в системе отсчёта космонавта. Все эти точки-события попадут в интервал $[0, 2T']$.

Для землянина параметры концов временного интервала $[0, 2T]$ путешествия космонавта, включая какое-либо распределение внутренних точечных моментов, определяются согласно преобразованиям Лоренца. Важно заметить, что при этом число точечных событий n в интервале $[0, 2T]$ будет тем же самым, что и n' для $[0, 2T']$: $n' = n$. И это справедливо практически для любых непрерывных преобразований 4-координат, то есть при весьма

94.

произвольных, и не только инерциальных, переходах между системами отсчёта.

Таким образом, не вызывает сомнений тот факт, что за всё время путешествия, от взлёта до посадки, число отправленных сигналов космонавтом будет равно числу полученных сигналов наблюдателем на Земле, как причинно связанных событий, поскольку причинная связанность событий и число дискретных событий в интервале путешествия инвариантны при преобразованиях Лоренца. Назовём числа n' и n временами длительности путешествия в дискретных "тиках" уже безотносительно к системам отсчёта землянина или космонавта, поскольку они совпадают. Именно на это время и "постареют" оба брата-близнеца.

То же самое можно сказать и о симметричных действиях земного наблюдателя в отношениях с космонавтом, то есть при отсылке сигналов земным наблюдателем космонавту, последний получит их ровно столько, сколько было отослано землянином за всё время путешествия. Таким образом, если на каждый отосланный сигнал одним из братьев, его близнец отсылает ответный, то число отосланных и принятых сигналов с обеих сторон за всё время путешествия будет одним и тем же.

Факт симметрии наблюдателей в инерциальных или геодезических системах отсчёта, как для СТО, так для обобщённой метрической теории, очевиден. Однако чтобы не перегружать ситуацию ассоциациями с полями и ускорениями, можно ограничить её рассмотрение рамками СТО и инерциальными системами.

Симметричность ситуации, принцип относительности и "одинаковость" процессов, воспроизводящих отсчёты дискретного времени, не дают возможности различить наших наблюдателей. Нет оснований считать, что за всё время путешествия у какого-то из них будет зафиксировано большее или меньшее число отправленных сигналов, а значит и получено другим. Это значит, что среди них нет претендента на более молодой или пожилой возраст в "тиковом" измерении. Можно уверенно сказать, что их собственные дискретные времена, затраченные на путешествие одним и на наблюдение другим, при возвращении космонавта на Землю совпадут - число дискретных "тиков" у метрономов близнецов будет одинаковым. Основаниями для этого вывода являются: симметрия пространственно-временных

отношений и принцип относительности, те же самые, что и при выводе самих преобразований Лоренца. При измерении собственного времени в дискретных "тиках" увеличение возраста космонавта, как по часам землянина, так и по часам самого космонавта будет одним и тем же. Кроме того и увеличение возраста землянина в дискретных "тиках" в силу симметрии будет тем же самым и по земным "тикам", и по "тикам" космонавта.

Таким образом, при измерении времени путешествия в дискретной шкале собственного времени как космонавта, так и землянина "парадокс близнецов" исчезает.

Однако не так обстоит дело с параметрами интервалов координатного непрерывного времени – T и T' , значения которых связаны преобразованиями Лоренца и формулой $T' = T\sqrt{1 - V^2}$, следующей из (1.3.26).

В силу этого, как было отмечено ранее и показано здесь, возникает необходимость различать *координатное* непрерывное время и *собственное дискретное*. Формулы преобразования непрерывного координатного времени входят непосредственно в преобразования Лоренца (1.3.9), а собственное дискретное время и формулы его преобразования при смене систем отсчёта должны определяться в контексте решаемой задачи. Однако следует отметить, что дискретное время обладает более "сильными" свойствами инвариантности, в частности – оно *инвариантностью и при аффинных преобразованиях*.

Таким образом, и координатное непрерывное, и собственное дискретное время "имеют место быть" и они обязаны сосуществовать, а их отождествление и послужило причиной возникновения "парадокса близнецов".

Дело в том, что при поверхностном анализе "парадокса близнецов" мы неявно отображали дискретное собственное время на непрерывную координатную ось. Особенности такого отображения и его последствия были описаны в первой главе – в разделе, посвящённом времени (рис. **A**) и **B**) на стр. 28). Причины же возникновения этого эффекта фундаментальны и связаны с возникновением фиктивных событий при описании топологии

96.

временной оси непрерывным множеством¹⁰⁾. В результате, когда мы пытались измерить время, в течение которого путешественник находился в пути, мы на самом деле оперировали не собственными дискретными моментами, а всем плотно и непрерывно заполненным отрезком оси. Координаты событий – начала и конца путешествия в составе этих непрерывных отрезков мы подвергали непрерывным преобразованиям, а их разность представляли как величину времени в пути. Но, как мы уже убедились, эти действия некорректны.

Другой причиной некорректности этих действий является тот факт, что координатное время в СТО перестало быть метрическим, и при переходе из одной системы координат в другую оно теряет свою количественную характеристику. В СТО координатное время теперь должно измеряться в порядковой шкале, что лишает его статуса однозначной количественной характеристики продолжительности процессов при переходах между системами отсчета. Однако, находясь в согласии с лейбницевою концепцией пространственно-временных отношений, координатное время сохраняет своё основное свойство - возможность упорядочивать события, и обеспечить описание причинной обусловленности событий. Здесь речь идёт о том, что причинная обусловленность событий является инвариантом преобразований, то есть времениподобная пара событий остаётся таковой и при любых преобразованиях Лоренца.

Таким образом, отношение порядка причинно связанных событий является инвариантом координатных преобразований Лоренца, поэтому число дискретных событий в непрерывном интервале координатного времени, и их причинная обусловленность также остаётся инвариантом этих преобразований. Непосредственно этим утверждением мы и воспользовались при разрешении “парадокса близнецов”.

¹⁰⁾ см. Касимов В.А. Пространство, время, движение.
Space-Time-20-03-12-21.pdf

Ещё раз проиллюстрировать суть произошедших изменений в понятии времени можно с помощью следующего наглядного примера.

На рисунке 4 представлено преобразование, с помощью которого при совмещении углов картинке *a*) по образцу *b*) получается новый образ картинке *c*). Рисунок демонстрирует пример так называемого аффинного преобразования.

При очевидном искажении образов, изображённых на исходной картинке *a*), можно заметить, что это преобразование примечательно тем, что оно сохраняет порядок взаиморасположения точек. Точки, которые располагались на прямой в исходном изображении, будут находиться опять на прямой (но другой); точки, которые были “левее” каких либо соседних, опять-таки сохраняют своё “левое” положение; три точки, которые образовывали треугольник опять-таки в новом образе будут составлять новый, но треугольник. Число дискретных объектов при данном преобразовании опять-таки сохраняется. Всё это говорит о том, что упорядочение точек картинке сохраняется при преобразовании $a) \rightarrow c)$, но при явном несохранении метрических соотношений и, в частности, длин отрезков.

Существуют разные шкалы измерений. Основные из них - номинальные, порядковые и “метрические”. Номинальные шкалы позволяют различать объекты только по наименованиям или именам. Порядковые шкалы позволяют установить отношение порядка, предшествования — “до-после”, “левее-правее”, “раньше-позже” и т.д. Метрические же шкалы позволяют измерять и сравнивать количественно. Но поскольку в данном случае именно с точки зрения “метрической” шкалы картинке изменились, а с точки зрения порядковой не изменились — сравнения и анализ данных здесь необходимо производить в порядковой шкале измерения. В конце концов, можно сказать, что “парадокс близнецов” исчез по той же причине, по которой число участников-создателей СТО на картинках *a*) и *c*) не изменилось!

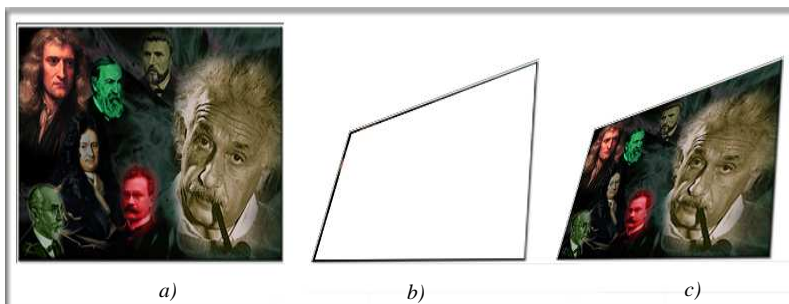


Рис. 4

Парадокс близнецов не разрешается в рамках непрерывного координатного времени ни в СТО, ни в ОТО в силу симметрии систем отсчёта братьев-близнецов.

Однако парадокс близнецов успешно разрешается в рамках дискретного собственного времени, то есть при смене метрической шкалы измерения, используемой для непрерывного координатного времени, на порядковую для дискретного собственного времени.

Необходимость пересмотра концепции времени возникла при введении собственного времени в СТО и локального (зависящего от пространственных координат) в обобщённой метрической теории, отличающегося от “всеобщего”, единого и непрерывного координатного. При этом синхронизация локальных эволюционных упорядочивающих факторов в общем случае (ОТО) невозможна.

Наблюдаемое развитие понятия времени знаменует окончательный переход от ньютоновой концепции абсолютности к лейбницево́й концепции относительности.

Резюме к главе 3

Однородность пространственно-временных отношений в пустом пространстве, абсолютизация мер длины и времени ведут к ньютоновым концепциям абсолютного пространства и абсолютного времени.

Абсолютизация же меры движения при тех же условиях, то есть смена эталонов измерения приводит к релятивистской концепции пространственно-временных отношений и, как следствие, к фундаментальным изменениям кинематических свойств пространственно-временных отношений, сопровождающихся коренной ломкой многовековых догм.

Смена эталонов измерения обусловлена необходимостью восстановления целостности движения, как основного статуса в динамике, и изменений в описании пространственно-временных связей. В связи с выделением особой роли движения в процессах изменения *появилась необходимость различения эволюционного и динамического упорядочивающих временных факторов*. Установление соответствия локального эволюционного времени с динамическим координатным временем осуществляется с помощью процедур синхронизации, где основную роль играет понятие скорости, как топологической связки между непрерывными пространством и временем. Необходимость различения эволюционного и динамического времён усиливается следующим обстоятельством. Существенным при обобщении релятивизации в ОТО. Пространственно-временная неоднородность, обусловленная присутствием материи и описываемая в псевдоримановой геометрии, приводит к локальности эволюционного временного упорядочивающего фактора, что делает невозможным синхронизацию локальных часов в общем случае, а временной упорядочивающий фактор теряет фундаментальное ньютоново свойство физической метричности уже и для случая СТО.

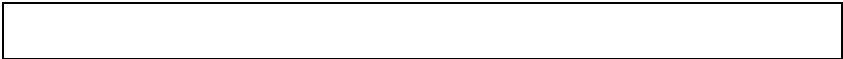
Кроме того, здесь отчётливо проявилась условность выбора стандартного процесса возбуждения сигнала и связанной с этим скорости его распространения как эталонного процесса,

100.

применяемого при метризации пространственно-временных отношений.

В результате смены эталонов измерения появились кажущиеся противоречия – парадоксы, связанные с изменениями масштабов длин, времени, изменением массы при движении, сменой упорядоченности причинно несвязанных событий, “сложением скоростей”. Самым заметным из этих противоречий является, безусловно, “парадокс близнецов”.

Следует отметить, что смена эталонов измерения не нарушила самого главного – возможности упорядоченного описания причинно обусловленных событий, что собственно и составляет предмет реальных интересов, а аппарат кинематических преобразований (Лоренца) дает возможность упорядочения и представления реальных событий в четырёхмерном координатном представлении.



Глава 4. Динамика

Интервал – новый динамический упорядочивающий фактор

Основу классической динамики составляют три известных закона Ньютона. Первый закон – закон инерции. Второй закон устанавливает уравнения движения для материальной точки. Наконец, третий закон утверждает, что в замкнутой системе сумма всех сил равна нулю, а формулировка этого закона для двух тел известна, как закон равенства действия и противодействия. Третий закон Ньютона является по существу следствием закона сохранения импульса, который, в свою очередь – следствием уравнений движения.

Таким образом, первый закон Ньютона утверждает *сохранение движения*, как *основополагающего статуса пребывания физического тела в своём существовании*, а второй закон Ньютона *вскрывает причины изменения* этого статуса и позволяет рассчитывать и предсказывать эти изменения при определении динамики через уравнения движения. Уравнения движения, в конечном счете, позволяют *определить* эволюцию физической системы, что для задач механики означает возможность определения положения тела по отношению к другим телам и во временной координации с ними.

Для задания же и описания эволюции физической системы или, в частном случае, динамики изменения положения тела в пространстве необходим некий *упорядочивающий фактор*. В ньютоновой механике этим фактором являлось универсальное и всеобщее время. Однако теория относительности внесла значительные коррективы в концепцию ньютоновых пространственно-временных отношений, и время, как упорядочивающий фактор, потеряло статус универсальности и всеобщности. Оно стало относительным, а у формул преобразования времени появилось свойство менять упорядоченность координатного отображения событий при переходах из одной системы отсчёта в другую. То есть, ньютоново время не может быть далее использовано для описания эволюции физических систем, и связано это с тем, что нарушается принцип целостности описания динамики по отношению

102.

к различным системам отсчёта. Необходим новый упорядочивающий фактор, обладающий свойством инвариантности при переходе из одной инерциальной системы отсчёта в другую – фактор, упорядочивающий эволюционные события в их становлении. Мы намеренно не будем употреблять термин “время” в обобщённом смысле, поскольку ещё существует большой соблазн использовать его атрибутику в ньютоновой парадигме. Этот фактор, как мы увидим далее, представляется другим параметром, хотя и связанным со временем, но является при этом лоренц-инвариантной величиной.

Новый упорядочивающий фактор должен обладать основным свойством – сохранять причинную упорядоченность эволюционных событий в их становлении при переходе из одной системы отсчёта в другую.

Было. В условиях ньютоновой неизменности пространственных форм и масштабов, абсолютности времени – если наблюдатель какой-либо системы отсчёта указал на какую-либо точку в пространстве и на момент времени наблюдения за ней (по существу – на “пустое и несуществующее” событие), то, несмотря на изменения координат при переходе из одной системы отсчёта в другую, у нас всё же сохранялась уверенность в том, что наблюдатели и других систем отсчёта смогли бы обсуждать и подразумевать одно и то же “пустое” событие, указанное первым наблюдателем. Действительно, в ньютоновой механике можно формально поставить задачу определения и расчёта условий попадания физического тела в заданную, но “пустую” точку пространства, в заданное время. Эта задача являлась вполне решаемой и, более того, абсолютизированной даже за пределами необходимой достаточности.

Стало. Совершенно другая ситуация возникает в аналогичном случае при обсуждении “пустого события” с релятивистской точки зрения. В связи с изменениями масштабов по осям пространственных и временной координат, мер измерения их “длин” и их частей, очень трудно идентифицировать одно и то же “пустое событие” в разных системах отсчёта. То, что не вызывало сомнений в ньютоновых пространственно-временных отношениях, здесь теряет конкретность, поскольку теория относительности лишает определённости как постановку такой задачи для системы отсчёта, так и решение самой задачи, хотя бы в силу относительности времени и

неопределённости момента попадания точечного тела в абстрактную точку. Задача в такой формулировке становится просто-напросто некорректной: координаты времени попадания будут разными для разных систем отсчёта. Но здесь возникает естественный вопрос: *а столь ли необходима ньютонова определённость?*

Для возврата смысловой определённости и корректности необходимо наполнить задачу реальными событиями, например, она может быть сформулирована как задача встречи или пересечения мировых линий для реальных объектов. Такие события мы будем называть нуль-событиями.

Нуль-событие — это точечное событие, состоящее из двух событий, возникающее при пересечении двух разных мировых линий. Если пара событий (x_1^i) и (x_2^k) представляет собой нуль-событие в одной инерциальной системе отсчёта, то она будет нуль-событием и в любой другой инерциальной системе отсчёта.

В данном случае именно *само* событие встречи обладает статусом абсолютности, а не его “*изображение*”, как в случае ньютоновой механики: если точечное нуль-событие произошло в одной системе отсчёта, его зафиксируют наблюдатели и любой другой системы. Здесь и постановка задачи становится корректной, и решение задачи — вполне однозначным. Нуль-события, отображающие *реальные* события в четырёхмерном пространстве-времени, являются основными “действующими лицами” в релятивистской теории. Именно при посредстве нуль-событий и осуществляется взаимодействие тел в динамике. Для них же задаются и координаты, связь между которыми устанавливается с помощью преобразований Лоренца. Так возникла парадигма точечных и локальных взаимодействий для физических систем, размеры и характерные времена которых значительно меньше соответствующих характеристик окружения (*4-ТМК топология*).

Для корректного описания феномена “нуль-событий” необходимо потребовать, чтобы пространственно-временные преобразования координат при переходах между системами были едиными для всех физических объектов. Требование, очевидное для материальных тел, но далеко не очевидное, например, для системы — частица в электромагнитном или каких-либо других полях.

104.

Формально это требование для точечных событий можно записать в виде:

$$\begin{aligned} (x_1^0, x_1^1, x_1^2, x_1^3) = (x_2^0, x_2^1, x_2^2, x_2^3) &\Rightarrow \\ \Rightarrow (x_1^0, x_1^1, x_1^2, x_1^3) = (x_2^0, x_2^1, x_2^2, x_2^3) &\end{aligned} \quad (1.4.1)$$

Здесь нижние индексы координат обозначают объект – первый и второй; двойной стрелкой условно обозначено преобразование пространственно-временных координат при переходе из системы S в систему S' . Соотношение (1.4.1) мы назовём предпринципом ковариантности¹¹⁾.

Примечание. В силу предпринципа ковариантности компоненты вектора A трёхмерного пространства должны преобразовываться в соответствии с формулами преобразования координат. По этим же формулам должны преобразовываться и тензоры. Рассмотрение преобразований векторных и тензорных полей приводит к переформулировке предпринципа ковариантности в принцип ковариантности. Это обстоятельство хорошо известно в векторном и тензорном анализе в трёхмерном пространстве. Для случая четырёхмерного пространства об этом пойдёт речь ниже.

Для возникновения нуль-события и соответствующей задачи встречи необходимо присутствие уже двух тел. Каждое тело в процессе движения будет порождать последовательность разноместных в пространственно-временном отношении событий, которая отобразится своей мировой линией. Цепь упорядоченных событий, представленных мировой линией, естественно назвать цепью *генетически связанных событий*, поскольку все они обязаны общему “родителю” этих событий – физическому телу. Генетически связанные события также отображают реальные события движения материальных тел; собственные свойства этих событий инвариантны и не меняются при преобразованиях координат.

На рис. 1.5 представлена картина движения двух тел в четырёхмерном пространстве-времени. Первое тело при движении описывает мировую линию A_1O ; второе тело описывает мировую линию B_1O . Оба тела представляются своими 4-траекториями -

¹¹⁾ Подчеркнём ещё раз: в (1.4.1) речь и идёт не о тривиальном совпадении координат, а о пространственно-временном совпадении событий, связанных с разными объектами 1 и 2.

цепочками связанных событий. Тела встречаются (нуль-событие) в точке пересечения мировых линий O .

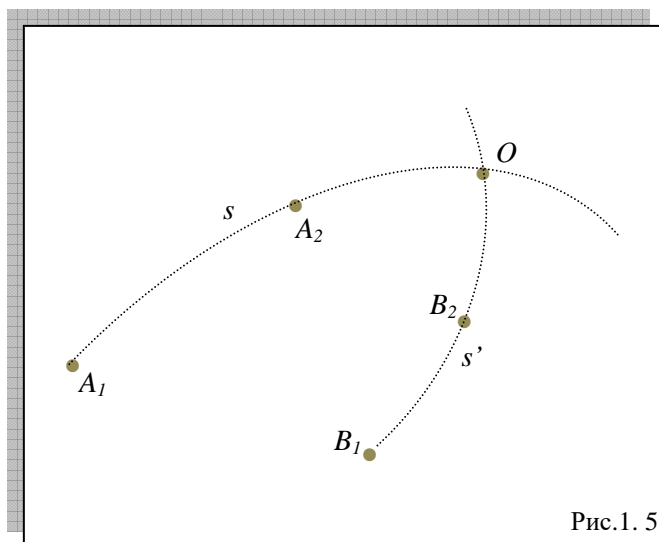


Рис.1. 5

Рассмотрим, как в теории относительности параметризуется упорядоченность генетически связанных событий, возникающих в процессе движения материальной точки.

Вспомним, что положение материальной точки в трёхмерном пространстве классической механики задавалось радиус-вектором

$$\vec{r} = (x, y, z) \quad (1.4.2)$$

а динамика определялась параметрическим представлением траектории движения

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad (1.4.3)$$

Роль упорядочивающего параметра играло универсальное и абсолютное время t , по которому можно было восстановить порядковое положение материальной точки на траектории по отношению к её предыдущим и последующим положениям. Это позволяло задавать и определять место в цепи упорядоченных состояний движущегося тела в выбранной системе координат. Решая уравнения движения совместно для обоих тел, можно было однозначно найти и траектории тел, и момент времени с пространственной точкой пересечения траекторий. То есть мы могли

106.

решить задачи определения траекторий тел, как по отдельности, так и задачу встречи двух тел. По-видимому, эта одна из самых важных практических задач координации пространственно-временных отношений в реальности. Другие более сложные задачи подобного рода, так или иначе, сводятся к решению последовательного ряда аналогичных единичных задач.

Релятивистское объединение пространственно-временных отношений, как уже говорилось, лишило время статуса всеобщего универсального упорядочивающего фактора. Процедуры временной синхронизации или взаимного упорядочения ряда событий встреч потеряли свою определённую, их результаты стали зависеть от систем отсчёта, в которых они осуществлялись.

Рассмотрим верхнюю траекторию A_1O (рис. 1.5). Здесь параметр s задаёт величину текущего “4-пути” A_1A_2 , пройденного телом от начала движения. Величина этого пути совпадает с величиной интервала, и, в силу инвариантности интервала при преобразованиях Лоренца, будет однозначно определять “порядковый номер” состояния в процессе движения тела в любой инерциальной системе отсчёта.

Таким образом, у нас “родился” новый упорядочивающий параметр для генетически связанных событий – интервал s . С помощью этого параметра можно однозначно задать положение точки в цепи становления её последовательных состояний от начала движения и определить текущее положение с помощью “длины” мировой линии, измеряемой от начальной точки движения. Эта “длина” определяется величиной интервала s соотношением:

$$s = \int_{\substack{\text{по} \\ \text{дуге} \\ A_1A_2}} ds \quad (1.4.4)$$

В четырёхмерном пространстве-времени положение тела задаётся по аналогии с (1.4.2) четвёркой координат

$$x^i = \{x^0, x^1, x^2, x^3\} \quad (1.4.5)$$

Тогда параметрическое представление мировой линии в 4-пространстве по аналогии с (1.4.3) должно выглядеть так:

$$x^i(s) = \{x^0(s), x^1(s), x^2(s), x^3(s)\} \quad (1.4.6)$$

Координаты (1.4.6), как функции от параметра s , дают возможность полностью задать движение материальной точки по траектории мировой линии. В данном конкретном случае параметр s целиком заменит универсальное и абсолютное ньютоново время в параметрическом представлении “4-траектории движения”.

Именно этот параметр в релятивистской динамике и должен стать новым универсальным и упорядочивающим динамическим фактором, поскольку он задает порядок сменяющихся состояний в движении, то есть эволюцию процесса и обладает свойством инвариантности при преобразованиях Лоренца. Параметр s во всём аналогичен времени, он же может использоваться, как мы увидим далее, в описании и установлении координации взаимообусловленных событий. Таким образом, интервал, как упорядочивающий “порядковый индекс” в смысле соотношений (1.2.1) или (1.2.2), приведённых в главе 1.2, вполне подходит для задания и определения динамики материальной точки.

Для вычисления интеграла (1.4.4) воспользуемся определением интервала. Из (1.3.11) имеем:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 = \left[1 - \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right] dt^2 \quad (1.4.7)$$

Тогда

$$ds = \sqrt{1 - v(t)^2} dt \quad (1.4.8)$$

Окончательно получаем

$$s = \int_{A_1 A_2}^{\text{по дуге}} ds = \int_{A_1 A_2}^{\text{по дуге}} \sqrt{1 - V(t)} dt \quad (1.4.9)$$

Сравнивая (1.4.9) с (1.3.38) и (1.3.31), видим, что параметр s упорядочивает движение какого-либо тела с помощью собственного времени этого тела. Этот важный вывод показывает суть перехода от ньютоновой концепции времени к лейбницевой. И хотя координатное время в СТО (t в соотношении (1.4.9)) едино в пределах одной инерциальной системы отсчёта, тем не менее, последний вывод лишает это единство перспектив. И, действительно, это единство исчезает уже при расширении рамок псевдоевклидовой геометрии пространственно-временных отношений до псевдоримановых, то есть

108.

при рассмотрении более общей метрики четырёхмерного пространства-времени.

Преобразования Лоренца (1.3.9) сохраняют последовательности событий не только генетически связанных движением, но и событий, могущих быть связанными причинной связью. Это свойство было обозначено ранее, как инвариантность времениподобных событий, связанных времениподобными интервалами.

Таким образом, интервал s удовлетворяет основным требованиям, предъявляемым как к параметру, с помощью которого можно описывать эволюционные процессы движения материальной точки.

Здесь необходимо сделать важное замечание. Точка – это бесструктурный объект, её движение – элементарно. То есть её эволюция – это изменение бесструктурной сущности в самом элементарном исполнении, заключающемся лишь в изменении положения, в конечном счёте, по отношению к выбранной системе координат. Поэтому и её *собственное время* – особое, простейшее, локальное.

С помощью параметра s удобно описывать движение отдельного тела. Однако для описания событий встреч необходимо выполнение определённых процедур приведения собственных времён встречающихся тел к некоторому единому показателю.

В более общей постановке возникает вопрос: *как достигается и описывается общая временная координация физических событий?* Остановимся ещё раз на этом вопросе.

Динамический упорядочивающий фактор для 4-траектории движения (динамическое время) сопрягается с локальными эволюционными временами (точечными часами) с помощью процедуры синхронизации, описанной в главе 2, а однородность пространственно-временных отношений гарантирует сохранение этой синхронизации. Возникает понятие координатного времени, как единого времени со всеми его ньютоновыми макроскопическими свойствами в пределах одной инерциальной системы отсчёта.

Таким образом, единым показателем для всех собственных (эволюционных) времён конкретной системы отсчёта является

координатное время t , определённости которого возникает при метризации пространственно-временных отношений.

Из обратных преобразований Лоренца (3.9) можно получить:

$$dt' = dt \frac{1 - Vv}{\sqrt{1 - V^2}} \quad (1.4.10)$$

Из соотношения (1.4.10) можно увидеть, что порядок событий, связанных с движущимся телом со скоростью v , и описанный с помощью координатного времени t , сохраняется при переходе в любую другую инерциальную систему отсчёта. Разумеется, при этом для скоростей v и V должно выполняться неравенство $v, V < 1$, то есть эти скорости не должны превосходить по значению эталонной скорости, с помощью которой осуществлялись процедуры метризации пространственно-временных отношений в инерциальных системах отсчёта.

Переход от ньютоновой концепции пространственно-временных отношений к лейбницевоу потребовал смены упорядочивающего фактора, того фактора, который должен дать возможность корректного представления эволюции или динамики пространственно-временных изменений при сохранении целостности описания вне зависимости о выбранной инерциальной системы для описания движения.

Важным моментом здесь является формулировка предпринципа ковариантности (1.4.1) для точечных нуль-событий, связанных с различными локализованными объектами, выполнимость которого в этих условиях является очевидной.

Новый упорядочивающий фактор - интервал s между точечными событиями, обладает основным свойством - сохраняет упорядоченность эволюционных событий в их становлении при переходах из одних систем отсчёта в другие и, таким образом, удовлетворяет основным требованиям, предъявляемым как к параметру, с помощью которого можно описывать движения материальной точки в четырёхмерном пространстве-времени.

Однако, с помощью параметра s удобно описывать не только движение отдельного тела. Этот же параметр позволяет решать задачи совпадения и встречи нескольких точечных объектов. Для этого необходимо выполнение определённых процедур приведения собственных времён встречающихся тел к некоторому единому показателю. Таким показателем является *координатное время* t , определённости которого возникает при метризации пространственно-временных отношений - процедуре, описанной в главе 2, что позволяет пользоваться координатным временем как единым временем со всеми его ньютоновыми макроскопическими свойствами в пределах инерциальной системы отсчёта, в которой находится наблюдатель встречи двух тел и решающий эту задачу.

Основное уравнение динамики точки. "Второй закон Ньютона"

Для определения вида уравнений движения попытаемся воспроизвести ньютонову логику рассуждений, естественно в нашей реконструкции. Надеемся, что она окажется не слишком далека от исторической истины. Хотя по поводу определения вида 4-уравнений движения логика будет той же самой, что и для ньютоновой механики, однако во фразах с упоминанием размерности слово *трёхмерие* будет заменено на *четырёхмерие*, а фраза “*время t*” — на фразу “*интервал s*”.

При соблюдении условия аналитичности функций $x^i(s)$ в (1.4.6) их значения можно восстановить в любой точке пространства-времени с помощью разложения в ряд Тейлора. Для этого необходимо знать все производные в точке (например, s_0): нулевую, первую, вторую, третью и т. д. производные:

$$x^i(s_0), \quad \frac{dx^i(s_0)}{ds}, \quad \frac{d^2x^i(s_0)}{ds^2}, \quad \frac{d^3x^i(s_0)}{ds^3} \dots \quad (1.4.11)$$

Заслуга Ньютона состоит в том, что он прервал ряд на первой производной в последовательности (1.4.11) и снял очень жёсткое требование аналитичности функций, описывающих движение. По-видимому, это и есть тот самый момент, в результате которого появились уравнения движения, то есть второй закон Ньютона. А причиной подобного озарения, как нам кажется, явилось осознание сути закона инерции. Суть дела в следующем.

Свободное движение — это состояние, как уже отмечалось, является основополагающим статусом пребывания физического тела или материальной точки в своём существовании, что формулируется в ньютоновой механике как закон инерции. Математически этот факт запишется в виде:

$$\frac{dx^i(s)}{ds} = const \quad (1.4.12)$$

Тогда изменения свободного движения необходимо арифметизировать причинами, приводящими к этим изменениям, то есть силами, которые формально связываются с производными скоростей, то есть с ускорениями. В этом и состоит суть причинного описания. Формально это можно записать в формах, аналогичных формам ньютоновой механики:

$$m \frac{du^i(s)}{ds} = \frac{dp^i}{ds} = \sum_{\alpha} g_{\alpha}^i \quad (1.4.13)$$

$$m \frac{d^2x^i(s)}{ds^2} = m \frac{du^i(s)}{ds} = mw^i(s) = \sum_{\alpha} g_{\alpha}^i \quad (1.4.14)$$

Здесь m выступает также как и в исходной формулировке второго закона Ньютона, как коэффициент пропорциональности между ускорением и силой, называемый массой. Кроме того, как чисто кинематические определения получаем следующие динамические 4-характеристики движущегося тела: u^i - скорость, p^i - импульс, g^i - силу, пропорциональную ускорению w^i :

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} \quad (1.4.15)$$

$$p^i = mu^i = m \frac{dx^i}{ds} \quad (1.4.16)$$

$$g^i = \frac{dp^i}{ds} = m \frac{du^i}{ds} = m \frac{d^2x^i}{ds^2} \quad (1.4.17)$$

Непосредственной подстановкой (1.4.15), (1.4.16) и (1.4.17) можно убедиться в справедливости равенств:

$$u^i u_i = 1 \quad (1.4.18)$$

$$p^i p_i = m^2 \quad (1.4.19)$$

$$u^i g_i = 0 \quad (1.4.20)$$

Свойства динамических 4-характеристик движения.

Связь с 3-характеристиками

Учитывая, что $x^0 = t, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$ и используя выражение (1.4.8) для дифференциала интервала между двумя бесконечно близкими событиями, связанными с движущимся телом, определение 4-скорости (1.4.15) получаем:

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \quad u^1 = \frac{v_x}{\sqrt{1-v^2}}, \quad u^2 = \frac{v_y}{\sqrt{1-v^2}}, \quad u^3 = \frac{v_z}{\sqrt{1-v^2}} \quad (1.4.21)$$

или

$$u^i = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}} \right), \text{ где } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (1.4.22)$$

Учитывая (1.4.16), получаем:

112.

$$p^i = \left(\frac{m}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}} \right), \quad (1.4.23)$$

Введём обозначение:

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \quad (1.4.24)$$

Используя промежуточные результаты:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3 \mathbf{v} \mathbf{v} = \frac{1}{m} \vec{\mathbf{f}} \cdot \vec{\mathbf{v}}, \text{ где } \vec{\mathbf{f}} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}, \quad (1.4.25)$$

согласно (1.4.17), получаем:

$$g^i = (g^0, g^1, g^2, g^3) = \left(\frac{\vec{\mathbf{f}} \cdot \vec{\mathbf{v}}}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{\vec{\mathbf{f}}}{\sqrt{1-v^2}} \right), \quad (1.4.26)$$

Из (1.4.26) видим, что временная компонента 4-силы g^0 связана с работой 3-силы.

Для интерпретации полученных кинематических соотношений воспользуемся разложением Тейлора для функции $\gamma(v)$, определяемой соотношением (1.4.24), с точностью до членов второго порядка:

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \approx 1 + \frac{v^2}{2} \quad (1.4.27)$$

Тогда в нерелятивистском приближении получим:

$$u^i = \left(1 + \frac{v^2}{2}, \vec{\mathbf{v}} \right) \quad (1.4.28)$$

$$p^i = \left(m + \frac{mv^2}{2}, m\vec{\mathbf{v}} \right) \quad (1.4.29)$$

$$g^i = (\vec{\mathbf{f}} \cdot \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{f}}) \quad (1.4.30)$$

Учитывая (1.4.29), четвёрку компонент p^i представим в виде:

$$p^i = (\mathcal{E}, \vec{\mathbf{p}}) \quad (1.4.31)$$

Таким образом, компоненты (1.4.31) в нерелятивистском приближении принимают вид:

$$\mathcal{E} \approx m + \frac{mv^2}{2}, \quad \vec{\mathbf{p}} \approx m\vec{\mathbf{v}} \quad (1.4.32)$$

Соотношение (1.4.31) показывает, что в релятивистской механике импульс и энергия являются компонентами единой 4-характеристики p^i .

В общем виде, согласно (1.4.23) имеем:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}} \quad (1.4.33)$$

$$\mathcal{E} = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}, \quad (1.4.34)$$

Формула (1.4.34) показывает, в частности, что в релятивистской механике энергия свободной частицы не обращается в нуль при $v = 0$, а остаётся конечной величиной, равной $\mathcal{E} = m$. Её называют энергией покоя частицы.

При интерпретации формулы (1.4.34) её часто записывают в виде $\mathcal{E} = m$ (или в метрической системе единиц измерения, как $\mathcal{E} = mc^2$), введя при этом обозначение:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}} \quad (1.4.35)$$

С помощью (1.4.35) предпринимаются попытки различить массу покоя m_0 частицы от “массы в движении” m . Однако, произвол такой трактовки очевиден. Масса тела определяется в формулировках второго закона Ньютона в формах (1.4.13) или (1.4.14). Других определений массы в специальной теории относительности нет. Это определение унаследовано от ньютоновой механики и никаким изменениям, согласно переформулировке второго закона Ньютона, не подверглось.

Поэтому и вопрос, часто возникающий при подобных интерпретациях: *увеличивается ли масса тела при движении?* - становится предметом спекулятивных рассуждений. Физиков всегда мало интересовали такие вопросы, как *сокращение или увеличение длины, замедление или убыстрение времени* как сущностей, а сейчас, вот – *увеличение массы*, поскольку известно, что собственная длина, собственное время, собственная масса (масса покоя) – это всё лоренц-инвариантные характеристики, связанные с одним физическим телом. При решении же конкретных задач, озабоченностей по поводу сокращения, замедления, увеличения этих сущностей вообще не возникает.

114.

Поэтому можно однозначно сказать: *масса тела не увеличивается при движении*. Подробности обсуждения этого вопроса представлены в историческом введении^[26].

Возводя выражения (1.4.33) и (1.4.34) в квадрат и сравнивая их, найдём следующее соотношение между энергией и импульсом частицы:

$$\mathcal{E}^2 = p^2 + m^2 \quad (1.4.36)$$

Из этих же выражений вытекает и следующее соотношение между энергией, импульсом и скоростью свободной частицы:

$$\vec{p} = \mathcal{E}\vec{v} \quad (1.4.37)$$

При $v = 1$ (движение со скоростью эталонного сигнала) импульс и энергия обращаются в бесконечность. Это значит, что скорость такой частицы с отличной от нуля массой m не может быть измерена в единицах эталонной скорости, с помощью которой осуществлялись арифметизация и метризация пространственно-временных отношений (см. гл. 1). В релятивистской механике, однако, могут существовать частицы с массой равной нулю, движущиеся с этой скоростью. Из (1.4.38) имеем для таких частиц:

$$p = \mathcal{E} \quad (1.4.38)$$

Приблизённо такая же формула справедлива и для частиц с отличной от нуля массой в так называемом ультрарелятивистском случае, когда энергия частицы \mathcal{E} велика по сравнению с её энергией покоя m .

Воспроизведение ньютоновой логики вывода уравнений движения для материальной точки, где в качестве нового упорядочивающего фактора выступает интервал s , подтверждает возможность использования концепции непрерывности пространственно-временных отношений в *ТМК-топологии*, но уже для четырёхмерного пространства Минковского.

Четырёхмерное представление известных классических характеристик позволяет установить новые взаимосвязи между трехмерными векторами и скалярами. В этих взаимосвязях трёхмерные скаляры представляются 0-компонентами четырёхмерного представления, а 3-вектора представляются пространственной частью 4-векторов.

Координатные преобразования физических величин

При переходе из одной инерциальной системы в другую координаты материальной точки преобразуются согласно преобразованиям Лоренца (1.3.9). Обозначим матрицу преобразований Лоренца через L^i_k , так что

$$x'^i = L^i_k x^k \quad (1.4.39)$$

Формулы преобразования 4-компонентных характеристик, полученных непосредственно из пространственно-временных исходных формул и уравнений динамики, выводятся с помощью (1.4.39). Так, дифференцируя равенство (1.4.39) по инвариантному интервалу s , умножая обе части равенства на недостающие коэффициенты, можно получить формулы преобразования 4-скорости, 4-импульса и 4-силы. Все формулы преобразования для этих величин совпадают с законом преобразования (1.4.39) с заменой координат x^i на компоненты соответствующих 4-характеристик. Четырёхкомпонентные характеристики, которые преобразуются согласно (1.4.39) в дальнейшем будут называться векторами четырёхмерного псевдоевклидова пространства или *4-векторами*.

Выпишем формулы преобразования импульса \vec{p} и энергии \mathcal{E} при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой в явном виде. Используя (1.4.39), (1.4.31), (1.4.33), (1.4.34) и (1.3.9) находим:

(прямые)	(обратные)	
$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}' + V p'_x}{\sqrt{1 - V^2}}$	$\mathcal{E}' = \frac{\mathcal{E} - V p_x}{\sqrt{1 - V^2}}$	
$p_x = \frac{p'_x + V \mathcal{E}'}{\sqrt{1 - V^2}}$	$p'_x = \frac{p_x - V \mathcal{E}}{\sqrt{1 - V^2}}$	(1.4.40)
$p_y = p'_y$	$p'_y = p_y$	
$p_z = p'_z$	$p'_z = p_z$	

Здесь p_x, p_y, p_z – компоненты трёхмерного вектора \vec{p} .

Теперь перед нами стоит задача – определить формулы преобразования характеристик, зависящих от пространственно-временных координат взаимодействующих физических объектов, при переходах в другие инерциальные системы отсчёта. Речь пойдёт о взаимодействии локализованных точечных объектов с нелокализованными, то есть распределёнными в пространственно-временном континууме.

Для корректной работы с нуль-событиями ранее был сформулирован предпринцип ковариантности (1.4.1). Этот принцип был сформулирован для локализованных точечных событий. Сейчас нам предстоит сформулировать этот предпринцип для характеристик распределённых объектов, то есть для векторных и тензорных полей четырёхмерного псевдоевклидова пространства. В общем виде мы должны записать так:

$$\begin{aligned} (x^0, x^1, x^2, x^3) \&(A^0, A^1, A^2, A^3) \Rightarrow (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) \&(A'^0, A'^1, A'^2, A'^3) \\ \underset{L}{X} \Rightarrow X' \quad \text{и} \quad \underset{L}{A} \Rightarrow A' \end{aligned} \quad (1.4.41)$$

Здесь x^i представляют координаты некоторого события; $A^i(x^k)$ – векторное поле A , как функция координат четырёхмерного псевдоевклидова пространства; двойной стрелкой условно обозначено преобразование пространственно-временных координат при переходе из системы S в систему S' . Это преобразование представляется матрицей Лоренца L .

Для обеспечения корректности мы должны потребовать от векторного поля A^i , чтобы его компоненты преобразовывались с помощью той же матрицы L , что и координаты x^i , то есть с помощью преобразований Лоренца. Это означает, что величины A^i должны быть 4-векторами.

Соотношение аналогичное (1.4.41) можно записать и для тензорных полей произвольного ранга с ковариантными и контравариантными компонентами. Подробнее о подобных объектах изложено в приложении (см. Приложение (*Четырёхмерие. Векторы. Тензоры*)).

Таким образом, мы приходим к общему тензорному закону преобразования физических характеристик, участвующих в пространственно-временных отношениях:

$$A^{i\dots k}_{l\dots m} = L^i_p L^k_q \dots \bar{L}^r_l \bar{L}^s_m A^{p\dots q}_{r\dots s} \quad (1.4.42)$$

Здесь \bar{L} – матрица обратная к L . Соотношение (1.4.42) представляет собой координатное представление *общего принципа ковариантности* в специальной теории относительности.

Пример доказательства тензорного характера величин, входящих в соотношения ковариантных зависимостей

Рассмотрим формально соотношение, которое, как будет показано ниже, представляет собой уравнение движения заряженной частицы в электромагнитном поле

$$m \frac{du^{i'}}{ds} = e F'^{ik} u'_{k'} \quad (1.4.43)$$

В этом соотношении скорость u^i и её производная по s являются 4-векторами. От самого соотношения (1.4.43) мы требуем выполнения свойства ковариантности, как от физического закона, который должен выполняться в любой инерциальной системе отсчёта.

Подставим (1.4.39) и аналогичные формулы для u^i и u_k :

$$u^{i'} = L^i_l u^l, \quad u'_{k'} = L^m_k u_m$$

в (1.4.43), что означает переход в лабораторную инерциальную систему отсчёта и преобразование закона (1.4.43) для лабораторной системы отсчёта

$$m \frac{d}{ds} (L^i_l u^l) = e F'^{ik} L^m_k u_m$$

Производим цепочку тождественных преобразований

$$L^n_l L^i_l m \frac{du^l}{ds} = e F'^{ik} L^m_k L^n_l u_m,$$

$$\delta_l^n m \frac{du^l}{ds} = e F^{nm} u_m.$$

В результате получаем:

$$m \frac{du^n}{ds} = e F^{nm} u_m$$

$$F^{nm} = F'^{ik} L^n_l L^m_k \quad \text{и} \quad F'^{ik} = F^{nm} L^n_l L^m_k \quad (1.4.44)$$

118.

Формулы (1.4.44) показывают тензорный характер преобразования физической характеристики F^{nm} , что свидетельствует о том, что сама она является контравариантным тензором второго ранга.

Обобщение предпринципа ковариантности (1.4.1) для локализованных точечных событий на распределённые объекты, описываемые векторными и тензорными полями четырёхмерного псевдоевклидова пространства-времени, привело к формулировке общего принципа ковариантности, который по сути является координатным представлением принципа относительности в теории относительности. Так была сформулирована необходимость тензорного представления физических характеристик, участвующих в пространственно-временных отношениях и тензорного закона преобразования этих характеристик при переходах между инерциальными системами отсчёта. Тензорный характер представления физических характеристик позволяет говорить о целостности описания физических явлений в разных инерциальных системах отсчёта.

Динамика электромагнитного поля. Уравнения Максвелла

Взаимодействие заряженной частицы с электромагнитным полем. Феноменология¹²⁾

Можно считать твёрдо установленным эмпирическим фактом: взаимодействие частицы с электромагнитным полем описывается одной аддитивной, лоренц-инвариантной характеристикой – зарядом e . При этом на заряженную частицу, движущуюся в электромагнитном поле, действует сила

$$\mathbf{F}_l = e\mathbf{E} + e[\mathbf{v}\mathbf{H}]. \quad (1.4.45)$$

Здесь: \mathbf{E} и \mathbf{H} – напряжённости электрического и магнитного полей в точке расположения заряда. Эта сила получила название силы Лоренца. Уравнение движения для точечной заряженной частицы в этом случае принимает вид:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}_l = e\mathbf{E} + e[\mathbf{v}\mathbf{H}] \quad (1.4.46)$$

Векторное уравнение (1.4.46) можно записать в виде трёх уравнений в покомпонентной форме. Например, для x -составляющих, с учётом (1.4.21), имеем:

$$\frac{dp_x}{ds} = \frac{eE_x}{\sqrt{1-v^2}} + e\left(\frac{v_y H_z}{\sqrt{1-v^2}} - \frac{v_z H_y}{\sqrt{1-v^2}}\right) \quad (1.4.47)$$

Аналогичные уравнения можно получить для y – и z – составляющих.

Работу силы электрического поля \mathbf{E} над зарядом e в единицу времени

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = e\mathbf{E}\mathbf{v} \quad (4.48)$$

12) При рассмотрении вопросов, связанных с электромагнитным полем, в процедуре метризации пространственно-временных отношений в качестве стандартного эталонного сигнала мы должны использовать световой сигнал, поскольку именно скорость света является максимальной среди всех известных и равна c . Мы будем использовать систему единиц измерения РСИ, в которой $c = 1$. Иногда мы будем использовать метрическую систему измерения CGSe. При обратном переходе от системы CGSe к системе РСИ необходимо просто положить: $c = 1$. В системе CGSe единицы измерения \mathbf{E} и \mathbf{H} совпадают.

120.

представим в виде:

$$\frac{dp^0}{ds} = e \left(\frac{v_x E_x}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{v_y E_y}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{v_z E_z}{\sqrt{1-v^2}} \right) \quad (1.4.49)$$

Тогда все покомпонентные равенства можно представить в виде одного матричного соотношения:

$$\begin{pmatrix} \frac{dp^0}{ds} \\ \frac{dp^1}{ds} \\ \frac{dp^2}{ds} \\ \frac{dp^3}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \\ -\frac{v_x}{\sqrt{1-v^2}} \\ -\frac{v_y}{\sqrt{1-v^2}} \\ -\frac{v_z}{\sqrt{1-v^2}} \end{pmatrix} \quad (1.4.50)$$

Это выражение можно записать в очень компактном виде, если использовать обозначение:

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} \quad (1.4.51)$$

Тогда (1.4.50) примет вид:

$$m \frac{du^i}{ds} = e F^{ik} u_k \quad (1.4.52)$$

Согласно (1.4.43) и (1.4.44) матрица F^{ik} является контравариантным тензором второго ранга. А с учётом правила поднятия и опускания индексов (1.п.27, 1.п.45) ковариантные компоненты F_{ik} представляются в виде:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} \quad (1.4.53)$$

Используя (1.п.49) тензоры F_{ik} и F^{ik} можно представить в виде:

$$F_{ik} = (\mathbf{E}, \mathbf{H}) \quad F^{ik} = (-\mathbf{E}, \mathbf{H}) \quad (1.4.54)$$

Таким образом, компоненты напряжённостей электрического и магнитного полей являются компонентами одного 4-тензора электромагнитного поля.

Введём обозначение

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \quad (1.4.55)$$

4-вектор A_i называется 4-потенциалом, который наряду с напряжённостями электрического \mathbf{E} и магнитного \mathbf{H} полей полностью описывает электромагнитное поле. Компоненты A_i являются функциями координат и времени. Три пространственные компоненты 4-вектора A_i образуют вектор \mathbf{A} , называемый *векторным потенциалом*. Временную же компоненту называют *скалярным потенциалом*; обозначим её как $A^0 = \varphi$. Таким образом,

$$A^i = (\varphi, \mathbf{A}) \quad (1.4.56)$$

Преобразования Лоренца для поля

Напишем формулы преобразования для поля, то есть формулы, по которым можно определить поле в любой инерциальной системе отсчёта, зная это же поле в другой системе.

Формулы преобразования для потенциалов находятся непосредственно из общих формул преобразования 4-вектора (1.п.24). Учитывая, (1.4.56), находим

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\varphi' + V A'_x}{\sqrt{1 - V^2}} \\ A_x &= \frac{A'_x + V \varphi'}{\sqrt{1 - V^2}} \end{aligned} \quad (1.4.57)$$

$$A_y = A'_y$$

$$A_z = A'_z$$

Используя закон преобразования (1.4.42) для тензоров второго ранга (преобразование Лоренца, как для вектора по каждому индексу) получаем следующие формулы преобразования для электрического поля:

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \frac{E'_y + V H'_z}{\sqrt{1 - V^2}}, \quad E_z = \frac{E'_z - V H'_y}{\sqrt{1 - V^2}} \quad (1.4.58)$$

и для магнитного поля:

$$H_x = H'_x, \quad H_y = \frac{H'_y - V E'_z}{\sqrt{1 - V^2}}, \quad H_z = \frac{H'_z + V E'_y}{\sqrt{1 - V^2}}. \quad (1.4.59)$$

Таким образом, электрическое и магнитное поля, как и большинство физических величин, относительны, то есть их величины различны в разных системах отсчёта. В частности, электрическое или магнитное поле может отсутствовать в одной системе отсчёта и в то же время присутствовать в другой системе.

Формулы преобразования (1.4.58), (1.4.59) значительно упрощаются для случая $V \ll 1$. В первом релятивистском приближении (члены первого порядка V/c в метрической системе измерения) имеем:

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x, & E_y &= E'_y + V H'_z, & E_z &= E'_z - V H'_y \\ H_x &= H'_x, & H_y &= H'_y - V E'_z, & H_z &= H'_z + V E'_y. \end{aligned} \quad (1.4.60)$$

Эти формулы могут быть написаны в векторном виде:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' + [\mathbf{H}'\mathbf{V}], \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}' - [\mathbf{E}'\mathbf{V}] \quad (1.4.61)$$

Формулы обратного преобразования $S' \rightarrow S$ получаются перестановкой в (1.4.58) – (1.4.59) штриха и изменением знака у V .

Свойства электромагнитного поля

(инерциальная симметрия)

Если в системе S' магнитное поле $\mathbf{H}' = 0$, то, согласно (1.4.58), (1.4.59), между электрическим и магнитным полями в системе S существует соотношение

$$\mathbf{H} = [\mathbf{V}\mathbf{E}] \quad (1.4.62)$$

Если же в S' поле $\mathbf{E}' = 0$, то в системе S

$$\mathbf{E} = [\mathbf{V}\mathbf{H}] \quad (1.4.63)$$

В обоих случаях, следовательно, в системе S магнитные и электрические поля взаимно перпендикулярны.

Имеет место и обратное утверждение: если в некоторой системе отсчёта S поля \mathbf{E} и \mathbf{H} взаимно перпендикулярны (но не равны по величине), то существует такая система S' , в которой поле чисто электрическое или магнитное. Скорость этой системы (по отношению к S) может быть выбрана перпендикулярной к \mathbf{E} и \mathbf{H} , тогда по

величине она равна в первом случае H/E (причём должно быть $H < E$), а во втором случае — E/H (причём $E < H$)

Из векторов напряжённостей электрического и магнитного полей можно составить инвариантные величины, остающиеся неизменными при преобразованиях от одной инерциальной системы отсчёта к другой.

Вид этих инвариантов легко найти исходя из четырёхмерного представления поля с помощью антисимметричного 4-тензора F^{ik} . Очевидно, что из компонент этого тензора можно составить следующие инвариантные величины:

$$F_{ik}F^{ik} = inv \quad (1.4.64)$$

$$e^{iklm}F_{ik}F_{lm} = inv \quad (1.4.65)$$

где e^{iklm} — совершенно антисимметричный псевдотензор Леви-Чивита (1.п.31). Первая из этих величин — истинный скаляр, вторая — псевдоскаляр.

Выражая компоненты F^{ik} через E и H согласно (1.4.51), (1.4.53) легко убедиться в том, что в трёхмерной форме эти инварианты имеют вид:

$$H^2 - E^2 = inv \quad (1.4.66)$$

$$\mathbf{EH} = inv \quad (1.4.67)$$

Псевдоскалярность второго из них следует из того, что он представляет собой произведение полярного вектора \mathbf{E} на аксиальный вектор \mathbf{H} (квадрат же $(\mathbf{EH})^2$ будет истинным скаляром).

Из инвариантности приведённых двух выражений вытекают следующие выводы.

Если в какой-нибудь системе отсчёта электрическое и магнитное поля взаимно перпендикулярны, то есть $\mathbf{EH} = 0$, то они перпендикулярны и во всякой другой инерциальной системе отсчёта. Если в какой-нибудь системе отсчёта абсолютные величины \mathbf{E} и \mathbf{H} равны друг другу, то они одинаковы и в любой другой системе.

Если $\mathbf{EH} = 0$, то можно найти такую систему отсчёта, в которой $\mathbf{E} = 0$ или $\mathbf{H} = 0$ (смотря по тому $E^2 - H^2 < 0$ или $E^2 - H^2 > 0$), то есть поле — чисто магнитное или чисто электрическое; наоборот, если в какой-нибудь системе отсчёта

124.

$E = 0$ или $H = 0$, то во всякой другой системе отсчёта они будут взаимно перпендикулярны, в соответствии со сказанным ранее.

Первая пара уравнений Максвелла

Имея в виду (1.4.55), легко убедиться, что

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0 \quad (1.4.68)$$

Антисимметричный тензор F_{ik} имеет шесть независимых компонент. Всего, таким образом, имеется шесть различных уравнений, а (1.4.68) приводит, как можно убедиться, к двум векторным уравнениям:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (1.4.69)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \quad (1.4.70)$$

Уравнения (1.4.69) и (1.4.70) составляют первую пару уравнений Максвелла. Эти уравнения можно представить в интегральной форме. Согласно теореме Гаусса

$$\int \operatorname{div} \mathbf{H} dV = \oint \mathbf{H} d\mathbf{f},$$

где интеграл справа берётся по всей замкнутой поверхности, охватывающей объём, по которому взят интеграл слева. Тогда

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{f} = 0 \quad (1.4.71)$$

Интеграл от вектора по некоторой поверхности называется *поток вектора* через эту поверхность. Таким образом, поток магнитного поля через всякую замкнутую поверхность равен нулю.

Согласно теореме Стокса

$$\int \operatorname{rot} \mathbf{E} d\mathbf{f} = \oint \mathbf{E} d\mathbf{l},$$

где интеграл справа берётся по замкнутому контуру, огибающему поверхность, по которой берётся интеграл слева. Из (1.4.69) находим, интегрируя обе части по некоторой поверхности:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{H} d\mathbf{f} \quad (1.4.72)$$

Интеграл вектора по замкнутому контуру называют *циркуляцией* этого вектора по контуру. Циркуляцию электрического поля называют также *электродвижущей силой* в данном контуре.

Таким образом, электродвижущая сила в некотором контуре равна с обратным знаком производной по времени от потока магнитного поля через поверхность, ограничиваемую этим контуром.

Плотность заряда, плотность тока, уравнение непрерывности

Важным эмпирическим фактом в построении электродинамики является следующее: источниками электромагнитных полей являются заряды и их токи.

Введём плотность заряда ρ так, что ρdV — есть заряд, находящийся в объёме dV ; ρ есть, вообще говоря, функция от координат и времени. Интеграл от ρdV по некоторому объёму — есть заряд, находящийся в этом объёме.

Для точечных зарядов плотность ρ можно записать с помощью δ -функции в следующем виде:

$$\rho = \sum_a e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a), \quad (1.4.73)$$

где сумма берётся по всем имеющимся зарядам, \mathbf{r}_a — радиус-вектор заряда e_a .

Плотность ρ , как и dV не являются инвариантами, однако инвариантом является их произведение ρdV , поскольку именно заряд частицы является инвариантом преобразований Лоренца, то есть величиной, не зависящей от выбора системы отсчёта.

Умножим равенство $de = \rho dV$ с обеих сторон на dx^i :

$$dedx^i = \rho dV dx^i = \rho dV dt \frac{dx^i}{dt}$$

Поскольку левая сторона этого равенства представлена 4-вектором, значит и правая сторона должна являться 4-вектором. Но $dV dt$ является инвариантным элементом 4-объёма, то есть скаляром.

Значит, $\rho \frac{dx^i}{dt}$ есть 4-вектор. Вектор j^i носит название 4-вектора *плотности тока*:

$$j^i = \rho \frac{dx^i}{dt} \quad (1.4.74)$$

126.

Три пространственные компоненты (1.4.74) образуют трёхмерную плотность тока

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} \quad (1.4.75)$$

Временная же составляющая 4-вектора (1.4.74) есть ρ . Таким образом,

$$j^i = (\rho, \mathbf{j}) \quad (1.4.76)$$

Полный заряд, находящийся в пространстве равен интегралу от плотности по всему объёму. Это можно записать в следующем виде:

$$\int \rho dV = \int j^0 dV = \int j^i dS_i \quad (1.4.77)$$

Здесь интегрирование ведётся по четырёхмерной гиперповерхности, ортогональной к оси x^0 , что и является интегрированием по трёхмерному объёму. Вообще интеграл, стоящий в правой части (1.4.77), взятый по любой гиперповерхности, есть сумма зарядов, мировые линии которых пересекают эту гиперповерхность.

Изменение со временем заряда, находящегося в некотором объёме, даётся производной

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV.$$

С другой стороны, изменение за единицу времени определяется количеством заряда, выходящего за это время из объёма, или, наоборот входящего в объём. Количество заряда, проходящего за единицу времени через элемент $d\mathbf{f}$ поверхности, ограничивающий объём, равно $\rho v d\mathbf{f}$, где \mathbf{v} – скорость заряда в той точке пространства, где находится элемент $d\mathbf{f}$. Вектор $d\mathbf{f}$ направлена, как это всегда принимается, по внешней нормали к поверхности, то есть нормали, направленной наружу от рассматриваемого объёма. Поэтому $\rho v d\mathbf{f}$ положительно, если заряд выходит из объёма, и отрицательно, если заряд входит в объём. Полное количество заряда, выходящего в единицу времени из данного объёма, есть, следовательно

$$\oint \rho v d\mathbf{f},$$

где интеграл берётся по всей замкнутой поверхности, ограничивающей этот объём.

Их сравнения обоих полученных выражений находим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = - \oint \rho \mathbf{v} d\mathbf{f} \quad (1.4.78)$$

Здесь справа поставлен знак минус, так как левая часть должна быть положительной, если в полный заряд в данном объёме увеличивается.

Уравнение (1.4.78), выражающее собой закон сохранения заряда, есть так называемое *уравнение непрерывности*, написанное в интегральном виде. Замечая, что $\rho \mathbf{v}$ есть плотность тока, можно переписать (1.4.78) в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = - \oint \mathbf{j} d\mathbf{f} \quad (1.4.79)$$

Напишем это же уравнение в дифференциальном виде. Применив к правой части (1.4.79) теорему Гаусса-Остроградского

$$\oint \mathbf{j} d\mathbf{f} = \int \operatorname{div} \mathbf{j} dV,$$

находим,

$$\int (\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}) dV = 0$$

Поскольку это равенство должно иметь место при интегрировании по любому объёму, то подынтегральное выражение должно быть равно нулю:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.4.80)$$

Равенство (1.4.80) представляет собой уравнение непрерывности в дифференциальном виде и, следовательно, также выражает собой закон сохранения заряда.

В четырёхмерной форме уравнение непрерывности (1.4.80) выражается равенством нулю 4-дивергенции плотности тока:

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0 \quad (1.4.81)$$

Вторая пара уравнений Максвелла

Закон Кулона является твердо установленным эмпирическим фактом. В дифференциальной форме для величины поля \mathbf{E} неподвижного заряда закон Кулона представляется в виде:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (1.4.82)$$

Уравнение (1.4.82) можно записать так:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi\rho \quad (1.4.83)$$

Используя верхнюю строку четырёхмерного представления (1.4.51) для электромагнитного поля, перепишем (1.4.83) в виде:

$$\frac{\partial F^{0k}}{\partial x^k} = -4\pi j^0 \quad (1.4.84)$$

Это выражение является 0-компонентой более общего тензорного соотношения

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -4\pi j^i \quad (1.4.85)$$

Закон Кулона справедлив в любой инерциальной системе отсчёта, а это значит, что и уравнение (1.4.85) должно быть также справедливо в любой инерциальной системе отсчёта.

Трёхмерное представление уравнений (1.4.85) имеет вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (1.4.86)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi\mathbf{j} \quad (1.4.87)$$

Уравнения (1.4.86), (1.4.87) составляют вторую пару уравнений Максвелла¹³⁾. Вместе с первой парой (1.4.69), (1.4.70) они вполне определяют электромагнитное поле и являются основными уравнениями теории этих полей – *электродинамики*.

Волновое уравнение

Запишем уравнения (1.4.84) в пустоте, учитывая (1.4.55) и (1.4.56). Имеем:

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial A^k}{\partial x_i} - \frac{\partial A^i}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial^2 A^k}{\partial x^k \partial x_i} - \frac{\partial^2 A^i}{\partial x^k \partial x_k} = 0 \quad (1.4.88)$$

¹³⁾ Уравнения Максвелла в форме, применимой к электромагнитному полю в пустоте вместе с находящимися в нём точечными зарядами, были сформулированы *ГЛ Лоренцем*

Поскольку 4-потенциал определён неоднозначно, можно положить

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^k} = 0 \quad (1.4.89)$$

или в трёхмерном представлении

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \quad (1.4.90)$$

Условие (1.4.89) или его трёхмерное представление называется условием лоренцевой калибровки. Уравнение же (1.4.88) при этом условии запишется в виде:

$$\frac{\partial^2 A^i}{\partial x^k \partial x_k} \equiv g^{kl} \frac{\partial^2 A^i}{\partial x^k \partial x^l} = 0 \quad (1.4.91)$$

окончательно,

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.4.92)$$

Уравнение (1.4.91) и его трёхмерное представление (1.4.92) являются известными волновыми уравнениями. Таким образом, электромагнитное поле в пустоте распространяется со скоростью равной 1.

Причины возникновения электромагнитного поля, взаимодействие частиц с полем описываются единственной характеристикой – зарядом. Конфигурация зарядов и их токов полностью определяют конфигурацию возникающего электромагнитного поля.

Сами же уравнения для электромагнитного поля однозначно выводятся из двух эмпирических фактов (закон Кулона, сила Лоренца) и принципа инерциальной симметрии. Таким образом, эти исходные посылки определяют всю электродинамику в вакууме макропространства-времени.

Аддитивность заряда, массы, как характеристик локализованных физических объектов и линейность уравнений для полей и, в силу этого, выполнимость принципа суперпозиции для полей обеспечивают независимое сосуществование одного фрагмента конфигурации зарядов, токов и созданного поля и другого фрагмента конфигурации зарядов, токов и их поля. Ситуация полностью аналогичная и для сосуществования локализованных физических объектов.

Резюме к главе 4

После открытия электромагнитных волн, возможности их независимого существования, стало ясно, что физика должна уметь оперировать не только локализованными объектами, но и нелокализованными, которые по сути дела представляли собой новую сущность. Причины возникновения этой сущности, закономерности её поведения существенно отличают её от локализованных объектов, что требует своего нового описания.

Пространственное сосуществование локализованных и нелокализованных объектов, их эволюционные свойства, механизмы взаимодействия описываются своими динамиками: динамикой материальной точки и электродинамикой. Всё это происходит на фоне лейбницевых пространственно-временных отношений.

Здесь, как для локализованных, так и для нелокализованных объектов, каким является электромагнитное поле, нет необходимости в существовании каких-либо посредников. В частности, для поля не требуется наличия какой-либо среды распространения. Для свободного существования, как локализованных объектов, так и полей не требуется никаких причин. Причинами их существования является само существование.

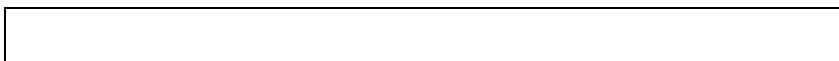
Основополагающим статусом пребывания локализованного объекта в своём существовании является инерционное движение ($v = const$), описываемое первым законом Ньютона.

Основополагающим статусом существования электромагнитного поля, как нелокализованной сущности, является распространяющийся с групповой скоростью V_{gp} ($V_{gp} = c = 1 = const$) волновой пакет, описываемый волновым уравнением. Волновой пакет представляет собой суперпозицию свободно распространяющихся монохроматических волн с фазовой скоростью V_{ϕ} ($V_{\phi} = V_{gp} = c = 1 = const$).

Взаимодействие точечной частицы и поля параметризуется единственной аддитивной характеристикой этой частицы – зарядом. Заряды и токи этих зарядов являются и причинами возникновения электромагнитных полей.

Два эмпирических закона: закон Кулона (как описание поля точечного заряда) и закон взаимодействия точечного заряда с электромагнитным полем (второй закон Ньютона с силой Лоренца) на фоне выполнимости принципа инерциальной симметрии позволяют однозначно вывести все четыре уравнения Максвелла для электромагнитного поля. Важным свойством этих уравнений является их линейность, что приводит к формулировке принципа суперпозиции для электромагнитного поля, как физического объекта.

При этом выводе возникают существенно новые аспекты в описании пространственно-временной координации взаимодействия локализованных и нелокализованных объектов. Важным моментом здесь является выполнимость предпринципа ковариантности (1.4.41), который, собственно и наделяет 4-характеристики тензорными свойствами, а сам принцип относительности превращается в своё координатное представление – принцип ковариантности.



Приложение. Четырёхмерие. Векторы. Тензоры

Предварительные замечания

Переход от векторного анализа в трёхмерном пространстве к векторному анализу в четырёхмерном пространстве не должен вызывать затруднений, если предварительно сменить традиционную систему векторных обозначений в трёхмерном пространстве на её покомпонентную запись. Именно такая тензорно-индексная запись освободит наше “трёхмерное восприятие” от безуспешных попыток представлять многомерные построения в нашем неподготовленном для этого воображении. Разобраться в этом аппарате – значит освободить себя от “трёхмерной зависимости” восприятия действительности. В таблице 1.п.1 приведены традиционные векторные обозначения и их соответствующие покомпонентные представления.

Таблица 1.п.1

№ п/п	Название	Обозначение	
		векторное	покомпонентное
1	Вектор	\mathbf{a}	a_α
2	Скалярное произведение	(\mathbf{ab})	$a_\beta b_\beta$
4	Векторное произведение	$[\mathbf{ab}]$	$[\mathbf{ab}]_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} a_\beta b_\gamma$
5	Градиент	$\nabla\varphi = \text{grad } \varphi$	$(\text{grad } \varphi)_\alpha = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}$
6	“Производная по направлению”	$(\mathbf{c}\nabla)\mathbf{a} = (\mathbf{c} \text{ grad })\mathbf{a}$	$((\mathbf{c} \text{ grad })\mathbf{a})_\alpha = c_\beta \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\beta}$
7	Дивергенция	$\text{div } \mathbf{a}$	$\frac{\partial a_\beta}{\partial x_\beta}$
8	Ротор	$[\nabla \mathbf{a}] = \text{rot } \mathbf{a}$	$(\text{rot } \mathbf{a})_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial a_\gamma}{\partial x_\beta}$
9	Определитель матрицы	$a = a_{\alpha\beta} $	$a = \frac{1}{3!} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\lambda\mu\nu} a_{\alpha\lambda} a_{\beta\mu} a_{\gamma\nu}$
10	Полезное выражение		$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} (\text{rot } \mathbf{a})_\gamma = \frac{\partial a_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\beta}$
11	Левая часть теоремы Гаусса	$\oint_S \bar{\mathbf{a}} \vec{s}$	$\oint_S a_\alpha \epsilon_{\alpha\beta\gamma} [dx_\beta dx_\gamma]$
12	Левая часть теоремы Стокса	$\oint_L \bar{\mathbf{a}} d\vec{l}$	$\oint_L a_\alpha [dx_\alpha]$

Напомним правило суммирования Эйнштейна. Нижние индексы в векторных и тензорных выражениях называются ковариантными, а верхние – контравариантными. Для упрощения записи используется следующее правило суммирования: *если один и тот же индекс входит в какой-либо одночлен дважды: один раз как ковариантный, другой раз как контравариантный, то написанное выражение означает сумму одночленов, в котором этот индекс пробегает все свои значения.* По умолчанию принимается, что греческие индексы пробегают значения от 1 до 3, а латинские – от 0 до 3. Индексы, по которым производится суммирование, называются “немыми”. Сама операция суммирования называется “свёрткой” или “упрощением” по немым индексам.

Для евклидовых пространств, описываемых в декартовых системах координат, не имеет смысла различать ковариантные и контравариантные вектора в силу их тождественности. Поэтому обычно индексы компонент векторов трёхмерного пространства, при рассмотрении здесь, будем писать, в том числе и немые, внизу. Однако для удобства записи (когда строчная запись становится слишком громоздкой) всё же в отдельных случаях мы будем располагать индексы и сверху, и снизу.

Дадим несколько определений. Символом Леви-Чивита называется объект $e_{\alpha\beta\gamma}$ третьего ранга (по размерности рассматриваемого пространства), составляющие которого имеют следующие значения:

$$e_{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} 1 & \text{когда индексы } \alpha, \beta, \gamma \text{ образуют} \\ & \text{чётную перестановку чисел } 1, 2, 3 \\ -1 & \text{когда индексы } \alpha, \beta, \gamma \text{ образуют} \\ & \text{нечётную перестановку чисел } 1, 2, 3 \\ 0 & \text{когда среди индексов } \alpha, \beta, \gamma \\ & \text{имеются хотя бы два одинаковые} \end{cases} \quad (1.п.1)$$

Нормированные свёртки двух символов Леви-Чивита называются обобщёнными символами Кронекера. В трёхмерном пространстве таких символов три:

$$\delta_{\lambda\mu\nu}^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{0!} e^{\alpha\beta\gamma} e_{\lambda\mu\nu} \quad (1.п.2)$$

$$\delta_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} = \frac{1}{1!} e^{\alpha\beta\mu} e_{\gamma\delta\mu} \quad (1.п.3)$$

$$\delta_{\beta}^{\alpha} = \frac{1}{2!} e^{\alpha\mu\nu} e_{\beta\mu\nu} \quad (1.п.4)$$

Как следует из определений (1.п.2), (1.п.3), (1.п.4) и (1.п.1), компоненты обобщённых символов Кронекера имеют следующие значения:

134.

$$\delta_{\lambda\mu\nu}^{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} 1, & \text{если индексы верхней группы образуют} \\ & \text{чётную перестановку индексов нижней группы} \\ -1, & \text{если индексы верхней группы образуют нечётную} \\ & \text{перестановку индексов нижней группы} \\ 0, & \text{если индексы верхней и нижней групп не} \\ & \text{совпадают или некоторые индексы совпадают в} \\ & \text{какой-либо из групп} \end{cases} \quad (1.п.5)$$

Нетрудно убедиться в справедливости следующих соотношений:

$$\delta_{\lambda\mu}^{\alpha\beta} = \delta_{\lambda}^{\alpha} \delta_{\mu}^{\beta} - \delta_{\lambda}^{\beta} \delta_{\mu}^{\alpha} \quad (1.п.6)$$

$$\begin{aligned} \delta_{\lambda\mu\nu}^{\alpha\beta\gamma} &= \delta_{\lambda\mu}^{\alpha\beta} \delta_{\nu}^{\gamma} - \delta_{\lambda\mu}^{\alpha\gamma} \delta_{\nu}^{\beta} + \delta_{\lambda\mu}^{\beta\gamma} \delta_{\nu}^{\alpha} = \\ &= \delta_{\lambda}^{\alpha} \delta_{\mu}^{\beta} \delta_{\nu}^{\gamma} - \delta_{\lambda}^{\gamma} \delta_{\mu}^{\alpha} \delta_{\nu}^{\beta} + \delta_{\lambda}^{\beta} \delta_{\mu}^{\gamma} \delta_{\nu}^{\alpha} - \\ &- \delta_{\lambda}^{\alpha} \delta_{\mu}^{\gamma} \delta_{\nu}^{\beta} + \delta_{\lambda}^{\gamma} \delta_{\mu}^{\beta} \delta_{\nu}^{\alpha} - \delta_{\lambda}^{\beta} \delta_{\mu}^{\alpha} \delta_{\nu}^{\gamma} \end{aligned} \quad (1.п.7)$$

Имеют место очевидные соотношения для произвольного тензора, в частности для вектора A_{α} и антисимметричного по всем индексам тензора $A_{\alpha\beta\dots\gamma}$ m -го ранга:

$$A_{\alpha} = \delta_{\alpha}^{\beta} A_{\beta} \quad (1.п.8)$$

$$A_{\alpha\beta\dots\gamma} = \frac{1}{m!} \delta_{\alpha\beta\dots\gamma}^{\lambda\mu\dots\nu} A_{\lambda\mu\dots\nu} \quad (1.п.9)$$

Обычно при записи интегральных выражений в традиционном векторном анализе в качестве элементов интегрирования используются:

dl_{α} – декартовы составляющие элемента длины дуги кривой;

ds_{α} – декартовы составляющие элемента площади поверхности;

dV – элемент объёма.

Использование этих элементов интегрирования, безусловно, придаёт наглядность в трёхмерном случае интегральным выражениям,

связывающим интегрирование по подпространствам и охватывающим их границам, например – теореме Гаусса-Остроградского, формуле Стокса, формуле Грина и т.п. Эти теоремы являются весьма важными инструментами в теории поля. Однако вывод этих теорем в традиционном исполнении всегда вызывает чувство некоторого

неудобства в силу необходимости воспроизведения их средствами математического анализа – строгими, но громоздкими .

Между тем, если в качестве элементов интегрирования взять так называемые внешние дифференциальные формы Картана $[dx_\alpha \dots dx_\gamma]$, то все эти теоремы и формулы приобретают простой, наглядный и компактный вид так называемой обобщённой формулы Стокса и, что самое важное, с обобщением теорем для произвольных n -мерных римановых пространств. Изложение же идеи метода для простоты приведём для трёхмерного евклидова пространства. Обобщение для четырёхмерного псевдоевклидова пространства не должно вызвать трудностей. Подробнее ознакомиться с описываемыми методами можно по книге^[27].

Назовём элементами интегрирования в трёхмерном пространстве, соответствующими элементарным ячейкам с 1, 2, 3 упорядоченными рёбрами, следующие выражения:

$$[dx_\alpha]_\mu = d_\mu x_\alpha \quad (1.п.10)$$

$$[dx_\alpha dx_\beta]_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}^{\lambda\tau} d_\lambda x_\alpha d_\tau x_\beta \quad (1.п.11)$$

$$[dx_\alpha dx_\beta dx_\gamma]_{\mu\nu\xi} = \delta_{\mu\nu\xi}^{\kappa\lambda\tau} d_\kappa x_\alpha d_\lambda x_\beta d_\tau x_\gamma \quad (1.п.12)$$

Индексы α, β, γ индексируют компоненты вектора (ребра элемента интегрирования), а индексы $\mu, \nu, \xi, \kappa, \lambda, \tau$ – номера векторов (рёбер элемента интегрирования), участвующих в построении элемента интегрирования. Если в процессе решения задач не предвидятся перестановки местами этих векторов (рёбер), то индексацию векторов обычно опускают.

В трёхмерном пространстве соответственно видам элементов интегрирования (1.п.10), (1.п.11), (1.п.12) могут рассматриваться три вида интегральных выражений:

$$\int_{(1)} \omega_{(\dots)} = \int_{(1)} a_{(\dots)\alpha} [dx_\alpha] \quad (1.п.13)$$

$$\int_{(2)} \omega_{(\dots)} = \int_{(2)} a_{(\dots)\alpha\beta} [dx_\alpha dx_\beta] \quad (1.п.14)$$

$$\int_{(3)} \omega_{(\dots)} = \int_{(3)} a_{(\dots)\alpha\beta\gamma} [dx_\alpha dx_\beta dx_\gamma] \quad (1.п.15)$$

где $a_{(\dots)\alpha\dots\gamma}$ – известные функции координат. В интегральных выражениях (1.п.13), (1.п.14), (1.п.15) интегрирование производится по одномерному, двумерному и трёхмерному многообразиям.

Если многообразие V_m является m -мерной границей многообразия V_{m+1} , то при любых

$$\omega_{(\dots)} = a_{(\dots)\alpha\dots\gamma} [dx_\alpha \dots dx_\gamma]$$

136.

Имеет место замечательное соотношение, которое называется обобщённой теоремой Стокса:

$$\int_{(m)} a_{(\dots)\alpha\dots\gamma} [dx_\alpha \dots dx_\gamma] = \int_{(m+1)} \frac{\partial a_{(\dots)\alpha\dots\gamma}}{\partial x_\beta} [dx_\beta dx_\alpha \dots dx_\gamma] \quad (1.п.16)$$

Обобщённая теорема Стокса имеет простой и компактный вид благодаря тому, что в качестве элемента интегрирования взята внешняя дифференциальная форма $[dx_\alpha \dots dx_\gamma]$, наиболее адекватно выражающая интегральные свойства дифференцируемых многообразий.

Однако на практике, как уже говорилось, из соображений наглядности, в качестве исходных элементов интегрирования берутся так называемые ковариантные объёмы $d\tau_{(\dots)}$, которые являются тензорами, дуальными к внешним дифференциальным формам $[dx_\alpha dx_\beta \dots dx_\gamma]$. При этом обобщённая формула Стокса теряет присущую ей изящную форму и приобретает более громоздкий вид, различный для тензоров различного ранга и строения.

Чтобы установить соответствие между соотношениями (1.п.16), выражающими наиболее глубинные интегральные свойства подпространств и их замыкающих границ и различными интегральными теоремами, встречающимися при рассмотрении конкретных задач, приведём формулы, позволяющие переходить от внешних форм $[dx_\alpha dx_\beta \dots dx_\gamma]$ к ковариантным объёмам $d\tau_{(\dots)}$ и обратно.

Итак,

$$dl_\alpha = [dx_\alpha] \quad (1.п.17)$$

$$ds_\alpha = d\tau_\alpha = \frac{1}{2!} e_{\alpha\beta\gamma} [dx_\beta dx_\gamma] \quad (1.п.18)$$

$$dV = d\tau = \frac{1}{3!} e_{\alpha\beta\gamma} [dx_\alpha dx_\beta dx_\gamma] \quad (1.п.19)$$

и обратно

$$[dx_\alpha] = dl_\alpha \quad (1.п.20)$$

$$[dx_\alpha dx_\beta] = e_{\gamma\alpha\beta} ds_\gamma \quad (1.п.21)$$

$$[dx_\alpha dx_\beta dx_\gamma] = e_{\alpha\beta\gamma} dV \quad (1.п.22)$$

Как пример практического применения обобщённой теоремы Стокса (1.п.16), приведём доказательства двух известных интегральных теорем.

Доказательство теоремы Гаусса-Остроградского

$$\oint_S \vec{a} \vec{s} = \int_V \operatorname{div} \vec{a} dV$$

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{a} \vec{s} &= \oint_S a_\alpha dS_\alpha = \frac{1}{2!} \oint_S a_\alpha e_{\alpha\beta\gamma} [dx_\beta dx_\gamma] = \\ &= \frac{1}{2!} \int_V e_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\kappa} [dx_\kappa dx_\beta dx_\gamma] = \int_V \delta_{\alpha\kappa} \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\kappa} dV = \int_V \operatorname{div} \vec{a} dV \end{aligned}$$

Доказательство теоремы Стокса

$$\oint_L \vec{a} d\vec{l} = \int_S \operatorname{rot} \vec{a} d\vec{S}$$

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{a} d\vec{l} &= \oint_L a_\alpha dl_\alpha = \oint_L a_\alpha [dx_\alpha] = \oint_S \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\kappa} [dx_\kappa dx_\alpha] = \\ &= \int_S \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\kappa} e_{\beta\kappa\alpha} dS_\beta = \int_S \operatorname{rot}_\beta dS_\beta = \int_S \operatorname{rot} \vec{a} d\vec{S} \end{aligned}$$

Четырёхмерие

В этом разделе мы систематически представим геометрию реального псевдоевклидова четырёхмерного пространства-времени Минковского – геометрию специальной теории относительности.

Геометрические свойства любого пространства задаются с помощью метрического тензора g_{ik} . В псевдоевклидовом пространстве, которое мы намерены здесь рассматривать этот тензор можно представить в виде матрицы следующим образом:

$$(g_{ik}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (1.п.23)$$

(индекс i нумерует строки, а индекс k – столбцы в порядке значений 0, 1, 2, 3).

Совокупность координат события (t, x, y, z) можно рассматривать как компоненты четырёхмерного радиус-вектора (или, как мы будем говорить для краткости, 4-радиус-вектора) в

138.

четырёхмерном пространстве. Его компоненты мы будем обозначать через x^i , где индекс i пробегает значения 0, 1, 2, 3, причём

$$x^0 = t, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z$$

Квадрат “длины” радиус-вектора даётся выражением $g_{ik}x^i x^k$. Если в это выражение подставить (1.п.23), получим

$$g_{ik}x^i x^k = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$$

Он не меняется при преобразованиях Лоренца, которые можно рассматривать как повороты четырёхмерной системы координат.

Вообще четырёхмерным вектором (4-вектором) A^i называется совокупность четырёх величин A^0, A^1, A^2, A^3 , которые при преобразованиях четырёхмерной системы координат преобразуются как компоненты 4-радиус-вектора x^i при преобразованиях Лоренца

$$A^0 = \frac{A'^0 + v A'^1}{\sqrt{1-v^2}}, \quad A^1 = \frac{A'^1 + v A'^0}{\sqrt{1-v^2}}, \quad A^2 = A'^2, \quad A^3 = A'^3 \quad (1.п.24)$$

Квадрат величины всякого 4-вектора определяется аналогично квадрату “длины” 4-радиус вектора:

$$g_{ik}A^i A^k = (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2 \quad (1.п.25)$$

Для удобства записи подобных выражений вводят два вида компонент 4-векторов, обозначая их буквами A^i и A_i с индексами сверху и снизу. При этом

$$A_i = g_{ik}A^k \quad (1.п.26)$$

или, согласно (1.п.23) и (1.п.26)

$$A_0 = A^0, \quad A_1 = -A^1, \quad A_2 = -A^2, \quad A_3 = -A^3 \quad (1.п.27)$$

Величины A^i называются контравариантными, а A_i – ковариантными компонентами 4-вектора.

Согласно (1.п.26) квадрат 4-вектора представится тогда в виде

$$g_{ik}A^i A^k = A^i A_i = A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3 \quad (1.п.28)$$

Аналогично квадрату 4-вектора составляется скалярное произведение двух разных 4-векторов

$$g_{ik}A^i B^k = A^i B_i = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3 \quad (1.п.29)$$

При этом, очевидно, его можно записать как в виде $A^i B_i$, так и в виде $A_i B^i$, – результат от этого не меняется. Вообще, во всякой паре *немых* индексов (участвующих в правиле суммирования Эйнштейна) всегда можно переставлять верхний и нижний индексы.

При этом надо иметь в виду, что закон преобразования 4-вектора, выраженный через ковариантные компоненты, отличается (в

знаках) от того же закона, выраженного в контравариантных компонентах. Это следует из (1.п.26) и (1.п.24). Так, вместо (1.п.24) будем иметь:

$$A_0 = \frac{A'_0 - v A'_3}{\sqrt{1-v^2}}, A_1 = \frac{A'_1 - v A'_0}{\sqrt{1-v^2}}, A_2 = A'_2, A_3 = A'_3 \quad (1.п.30)$$

Произведение $A^i B_i$, является 4-скаляром – оно инвариантно по отношению к поворотам четырёхмерной системы координат. Это обстоятельство легко проверить непосредственно, но оно и заранее очевидно (по аналогии с квадратом $A^i A_i$), из того, что все векторы преобразуются по одинаковому закону.

Компоненту 4-вектора A^0 называют *временной*, а компоненты A^1, A^2, A^3 – *пространственными* (по аналогии с 4-радиус-вектором). Квадрат 4-вектора может быть положительным, отрицательным или равным нулю; в этих трёх случаях говорят соответственно о *временноподобных*, *пространственноподобных* и *нулевых* 4-векторах (по аналогии с интервалами). Нулевые 4-вектора называют также *изотропными*.

По отношению к чисто пространственным поворотам (то есть преобразованиям, не затрагивающим оси времени) три пространственные компоненты 4-вектора A^i составляют трёхмерный вектор \mathbf{A} . Временная компонента 4-вектора A^i представляет собой (по отношению к тем же преобразованиям) трёхмерный скаляр. Перечисляя компоненты 4-вектора, часто записывают их как

$$A^0 = (A^0, \mathbf{A}).$$

При этом ковариантные компоненты того же 4-вектора меняют свой вид: $A_i = (A^0, -\mathbf{A})$, а квадрат 4-вектора принимает вид: $A^i A_i = (A^0)^2 - \mathbf{A}^2$. Так, для 4-радиус-вектора:

$$x^i = (t, \mathbf{r}), \quad x_i = (t, -\mathbf{r}), \quad x^i x_i = t^2 - \mathbf{r}^2$$

У трёхмерных векторов (в координатах x, y, z) нет необходимости различать контра- и ковариантные компоненты. Поэтому везде, где это не может привести к недоразумениям, мы будем писать их компоненты A_α ($\alpha = x, y, z$) с индексами внизу, обозначая эти индексы греческими буквами или цифрами. В частности, по дважды повторяющимся греческим индексам будет подразумеваться суммирование по трём значениям x, y, z .

Четырёхмерным тензором (4-тензором) второго ранга называется совокупность 16 величин A^{ik} , которые при преобразовании координат преобразуются как произведения компонент двух 4-векторов. Аналогичным образом определяются и 4-тензоры высших рангов.

Компоненты 4-тензора второго ранга могут быть представлены в трёх видах: как контравариантные A^{ik} , ковариантные A_{ik} и смешанные A^i_k (в последнем случае надо, вообще говоря, различать A^i_k и A_k^i , то есть следить за тем, какой индекс стоит вверху, а какой внизу). Связь между различными видами компонент определяется по (1.п.26) или (1.п.27), то есть по общему правилу: поднятие или опускание временного индекса (0) не меняет знак компоненты, а поднятие или опускание пространственного индекса меняет знак компоненты.

По отношению к чисто пространственным преобразованиям девять компонент A^{11}, A^{12} ... составляют трёхмерный тензор. Три компоненты A^{01}, A^{02}, A^{03} и три компоненты A^{10}, A^{20}, A^{30} составляют трёхмерные векторы, а A^{00} является трёхмерным скаляром.

Тензор A^{ik} называется симметричным, если $A^{ik} = A^{ki}$, и антисимметричным, если $A^{ik} = -A^{ki}$. У антисимметричного тензора все диагональные компоненты (A^{00}, A^{11} ...) равны нулю, так как, например, должно быть $A^{00} = -A^{00}$. У симметричного тензора A^{ik} смешанные компоненты A^i_k и A_k^i совпадают.

Во всяком тензорном равенстве выражения с обеих его сторон должны содержать одинаковые и одинаково расположенные (вверху или внизу) свободные, то есть не немые индексы. Свободные индексы в тензорных равенствах можно перемещать (вверх или вниз), но обязательно одновременно во всех членах уравнения. Приравнивание же контра- и ковариантных компонент различных тензоров "незаконно"; такое равенство, даже если бы оно случайно имело место в какой-либо системе отсчёта, нарушилось бы при переходе к другой системе.

Из компонент тензора A^i_k можно образовать скаляр путём образования суммы

$$A^i_i = A^0_0 + A^1_1 + A^2_2 + A^3_3$$

(при этом $A^i_i = A_i^i$). Такую сумму называют *следом* тензора, а об операции его образования говорят как *свёртыванию* или *упрощению* тензора.

Операцией свёртывания является и рассмотренное выше образование скалярного произведения двух 4-векторов: это есть образование скаляра $A^i B_i$ из тензора $A^i B_k$. Вообще всякое свёртывание по паре индексов понижает ранг тензора на 2. Например, A^i_{kli} есть тензор второго ранга, $A^i_k B^k$ – 4-вектор, A^{ik}_{ik} – скаляр и т. д.

Как и в трёхмерном евклидовом пространстве в четырёхмерном псевдоевклидовом пространстве важную роль играют

специальные объекты Леви-Чивита и Кронекера с аналогичными определениями и свойствами.

Здесь символом Леви-Чивита называется объект e_{iklm} четвёртого ранга, составляющие которого имеют следующие значения:

$$e_{iklm} = \begin{cases} 1 & \text{когда индексы } i, k, l, m \text{ образуют} \\ & \text{чётную перестановку чисел } 0, 1, 2, 3 \\ -1 & \text{когда индексы } i, k, l, m \text{ образуют} \\ & \text{нечётную перестановку чисел } 0, 1, 2, 3 \\ 0 & \text{когда среди индексов } i, k, l, m \\ & \text{имеются хотя бы два одинаковые} \end{cases} \quad (1.п.31)$$

Нормированные свёртки двух символов Леви-Чивита называются обобщёнными символами Кронекера. В четырёхмерном пространстве таких символов четыре:

$$\delta_{npqr}^{iklm} = \frac{1}{0!} e^{iklm} e_{npqr} \quad (1.п.32)$$

$$\delta_{npq}^{ikl} = \frac{1}{1!} e^{iklr} e_{npqr} \quad (1.п.33)$$

$$\delta_{np}^{ik} = \frac{1}{2!} e^{ikqr} e_{npqr} \quad (1.п.34)$$

$$\delta_n^i = \frac{1}{3!} e^{ipqr} e_{npqr} \quad (1.п.35)$$

Как следует из определения (1.п.32) компоненты обобщённых символов Кронекера четвёртого ранга имеют следующие значения:

$$\delta_{npqr}^{iklm} = \begin{cases} 1, & \text{если индексы верхней группы образуют} \\ & \text{чётную перестановку индексов нижней группы} \\ -1, & \text{если индексы верхней группы образуют нечётную} \\ & \text{перестановку индексов нижней группы} \\ 0, & \text{если индексы верхней и нижней групп не} \\ & \text{совпадают или некоторые индексы совпадают в} \\ & \text{какой-либо из групп} \end{cases} \quad (1.п.36)$$

Аналогичные соотношения справедливы и для символов Кронекера третьего, второго и первого рангов.

Нетрудно убедиться в справедливости следующих соотношений:

142.

$$\delta_{lm}^{ik} = \delta_l^i \delta_m^k - \delta_l^k \delta_m^i \quad (1.п.37)$$

$$\delta_{lmn}^{ikl} = \delta_{lm}^{ik} \delta_n^l - \delta_{lm}^{il} \delta_n^k + \delta_{lm}^{kl} \delta_n^i = \quad (1.п.38)$$

$$= \delta_l^i \delta_m^k \delta_n^l - \delta_l^i \delta_m^l \delta_n^k + \delta_l^k \delta_m^l \delta_n^i - \delta_l^i \delta_m^l \delta_n^k + \delta_l^l \delta_m^k \delta_n^i - \delta_l^k \delta_m^i \delta_n^l$$

$$\delta_{npqr}^{iklm} = \delta_{npq}^{ikl} \delta_r^m - \delta_{npq}^{ikm} \delta_r^l + \delta_{npq}^{ilm} \delta_r^k - \delta_{npq}^{klm} \delta_r^i \quad (1.п.39)$$

Имеют место очевидные соотношения для произвольного тензора, в частности для вектора A_i и антисимметричного по всем индексам тензора $A_{ik\dots l}$ m -го ранга:

$$A_i = \delta_i^k A_k \quad (1.п.40)$$

$$A_{ik\dots l} = \frac{1}{m!} \delta_{ik\dots l}^{lm\dots n} A_{lm\dots n} \quad (1.п.41)$$

Очевидно, что компоненты δ_k^i , равны

$$\delta_k^i = \begin{cases} 1, & \text{если } i=k \\ 0, & \text{если } i \neq k \end{cases} \quad (1.п.42)$$

Его след: $\delta_i^i = 4$.

Определив g^{ik} соотношением

$$g_{il} g^{lk} = \delta_i^k \quad (1.п.43)$$

мы получим контравариантный метрический тензор псевдоевклидова пространства g^{ik} . Тензоры g^{ik} и g_{ik} имеют одинаковые компоненты

$$(g^{ik}) = (g_{ik}) \quad (1.п.44)$$

которые можно представить в виде таблицы (1.п.23).

С помощью ковариантного и контравариантного метрических тензоров поднимаются и опускаются индексы любых тензоров и, в частности, векторов:

$$g_{ik} A^k = A_i, \quad g^{ik} A_k = A^i \quad (1.п.45)$$

Скалярное произведение двух 4-векторов можно поэтому записать в виде

$$A^i A_i = g_{ik} A^i A^k = g^{ik} A_i A_k \quad (1.п.46)$$

Тензоры δ_k^i , g_{ik} , g^{ik} исключительны в том отношении, что их компоненты одинаковы во всех системах координат.

Таким же свойством обладает и совершенно антисимметричный единичный символ Леви-Чивита четвёртого ранга e_{iklm} , компоненты которого меняют знак при перестановке любых двух индексов, причём отличные от нуля компоненты равны ± 1 . Из антисимметричности следует, что все компоненты этого объекта, у которых хотя бы два индекса совпадают, равны нулю, так что

отличны от нуля лишь те, у которых все четыре индекса различны. Из определения (1.п.31) следует

$$e_{0123} = +1 \quad (1.п.47)$$

(при этом $e^{0123} = -1$). Тогда все отличные от нуля компоненты e_{iklm} равны $+1$ или -1 , смотря по тому, чётным или нечётным числом перестановок (транспозиций) могут быть приведены числа i, k, l, m к последовательности $0, 1, 2, 3$. Число таких компонент равно $4! = 24$. Поэтому

$$e^{iklm} e_{iklm} = -24 \quad (1.п.48)$$

По отношению к поворотам системы координат величины e_{iklm} ведут себя как компоненты тензора; однако при изменении знака у одной или трёх координат компоненты e_{iklm} , будучи определены одинаково для всех систем координат, не изменяются, в то время как компоненты тензора должны были бы изменить знак. Поэтому e_{iklm} есть, собственно говоря, не тензор, а, как говорят псевдотензор. *Псевдотензоры* любого ранга, в частности *псевдоскаляры*, ведут себя как тензоры при всех преобразованиях координат, за исключением тех, которые не могут быть сведены к поворотам, то есть за исключением отражений, то есть изменений знаков координат, не сводимых к вращениям.

Произведения $e_{iklm} e^{prst}$ образуют 4-тензор 8-го ранга, причём уже тензор истинный; упрощением по одной или нескольким парам индексов из него получаются тензоры 6-го, 4-го и 2-го рангов. Все эти тензоры имеют одинаковый вид во всех координатных системах. Поэтому их компоненты должны выражаться в виде комбинаций произведений компонент единичного тензора δ_i^k — единственного истинного тензора, компоненты которого во всех системах координат одинаковы. Эти комбинации представлены соотношениями (1.п.31), (1.п.32) – (1.п.35), (1.п.37) – (1.п.39).

Если A^{ik} – антисимметричный тензор, то тензор A^{ik} и псевдотензор $A^{*ik} = \frac{1}{2} e^{iklm} A_{lm}$ называют дуальными друг другу. Аналогично $e^{iklm} A_m$ есть антисимметричный псевдотензор 3-го ранга, дуальный вектору A^i . Произведение $A^{ik} A_{ik}^*$ дуальных тензоров есть, очевидно, псевдоскаляр.

При отражении системы 3-координат, то есть при изменении знака всех координат, компоненты обычного трёхмерного вектора тоже меняют знак. Такие векторы называют *полярными*. Компоненты же вектора, который может быть представлен как векторное произведение двух полярных векторов, при отражении не меняют знак. Такие векторы называют *аксиальными*. Скалярное произведение

144.

полярного и аксиального векторов является не истинным, а псевдоскаляром: при отражении координат оно меняет знак. Аксиальный вектор является псевдовектором, дуальным к антисимметричному тензору.

Чтобы показать это, воспользуемся формулой четвёртой строки табл.1. п.1. Так, если $\mathbf{C} = [\mathbf{AB}]$, то

$$\begin{aligned} C_\alpha &= [\mathbf{AB}]_\alpha = e_{\alpha\beta\gamma} A_\beta B_\gamma = \frac{1}{2} (e_{\alpha\beta\gamma} A_\beta B_\gamma + e_{\alpha\beta\gamma} A_\beta B_\gamma) = \\ &= \frac{1}{2} (e_{\alpha\beta\gamma} A_\beta B_\gamma + e_{\alpha\gamma\beta} A_\gamma B_\beta) = \frac{1}{2} (e_{\alpha\beta\gamma} A_\beta B_\gamma - e_{\alpha\beta\gamma} A_\gamma B_\beta) = \\ &= \frac{1}{2} e_{\alpha\beta\gamma} (A_\beta B_\gamma + A_\gamma B_\beta) = \frac{1}{2} e_{\alpha\beta\gamma} C_{\beta\gamma}, \quad \text{где } C_{\beta\gamma} = A_\beta B_\gamma - A_\gamma B_\beta \end{aligned}$$

Вернёмся к 4-тензорам. Пространственные ($i, k \dots = 1, 2, 3$) компоненты антисимметричного 4-тензора A^{ik} составляют по отношению к чисто пространственным преобразованиям трёхмерный антисимметричный тензор; согласно сказанному выше его компоненты выражаются через компоненты трёхмерного аксиального вектора. Компоненты же A^{01}, A^{02}, A^{03} составляют, по отношению к тем же преобразованиям, трёхмерный полярный вектор. Таким образом, компоненты антисимметричного 4-тензора можно представить в виде таблицы:

$$(A^{ik}) = \begin{vmatrix} 0 & p_x & p_y & p_z \\ -p_x & 0 & -a_z & a_y \\ -p_y & a_z & 0 & -a_x \\ -p_z & -a_y & a_x & 0 \end{vmatrix} \quad (1.п.49)$$

Причём по отношению к пространственным преобразованиям \mathbf{p} и \mathbf{a} – полярный и аксиальный векторы. Перечисляя компоненты антисимметричного 4-тензора, мы будем записывать их в виде $A^{ik} = (\mathbf{p}, \mathbf{a})$; тогда ковариантные компоненты того же тензора $A_{ik} = (-\mathbf{p}, \mathbf{a})$.

Остановимся, наконец, на некоторых дифференциальных и интегральных операциях четырёхмерного тензорного анализа.

4-градиент скаляра φ есть 4-вектор

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \nabla \varphi \right)$$

При этом необходимо иметь в виду, что написанные производные должны рассматриваться как ковариантные компоненты 4-вектора. Действительно, дифференциал скаляра

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} dx^i$$

тоже есть скаляр; из его вида (скалярное произведение двух 4-векторов) и следует сделанное утверждение.

Вообще, операторы дифференцирования по координатам $\frac{\partial}{\partial x^i}$ должны рассматриваться как ковариантные компоненты операторного 4-вектора. Поэтому, например, является скаляром дивергенция 4-вектора – выражение $\frac{\partial A^i}{\partial x^i}$, в котором дифференцируются контравариантные компоненты A^i .

В трёхмерном пространстве интегрирование может производиться по объёму, по поверхности и по кривой. В четырёхмерном пространстве, соответственно, возможны четыре рода интегрирований.

1. Назовём элементами интегрирования в четырёхмерном пространстве, соответствующими элементарным ячейкам с 1, 2, 3, 4 упорядоченными рёбрами следующие выражения:

$$[dx^i]_\alpha = d_\alpha x^i \quad (1.п.50)$$

$$[dx^i dx^k]_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}^{\mu\nu} d_\mu x^i d_\nu x^k \quad (1.п.51)$$

$$[dx^i dx^k dx^l]_{\alpha\beta\gamma} = \delta_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\lambda} d_\mu x^i d_\nu x^k d_\lambda x^l \quad (1.п.52)$$

$$[dx^i dx^k dx^l dx^m]_{\alpha\beta\gamma\delta} = \delta_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\mu\nu\lambda\tau} d_\mu x^i d_\nu x^k d_\lambda x^l d_\tau x^m \quad (1.п.53)$$

Здесь латинские i, k, l, m индексируют компоненты вектора (компоненты ребра элемента интегрирования), а греческие индексы – номера векторов (рёбер элемента интегрирования), участвующих в построении элемента интегрирования. Если в процессе решения задач не предвидятся перестановки местами этих векторов (рёбер), то индексацию векторов обычно опускают.

В четырёхмерном пространстве соответственно видам элементов интегрирования (1.п.50), (1.п.51), (1.п.52), (1.п.53) могут рассматриваться четыре вида интегральных выражений:

$$\int_{(1)} \omega_{(\dots)} = \int_{(1)} a_{(\dots)i} [dx^i] \quad (1.п.54)$$

$$\int_{(2)} \omega_{(\dots)} = \int_{(2)} a_{(\dots)ik} [dx^i dx^k] \quad (1.п.55)$$

$$\int_{(3)} \omega_{(\dots)} = \int_{(3)} a_{(\dots)ikl} [dx^i dx^k dx^l] \quad (1.п.56)$$

$$\int_{(4)} \omega_{(\dots)} = \int_{(4)} a_{(\dots)iklm} [dx^i dx^k dx^l dx^m] \quad (1.п.57)$$

где $a_{(\dots)i\dots m}$ – известные функции координат. В интегральных выражениях (1.п.54), (1.п.55), (1.п.56), (1.п.57) интегрирование производится по одномерному, двумерному, трёхмерному и четырёхмерному многообразиям.

Если многообразие V_m является m -мерной границей многообразия V_{m+1} , то при любых

$$\omega_{(\dots)} = a_{(\dots)i\dots m} [dx^i \dots dx^m]$$

Имеет место соотношение, аналогичное (1.п.16) – обобщённая теорема Стокса:

$$\int_{(m)} a_{(\dots)i\dots m} [dx^i \dots dx^m] = \int_{(m+1)} \frac{\partial a_{(\dots)i\dots m}}{\partial x^n} [dx^n dx^i \dots dx^m] \quad (1.п.58)$$

Однако, как уже говорилось, в качестве исходных элементов интегрирования берутся так называемые ковариантные объёмы $d\tau_{(\dots)}$, которые являются тензорами, дуальными к внешним дифференциальным формам $[dx^i dx^k \dots dx^m]$.

Приведём формулы, позволяющие переходить от внешних форм $[dx^i dx^k \dots dx^m]$ к ковариантным объёмам $d\tau_{(\dots)}$ и обратно:

$$dl^i = [dx^i] \quad (1.п.59)$$

$$df_{ik}^* = d\tau_{ik} = \frac{1}{2!} e_{iklm} [dx^l dx^m] \quad (1.п.60)$$

$$dS_i = d\tau_i = \frac{1}{3!} e_{iklm} [dx^k dx^l dx^m] \quad (1.п.61)$$

$$d\Omega = d\tau = \frac{1}{4!} e_{iklm} [dx^i dx^k dx^l dx^m] \quad (1.п.62)$$

и обратно

$$[dx^i] = dl^i \quad (1.п.63)$$

$$[dx^i dx^k] = \frac{1}{2!} e^{lmik} df_{lm}^* \quad (1.п.64)$$

$$[dx^i dx^k dx^l] = e^{mikl} dS_m \quad (1.п.65)$$

$$[dx^i dx^k dx^l dx^m] = e^{iklm} d\Omega \quad (1.п.66)$$

Итак, возможны четыре варианта интегрирования по многообразиям четырёхмерного пространства.

Интеграл по одномерному многообразию в 4-пространстве (по кривой). Элементом интегрирования является 4-вектор dx^i .

Интеграл по двумерной поверхности в 4-пространстве. Как известно, в трёхмерном пространстве проекция площади параллелограмма, построенного на двух векторах $d\mathbf{r}$ и $d\mathbf{r}'$, на координатные плоскости $x_\alpha x_\beta$ равны $dx_\alpha dx'_\beta - dx_\beta dx'_\alpha$. Аналогично

в 4-пространстве бесконечно малый элемент поверхности определяется антисимметричным тензором второго ранга $df^{ik} = dx^i dx'^k - dx^k dx'^i$; его компоненты равны проекциям площади элемента на координатные плоскости. Очевидно, что эти элементы интегрирования совпадают с элементами Картана (1.п.11) и (1.п.51). В трёхмерном пространстве, как известно, вместо тензора $df_{\alpha\beta}$ в качестве элемента поверхности используется вектор df_α дуальный тензору $df_{\alpha\beta}$: $df_\alpha = \frac{1}{2} e_{\alpha\beta\gamma} df_{\beta\gamma}$. Геометрически это есть вектор, нормальный к элементу поверхности и по абсолютной величине равный площади этого элемента. В четырёхмерном пространстве такого вектора построить нельзя, но можно построить тензор df^{*ik} , дуальный тензору df^{ik} , то есть

$$df^{*ik} = \frac{1}{2} e^{iklm} df_{lm} \quad (1.п.67)$$

Геометрически он изображает элемент поверхности, равный и “нормальный” элементу df^{ik} ; все лежащие на нём отрезки ортогональны ко всем отрезкам на элементе df^{ik} . Очевидно, что $df^{ik} f_{ik}^* = 0$. Определения дуальных элементов интегрирования совпадают с определениями ковариантных объёмов (1.п.18) и (1.п.60)

Интеграл по гиперповерхности, то есть по трёхмерному многообразию. В трёхмерном пространстве объём параллелепипеда, построенного на трёх векторах, равен, как известно, определителю третьего порядка, составленному из компонент этих векторов. В 4-пространстве аналогичным образом выражаются проекции объёма “параллелепипеда” (то есть “площади” гиперповерхности), построенного на 4-векторах $d_\alpha x^i, d_\beta x^i, d_\gamma x^i$; они даются определителями

$$dS^{ikl} = \begin{vmatrix} d_\alpha x^i & d_\beta x^i & d_\gamma x^i \\ d_\alpha x^k & d_\beta x^k & d_\gamma x^k \\ d_\alpha x^l & d_\beta x^l & d_\gamma x^l \end{vmatrix} \quad (1.п.68)$$

составляющими тензор 3-ранга, антисимметричный по трём индексам. Это определение выражается и с помощью элементов интегрирования Картана (1.п.52). Однако, как и в предыдущем случае, в качестве элемента интегрирования по гиперповерхности удобнее пользоваться ковариантным объёмом, то есть 4-вектором dS_i , дуальным тензору dS^{ikl} (1.п.61). Так, согласно (1.п.61) и (1.п.65)

$$dS_i = \frac{1}{6} e_{iklm} dS^{klm}, \quad dS^{klm} = e^{iklm} dS_i \quad (1.п.69)$$

Геометрически dS_i – 4-вектор, по величине равный “площади” элемента гиперповерхности и по направлению нормальный к этому элементу (то есть перпендикулярный ко всем прямым, проведённым в элементе гиперповерхности). В частности,

148.

$dS_0 = dx dy dz$, то есть представляет собой элемент трёхмерного объёма dV – проекцию элемента гиперповерхности на гиперплоскость $x^0 = const$.

Интеграл по четырёхмерному объёму. Элементом интегрирования является произведение дифференциалов:

$$d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = dt dV.$$

Этот элемент является скаляром: очевидно, что объём участка 4-пространства не меняется при повороте системы координат.

Аналогично теоремам Гаусса и Стокса трёхмерного векторного анализа существуют теоремы, позволяющие преобразовывать друг в друга четырёхмерные интегралы. Рассмотрим, как это делается.

Аналог теоремы Гаусса-Остроградского

$$\begin{aligned} \oint_S A^i dS_i &= \frac{1}{3!} \oint_S A^i e_{iklm} [dx^k dx^l dx^m] = \\ &= \frac{1}{3!} \int_{\Omega} e_{iklm} \frac{\partial A^i}{\partial x^n} [dx^n dx^k dx^l dx^m] = \\ &= \frac{1}{3!} \int_{\Omega} e_{iklm} e^{nklm} \frac{\partial A^i}{\partial x^n} d\Omega = \int \delta_i^n \frac{\partial A^i}{\partial x^n} d\Omega = \int \frac{\partial A^i}{\partial x^i} d\Omega \end{aligned}$$

Таким образом, интеграл по замкнутой гиперповерхности можно преобразовать в интеграл по заключённому в ней 4-объёму путём замены элемента интегрирования dS_i на оператор:

$$dS_i \rightarrow d\Omega \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (1.п.70)$$

Например, для интеграла от вектора A^i имеем:

$$\oint A^i dS_i = \int \frac{\partial A^i}{\partial x^i} d\Omega \quad (1.п.71)$$

Эта формула и является обобщением теоремы Гаусса.

Интеграл по двумерной поверхности

$$\begin{aligned} \oint A^{ik} df_{ik}^* &= \oint A^{ik} \frac{1}{2} e_{iklm} [dx^l dx^m] = \frac{1}{2} e_{iklm} \oint A^{ik} [dx^l dx^m] = \\ &= \frac{1}{2} e_{iklm} \int \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^n} [dx^n dx^l dx^m] = \frac{1}{2} e_{iklm} \int \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^n} e^{pnlm} dS_p = \\ &= \frac{1}{2} e_{iklm} e^{pnlm} \int \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^n} dS_p = \delta_{ik}^{pn} \int \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^n} dS_p = \\ &= (\delta_i^p \delta_k^n - \delta_i^n \delta_k^p) \int \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^n} dS_p = \int \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k} dS_i - \int \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^i} dS_k \end{aligned}$$

Интеграл по двумерной поверхности преобразуется в интеграл по “охватываемой” ею гиперповерхности заменой элемента интегрирования df_{ik}^* на оператор:

$$df_{ik}^* \rightarrow dS_i \frac{\partial}{\partial x^k} - dS_k \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (1.п.72)$$

Например, для интеграла от антисимметричного тензора A^{ik} имеем:

$$\frac{1}{2} \oint A^{ik} df_{ik}^* = \frac{1}{2} \int \left(dS_i \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k} - dS_k \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^i} \right) = \int dS_i \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k} \quad (1.п.73)$$

Аналог теоремы Стокса

$$\oint_L A_k dx^k = \oint_L A_k [dx^k] = \int_S \frac{\partial A_k}{\partial x^i} [dx^i dx^k] = \int_S \frac{\partial A_k}{\partial x^i} df^{ik}$$

Интеграл по четырёхмерной замкнутой линии преобразуется в интеграл по охватываемой ею поверхности путём замены

$$dx^i \rightarrow df^{ki} \frac{\partial}{\partial x^k} \quad (1.п.74)$$

Так, для интеграла от вектора имеем:

$$\oint A_i dx^i = \int df^{ki} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} = \frac{1}{2} \int df^{ki} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) \quad (1.п.75)$$

что является обобщением теоремы Стокса.

Библиография

1. Michelson AA, Morley E. *On the relative motion of the Ears and the luminifrous ether.* American Journal of Science, ser.3, 1887, vol.34, p 333-345
2. Франкфурт УИ, Франк АМ. *Оптика движущихся тел.* М., Наука, 1972
3. Ацюковский ВА. *Введение в эфиродинамику.* Деп. Рукопись №2760-ВО ВИНТИ 1980
4. *Эфирный ветер* (Под редакцией Ацюковского ВА). М., Энергоатомиздат, 1993
5. Вавилов СИ. *Собрание сочинений т.4.* Экспериментальные основания теории относительности. М., Издательство АН СССР, 1956. с. 9 – 109.
6. Müller H et al. *Phys. Rev. Lett.* 91 0200401 (2003)
7. Рагульский ВВ. *УФН* **167** 1022 (1997)
8. Ragulsky VV. *Phys. Rev. A* **235** 125; **236** 609 (1997)
9. Рагульский ВВ. *Изв. РАН. Сер. Физ.* **63** 818 (1999)
10. ГБ Малькин. *О возможности экспериментальной проверки второго постулата СТО, УФН,* **174**, № 7 07.2004
11. Ritz W. *Ann. Chim. Phys.* **8** (13) 145 (1908)
12. Ritz W. *Arch. Sci. Phys. Nat. Geneva.* **26** 209 (1908)
13. Majorana Q. *Phys. Rev.* **11** 411 (1908)
14. Tomsachek R. *Ann. Phys. (Leipzig)* **73** 125 (1924)
15. Бонч-Бруевич А.М. *ДАН СССР* **109** 481 (1956)
16. Alväger T., Farley F.J., Kjellman J.M., Wallin L. *Phys. Lett.* **12** 260 (1964)
17. Kantor W. *J. Opt.Soc. Am.* **52** 978 (1962)
18. Kantor W. *Spectrosc. Lett.* **3** 303 (1970)
19. Kantor W. *Spectrosc. Lett.* **3** 335 (1970)
20. Brecher K. *Phys. Rev. Lett.* **39** 1051 (1977)
21. Терлецкий Я.П. *Парадоксы теории относительности.* “Наука”, М., 1966 г.
22. Mermin N.D. *Amer. J.Phys.*, February 1984, v. 52, № 2, p.119
23. Ландау ЛД, Лифшиц ЕМ. *Теория поля.* “Наука”, М., 1988 г.
24. Фридман АА. *Мир как пространство и время.* “Наука и школа”, Петроград, 1922.
25. Г. Вертхейм. *Эффект Мёссбауэра, “Мир”, 1966.*
26. Окунь ЛБ. *Формула Эйнштейна: $E_0=mc^2$. “Не смеётся ли Господь Бог?”* *УФН*, **178**, 5 (2008)
27. Кулаков Ю.И. *Тензорный анализ для физиков (Лекции для студентов НГУ).* Новосибирск. 1967 г.
28. Моисеев НН. *Человек и ноосфера, “Молодая гвардия”, М., 1990г.*

2. Общая теория относительности (принципы)

Введение

Созданная в 1905 году специальная теория относительности (СТО) внесла значительные коррективы в понимание пространственно-временных отношений в реальном мире. Требовался концептуальный пересмотр основных физических дисциплин и теорий, возникла необходимость фундаментального релятивистского переосмысления всей физики. Поэтому естественно, что СТО после своего рождения фактически стала широкомасштабной методологической исследовательской программой по всем разделам физики. Коллективными усилиями таких выдающихся учёных, как М. Планк, Г. Минковский, А. Зоммерфельд, М. Лауэ, М. Борн и других, в которых ведущую роль играл и сам А. Эйнштейн, были созданы релятивистская механика дискретных систем, релятивистские гидродинамика и теория упругости, феноменологическая электродинамика и т. д. Вполне закономерно встал вопрос и о создании релятивистской теории гравитации.

“... Это драма, драма идей”, - вот оценка атмосферы поисков, находок, противоречий и решений начала периода релятивизации физики и гравитации, данная самим Эйнштейном.

Сегодня не надо доказывать, что геометрия пространства не обязана быть евклидовой, а геометрия четырёхмерного пространственно-временного многообразия – псевдоевклидовой. Однако тогда подобные мысли казались скорее еретическими, чем рабочими гипотезами.

Сегодня не надо доказывать необходимости ковариантной формулировки физических законов, искать математического воплощения этой идеи и создавать тензорный анализ.

Реалии, возникшие после создания СТО :

- новая концепция пространственно-временных отношений;
 - объединение пространства и времени в единое многообразие;
 - введение нового эволюционного параметра, упорядочивающего события;

154.

- выделенность инерциальных систем отсчёта (особая “печать” инерциальной симметрии);
- Лоренц-инвариантность (ковариантная формулировка законов физики);
- возможность существования нелокализованных материальных объектов;
- эквивалентность массы и энергии ($E = m \cdot c^2$).

В это же время не были чётко определены и осознаны такие послы, как например:

- ✓ необходимость снятия “инерциальной печати”;
- ✓ разделение ОТО¹⁴⁾, как хроногеометрической концепции и РТГ, как теории, связывающей метрику с материей;
- ✓ осознание роли принципа эквивалентности в ньютоновой формулировке - в форме пропорциональности инерционной и гравитационной масс;
- ✓ нарушение свойства аддивности масс в силу установленной эквивалентности массы и энергии противоречащее свойству линейности уравнения Пуассона для гравитационного потенциала.

Чтобы получить нынешнюю релятивистскую теорию гравитации, всё должно было совместиться в одном — в релятивистских уравнениях гравитации, которые должны были удовлетворять таким критериям:

- раскрывать обусловленность вида метрики пространственно-временных отношений присутствием материи;
- описывать связь геометрии с гравитацией;
- удовлетворять принципу общей ковариантности;
- воплотить тензорный характер идеи общей ковариантности;
- нелинейность уравнений для гравитационного поля.

Драматизм истории возникновения релятивистской теории гравитации можно понять как противоречивый путь к самосогласованному сочетанию гравитационного и пространственно-

¹⁴⁾ ОТО – Общая Теория Относительности, РТГ – Релятивистская Теория Гравитации

временного аспектов, что к тому времени ещё не приобрело законченной формулировки уравнений для гравитационного поля в релятивистски ковариантной форме.

Мы будем следовать изложению в рамках внутренней логики предмета с учетом современного понимания проблематики, в продолжение и развитии изложения ^[1]. Исторический же обзор генезиса тензорно-геометрической концепции гравитации приведён в работах [2а, 2б].

Главным противоречием между СТО и ньютоновым законом всемирного тяготения явилось допущение о дальнодействии гравитационной силы. Это допущение никак не могло сосуществовать с выводом СТО о существовании предельной скорости распространения взаимодействия. Именно в направлении преодоления этого противоречия и начались поиски новой теории гравитации.

По свидетельству^[2а], первое четырёхмерное обобщение закона всемирного тяготения дал А. Пуанкаре (1905-1906). Более наглядно и обстоятельно различные варианты этого обобщения были представлены Г. Минковским, А. Зоммерфельдом, Х. Лоренцем, В. де Ситтером (1907-1911). В этих работах была предпринята попытка релятивизации силы гравитационного взаимодействия. Начало же работ Эйнштейна по проблемам разработки релятивистской теории гравитации относится к 1907 году. В противовес предыдущим авторам, им были предприняты попытки релятивизации дифференциального уравнения для потенциала гравитационного поля, то есть уравнения Пуассона. При этом у Эйнштейна были намерения включить в теорию эмпирический факт равенства гравитационной и инертной масс — начального постулата ньютоновой механики и объяснить при этом аномальное смещение перигелия Меркурия. Но ни первая (Пуанкаре, Минковский), ни вторая (Эйнштейн) программы не увенчались успехами.

В это же время Эйнштейну удалось обобщить факт равенства инертной и гравитационной масс и впервые предметно сформулировать принцип эквивалентности, который получил в дальнейшем название принципа эквивалентности в слабой форме

Теория относительности.

156.

(WEP). На основе принципа эквивалентности Эйнштейн предсказал два новых гравитационных эффекта: искривление световых лучей в гравитационном поле и зависимость хода часов от гравитационного потенциала (красное смещение).

Расширение сферы действия принципа эквивалентности позволило подойти вплотную к проблеме “снятия инерциальной печати”, доставшейся в наследство от галилеевой механики и сохранившейся в специальной теории относительности, как наследственный атрибут. В рассмотрение вводятся ускоренные системы отсчёта, как причины возникновения эквивалентного однородного гравитационного поля. Но все эти идеи носили предварительный характер.

На повестке дня встал вопрос радикального расширения программы релятивизации, на пути которой вставали серьёзные трудности с распространением принципа эквивалентности на неоднородные гравитационные поля. Требовалось и расширение лоренцевой группы преобразований пространственно-временного многообразия до преобразований, описывающих переходы к произвольным системам отсчёта. Волей-неволей, а на “нормальное” выражение для интервала между бесконечно близкими событиями наступала “тьнь” величины скорости света, зависящей от гравитационного потенциала, а значит и от координат пространства-времени:

$$ds^2 = c(t, x, y, z)^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Незыблемое для СТО псевдоевклидово координатное представление пространственно-временных отношений теряло свою метричность. Скорость света становилась всё “больше и больше непостоянной”: при *большем* гравитационном потенциале, возникало и *большее* изменение величины и направления скорости распространения света при евклидовой метрике пространства.

Вместе с тем локальная справедливость СТО, принципа эквивалентности, расширение класса допустимых систем отсчёта вело к необходимости существенного обобщения относительности, связанного с произвольными непрерывными преобразованиями пространственно-временных координат, и перехода к общей метрике

псевдориманова пространства-времени. “Логический круг” замыкался на выражении интервала в виде:

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$$

Это сразу же определило и закон движения материальной частицы в искривлённом пространстве в виде вариационного принципа:

$$\delta \int ds = 0 ,$$

из которого непосредственно следовало уравнение движения в виде, аналогичном второму закону Ньютона (пропорциональность ускорения приложенной силе):

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} = -\Gamma_{kl}^i \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds}$$

Основное содержание этого уравнения: оно описывает движение тела по геодезической. Здесь относительность получила своё обобщение и завершенность, чем была подготовлена площадка для “встречи” геометрии и гравитации: свободное движение материального тела происходит по геодезическим линиям, по линиям наименьшей длины той геометрии, которая должна определиться гравитацией в рамках соответствующей теории.

Логическим же замыканием в построении общей теории относительности можно считать переход от лоренцевых преобразований к общим непрерывным координатным преобразованиям, придание преобразованиям для физических величин тензорного характера, сохраняющим величину интервала, расширение интерпретации параметра s , как общего упорядочивающего фактора пространственно-временных отношений, замену принципа инерциальной симметрии, справедливого лишь для инерциальных систем отсчёта, на общий принцип ковариантности, применяемый к произвольным системам отсчёта при произвольных координатных преобразованиях.

В историческом становлении релятивистки ковариантных уравнений для гравитационного поля Эйнштейна-Гильберта поначалу не было чёткой дифференциации общей теории на ОТО и РТГ. Скорее наблюдалась обратная картина, картина взаимопроникновения одного в другое, нерасчленённое единство одной теории – своеобразный

Теория относительности.

158.

единый “теоретический бульон”. Может поэтому и теорию гравитации до сих пор часто называют не совсем корректно - общей теорией относительности. Необходимость же разделения теорий Эйнштейна-Гильберта и ОТО была осознана гораздо позже исторических работ, связанных с получением конечного результата и эти две дисциплины приобрели относительно самостоятельные статусы: ОТО - как хроногеометрическая теория и РТГ - как теория гравитации, наполняющая ОТО конкретикой материального присутствия, влияющей на геометрию пространственно-временных отношений.

К финальному этапу релятивизации гравитации, к окончательной формулировке ковариантных уравнений для гравитационного поля Эйнштейн пришёл вместе Гильбертом ^[2a, 2b].

Критическими экспериментами для подтверждения принципов ОТО могут быть только непосредственные измерения пространственно-временных характеристик метрики. Например, для проверки кривизны 3-пространства можно измерить сумму углов “большого” пространственного треугольника и сравнить с суммой углов, получаемой в евклидовой геометрии (180^0). Для проверки же евклидовости 4-пространства (пространства-времени) необходимы более сложные хроногеометрические измерения.

Однако подобные эксперименты не смогут дать нам картину всех значений для метрического тензора g_{ik} . Метрический тензор, как объект геометрии, может быть получен только в рамках теории, связывающей его значения с распределением материи в пространстве и с проявлением других факторов. Такой теорией стала РТГ. Позже появились и другие теории, конкурирующие с РТГ. В этом плане экспериментальная проверка именно этих теорий и становится неотложной и актуальной задачей.

Таким образом, ОТО – физическая парадигма макропространственно-временных отношений, пришедшая на смену ньютоновой и дополнившая конкретикой лейбницеву концепцию СТО.

Датой рождения симбиоза ОТО и РТГ считается 25 ноября 1915 года. В дальнейшем мы будем придерживаться традиционной терминологии, имея в виду, однако, концептуальное различие между

ОТО и РТГ. Там же, где возникнут значимые обстоятельства, требующие уточнений, мы будем обращать на это особое внимание.

Одновременно с возникновением теории началась и её экспериментальная проверка. Эйнштейн сразу же рассчитал такие предсказанные теорией эффекты, как смещение перигелия Меркурия, что не было объяснено в рамках существовавших теорий, отклонение света, которое впоследствии также подтвердилось. Но по сравнению с внутренней согласованностью и элегантностью теории эти частные эмпирические подтверждения, по его мнению, явились лишь незначительными эпизодами в начале "деловой жизни" РТГ. Сегодня же эксперименты по гравитации являются основным двигателем теории на фоне продолжающихся усилий проверить теоретические предсказания ОТО и РТГ, найти носители гравитации в сильных взаимодействиях частиц, зафиксировать гравитационные волны от астрономических объектов.

История экспериментальной общей относительности может быть разделена приблизительно на четыре периода^[3]: *Возникновение, Затишье, Золотая Эра и Поиски Сильной Гравитации*.

Возникновение (1887–1919 гг.) включает в себя период проведения двух великих экспериментов, которые составляют фундамент релятивистской физики (эксперименты Майкельсона-Морли и Этвеша) и двух подтверждений РТГ (отклонение лучей света в гравитационном поле и смещение перигелия Меркурия).

После этого наступил период *Затишья* (1920-1960 гг.), во время которого уровень теоретических разработок РТГ временно превышал технологические и экспериментальные возможности её проверок и, как следствие - стагнация экспериментальной деятельности в этом направлении, возврат к текущим задачам физики и астрономии.

С начала 1960-х годов астрономические открытия (квазары, пульсары, космическое фоновое излучение), новые возможности для экспериментов выдвинули проблематику ОТО и РТГ на передний план физики. В течение *Золотой эры* (1960—1980 гг.) экспериментальная гравитации накопила огромный опыт. В это время предпринимались систематические, широкомасштабные усилия для наблюдения, объяснения и понимания предсказаний РТГ. Результаты

Теория относительности.

160.

сравнивались с предсказаниями альтернативных теорий гравитации. Выполнялись новые и новые экспериментальные проверки и сравнения. Период начался с эксперимента для подтверждения гравитационного смещения частоты света (1960 г.) и завершился регистрацией уменьшения орбитального периода двойного пульсара Hulse–Taylor вследствие излучения гравитационных волн (1979 г.). Результаты этих экспериментов полностью соответствовали предсказаниям ОТО и РТГ, что явилось их триумфальным подтверждением. Большинство же альтернативных теорий гравитации не смогли объяснить эти факты ^[4].

С 1980 года теория вступила в так называемый период *Поиска Сильной Гравитации*. Многие эффекты из интересующих предсказаний на фоне слабых полей крайне слабы и трудны для проверок. Всё это требовало дальнейшего технологического совершенствования для достижения диапазонов требуемой точности обнаружения.

Чувствительность экспериментов со слабой гравитацией к систематическим ошибкам, возникающим из-за неконтролируемых влияний на ход эксперимента, по проверке РТГ компенсировалась с помощью вынужденных нестандартных приближений, в которых, однако, возникали новые и неожиданные, в некоторых случаях совсем недорогие, тесты гравитации, причём на основе новых теоретических идей и на базе новой экспериментальной техники, часто непохожих на исходные. Эти примеры включают использование лазер-охлаждённых атомных и ионных ловушек для выполнения сверхточных проверок специальной теории относительности; предложение "пятой" силы, что привело к целому ряду новых тестов слабого принципа эквивалентности; возникновение идеи дополнительных размерностей, которые послужили мотивацией для новых тестов закона обратных квадратов в тяготении на субмиллиметровых масштабах.

Вместе с этим всё большее внимание стало уделяться экспериментам на основе изучения воздействия сильных гравитационных полей.

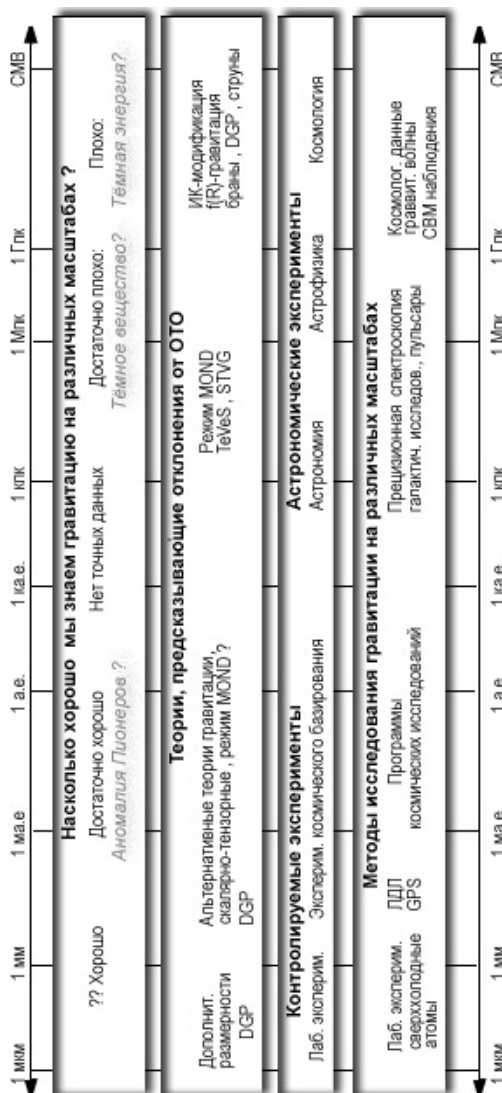


Рис. 2.1 Современное состояние в области гравитации на различных пространственных масштабах
Здесь: СМВ - фон реликтового излучения; DGP - модель Девали-Поррати; GPS - глобальная система позиционирования; ЛДЛ - лазерная дальнометрия Луны; MOND - модифицированная ньютоновская динамика; TeVeS - тензорно-векторно-скалярная теория гравитации; STVG - скалярно-тензорно-векторная теория гравитации; ИК - инфракрасная модификация гравитации; f(R)-гравитация.

162.

В картине описания гравитации существует безразмерный параметр $\epsilon \sim GM/(Rc^2)$, где G – гравитационная постоянная, M – характерная масса масштаба рассматриваемого явления, R – характерный масштаб расстояний, c – скорость света. Главное отличие сильной гравитации от слабой демонстрируется оценкой величины этого параметра. Вблизи горизонта событий невращающейся чёрной дыры или для расширяющейся видимой части Вселенной $\epsilon \sim 0.5$; для нейтронных звёзд $\epsilon \sim 0.2$. Это и есть режимы сильной гравитации. Для солнечной системы $\epsilon < 10^{-5}$, а это – режим слабой гравитации.

На одном полюсе сильных гравитационных полей находится физика явлений планковских масштабов. Удастся ли объединение сил в этих масштабах? Покажет ли квантование гравитации какие-либо наблюдаемые эффекты доступные экспериментам? Здесь следует отметить, что значительно улучшенные тесты принципа эквивалентности, закона обратных квадратов, локальной лоренц-инвариантности позволяют организовать поиски связей или следов явлений планковских масштабов.

На другом же полюсе сильных гравитационных полей находятся компактные объекты такие, как черные дыры и нейтронные звезды. В настоящее время с помощью астрофизических наблюдений, детектирования гравитационных волн планируется изучать и тестировать РТГ в сильном поле, в очень динамичном режиме, связанным с формированием и развитием этих объектов.

Состояние современного понимания проблем гравитации в связи с ОТО^[3] иллюстрируется на рис. 2.1.

Глава 1. “Снятие инерциальной печати”

Обобщение СТО

Почти сакраментальная фраза: *С чего лучше всего начать...* изложение ОТО? Эта же фраза положила начало изложению и СТО^[1]. Ответ: со снятия инерциальной “печати”, доставшейся в наследство от механики Галилея и Ньютона и унаследованной СТО.

Что же здесь представляется самым главным?

Известно, что инерциальная симметрия, связанная с преобразованиями Лоренца - это физико-математическая абстракция. Инерциальных же систем отсчёта реально не существует, есть лишь некоторый комплекс определённых условий, приближающий исходные условия к инерциальности. В таком случае реальностью должна стать ковариантность законов физики относительно произвольных преобразований координат (x^0, x^1, x^2, x^3) или, другими словами, должно быть обеспечено описание одинаковой видимости законов физики из произвольных систем отсчёта.

Здесь возникают естественные вопросы: что же такое система отсчёта в ОТО? Как её отличить и выделить среди множества произвольных четырёхмерных систем координат? Ведь система координат – это результат какого-либо способа арифметизации пространственно-временных отношений и довольно произвольного. А требование к системам отсчёта довольно жёсткое: они должны иметь связь с реальными физическими процессами и процедурами, как это описано, например, в^[1] для случая “плоского” пространства. В любой системе координат, как и в любой системе отсчета, каждое пространственно-временное событие идентифицируется четвёркой координат (x^0, x^1, x^2, x^3).

Относительно произвольных систем координат и арифметизации пространственно-временных отношений мы подразумеваем следующие изначальные определённости.

Первая. Основное свойство такой арифметизации – свойство непрерывности: бесконечно близким событиям должны соответствовать бесконечно близкие значения координат. Без этого

164.

свойства нельзя предпринять какие-либо рациональные шаги в построении геометрии пространственно-временных отношений.

Вторая. Изначально установленное соответствие значений метрического тензора с принятой арифметизацией пространственно-временных отношений.

Третья. Базовым свойством преобразований координат (смена арифметизации пространственно-временных отношений с помощью непрерывных преобразований) является инвариантность интервалов при этих преобразованиях. В частности, все интервалы, связанные распространением стандартного сигнала, равны нулю.

Оказывается, что эти определённости, рассматриваемые как принципы, весьма жёстко ограничивают возможные геометрии для пространства-времени.

В СТО величина интервала между двумя бесконечно близкими событиями в инерциальной системе отсчёта и в декартовой системе координат даётся выражением:

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = g_{ik} \overset{\circ}{dx}^i dx^k \quad (2.1.1)$$

Здесь $\overset{\circ}{g}_{ik}$ – диагональная единичная матрица с сигнатурой (+, -, -, -), представляющая так называемый метрический тензор, полностью определяющий псевдоевклидовы пространственно-временные отношения. Эта матрица имеет вид:

$$(\overset{\circ}{g}_{ik}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (2.1.2)$$

Переход из одной инерциальной системы отсчёта в другую сопровождается согласно СТО преобразованиями Лоренца:

$$\begin{array}{ll} \text{(прямые)} & \text{(обратные)} \\ x^0 = \frac{x'^0 + V x'^1}{\sqrt{1 - V^2}} & x'^0 = \frac{x^0 - V x^1}{\sqrt{1 - V^2}} \\ x^1 = \frac{x'^1 + V x'^0}{\sqrt{1 - V^2}} & x'^1 = \frac{x^1 - V x^0}{\sqrt{1 - V^2}} \\ x^2 = x'^2 & x'^2 = x^2 \\ x^3 = x'^3 & x'^3 = x^3 \end{array} \quad (2.1.3)$$

Преобразования (2.1.3) не меняют вида интервала (2.1.1) и метрического тензора (2.1.2). Однако применение произвольных преобразований

$$\begin{aligned}x^0 &= x^0(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3), \\x^1 &= x^1(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3), \\x^2 &= x^2(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3), \\x^3 &= x^3(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3);\end{aligned}\tag{2.1.4}$$

существенно изменяют вид метрического тензора, а значит и интервал не сохранит вида “теоремы Пифагора” (2.1.1). Компоненты же метрического тензора примут вид достаточно произвольных функций координат (x^0, x^1, x^2, x^3) . Однако обратным преобразованием интервал и компоненты метрического тензора могут быть приведены к первоначальному виду: интервал - к виду “теоремы Пифагора”, а метрический тензор – к единичному диагональному виду. Именно это свойство пространственно-временных отношений и связывается с псевдоевклидовостью или со свойством “плоского” пространства-времени.

Отказ от этого свойства, по сути своей *априорного*, является отказом от инерциальной симметрии, господствовавшей в течение всего периода становления физики от ньютоно-галилеевой до СТО. Именно с этого момента мы будем рассматривать интервалы, описываемые произвольным симметрическим метрическим тензором g_{ik}

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k\tag{2.1.5}$$

Соотношение (2.1.5) и представляет собой суть обобщения СТО. После этого обобщения излагаемую теорию с произвольным метрическим тензором g_{ik} следует называть общей теорией относительности (ОТО).

Преобразование физических величин

Прежде всего, нам необходимо выяснить – как преобразуются физические величины при общих преобразованиях координат (2.1.4). Начнем со скалярного интервала s .

166.

Поскольку интервал, как непосредственное следствие СТО, является *мерой* пространственно-временных отношений, то он по определению должен быть инвариантом преобразований координат (2.1.4).

$$ds'^2 = ds^2 \quad (2.1.6)$$

Согласно (2.1.5),

$$ds'^2 = g'_{ik} dx'^i dx'^k =$$

$$= \frac{\partial x'^i}{\partial x^n} \frac{\partial x'^k}{\partial x^m} g'_{ik} dx^n dx^m = g_{nm} dx^n dx^m = ds^2 \quad (2.1.7)$$

Соотношение (2.1.7) должно выполняться при любых dx'^i, dx'^k и dx^n, dx^m , значит должно выполняться следующее равенство:

$$g_{nm} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^n} \frac{\partial x'^k}{\partial x^m} g'_{ik} = \overline{c_n^i} \overline{c_m^k} g'_{ik} \quad (2.1.8)$$

где

$$\overline{c_n^i} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^n} \quad (2.1.9)$$

Формулы преобразования дифференциалов координат получаются аналогично:

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} dx'^k = \underline{c_k^i} dx'^k \quad (2.1.10)$$

где

$$\underline{c_k^i} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \quad (2.1.11)$$

Сопоставляя (2.1.8), (2.1.9) и (2.1.10), (2.1.11), можно увидеть, что преобразования объектов с нижними индексами отличаются от преобразований объектов с верхними индексами. Причём матрицы преобразований связаны соотношением для обратных матриц:

$$\overline{c_i^l} \underline{c_k^l} = \underline{c_l^i} \overline{c_k^l} = \delta_k^i \quad (2.1.12)$$

Используя приведённые приёмы можно записать общее выражение для преобразований объектов с верхними и нижними индексами:

$$A_{i\dots k} \overset{M}{\underline{m\dots n}} = \overline{c_i^r} \dots \overline{c_k^s} \underline{c_t^m} \dots \underline{c_v^n} A'_{r\dots s}{}^{t\dots v} \quad (2.1.13)$$

Физическая величина, преобразующаяся по закону (2.1.13), при преобразованиях координат (2.1.4) называется смешанным тензором (M+N)-го ранга, N-ковариантным и M-контравариантным. Нижние индексы при этом называются ковариантными, а верхние – контравариантными.

Преобразование индексов тензорных объектов из верхних в нижние осуществляется, как и в случае СТО, с помощью метрического тензора в ковариантном g_{ik} и контравариантном g^{ik} представлениях. Заметим,

$$g_{ik}g^{kl} = \delta_i^l \quad (2.1.14)$$

Выполнение принципа общей ковариантности требует, что все законы физики, определяемые пространственно-временными отношениями, были выражены в виде тензорных соотношений. Частный принцип ковариантности подробно обсуждался в^[1]. Единственное, что здесь возникло нового – это замена лоренцевых преобразований (2.1.3) на общие преобразования (2.1.4).

Уравнение геодезической

В “плоском” пространстве-времени свободное движение материальных тел происходит по прямым линиям. Основное свойство этих линий: они являются линиями “наименьшей” длины между двумя точками. Эти линии называются геодезическими. Формально получить уравнения геодезической можно с помощью решения вариационной задачи $\delta ds = 0$, где s определяется (2.1.5). Найдём уравнения для геодезической линии.

Взяв вариации от обеих частей (2.1.5), имеем:

$$\begin{aligned} \delta ds^2 &= 2ds \delta ds = \delta(g_{ik}dx^i dx^k) = \\ &= dx^i dx^k \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \delta x^l + 2g_{ik} dx^i dx^k \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

Из (2.1.15) получаем:

$$\delta s = \int \left(\frac{1}{2} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \delta x^l + g_{ik} \frac{dx^i}{ds} \frac{d\delta x^k}{ds} \right) ds \quad (2.1.16)$$

168.

Упростим второй член в (2.1.16) с помощью интегрирования по частям. Имеем:

$$\begin{aligned} & \int g_{ik} \frac{dx^i}{ds} \frac{d\delta x^k}{ds} ds = \\ & = \int \frac{d}{ds} \left(g_{ik} \frac{dx^i}{ds} \delta x^k \right) ds - \int \frac{d}{ds} \left(g_{ik} \frac{dx^i}{ds} \right) \delta x^k ds \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

Учитывая, что на пределах интегрирования $\delta x^k = 0$ получаем:

$$\int g_{ik} \frac{dx^i}{ds} \frac{d\delta x^k}{ds} ds = - \int \frac{d}{ds} \left(g_{ik} \frac{dx^i}{ds} \right) \delta x^k ds \quad (2.1.18)$$

Подставляя (2.1.18) в (2.1.16), получаем:

$$\delta S = \int \left(\frac{1}{2} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \delta x^l - \frac{d}{ds} \left(g_{ik} \frac{dx^i}{ds} \right) \delta x^k \right) ds \quad (2.1.19)$$

Во втором члене заменим индекс k на l и приравняем нулю выражение при вариации δx^l . В результате получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} u^i u^k \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \frac{d}{ds} \left(g_{il} \frac{dx^i}{ds} \right) = \\ & = \frac{1}{2} u^i u^k \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - u^i u^k \frac{\partial g_{il}}{\partial x^l} - g_{il} \frac{du^i}{ds} = \\ & = \frac{1}{2} u^i u^k \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \right) - g_{il} \frac{du^i}{ds} = 0 \end{aligned}$$

Тогда

$$g_{il} \frac{du^i}{ds} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \right) u^i u^k = 0 \quad (2.1.20)$$

или

$$g_{il} \frac{du^i}{ds} + \Gamma_{l,ik} u^i u^k = 0, \quad (2.1.21)$$

где

$$\Gamma_{l,ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \right) \quad (2.1.22)$$

Выражение (2.1.21) определяет уравнения геодезической. Величины $\Gamma_{l,ik}$ называют *коэффициентами связности* или *символами Кристоффеля*. Справедливы соотношения:

$$\Gamma_{ik}^l = g^{lm}\Gamma_{m,ik} \quad (2.1.23)$$

$$\Gamma_{l,ik} = g_{lm}\Gamma_{ik}^m \quad (2.1.24)$$

Учитывая (2.1.14) и (2.1.23) уравнение геодезической (2.1.21) можно записать также в виде:

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma_{kl}^i u^k u^l = 0 \quad (2.1.25)$$

Приведём ещё некоторые свойства символов Кристоффеля, вытекающие непосредственно из определения (2.1.22):

$$\Gamma_{kl}^i = \Gamma_{lk}^i, \quad \Gamma_{i,kl} = \Gamma_{i,lk}, \quad \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = \Gamma_{i,kl} + \Gamma_{k,il} \quad (2.1.26)$$

Вывод же следующих формул можно найти в ^[93]

$$dg = g g^{ik} dg_{ik} = -g g_{ik} dg^{ik} \quad (2.1.27)$$

$$\Gamma_{ki}^i = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^k} \quad (2.1.28)$$

$$g^{kl}\Gamma_{kl}^i = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} g^{ik}}{\partial x^k} \quad (2.1.29)$$

$$g_{il} \frac{\partial g^{lk}}{\partial x^m} = -g^{lk} \frac{\partial g_{il}}{\partial x^m} \quad (2.1.30)$$

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} = -\Gamma_{ml}^i g^{mk} - \Gamma_{ml}^k g^{im} \quad (2.1.31)$$

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = \Gamma_{i,kl} + \Gamma_{k,il} \quad (2.1.32)$$

Обобщение инерциальности

В ОТО свободным движением называется движение по геодезическим линиям, не подверженное внешним силам и воздействиям. Обобщёнными инерциальными системами называются системы, двигающиеся по геодезическим линиям. Однако здесь уже нельзя представить систему отсчёта неким жёстким “каркасом”, как это можно сделать в СТО.

Движение же по геодезической, происходящее в одной обобщённо-инерциальной системе сохраняет свойство геодезичности при переходе в другую обобщённо-инерциальную систему отсчёта.

Обобщение СТО начинается с замены специальных преобразований Лоренца (2.1.3), описывающих переходы между *инерциальными системами отсчёта*, на общие 4-преобразования координат (2.1.4), описывающие более общие переходы от одной произвольной уже *системы координат* к другой так же произвольной.

Эта замена означает переход от априорной метрики псевдоевклидова пространства-времени (2.1.1) к общей метрике псевдориманова многообразия (2.1.5)

Произвольные преобразования координат обуславливают необходимость преобразований физических величин согласно тензорному закону преобразований (2.1.13). Сами физические величины, как и в случае СТО, должны представляться тензорными объектами.

Пространственно-временные отношения в ОТО

Для метризации пространственно-временных отношений в рамках ОТО нам необходимо уточнить процедуры измерения расстояний и времени.

Необходимо отметить, что при использовании известных систем координат, например декартовой, как это было сделано в^[1], в случае искривлённого пространства необходимо соблюдать определённую осторожность. Это можно понять на примере построения декартовой системы координат на сферической поверхности (см. рис.2. 2). Здесь существуют особые точки, в которых теряется однозначность в определении проекций с помощью восстановления перпендикуляров: например, из “полюса” **A** сферы можно провести бесконечное множество перпендикуляров к линии “экватора”. На рис. 2.2 изображены два таких перпендикуляра, соответствующие разным координатам x_1 и x_2 одной и той же точки **A**. Чаще всего такие точки являются причиной появления сингулярностей при аналитическом выражении каких-либо зависимостей.

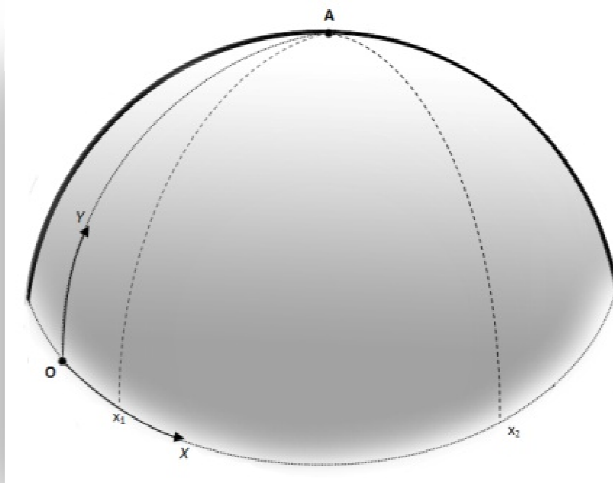


Рис 2.2. Декартова система координат на сфере

На рисунке представлена локальная декартова система координат HOY с началом в точке O . Y -координата точки A равна длине дуги OA ; X -координата точки A не может быть зафиксирована: здесь же изображены два одинаково возможных значения X -координаты: x_1 и x_2 . Однако таких X -координат для точки A существует ровно столько, сколько перпендикуляров можно опустить из точки A на “экватор”, то есть бесконечно много.

Измерение промежутков времени и расстояний

Мы сохраним концепцию стандартного сигнала^[1]. При этом, если для пространственно-временных измерений используется световой сигнал, то скорость этого сигнала будет равна скорости распространения света, а в системе единиц измерения РСИ $c = 1$.

Время. Назовём *собственным временем* τ время, измеренное неподвижными часами в заданной точке пространства. Однако при арифметизации пространственно-временных отношений используется *единое координатное время*, обозначаемое координатой x^0 или t . Найдём связь между этими величинами. Для этого рассмотрим два бесконечно близких события, происходящих в одной и той же точке пространства.

Полагая $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$ в (2.1.5), находим

$$ds^2 = d\tau^2 = g_{00}(dx^0)^2 \quad (2.1.33)$$

откуда

$$d\tau = \sqrt{g_{00}} dx^0 \quad (2.1.34)$$

или

$$\tau = \int \sqrt{g_{00}} dx^0 \quad (2.1.35)$$

Соотношение (2.1.35) определяет связь между координатным временем x^0 и собственным τ . При определении собственного времени необходимо выполнение условия: величина g_{00} в данной метрике должна быть положительной

$$g_{00} > 0 \quad (2.1.36)$$

Необходимо подчеркнуть разницу между условием, накладываемым (2.1.36), и требованием для сигнатуры $(+, -, -, -)$ метрического тензора. Невыполнение первого означает, что выбранной арифметизации пространственно-временных отношений не могут быть сопоставлены реальные физические процедуры или процессы (арифметизация проведена слишком произвольно и оказалась оторванной от реальных физических процессов). Надлежащим преобразованием координат можно добиться того, что g_{00} станет положительной величиной. Нарушение же сигнатуры

метрики вообще не может соответствовать никакой метрике реальных пространственно-временных отношений.

Расстояние. Для определения расстояния между двумя точками используем процесс распространения стандартного сигнала. Пусть из точки **A** с координатами x^α отправляется сигнал в бесконечно близкую точку **B** с координатами $x^\alpha + dx^\alpha$ и после его отражения возвращается обратно в исходную точку **A**. Необходимое для этого время, измеряемое в исходной точке **A**, равно удвоенному расстоянию между точками (скорость стандартного сигнала по определению равна 1). Используя (2.1.5), выделив пространственную и временную часть получим:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + 2g_{0\alpha} dx^0 dx^\alpha + g_{00} (dx^0)^2 \quad (2.1.37)$$

Здесь, как обычно, по дважды повторяющимся греческим индексам подразумевается суммирование по значениям 1, 2, 3. Решая уравнение $ds^2 = 0$ (свойство интервала для событий, связанных распространением стандартного сигнала) относительно dx^0 , получим два решения, соответствующие приращениям координаты x^0 в прямом и обратном направлениях:

$$\begin{aligned} dx^{0(1)} &= \\ &= \frac{1}{g_{00}} \left(-g_{0\alpha} dx^\alpha - \sqrt{(g_{0\alpha} g_{0\beta} - g_{\alpha\beta} g_{00}) dx^\alpha dx^\beta} \right) \end{aligned} \quad (2.1.38)$$

$$\begin{aligned} dx^{0(2)} &= \\ &= \frac{1}{g_{00}} \left(-g_{0\alpha} dx^\alpha + \sqrt{(g_{0\alpha} g_{0\beta} - g_{\alpha\beta} g_{00}) dx^\alpha dx^\beta} \right) \end{aligned} \quad (2.1.39)$$

Соблюдая хронологический порядок в едином координатном времени x^0 необходимо записать:

$$x_A^0 = x^0 + dx^{0(1)} \quad (2.1.40)$$

$$x_B^0 = x^0 + dx^{0(2)} \quad (2.1.41)$$

Здесь x_A^0 – момент отсылки сигнала из точки **A**; x^0 – момент прибытия сигнала в точку **B**; x_B^0 – момент прибытия сигнала из точки **B** обратно в точку **A**. Тогда полное время распространения сигнала туда и обратно получается согласно:

174.

$$\begin{aligned} x_B^0 - x_A^0 &= dx^{0(2)} - dx^{0(1)} = \\ &= \frac{2}{g_{00}} \sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00})} dx^\alpha dx^\beta \end{aligned} \quad (2.1.42)$$

Замечание. Чтобы нагляднее представить суть проделанных операций, связанных с интерпретацией решений (2.1.38) и (2.1.39), можно рассмотреть случай плоской метрики (СТО), когда g_{ik} приобретает диагональный вид, а решения (2.1.38) и (2.1.39): $dx^{0(1)} = -dl$; $dx^{0(2)} = dl$, где dl – расстояние между точками **A** и **B**.

Собственное время распространения сигнала “туда и обратно” получается согласно (2.1.34), а расстояние между двумя точками **A** и **B** делением на 2. В результате находим:

$$dl^2 = \left(-g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}} \right) dx^\alpha dx^\beta \quad (2.1.43)$$

Введя обозначение

$$h_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}} \quad (2.1.44)$$

получаем

$$dl^2 = h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (2.1.45)$$

Соотношение (2.1.45) определяет расстояние через элементы пространственных координат, а (2.1.44) – метрику пространства, то есть компоненты трёхмерного метрического тензора через метрику четырёхмерного пространственно-временного многообразия.

Следует отметить, что компоненты g_{ik} зависят, вообще говоря, от x^0 . Поэтому пространственная метрика (2.1.45) меняется со временем. По этой причине не имеет смысла интегрировать dl – такой интеграл будет меняться со временем. Таким образом, в ОТО теряет, вообще говоря, смысл понятие об определённом расстоянии между телами. Единственным случаем, когда расстояние может быть определено, являются системы отсчёта, обеспечивающие независимость этих расстояний от времени.

Можно показать, что контравариантный тензор $h^{\alpha\beta}$ просто выражается через пространственные компоненты контравариантного метрического тензора g^{ik} :

$$h^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta} \quad (2.1.46)$$

Определители g и h тензоров g_{ik} и $h_{\alpha\beta}$ связаны соотношением:

$$g = -g_{00}h \quad (2.1.47)$$

Одновременность и синхронизация. Выясним вопрос о возможности синхронизации часов, находящихся в разных точках пространства. Рассмотрим опять процесс распространения сигнала из точки **A** в бесконечно близкую точку **B**.

Одновременным с моментом x^0 в точке **B** следует считать событие в точке **A**, происходящее в момент координатного времени, лежащим посередине между моментами отправления и возвращения сигнала. Согласно (2.1.40) и (2.1.41) имеем:

$$\frac{x_A^0 + x_B^0}{2} = x^0 - \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} dx^\alpha \quad (2.1.48)$$

Поправка к координатному времени x^0 в точке **A** для синхронизации часов в двух точках **A** и **B** равна:

$$\Delta x^0 = -\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} dx^\alpha \quad (2.1.49)$$

Соотношение (2.1.49) позволяет синхронизовать часы в бесконечно близких точках пространства. Применяя эту процедуру и дальше, можно синхронизовать часы вдоль любого незамкнутого контура. Однако синхронизация часов вдоль замкнутого контура, вообще говоря, оказывается невозможной по причине зависимости самой метрики g_{ik} от координаты x^0 . Тем более оказывается невозможной синхронизация часов во всём пространстве.

Важными выводами ОТО являются: невозможность в общем случае определения интегральных длин и расстояний, а также осуществления тотальной синхронизации часов на “все времена”. Это объясняется нестационарностью в общем случае метрики пространственно-временных отношений.

Поскольку ОТО не позволяет в общем случае говорить об интегральных расстояниях и масштабах, а при катастрофических изменениях метрики (появление особых точек) и о синхронизирующих поправках к любому координатному времени, говорить о возрасте Вселенной, о её сегодняшних размерах можно лишь с большим риском для истины.

Именно ограниченная применимость макропространственно-временных отношений в мега- и микро- масштабах обуславливает появление фантастических гипотез, обязательной составляющей которых являются пространственно-временные сингулярности.

Системы координат. Системы отсчёта. Синхронная система отсчёта

Рассматривая произвольную систему координат, в которой каждая мировая точка имеет координаты (x^0, x^1, x^2, x^3) , мы, к сожалению, мало можем сказать что-либо определённое о причинной связи событий, упорядоченными в соответствии с этой координатной сеткой: пространственная упорядоченность - произвольная, часы не синхронизированы, то есть - полная неопределённость во взаимозависимостях.

Однако, из (2.1.44) и (2.1.49) можно заметить, что в четырёхмерном пространственно-временном многообразии существуют системы координат, в которых пространственная часть 4-метрического тензора g_{ik} с точностью до знака (такова сигнатура) совпадает с метрическим тензором реального трёхмерного пространства, а синхронизационные поправки к координатному времени обращаются в нуль. Для этого необходимо выполнение условий:

$$g_{00} = 1, g_{0\alpha} = 0 \quad (2.1.50)$$

Именно использование этой особенности и даёт возможность выделить из многообразия 4-систем координат системы отсчёта и внести ту определённую в пространственно-временные отношения, которые допускает ОТО. Изложим монадный метод расщепления пространственно-временных отношений, позволяющий делать подобные процедуры в общем случае¹⁵⁾.

Этот метод позволит чётко различить и отделить системы отсчёта во множестве всего многообразия 4-систем координат. Такие системы отсчёта в ^[93] называются *синхронными системами отсчёта*.

¹⁵⁾ Примечательным является тот факт, что метод 1+n расщепления впервые стал развиваться ещё в 30-х годах прошлого столетия в рамках исследований по 5-мерной единой теории гравитации и электромагнетизма (метод 1+4 расщепления). Затем он был частично переоткрыт, частично усовершенствован в рамках 4-мерной общей теории относительности, и сегодня используется в 5-мерном обобщении Калуцы уравнений Эйнштейна-Гильберта для единого представления гравитации и электромагнетизма. В форме теории хронометрических инвариантов этот метод был сформулирован Зельмановым АЛ^[89]. Заметим, что заслуга развития монадного метода принадлежит в основном советской школе теоретической физики^[90,91,92,93].

Наша первая задача – разделить пространственную и временную части в общем координатном представлении интервала (2.1.5), то есть найти такое преобразование координат

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) \rightarrow (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) \quad (2.1.51)$$

чтобы выражение для дифференциала интервала (2.1.5) приняло вид:

$$ds^2 = d\tau^2 - dl^2 \quad (2.1.52)$$

где dl и $d\tau$ – однозначно определяемые пространственно-временные характеристики двух бесконечно близких событий четырёхмерного пространственно-временного многообразия. При этом элемент квадрата длины dl^2 должен выражаться через метрический тензор трёхмерного пространства (2.1.44).

Пусть

$$\tau = \tau(x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (2.1.53)$$

представляет произвольную пространственную гиперповерхность в четырёхмерном пространственно-временном многообразии. Тогда вектор

$$\mu_i = \frac{\partial \tau}{\partial x^i} \quad (2.1.54)$$

будет представлять нормальный вектор в точке (x^0, x^1, x^2, x^3) к гиперповерхности (2.1.53).

Очевидно,

$$d\tau = \frac{\partial \tau}{\partial x^i} dx^i = \mu_i dx^i \quad (2.1.55)$$

Подставляя (2.1.55), (2.1.45) в (2.1.52) и группируя члены, получим:

$$ds^2 = (\mu_0 dx^0)^2 + 2\mu_0 \mu_\alpha dx^0 dx^\alpha + (\mu_\alpha \mu_\beta - h_{\alpha\beta}) dx^\alpha dx^\beta \quad (2.1.56)$$

Сопоставляя (2.1.56) с (2.1.37), получаем

$$\mu_i = \frac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}} \quad \text{или} \quad \mu_0 = \sqrt{g_{00}}, \quad \mu_\alpha = \frac{g_{0\alpha}}{\sqrt{g_{00}}} \quad (2.1.57)$$

$$h_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha} g_{0\beta}}{g_{00}} \quad (2.1.58)$$

Таким образом, построение синхронной системы отсчёта заключается в следующем. Представим себе семейство линий времени, которое представляет собой конгруэнцию¹⁶⁾. С каждой линией времени связан свой наблюдатель со своими часами. “Направление времени” будет определяться касательной μ_i к своей линии времени, а пространственные направления будут определяться как направления ортогональные этому вектору касательной, причём сделать это можно будет локально, в своей окрестности. В изначально выбранной системе координат (x^0, x^1, x^2, x^3) компоненты вектора μ_i определяются согласно (2.1.57), а пространственная 3-гиперповерхность – согласно (2.1.53). Само преобразование к новой системе координат можно представить в виде:

$$x'^0 = \tau = \tau(x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (2.1.59)$$

$$x'^1 = x^1, \quad x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3$$

Синхронные системы отсчёта факторизуют единые пространственно-временные отношения и позволяют выделить из этих отношений пространственную и временную части. Это позволяет привязать системы координат именно к пространственной части системы отсчёта. Таким образом, из всех преобразований координат общей теории относительности выделяются преобразования

$$x'^0 = x'^0(x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (2.1.60)$$

$$x'^\alpha = x'^\alpha(x^1, x^2, x^3) \quad (2.1.61)$$

которые не выводят за пределы одной и той же системы отсчёта.

Некоторые свойства синхронных систем отсчёта

1. Метрический тензор g_{ik} имеет вид:

$$(g_{ik}) = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & -h_{\alpha\beta} & \\ 0 & & & \end{array} \right\| \quad (2.1.62)$$

$$h^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta} \quad (2.1.62')$$

¹⁶⁾ Конгруэнцией называется такая совокупность линий, которые не пересекаются и через каждую точку проходит одна и только одна линия.

2. Компоненты символов Кристоффеля:

$$\Gamma_{0,00} = \Gamma_{\alpha,00} = \Gamma_{0,\alpha 0} = 0 \quad (2.1.63)$$

$$\Gamma_{00}^0 = \Gamma_{00}^\alpha = \Gamma_{\alpha 0}^0 = 0 \quad (2.1.63')$$

$$\Gamma_{\alpha,\beta 0} = -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial \tau}, \quad \Gamma_{0,\alpha\beta} = \frac{1}{2} \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial \tau} \quad (2.1.64)$$

$$\Gamma_{\beta 0}^\alpha = \frac{1}{2} h^{\alpha\nu} \frac{\partial h_{\nu\beta}}{\partial \tau}, \quad \Gamma_{\alpha\beta}^0 = \frac{1}{2} \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial \tau} \quad (2.1.64')$$

$$\Gamma_{\alpha,\beta\gamma} = -\gamma_{\alpha,\beta\gamma} \quad (2.1.65)$$

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = h^{\alpha\nu} \gamma_{\nu,\beta\gamma} \quad (2.1.65')$$

$$\gamma_{\alpha,\beta\gamma} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial h_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial h_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} \right) \quad (2.1.66)$$

3. Из (2.1.34) и (2.1.50) следует, что интервалы координатного времени dx^0 совпадают с интервалами собственного времени $d\tau$ в каждой точке пространства.

4. В синхронной системе отсчёта линии времени являются геодезическими линиями в 4-пространстве.

Действительно, 4-вектор $u^i = dx^i/ds$ касательной к мировой линии ($x^1, x^2, x^3 = const$) имеет составляющие $u^\alpha = 0, u^0 = 1$ и автоматически удовлетворяет геодезическим уравнениям:

$$g_{ik} \frac{du^k}{ds} + \Gamma_{i,kl} u^k u^l = \Gamma_{i,00} = 0, \quad (2.1.67)$$

поскольку при условии (2.1.50) символы Кристоффеля согласно (2.1.63) $\Gamma_{\alpha,00} = \Gamma_{0,00}$ равны нулю тождественно.

5. Однако линии длины (траектории) таким свойством не обладают. Причиной этого является нестационарность метрики в общем случае, в силу чего говорить об интегральных длинах, как уже отмечалось, не представляется возможным.

Тем не менее, при выполнении условия стационарности метрики 4-геодезическая линия в метрике g_{ik} , лежащая целиком на 3-пространственной гиперповерхности оказывается и 3-геодезической в метрике $h_{\alpha\beta}$. Действительно, запишем уравнение геодезической (2.1.21) в виде:

$$g_{ik} \frac{d^2 x^k}{ds^2} + \Gamma_{i,kl} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0 \quad (2.1.68)$$

180.

При $d\tau = 0$ из $ds^2 = d\tau^2 - dl^2$ следует $ds = \sqrt{-1}dl$. Условие $d\tau = 0$ означает, что рассматриваемая геодезическая лежит на 3-гиперповерхности, то есть является “замороженной” траекторией. Разделяя временную и пространственные составляющие (2.1.68), получим два уравнения:

$$g_{0k} \frac{d^2 x^k}{dl^2} + \Gamma_{0,kl} \frac{dx^k}{dl} \frac{dx^k}{dl} = 0 \quad (2.1.69)$$

$$g_{\alpha k} \frac{d^2 x^k}{dl^2} + \Gamma_{\alpha,kl} \frac{dx^k}{dl} \frac{dx^k}{dl} = 0 \quad (2.1.70)$$

После несложных преобразований, с учётом (2.1.62) – (2.1.66) из (2.1.69) и (2.1.70) получаем пару следующих уравнений:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial \tau} \frac{dx^\alpha}{dl} \frac{dx^\beta}{dl} = 0 \quad (2.1.71)$$

$$h_{\alpha\beta} \frac{d^2 x^\beta}{dl^2} + \gamma_{\alpha,\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = 0 \quad (2.1.72)$$

Таким образом, при выполнении условия (2.1.71) рассматриваемая траектория удовлетворяет уравнению (2.1.72), то есть уравнению геодезической в трёхмерном пространстве с метрикой $h_{\alpha\beta}$. Условие (2.1.71) по существу является условием стационарности метрики $h_{\alpha\beta}$ из-за присутствия в этом выражении частной производной $\partial h_{\alpha\beta} / \partial \tau$.

Факторизация пространственно-временных отношений в ОТО позволяет чётко определить понятие систем отсчёта и отделить их от произвольных 4-систем координат. Это осуществляется с помощью монадного метода (1+3)-расщепления пространственно-временного многообразия. В результате мы приходим к построению *синхронных систем отсчёта*. Общие координатные преобразования (2.1.4) так же факторизуются до представления в виде (2.1.59), что позволяет работать концептуально в одной и той же системе отсчёта при произвольном выборе систем координат.

Резюме к главе 1

Снятие инерциальной печати с законов физики - основная задача, которую решила ОТО, как физическая дисциплина. Это касается и обобщения понятия инерциальной системы отсчёта, как физико-математической абстракции, вывода этой абстракции на уровень реальности пространственно-временных отношений, обобщения преобразований физических величин при преобразованиях координат. Более того, здесь конкретизируется и само понятие системы отсчёта, определяются эффективные методы различения формальных систем координат и систем отсчёта, реализуемых с помощью реальных физических объектов и процессов. Конкретизируются и уточняются сами пространственно-временные отношения, касающиеся измерения расстояний и промежутков времени.

Глава 2. Динамика

Ковариантное дифференцирование

Концептуальная непрерывность пространственно-временных отношений, дифференциальный характер уравнений эволюции физических систем ведут к тому, что дифференциальные операции остаются по-прежнему незаменимым инструментом в описании динамических закономерностей в ОТО. Однако требование ковариантности к уравнениям движения, к соотношениям, содержащим пространственно-временные параметры и зависимости, диктует необходимость переосмысления самих дифференциальных операций, поскольку обычные операции дифференцирования нарушают свойство ковариантности.

В связи с этим возникают такие задачи, как математическое обобщение описания свободного движения, обобщение описания изменения этого движения под воздействием внешних причин. В галилеевой механике любое отклонение движения от прямолинейного и равномерного трактовалось как результат воздействия внешних сил. Однако в римановом пространстве нет евклидовых прямых, нет параллельных прямых — здесь все линии искривлены, понятие параллельности требует серьёзного уточнения. Возникает необходимость отделить “нормальное” криволинейное движение от искривлений, обязанных внешним воздействиям, поскольку внешние воздействия и нарушают “нормальность” движений! То есть необходимо найти способ причинного описания изменений нормальных движений.

Параллельный перенос векторов

Наглядное представление геометрических объектов неевклидовых пространств размерности более двух представляется весьма сомнительным. Поэтому мы не будем нагружать наше изложение визуальными геометрическими ассоциациями. Однако приведём стандартное математическое определение параллельного перенесения для двумерного случая.

Параллельное перенесение – обобщение понятия параллельного переноса на пространства болей сложной структуры, чем евклидовы. Параллельное перенесение позволяет сравнивать геометрические образы, относящиеся к различным точкам пространства.

На поверхности Σ в трёхмерном евклидовом пространстве (являющейся двумерным римановым пространством) параллельное перенесение определяется следующим образом.

Пусть γ – кривая на поверхности Σ , \mathbf{A} и \mathbf{B} – концы γ ; S – развёртывающаяся поверхность, которая является огибающей семейства касательных плоскостей, построенных в точках кривой γ . (см. рис 3). Тогда параллельным перенесением вектора \mathbf{a} , заданного в касательной плоскости Π_A в точке \mathbf{A} , называется параллельный перенос этого вектора по развёрнутой на плоскость поверхности S с последующим приложением S к γ .

Параллельное перенесение можно рассматривать как некоторое линейное преобразование касательной плоскости Π_A в точке \mathbf{A} в касательную плоскость Π_B в точке \mathbf{B} .

Вообще говоря, результат параллельного перенесения вектора зависит не только от исходного вектора, начальной и конечной точек перенесения, но и от выбора пути перенесения. Если результат параллельного перенесения вектора не зависит от выбора пути, то пространство (по крайней мере, в достаточно малой окрестности) является аффинным или евклидовым и понятие параллельного перенесения совпадает с понятием параллельного переноса.

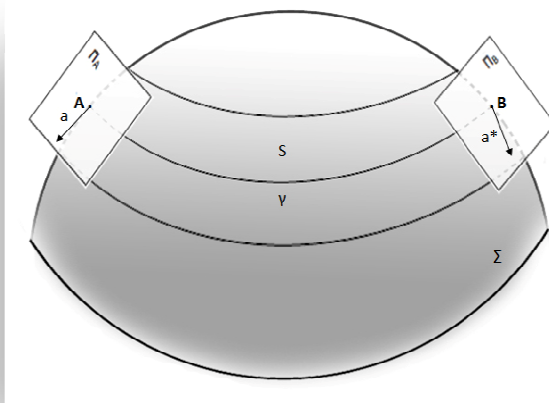


Рис 2.3. Параллельное перенесение векторов

На рисунке вектор \mathbf{a}^* представляет результат параллельного перенесения вектора \mathbf{a} по поверхности Σ вдоль γ .

184.

Пусть A^i – контравариантные компоненты вектора в точке x^i . Следуя Мёллеру^{[94][17]}, нетрудно показать что величины

$$A^{*i} = A^i + \delta A^i, \quad (2.2.1)$$

где

$$\delta A^i = -\Gamma_{kl}^i A^l dx^k \quad (2.2.2)$$

преобразуются как контравариантные компоненты вектора в точке $x^i + dx^i$. Здесь Γ_{kl}^i – символы Кристоффеля, определяемые согласно (2.1.23). Из сказанного следует, что величины (2.2.1) представляют собой контравариантные компоненты вектора в точке $x^i + dx^i$.

В плоском пространстве вектор A^{*i} совпадает с вектором, полученным путём параллельного переноса вектора A^i из точки x^i в точку $x^i + dx^i$, поскольку при введении псевдодекартовых координат символы Кристоффеля, а с ними и величины δA^i исчезают, и вектор A^{*i} становится равным вектору A^i . При использовании криволинейных координат в плоском пространстве контравариантные компоненты векторов A^i и A^{*i} будут отличаться на величину δA^i , определяемую формулой (2.2.2). Поэтому в римановом пространстве естественно определить параллельный перенос вектора также формулой (2.2.2)

Покажем, что при параллельном переносе векторов их скалярное произведение не изменится. Имеем:

$$\begin{aligned} \delta(g_{ik} A^i B^k) &= \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} A^i B^k - g_{ik} \Gamma_{ls}^i dx^l A^s B^k - g_{ik} A^i \Gamma_{ls}^k dx^l B^s = \\ &= dx^l A^i B^k \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{rk} \Gamma_{il}^r - g_{ir} A^i \Gamma_{kl}^r \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Здесь мы использовали тождество

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{rk} \Gamma_{il}^r - g_{ir} \Gamma_{kl}^r = 0 \quad (2.2.4)$$

вытекающее из (2.1.23), (2.1.24), (2.1.26). Исходя из этого, можно получить формулы преобразования компонент ковариантного вектора при параллельном переносе.

С учётом (2.2.2) имеем тождество:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta(A_i B^i) = (\delta A_i) B^i - A_i \Gamma_{kl}^i dx^k B^l = \\ &= (\delta A_i - \Gamma_{ik}^l dx^k A^l) B^i \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

¹⁷⁾ Книга К. Мёллера “Теория относительности” относится к числу фундаментальных трудов по общей теории относительности.

Поскольку вектор B^i произвольный, то отсюда получаем следующую формулу для изменения ковариантных компонент вектора при параллельном переносе:

$$\delta A_i = \Gamma_{ik}^l dx^k A_l = \Gamma_{l,ik} dx^k A^l \quad (2.2.6)$$

Рассмотрим геодезическую, определяемую уравнением (2.1.25). Поскольку s – инвариантный параметр,

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} \quad (2.2.7)$$

является вектором, касательным к геодезической. Тогда (2.1.25) можно записать в виде

$$\frac{du^i}{ds} = -\Gamma_{kl}^i \frac{dx^k}{ds} u^l \quad (2.2.8)$$

Сравнивая (2.2.8) с (2.2.2) видим, что касательные геодезической получаются одна из другой с помощью параллельного переноса вдоль геодезической. Этим свойством геодезические линии напоминают прямые линии в евклидовом пространстве. Таким образом, геодезическая линия, соединяющая две точки, является не только линией “наименьшей” длины, но и “наипрямейшей” линией. При этом “длина” вектора u^i не меняется вдоль геодезической, поскольку $g_{ik}u^i u^k$ не зависит от s .

Формулы (2.2.2) и (2.2.6) определяют изменение компонент вектора, обусловленное его инфинитезимальным параллельным переносом вдоль вектора dx^i . Полное изменение вектора A^i , обусловленное его параллельным переносом вдоль конечной кривой, можно получить с помощью интегрирования. В плоском пространстве полное изменение вектора A^i в результате параллельного переноса по замкнутому контуру должно быть равно нулю. Это очевидно в декартовой или псевдодекартовой системах координат, в которых компоненты вектора A^i вообще не изменяются при параллельном переносе. Результирующий вектор в этом случае после прохождения по замкнутому контуру просто должен совпасть с исходным. Этот вывод не должен измениться и тогда, когда перенос осуществляется в криволинейной системе координат. В искривлённом же пространстве результирующий вектор A^{*i} , вообще говоря, будет отличаться от исходного вектора A^i , причём разность $A^{*i} - A^i$ будет зависеть от

186.

выбора замкнутой кривой. В этом случае, если данный вектор переносить параллельно из точки \mathbf{P}_1 в точку \mathbf{P}_2 вдоль некоторой кривой, соединяющей эти две точки, то результирующий вектор A^{*i} будет зависеть от формы этой линии, если пространство искривлённое, и не зависеть, если пространство плоское.

С введением операции параллельного переноса векторов, геодезических линий и их свойств в связи параллельным переносом, фактически единственным существенным различием между плоским и искривлённым пространствами является зависимость результата параллельного переноса вектора от пути этого переноса или отличие исходного вектора от полученного в результате его переноса по замкнутому контуру.

Абсолютная производная

Пусть кривая C задана в параметрическом виде $x^i = x^i(\lambda)$. Если λ – инвариантный параметр, то вектор $u^i(\lambda) = dx^i/d\lambda$ будет представлять касательный вектор к кривой C . Зададим на кривой C некоторый вектор $A^i(\lambda)$. Легко видеть, что обычная производная $dA^i(\lambda)/d\lambda$ не является вектором, поскольку $dA^i(\lambda) = A^i(\lambda+d\lambda) - A^i(\lambda)$ представляется разностью векторов в различных точках \mathbf{P}' и \mathbf{P} кривой C и формулы преобразования векторов отличаются как функции, зависящие от координат. Однако выражение, определяющее *абсолютную производную*

$$\frac{DA^i}{d\lambda} = \frac{dA^i}{d\lambda} + \Gamma_{kl}^i u^k A^l \quad (2.2.9)$$

будет представлять вектор в точке \mathbf{P} с координатами $x^i(\lambda)$.

Действительно, из (2.2.2) и (2.2.9) следует

$$\begin{aligned} \frac{DA^i}{d\lambda} &= \lim_{\mathbf{P}' \rightarrow \mathbf{P}} \frac{A^i(\mathbf{P}') - A^i(\mathbf{P}) - (A^{*i}(\mathbf{P}') - A^i(\mathbf{P}))}{\Delta\lambda} = \\ &= \lim_{\mathbf{P}' \rightarrow \mathbf{P}} \frac{A^i(\mathbf{P}') - A^{*i}(\mathbf{P}')}{\Delta\lambda}, \end{aligned}$$

где алгебраическая разность двух векторов вычисляется уже в одной точке. Следовательно, $DA^i/d\lambda$ представляет собой вектор. В

локальной лоренцевой системе координат абсолютная производная совпадает с обычной производной.

Аналогично, в соответствии с (2.2.6) абсолютные производные от ковариантного вектора A_i определяются формулами

$$\frac{DA_i}{d\lambda} = \frac{dA_i}{d\lambda} - \Gamma_{l,ik} u^k A^l = \frac{dA_i}{d\lambda} - \Gamma_{ik}^l u^k A_l \quad (2.2.10)$$

и являются ковариантными компонентами вектора с контравариантными компонентами $DA^i/d\lambda$, то есть

$$\frac{DA_i}{d\lambda} = g_{ik} \frac{DA^k}{d\lambda} \quad (2.2.11)$$

Из (2.2.9), (2.2.10) можно получить следующее правило дифференцирования скалярного произведения $A_i B^i$ двух векторов A_i и B^i на C :

$$\frac{d}{d\lambda} (A_i B^i) = B^i \frac{DA_i}{d\lambda} + A_i \frac{DB^i}{d\lambda} \quad (2.2.12)$$

Отметим, что уравнения (2.1.21), (2.1.25) для геодезической можно записать в виде

$$\frac{Du_i}{ds} = 0; \quad \frac{Du^i}{ds} = 0 \quad (2.2.13)$$

В самом общем случае говорят, что вектор $A^i(\lambda)$ подвергается параллельному переносу вдоль кривой, если

$$\frac{DA^i(\lambda)}{d\lambda} = \frac{DA_i(\lambda)}{d\lambda} = 0 \quad (2.2.14)$$

Соотношения (2.2.14) инвариантны при произвольных преобразованиях параметра λ . Очевидно, что “длина” вектора, как и скалярное произведение двух векторов A^i и B^i не изменяется при параллельном переносе, так как из (2.2.12) и (2.2.14) и аналогичных формул для B^i имеем

$$\frac{D}{d\lambda} (A_i B^i) = B^i \frac{DA_i}{d\lambda} + A_i \frac{DB^i}{d\lambda} = 0 \quad (2.2.15)$$

Ковариантная производная

Пусть ϕ – скаляр. Производные $\partial\phi/x^i$ при преобразовании координат преобразуются согласно формулам

188.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'^k} \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \quad (2.2.16)$$

Согласно (2.1.13) производная скаляра преобразуется при преобразованиях координат, как компоненты ковариантного вектора.

Однако тензорный закон преобразования не выполняется для производной вектора A^i . Рассмотрим это подробнее.

Дифференцируя формулу преобразования контравариантного вектора A^i , $A^i = \underline{c}_l^i A'^l$, получим

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^k} = A'^l \frac{\partial \underline{c}_l^i}{\partial x^k} + \underline{c}_l^i \overline{c}_k^m \frac{\partial A'^l}{\partial x'^m} \quad (2.2.17)$$

Отсюда видно, что $\partial A^i / \partial x^k$ являются смешанными компонентами тензора только тогда, когда коэффициенты \underline{c}_l^i постоянные.

Простые вычисления позволяют показать, что

$$\Gamma_{kl}^i = \Gamma_{np}^m \underline{c}_m^i \overline{c}_k^n \overline{c}_l^p + \underline{c}_m^i \frac{\partial \overline{c}_l^m}{\partial x^k} \quad (2.2.18)$$

Из определения формул преобразования (2.1.9) и (2.1.11) следует

$$\frac{\partial \overline{c}_k^i}{\partial x^l} = \frac{\partial \underline{c}_l^i}{\partial x^k}, \quad \frac{\partial \underline{c}_k^i}{\partial x'^l} = \frac{\partial \underline{c}_l^i}{\partial x'^k} \quad (2.2.19)$$

Дифференцируя (2.1.12), имеем

$$\underline{c}_k^l \frac{\partial \underline{c}_l^i}{\partial x^n} + \underline{c}_l^i \frac{\partial \underline{c}_k^l}{\partial x^n} = 0 \quad (2.2.20)$$

Из формул (2.2.18), (2.1.12), (2.2.19), (2.2.20) следует

$$\Gamma_{kr}^i A^r = \left(-\frac{\partial \underline{c}_l^i}{\partial x^k} + \underline{c}_r^i \overline{c}_k^s \Gamma_{sl}^r \right) A'^l \quad (2.21)$$

Складывая (2.2.17) и (2.2.21), находим, что величины

$$A^i{}_{;k} = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \Gamma^i{}_{kr} A^r \quad (2.2.22)$$

преобразуются по закону:

$$A^i{}_{;k} = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \Gamma^i{}_{kr} A^r = \overline{c_k^r} \underline{c_t^i} A'^t{}_{;r} \quad (2.2.23)$$

Таким образом, с помощью операции *ковариантного дифференцирования* (2.2.22) контравариантных компонент вектора мы получаем смешанные компоненты тензора второго ранга.

Эту операцию геометрически можно описать следующим образом. Пусть $A^i(\mathbf{P})$ и $A^i(\mathbf{P}')$ два вектора в двух близких точках \mathbf{P} и \mathbf{P}' с координатами x^i и $x^i + dx^i$. Разности $dA^i = A^i(\mathbf{P}') - A^i(\mathbf{P}) = (\partial A^i / \partial x^k) dx^k$ не могут быть компонентами вектора, поскольку $A^i(\mathbf{P})$ и $A^i(\mathbf{P}')$ относятся к разным точкам и формулы преобразований у них отличаются. Однако, если $A^{*i}(\mathbf{P}')$ – вектор, полученный параллельным переносом A^i из точки \mathbf{P} в точку \mathbf{P}' , то разность

$$\begin{aligned} & A^i(\mathbf{P}') - A^{*i}(\mathbf{P}') = \\ & = A^i(\mathbf{P}') - A^i(\mathbf{P}) - \{A^{*i}(\mathbf{P}') - A^i(\mathbf{P})\} = \\ & = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \Gamma^i{}_{kr} A^r \right) dx^k \end{aligned}$$

является инфинитезимальным вектором в точке \mathbf{P}' . Поскольку это равенство справедливо для любого инфинитезимального вектора dx^k , то величины $A^i{}_{;k}$ должны представлять смешанные компоненты тензора второго ранга.

Рассматривая аналогичным образом ковариантные компоненты A_i и используя при этом (2.2.6), вместо (2.2.2), находим, что величины

$$A_{i;k} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \Gamma^r{}_{ik} A_r \quad (2.2.24)$$

являются ковариантными компонентами тензора. В *геодезической системе координат* и, в частности, в декартовой системе координат плоского пространства, где символы Кристоффеля равны нулю,

190.

ковариантное дифференцирование (2.2.22) и (2.2.24) совпадает с обычным дифференцированием.

Общая схема образования ковариантных производных любого ранга может быть представлена формулой:

$$A^{...i}_{...k;l} = \frac{\partial A^{...i}_{...k}}{\partial x^l} + \dots \Gamma^i_{lm} A^{...m}_{...k} \dots - \Gamma^m_{kl} A^{...i}_{...m} \quad (2.2.25)$$

Здесь по каждому индексу дифференцируемого тензора образуется свёртка с символом Кристоффеля: для контравариантного индекса тензора по нижнему индексу символа Кристоффеля и со знаком плюс, для ковариантного индекса тензора по верхнему индексу символа Кристоффеля и со знаком минус.

Рассмотрим вектора A^i на кривой C , заданной в параметрическом виде $x^i = x^i(\lambda)$. Абсолютные производные (2.2.9) и (2.2.10) можно в соответствии с (2.2.23) и (2.2.24) представить в виде

$$\frac{DA^i}{d\lambda} = \frac{dA^i}{d\lambda} + \Gamma^i_{kl} u^k A^l = A^i_{;k} u^k \quad (2.2.26)$$

$$\frac{DA_i}{d\lambda} = \frac{dA_i}{d\lambda} - \Gamma_{l,ik} u^k A^l = A_{i;k} u^k \quad (2.2.27)$$

Приведём некоторые часто используемы формулы^[93]:

$$A^i_{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} A^i}{\partial x^i} \quad (2.2.28)$$

$$A^{ik}_{;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} A^{ik}}{\partial x^k} \quad (2.2.29)$$

$$S^k_{i;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} S^k_i}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} S^{kl} \quad (2.2.30)$$

$$\varphi^i_{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{-g} g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}) \quad (2.2.31)$$

$$\oint A^i \sqrt{-g} dS_i = \int A^i_{;i} \sqrt{-g} d\Omega \quad (2.2.32)$$

Проявление *геометрических* особенностей движения не должно включаться в изменения, связанные с проявлением внешних причин. Например, траектория свободного движения (по геодезической) искривляется и изменяется не в силу воздействия на неё внешних сил, а в силу самой геометрии. Наоборот, отклонения от этих искривлений и изменений свидетельствует о возникновении неких внешних сил или причин. Так при движении тела вдоль траектории движения мы должны исключить результаты изменений, связанных с параллельным переносом векторов кинематических и динамических характеристик. Эти факторы и учитываются введением понятия ковариантной производной.

Ещё раз - как это осуществляется? Пусть A^i – вектор в точке x^k , $A^i + dA^i$ – вектор в точке $x^k + dx^k$. Разность векторов $A^i + dA^i$ и A^i не может быть вектором, поскольку значения компонент представлены в разных точках и формулы преобразования у них отличаются, как функции, зависящие от координат. Однако если из разности dA^i вычесть добавку (2.2.2), то результат будет представлен уже вектором. Что же произошло? Вычитанием из dA^i результата параллельного переноса мы фактически исключили изменение вектора, связанное с параллельным переносом, то есть изменение, обусловленное “кривой” геометрией, и образовали разность векторов, обусловленную именно координатной зависимостью $A^i(x^k)$. Мы исключили шаг приложения развёрнутой поверхности (см. рис.2), свободной от искривления, к кривой, сведя дифференцирование к плоскому случаю, обеспечив тем самым преемственность результата с теми же действиями в “плоской” геометрии.

Уравнение движения материальной точки. “Второй закон Ньютона”

Для определения вида уравнений движения материальной точки в пространстве-времени с произвольной метрикой (2.1.5) воспользуемся теми же соображениями, которые были выдвинуты при постановке аналогичной задачи в СТО^[1].

Мировую линию материальной точки представим в параметрическом виде:

$$x^i(s) = \{x^0(s), x^1(s), x^2(s), x^3(s)\} \quad (2.2.33)$$

Координаты (2.2.33), как функции от параметра s , дают возможность полностью задать движение материальной точки по траектории мировой линии. Здесь, как и в случае СТО, параметр s играет роль фактора, позволяющего упорядочить динамику движения, то есть описать процесс изменения положения в четырехмерном пространственно-временном многообразии.

При соблюдении условия аналитичности функций $x^i(s)$ в (2.2.33) их значения можно восстановить в любой точке пространства-времени с помощью разложения в ряд Тейлора. Для этого необходимо знать все производные в точке (например, s_0): нулевую, первую, вторую, третью и т. д. — производные:

$$x^i(s_0), \quad \frac{dx^i(s_0)}{ds}, \quad \frac{d^2x^i(s_0)}{ds^2}, \quad \frac{d^3x^i(s_0)}{ds^3} \dots \quad (2.2.34)$$

Однако, как известно, Ньютон фактически прервал ряд на первой производной в последовательности (2.2.34) и снял очень жёсткое требование аналитичности функций, описывающих движение. Это и есть тот самый момент, в результате которого появились исторические уравнения движения в виде второго закона Ньютона, и что ознаменовало собой появление закона инерции. Суть дела в следующем.

Сохранение состояния свободного движения является основополагающим статусом пребывания физического тела или материальной точки в своём существовании. Математически этот факт в СТО представлен в виде:

$$\frac{dx^i(s)}{ds} = const \quad (2.2.35)$$

Уравнение (2.2.35) описывает движение точки в плоском пространстве-времени СТО по прямым линиям с постоянной скоростью. Основными свойствами прямых являются: это линии наименьшей длины и линии, получаемые путём параллельного перемещения направляющего вектора прямой. Вектор (2.2.35) представляет касательную к прямой движения, и сохраняет свою величину вдоль траектории движения. Этот 4-вектор называется 4-скоростью.

Для ковариантного описания изменений при бесконечно малых пространственно-временных перемещениях физического тела было введено понятие параллельного перенесения, использование которого позволило обобщить для искривлённого пространства-времени свойства “наименьшей” длины, “наипрямешего” направления и сохранения “длины” касательного вектора вдоль 4-траектории движения (2.2.33). Всеми этими свойствами обладают геодезических линии. *А обобщением закона инерции в криволинейном пространстве-времени становится соотношение:*

$$\frac{Dx^i(s)}{ds} = const, \quad (2.2.36)$$

в котором обычная производная заменена на абсолютную производную. Именно эта замена и обеспечивает корректный учёт изменений с “вычетом” изменений обязанных эффектам кривизны.

Изменения свободного движения (2.2.36) необходимо арифметизировать причинами, приводящими к этим изменениям – силами, которые формально связываются с производными скоростей, то есть с ускорениями. В этом и состоит суть причинного описания. При отсутствии внешних сил формально это можно записать в форме, аналогичной форме ньютоновой механики:

$$\frac{Du^i(s)}{ds} = 0 \quad (2.2.37)$$

Если арифметизировать причины, выводящие движение за пределы движений по геодезическим, подобно тому как это сделал в своё время Ньютон, то уравнения движения частицы в искривлённом пространстве под воздействием сил, возникших как результат арифметизации этих причин, примет вид, аналогичный для СТО с заменой обычного дифференцирование на абсолютные производные:

194.

$$m \frac{Du^i(s)}{ds} = \frac{Dp^i}{ds} = \sum_{\alpha} g_{\alpha}^i \quad (2.2.38)$$

$$m \frac{D^2 x^i(s)}{ds^2} = m \frac{Du^i(s)}{ds} = mw^i(s) = \sum_{\alpha} g_{\alpha}^i \quad (2.2.39)$$

Здесь m выступает также как и в исходной формулировке второго закона Ньютона, как коэффициент пропорциональности между ускорением и силой, называемый *инертной* массой. Кроме того, как чисто кинематические определения получаем следующие динамические 4-характеристики движущегося тела: u^i - скорость, p^i - импульс, g^i - силу (пропорциональную ускорению w^i):

$$u^i = \frac{Dx^i}{ds} = \frac{dx^i}{ds} \quad (2.2.40)$$

$$p^i = mu^i = m \frac{Dx^i}{ds} \quad (2.2.41)$$

$$g^i = \frac{Dp^i}{ds} = m \frac{Du^i}{ds} = m \frac{D^2 x^i}{ds^2} \quad (2.2.42)$$

Непосредственной подстановкой (2.2.40), (2.2.41) можно убедиться в справедливости кинематических соотношений:

$$u^i u_i = 1 \quad (2.2.43)$$

$$p^i p_i = m^2 \quad (2.2.44)$$

Используя правило дифференцирования скалярного произведения

$$\frac{D(A_i B^i)}{d\lambda} = B^i \frac{DA_i}{d\lambda} + A_i \frac{DB^i}{d\lambda} \quad (2.2.45)$$

из (2.2.43) получаем:

$$u^i g_i = 0 \quad (2.2.46)$$

Уравнение движения заряженной частицы в электромагнитном поле для случая искривлённого пространства-времени выводится из аналогичного уравнения в СТО^[1] также заменой обычной производной на абсолютную.

$$m \frac{Du^i}{ds} = m \left(\frac{du^i}{ds} + \Gamma_{kl}^i u^k u^l \right) = e F^{ik} u_k \quad (2.2.47)$$

где F^{ik} – тензор электромагнитного поля.

Установим связи между 4-динамическими характеристиками и их трёхмерными представлениями для синхронных систем отсчёта.

Введём обозначения:

$$x^i = (\tau, x^\alpha) \quad (2.2.48)$$

$$ds^2 = d\tau^2 - h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = d\tau^2 - dl^2 = (1 - v^2) d\tau^2 \quad (2.2.49)$$

так, что

$$ds = \sqrt{1 - v^2} d\tau, \quad v^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} \quad (2.2.50)$$

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \frac{dx^i}{d\tau} \quad (2.2.51)$$

или

$$u^i = (u^0, u^\alpha) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}, \frac{v^\alpha}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \quad (2.2.52)$$

так, что

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad u^\alpha = \frac{v^\alpha}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (2.2.53)$$

Согласно (2.2.41) и (2.2.53) имеем

$$p^i = \left(\frac{m}{\sqrt{1 - v^2}}, \frac{mv^\alpha}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \quad (2.2.54)$$

или

$$p^0 = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad p^\alpha = \frac{mv^\alpha}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (2.2.55)$$

Представим 4-силу в виде

$$g^i = (g^0, g^\alpha) \quad (2.2.56)$$

и определим 3-силу

$$f^\alpha = \frac{D_3 p^\alpha}{d\tau} = \frac{dp^\alpha}{d\tau} + \gamma_{\beta\gamma}^\alpha p^\beta v^\gamma \quad (2.2.57)$$

Здесь $D_3 p^\alpha / d\tau$ – представляет абсолютную производную в трёхмерном пространстве с метрикой $h_{\alpha\beta}$ по инвариантному относительно пространственных преобразований параметру τ . Отношение (2.2.57) представляет собой 3-формулировку “Второго

196.

закона Ньютона” в ОТО, которая, конечно, не обладает свойством 4-ковариантности.

Введём обозначение

$$\kappa_{\alpha\beta} = \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial \tau} \quad (2.2.58)$$

Используя (2.2.46) имеем:

$$u^i g_i = g_{ik} u^i g^k = u^0 g^0 - h_{\alpha\beta} u^\alpha g^\beta = 0 \quad (2.2.59)$$

С учётом (2.2.53) получаем

$$g^0 = h_{\alpha\beta} v^\alpha g^\beta \quad (2.2.60)$$

Далее, выразим g^α через компоненты 3-силы f^α . Из (2.2.42) получаем

$$\begin{aligned} g^\alpha &= \frac{Dp^\alpha}{ds} = \frac{dp^\alpha}{ds} + \Gamma_{ik}^\alpha u^i p^k = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \frac{dp^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{00}^\alpha u^0 p^0 + \Gamma_{0\beta}^\alpha u^0 p^\beta + \Gamma_{\beta 0}^\alpha u^\beta p^0 + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\beta p^\gamma = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \left(\frac{dp^\alpha}{d\tau} + \gamma_{\beta\gamma}^\alpha v^\beta p^\gamma + \kappa_\beta^\alpha \frac{mv^\beta}{\sqrt{1-v^2}} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \left(D_3 p^\alpha + \kappa_\beta^\alpha p^\beta \right) \end{aligned}$$

Согласно (2.2.57) получаем

$$g^\alpha = \frac{(f^\alpha + \kappa_\beta^\alpha p^\beta)}{\sqrt{1-v^2}} \quad (2.2.61)$$

Подставив (2.2.61) в (2.2.60), получаем

$$\begin{aligned} g^0 &= \frac{(f^\alpha v_\alpha + \kappa_\beta^\alpha v_\alpha p^\beta)}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{(h_{\alpha\beta} f^\alpha v^\beta + \kappa_\beta^\alpha v_\alpha p^\beta)}{\sqrt{1-v^2}} = \\ &= \frac{(\vec{f}\vec{v} + \kappa_\beta^\alpha v_\alpha p^\beta)}{\sqrt{1-v^2}} \quad (2.2.62) \end{aligned}$$

Перепишем (2.2.56) окончательно в виде:

$$g^i = \left(\frac{f^\alpha v_\alpha + \kappa_\beta^\alpha v_\alpha p^\beta}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad \frac{f^\alpha + \kappa_\beta^\alpha p^\beta}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \quad (2.2.63)$$

Для стационарной метрики ($\kappa_\beta^\alpha = 0$) (2.2.63) совпадает с выражением 4-силы в СТО.

Описание движения материальной точки в ОТО сохраняет черты ньютоновой силовой динамики. Без внешних причин движение является свободным и происходит по геодезическим линиям. При воздействии сил на материальную точку её движение отклоняется от геодезических, то есть “искривляется”, а для описания этого “искривления”, то есть изменения свободного движения, возникает необходимость вводить причины в форме ковариантных сил. Нековариантность 3-представления (2.2.57) и нестационарность метрики обуславливает возможность возникновения в уравнении движения членов с дополнительной силой при переходе в другие системы отсчёта.

Уравнения электродинамики

Первая и вторая пары уравнений Максвелла

Обобщая уравнения электродинамики СТО с помощью замены обычных производных на ковариантное дифференцирование

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \quad (2.2.64')$$

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0 \quad (2.2.65')$$

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -4\pi j^i \quad (2.2.66')$$

получим

$$F_{ik} = A_{k;i} - A_{i;k} \quad (2.2.64)$$

$$F_{ik;l} + F_{kl;i} + F_{li;k} = 0 \quad (2.2.65)$$

$$F^{ik}{}_{;k} = -4\pi j^i \quad (2.2.66)$$

Здесь необходимо уточнить определение 4-вектора плотности тока j^i через трёхмерную плотность заряда ρ .

Прежде всего, заметим, что координатный элемент объёма $dV = dx^1 dx^2 dx^3$ не является трёхмерным инвариантом относительно пространственных преобразований. Элементом метрического пространственного объёма является величина $\sqrt{h}dV$. Здесь h – определитель метрического 3-тензора $h_{\alpha\beta}$, определяемого (2.1.44). Однако, по-прежнему

$$dS_0 = dx^1 dx^2 dx^3 = dV \quad (2.2.67)$$

где dS_0 определяется согласно (2.п.56), как элемент трёхмерного пространства.

Заряд de , находящийся в элементе пространственного объёма, необходимо определить с помощью следующего соотношения.

$$de = \rho \sqrt{h} dx^1 dx^2 dx^3 \quad (2.2.68)$$

Тогда

$$\begin{aligned} dedx^i &= \rho \sqrt{h} dx^i dx^1 dx^2 dx^3 = \rho \frac{dx^i}{dx^0} \sqrt{h} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = \\ &= \frac{\rho}{\sqrt{g_{00}}} \sqrt{-g} d\Omega \frac{dx^i}{dx^0} \end{aligned}$$

Здесь произведение $\sqrt{-g} d\Omega$ представляет инвариантный элемент 4-объёма, так что 4-вектор тока необходимо определить выражением

$$j^i = \frac{\rho}{\sqrt{g_{00}}} \frac{dx^i}{dx^0} \quad (2.2.69)$$

С помощью (2.2.24) легко показать, что выражение (2.2.64) для F_{ik} через 4-потенциал A_i приобретает прежний вид (2.2.64'):

$$F_{ik} = A_{k;i} - A_{i;k} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \quad (2.2.69)$$

поэтому и первая пара уравнений Максвелла сохраняет свой вид:

$$F_{ik;l} + F_{kl;i} + F_{li;k} = \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0 \quad (2.2.70)$$

Вторая пара уравнений Максвелла (2.2.66') приобретает вид (2.2.66)

Уравнение непрерывности

Исходным для обобщения является уравнение непрерывности в четырёхмерном виде СТО

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0 \quad (2.2.71')$$

С помощью замены обычной производной на ковариантную уравнение непрерывности в ОТО приобретает вид:

$$j^i{}_{;i} = 0 \quad (2.2.71)$$

Учитывая (2.2.28) уравнение непрерывности можно записать в виде:

$$j^i{}_{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{-g} j^i) = 0 \quad (2.2.72)$$

Уравнения Максвелла в трёхмерном виде в синхронной системе отсчёта

Определим 3-векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} электромагнитного поля через компоненты ковариантного тензора F_{ik} согласно выражениям:

$$E_\alpha = F_{0\alpha}, \quad B_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta} \quad (2.2.73)$$

$$D^\alpha = -F^{0\alpha}, \quad H^{\alpha\beta} = F^{\alpha\beta} \quad (2.2.74)$$

Учитывая, что

$$F_{0\alpha} = g_{0l}g_{0m}F^{lm}, \quad F^{\alpha\beta} = g^{\alpha l}g^{\beta m}F_{lm}, \quad (2.2.75)$$

а также (2.1.44), (2.1.47), (2.1.50) получаем

$$D_\alpha = E_\alpha, \quad B^{\alpha\beta} = H^{\alpha\beta} \quad (2.2.76)$$

Введём векторы \mathbf{V} и \mathbf{H} , дуальные тензорам $B_{\alpha\beta}$ и $H_{\alpha\beta}$, согласно определениям

$$B^\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{h}}e^{\alpha\beta\gamma}B_{\beta\gamma}, \quad H_\alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{h}e_{\alpha\beta\gamma}H^{\beta\gamma} \quad (2.2.77)$$

Из (2.2.76) следует

$$\mathbf{D} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H} \quad (2.2.78)$$

Уравнение (2.2.65') можно представить в виде пары независимых уравнений. Первое уравнение получается при использовании пространственных индексов:

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial F_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} = 0 \quad (2.2.79)$$

При получении остальных уравнений можно заметить, что

при $i = k = l = 0$ получается тождество $0 \equiv 0$;

при $i = k = 0$; $l \neq 0$ также получается тождественное равенство

$$\frac{\partial F_{00}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{l0}}{\partial x^0} + \frac{\partial F_{0l}}{\partial x^0} = \frac{\partial F_{00}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{l0}}{\partial x^0} - \frac{\partial F_{l0}}{\partial x^0} \equiv 0$$

при $i = 0$; $k, l \neq 0$ получаем второе уравнение

$$\frac{\partial F_{0\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial F_{\beta 0}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^0} = 0 \quad (2.2.80)$$

Умножая левую и правую части (2.2.79) на символ Леви-Чивита $e^{\alpha\beta\gamma}$, учитывая антисимметричность тензора F_{ik} , получим

$$e^{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} = 0 \quad (2.2.81)$$

Учитывая (2.2.73), (2.2.77), получаем

$$\sqrt{h} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} (-2\sqrt{h}B^\gamma) = 0 \quad (2.2.82)$$

Учитывая (2.2.28) для трёхмерного пространства с заменой $-g$ на h , получаем окончательно:

$$B^\gamma_{;\gamma} = 0 \quad \text{или} \quad \text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (2.2.83)$$

Перед рассмотрением второго уравнения (2.2.80) уточним определение ещё одной векторной операции трёхмерного пространства – ротора вектора.

В декартовой системе координат евклидова пространства $\text{rot } \mathbf{a} = [\nabla \times \mathbf{a}]$ можно представить в виде (см., например ^[1], табл.1.п.1)

$$\text{rot}_\alpha \mathbf{a} = e_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial a_\gamma}{\partial x^\beta} = e^{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial a_\gamma}{\partial x^\beta} \quad (2.2.84)$$

поскольку в декартовой системе координат ко- и контравариантные компоненты вектора не различаются.

Обобщим определение ротора ковариантного вектора \mathbf{a} для криволинейного трёхмерного пространства следующим образом:

$$\text{r}\hat{\text{ot}}_\alpha \mathbf{a} = E^{\alpha\beta\gamma} a_{\alpha;\beta} \quad (2.2.85)$$

Используя свойство антисимметричности тензора Леви-Чивита $E^{\alpha\beta\gamma}$, запишем (2.2.85) в виде

$$\text{r}\hat{\text{ot}}_\alpha \mathbf{a} = \frac{1}{2} E^{\alpha\beta\gamma} \left(\frac{\partial a_\gamma}{\partial x^\beta} - \frac{\partial a_\beta}{\partial x^\gamma} \right) = \frac{1}{2\sqrt{h}} e^{\alpha\beta\gamma} \left(\frac{\partial a_\gamma}{\partial x^\beta} - \frac{\partial a_\beta}{\partial x^\gamma} \right)$$

Окончательно получаем

$$\text{r}\hat{\text{ot}}_\alpha \mathbf{a} = \frac{1}{2\sqrt{h}} e^{\alpha\beta\gamma} \left(\frac{\partial a_\gamma}{\partial x^\beta} - \frac{\partial a_\beta}{\partial x^\gamma} \right) \quad (2.2.86)$$

Рассмотрим теперь второе уравнение (2.2.80). Учитывая (2.2.73), перепишем это уравнение в виде

$$\frac{\partial B_{\alpha\beta}}{\partial x^0} + \frac{\partial E_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial E_\beta}{\partial x^\alpha} = 0 \quad (2.2.87)$$

Умножив обе части этого уравнения на $-\frac{1}{2\sqrt{h}}e^{\gamma\alpha\beta}$, и используя определение (2.2.86), нетрудно получить

$$\text{r}\hat{\text{ot}} \mathbf{E} = -\frac{1}{\sqrt{h}}\frac{\partial}{\partial \tau}(\sqrt{h} \mathbf{B}) \quad (2.2.88)$$

Аналогичным образом из (2.2.66) находим уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{h}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\sqrt{h}D^\alpha) = 4\pi\rho \quad (2.2.89)$$

$$\frac{1}{\sqrt{h}}\frac{\partial}{\partial x^\beta}(\sqrt{h}H^{\alpha\beta}) + \frac{1}{\sqrt{h}}\frac{\partial}{\partial x^0}(\sqrt{h}D^\alpha) = -4\pi\rho\frac{dx^\alpha}{dx^0} \quad (2.2.90)$$

или в трёхмерных векторных обозначениях:

$$\text{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho \quad (2.2.91)$$

$$\text{r}\hat{\text{ot}} \mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{h}}\frac{\partial}{\partial \tau}(\sqrt{h} \mathbf{D}) + 4\pi \mathbf{s} \quad (2.2.92)$$

где \mathbf{s} – вектор с компонентами

$$s^\alpha = \rho\frac{dx^\alpha}{d\tau} \quad (2.2.93)$$

Уравнение непрерывности (2.2.72) в трёхмерной форме принимает вид:

$$\frac{1}{\sqrt{h}}\frac{\partial}{\partial \tau}(\sqrt{h} \rho) + \text{div} \mathbf{s} = 0 \quad (2.2.94)$$

Тензор электромагнитного поля в ковариантной F_{ik} и контравариантной F^{ik} формах можно представить в виде матриц известных в СТО (см., например, ^[1]):

$$F_{ik} = \begin{vmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{vmatrix} \quad (2.2.95)$$

$$F^{ik} = \begin{vmatrix} 0 & D_x & D_y & D_z \\ -D_x & 0 & -H_z & H_y \\ -D_y & H_z & 0 & -H_x \\ -D_z & -H_y & H_x & 0 \end{vmatrix}$$

или в виде

$$F_{ik} = (\mathbf{E}, \mathbf{B}) \quad F^{ik} = (\mathbf{D}, \mathbf{H}) \quad (2.2.96)$$

Нестационарность метрики обуславливает возможность возникновения в уравнениях Максвелла члена с дополнительным полевым фактором при переходе к другим системам отсчёта.

Резюме к главе 2

Соотношения между величинами, описывающими физические зависимости, имеют дифференциальные формы, которые при достаточно гладких свойствах функций позволяют “выйти” на эволюционные уравнения для физических величин. Основной операцией в процедуре формулировки уравнений или динамических зависимостей в рамках работы с достаточно непрерывными функциями является операция дифференцирования. Однако непосредственное дифференцирование функций по пространственно-временным координатам приводит к нарушению ковариантности зависимостей и связей. Поэтому обобщение обычных операций дифференцирования до процедур ковариантного (абсолютного) дифференцирования является необходимым шагом обеспечения выполнимости принципа ковариантности.

В связи с этим, обобщение уравнений движения для локализованных объектов (материальная точка) и для нелокализованных (электромагнитное поле) является логическим обобщением физических уравнений в псевдоевклидовой метрике пространственно-временных отношений (СТО) до псевдоримановой метрики (ОТО).

Глава 3. Материя, геометрия, связь с гравитацией

Тензор энергии-импульса

Взаимодействие нелокализованных объектов. Передача энергии и импульса.

Передача импульса и энергии между физическими телами происходит в момент их столкновения. На самом деле, передача импульса связана с более сложным процессом взаимодействия частиц, составляющих физическое тело. Во взаимодействии точечных частиц по такой схеме возможна передача импульса только по направлению, совпадающему с направлением движения частицы. Однако для частиц, например, имеющих форму шара возможна передача импульса уже не совпадающего с первоначальным направлением движения. Например, если импульс имеет только z -составляющую движения, а удар не центральный, то в результате удара появляются y -составляющие у обоих шаров (рис. 2.4).

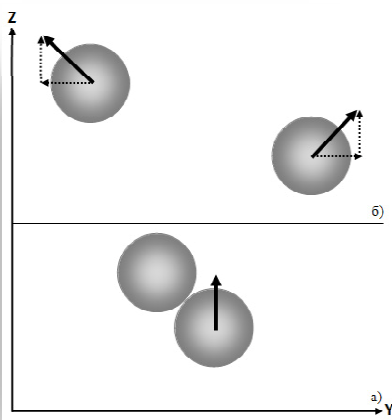


Рис 2.4. Обмен импульсами при столкновении

a) положение шаров во время удара

б) положение шаров в более поздний момент после удара

Сам процесс передачи импульса и энергии от одного шара другому можно представить в виде потока импульса и энергии в кратковременном процессе соприкосновения шаров, который мы назвали столкновением. Здесь важно отметить, что поток передаваемого импульса может быть направлен не только в направлении самого импульса, как в случае точечных частиц, но и в другом направлении, в приведённом примере – в перпендикулярном направлении. Ясно, что для описания подобных потоков импульсов необходимо использовать тензорные объекты. Такой способ описания передачи импульса оказывается чрезвычайно полезным при описании взаимодействия нелокализованных физических объектов.

Обозначим через $t_{\alpha\beta}$ поток передаваемой α -компоненты импульса через β -направление. Тогда всевозможные потоки импульсов всех координатных составляющих можно представить в виде тензора потока импульса:

$$t_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & t_{yy} & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & t_{zz} \end{vmatrix} \quad (2.3.1)$$

На рис. 2.5. иллюстрируется схема передачи y -составляющей импульса от всех трёх координатных направлений.

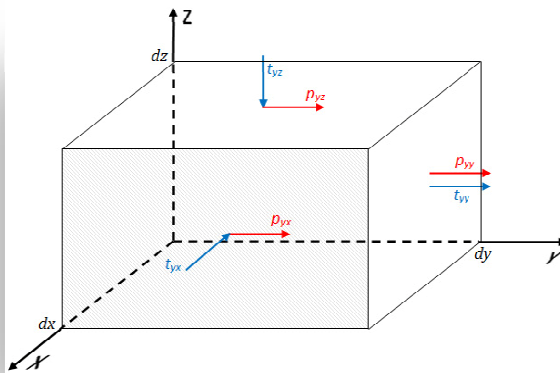


Рис 2.5. Потоки y -составляющей импульса через три координатных направления

Составляющая импульса p_{yz} передаётся через площадку с нормальным вектором параллельным оси Z ; поток импульса через эту площадку обозначен как t_{yz} . Механизм подобной передачи импульса можно представить как тангенциальное воздействие на верхнюю часть объёма с помощью трения.

Аналогичное воздействие возможно и со стороны поверхности перпендикулярной оси X . Здесь поток импульса t_{yx} сообщает телу величину импульса p_{yx} . Опять-таки, механически подобная передача реализуется с помощью механизма трения.

Наконец, p_{yy} - передача импульса по направлению самого импульса. Поток импульса t_{yy} сообщает телу величину импульса p_{yy} с помощью тянущего или толкающего (удара) воздействия в направлении передаваемого импульса.

Рассмотрим, как будет выглядеть закон сохранения импульса в подобном механизме его передачи. Общим определением потока импульса является соотношение :

$$dp_\alpha = t_{\alpha\beta} dS_\beta \quad (2.3.2)$$

Это соотношение можно рассматривать как поток вектора \vec{t}_α через ортогональную к нему проекцию площадки $d\vec{S}$.

Тогда величина передаваемой, например, y -компоненты импульса через заштрихованную площадку dS_x может быть записана в виде:

$$dp_y^{(1)} = t_{yx}(dx) dS_x \quad (2.3.3)$$

Величина передаваемого импульса через обе площадки изображенного объёма ортогональные оси X должна быть записана так:

$$dp_y = t_{yx}(dx) dS_x - t_{yx}(0) dS_x \quad (2.3.4)$$

Первый и второй члены входят в это выражение с разными знаками, поскольку вектора, нормальные к площадкам направлены в противоположные стороны. Учитывая, что $dS_x = dydz$ соотношение (2.3.4) можно преобразовать и представить в виде:

$$dp_y = \frac{\partial t_{yx}}{\partial x} dx dy dz = \frac{\partial t_{yx}}{\partial x} dV$$

208.

Однако в передаче импульса в y -направлении участвуют и остальные площадки, ортогональные осям Y и Z . С учётом этого, перейдя к индексной нотации координатных составляющих, перепишем последнее соотношение в виде:

$$dp_y = \frac{\partial t_{y\beta}}{\partial x_\beta} dV$$

Наконец, в общем случае передачи α -составляющей через все площадки можно записать

$$dp_\alpha = \frac{\partial t_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} dV \quad (2.3.5)$$

В двух последних соотношениях подразумевается суммирование по индексу β .

Из соотношения (2.3.5) можно видеть, что если

$$\frac{\partial t_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0 \quad (2.3.6)$$

то $dp_\alpha = 0$. Это означает, что при отсутствии потоков импульса через поверхность, ограничивающую объём dV , импульс среды, заключённой в этом объеме сохраняет своё значение. Сам же закон сохранения импульса приобретает дифференциальную форму (2.3.6) в виде равенства нулю дивергенции тензора плотности потока импульса.

Дифференциальную форму выражения закона сохранения для произвольного вектора или тензора можно сформулировать в общем виде: *сохранение векторной или тензорной величины можно представить, как равенство нулю дивергенции потока этого вектора или тензора.*

Замечательным является факт симметричности тензора потока импульса $t_{\alpha\beta} = t_{\beta\alpha}$, который следует, в свою очередь, из закона сохранения момента импульса. Покажем это.

Момент импульса материальной точки определяется следующим образом:

$$\vec{M} = [\vec{r} \vec{p}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(yp_z - zp_y) + \vec{j}(zp_x - xp_z) + \vec{k}(xp_y - yp_x)$$

Перейдя к индексной нотации ($\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$), имеем для компонент правой:

$$M_{\alpha\beta} = (x_\alpha p_\beta - x_\beta p_\alpha)$$

Тогда изменение момента импульса $dM_{\alpha\beta}$ можно записать в виде:

$$dM_{\alpha\beta} = x_\alpha dp_\beta - x_\beta dp_\alpha \quad (2.3.7)$$

Учитывая (2.3.2), получаем

$$dM_{\alpha\beta} = x_\alpha t_{\beta\gamma} ds_\gamma - x_\beta t_{\alpha\gamma} ds_\gamma = (x_\alpha t_{\beta\gamma} - x_\beta t_{\alpha\gamma}) ds_\gamma \quad (2.3.8)$$

Мы выяснили, что закон сохранения вектора в дифференциальной форме должен быть выражен как равенство нулю дивергенции потока этого вектора. Тогда из равенства (2.3.8) получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x_\gamma} (x_\alpha t_{\beta\gamma} - x_\beta t_{\alpha\gamma}) = 0 \quad (2.3.9)$$

Выполнив операцию дифференцирования, с учётом (2.3.6), замечая, что $\partial x_\alpha / \partial x_\gamma = \delta_{\alpha\gamma}$, $\partial x_\beta / \partial x_\gamma = \delta_{\beta\gamma}$, находим:

$$t_{\alpha\beta} = t_{\beta\alpha} \quad (2.3.10)$$

Для релятивистского обобщения тензора потока импульса (2.3.1) необходимо добавить “нулевые” энергетические компоненты, то есть придать тензору вид:

$$T^{ik} = \begin{vmatrix} W & S_x & S_y & S_z \\ S_x & t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ S_y & t_{yx} & t_{yy} & t_{yz} \\ S_z & t_{zx} & t_{zy} & t_{zz} \end{vmatrix} \quad (2.3.11)$$

210.

Например, добавив к компонентам второй строки (2.3.1) $\|t_{yx}, t_{yy}, t_{yz}\|$ энергетическую составляющую, получим третью строку тензора (2.3.11) $\|S_y, t_{yx}, t_{yy}, t_{yz}\|$. Верхняя строка (2.3.11) появилась для того, чтобы удовлетворить требованию симметрии тензора T^{ik} . Полученный тензор называется тензором энергии-импульса.

Выясним физический смысл новых компонент тензора T^{ik} .

Закон сохранения 4-импульса в дифференциальном виде принимает

вид:

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = 0 \quad (2.3.12)$$

В силу теоремы Гаусса-Остроградского в четырёхмерной псевдоевклидовой геометрии^[1]

$$\int \frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} d\Omega = \oint T^{ik} dS_k \quad (2.3.13)$$

Поэтому

$$\oint T^{ik} dS_k = 0 \quad (2.3.14)$$

Интегрирование в (2.3.14) производится по замкнутой трёхмерной гиперповерхности. Изобразим эту гиперповерхность, как 4-пространство, заключённое между двумя параллельными гиперповерхностями $x^{0(1)} = t_1$ и $x^{0(2)} = t_2$ с бесконечно удалёнными боковыми гранями. Значения T^{ik} на бесконечно удалённых боковых гранях обращаются в нуль, а сам интеграл принимает вид:

$$\int T^{i0}(t_1) dS_0 - \int T^{i0}(t_2) dS_0 = 0 \quad (2.3.15)$$

где интегрирование производится по всему трёхмерному пространственному объёму.

Последнее соотношение с учётом $dS_0 = dV$ тождественно следующему:

$$P^i = \int T^{i0} dV = const \quad (2.3.16)$$

В силу принципа релятивистской ковариантности пространственным компонентам 4-импульса P^i необходимо придать смысл пространственных компонент импульса, а временной компоненте - смысл энергии. Тогда вектор с составляющими T^{10} , T^{20} , T^{30} можно назвать *плотностью импульса*, а величину $W = T^{00}$ можно рассматривать как *плотность энергии*.

Для выяснения смысла компонент T^{0i} напишем уравнение сохранения (2.3.12) для 0-компоненты, отделив в нём пространственную и временные производные:

$$\frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{0\alpha}}{\partial x^\alpha} = 0 \quad (2.3.17)$$

Проинтегрировав уравнение (2.3.17) по некоторому объёму пространства V , получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int T^{00} dV + \int \frac{\partial T^{0\alpha}}{\partial x^\alpha} dV = 0$$

или преобразуя второй интеграл по трёхмерной теореме Гаусса-Остроградского

$$\frac{\partial}{\partial t} \int T^{00} dV = - \oint T^{0\alpha} df_\alpha, \quad (2.3.18)$$

где интеграл в правой части берётся по поверхности, охватывающей объём V . В левой части равенства стоит скорость изменения энергии, находящейся в объёме V , а справа поток энергии, протекающий через границу этого объёма. Тогда вектор \vec{S} с составляющими T^{01} , T^{02} , T^{03} есть плотность этого потока – количество энергии, протекающей в единицу времени через единицу поверхности. Таким образом, мы приходим к важному выводу о том, что требование релятивистской ковариантности, заключённое в тензорном характере величин T^{ik} , приводит к существованию связи между потоком энергии и импульса: плотность потока энергии равна плотности импульса. Это обстоятельство и выражено свойством симметрии тензора энергии-импульса.

Аналогичным образом можно показать, что компоненты $T^{\alpha\beta} = t_{\alpha\beta}$ в (2.3.11) составляют тензор плотности потока импульса, что

212.

находится в полном согласии с исходными посылками релятивистского обобщения потока импульса.

Здесь мы приходим ещё к одному важному выводу. При релятивистском обобщении формального метода описания передачи импульса с помощью потоков мы обнаружили новую возможность описания динамики материальных нелокализованных сущностей, обладающих плотностями энергии и импульса и могущих обмениваться ими с помощью реальных потоков. И речь здесь идёт, конечно, о полях.

Приведём примеры таких нелокализованных объектов и их тензоры энергии-импульса^[93].

Тензор энергии импульса системы невзаимодействующих частиц:

$$T^{ik} = \mu u^i u^k \frac{ds}{dt} \quad (2.3.19)$$

μ – плотность масс

Тензор энергии-импульса макроскопического тела:

$$T_{ik} = (p + \varepsilon)u_i u_k - p g_{ik} \quad (2.3.20)$$

p – давление; ε – плотность энергии

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля:

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} (-F_{il} F_k^l + \frac{1}{4} F_{lm} F^{lm} g_{ik}) \quad (2.3.21)$$

F_{ik} – тензор электромагнитного поля определяемый (2.2.64'),
(2.2.95)

Общее определение тензора энергии-импульса в лагранжевом формализме даётся выражением^[93]:

$$\frac{1}{2} \sqrt{-g} T_{ik} = \frac{\partial \sqrt{-g} \Lambda}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \sqrt{-g} \Lambda}{\partial \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}} \quad (2.3.22)$$

Λ – плотность функции Лагранжа.

Наконец, обобщим *дифференциальный закон сохранения* (2.3.12) для ОТО. Для этого необходимо частную производную по координатам заменить на ковариантную производную:

$$T^k{}_{i;k} = 0 \quad (2.3.23)$$

Используя формулу (2.2.30) для дивергенции симметрического тензора, (2.3.23) можно записать в виде:

$$T^k{}_{i;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial T^k{}_i \sqrt{-g}}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} T^{kl} = 0 \quad (2.3.24)$$

В искривлённом пространстве-времени сложно говорить об однородности пространственно-временных отношений. Поэтому возникают серьёзные трудности в их понимании как интегралов движения, связанных с теоремой Нётер.

Тем не менее, сохраняется возможность рассматривать законы сохранения в дифференциальной форме, в том формализме, который представлен, например, законом сохранения заряда соотношениями (2.2.71), (2.2.72). Этими соотношениями изменение величины заряда связывается с потоками, которые переносят этот заряд и тем самым обеспечивается рациональное понимание самой идеи сохранения.

Именно выражение этой идеи сохранения энергии-импульса материальной среды и представлено в соотношении (2.3.23).

Тензор Эйнштейна

Б. Риманом - одним из основателей неевклидовой геометрии, было доказано, что *необходимым и достаточным условием возможности приведения квадратичной формы $g_{ik}dx^i dx^k$ к сумме квадратов является обращение в нуль всех компонент так называемого тензора кривизны R^i_{klm} .* Тензор был введён им в работе “О гипотезах, лежащих в основании геометрии” в 1854 году.

Эта, весьма важная, чисто математическая теорема, означает, что метрические свойства неевклидова пространства можно определять или задавать не только на основе метрического тензора g_{ik} , но и используя тензор кривизны R_{iklm} . Тензор кривизны определяется через символы Кристоффеля и метрический тензор следующим выражением:

$$R^i_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{rl} \Gamma^r_{km} - \Gamma^i_{rm} \Gamma^r_{kl} \quad (2.3.25)$$

Наряду с тензором со смешанными компонентами используется тензор и в ковариантной форме, определяемой стандартным образом:

$$R_{iklm} = g_{ip} R^p_{klm} \quad (2.3.26)$$

Тензор из 256 компонент имеет 20 независимых элементов и ответственен за коммутационные соотношения производных второго порядка. Кроме того, имеет место свойство: изменение компонент вектора при его параллельном перенесении вдоль замкнутого контура составляют величины:

$$\Delta A_i = \frac{1}{2} R^k_{inm} A_k \Delta f^{nm} \quad (2.3.27)$$

Для плоского пространства эти изменения равны нулю. Собственно это и является ключевым моментом в различении плоских и кривых пространств.

Центральную роль в релятивистской теории гравитации играет тензор Эйнштейна, который получается на основе тензора Риччи.

Тензор Риччи - симметричный тензор, получаемый сверткой тензора кривизны R^i_{kmn} по двум индексам – первому и последнему

$$R_{km} = R^n_{kmn} = g^{in} R_{ikmn} \quad (2.3.28)$$

В Приложении 1 представлено выражение для дивергенции тензора Риччи. Пусть $R^n_k = g^{nm} R_{mk}$ - смешанный тензор Риччи, а $R = R^n_n$ - скалярная кривизна. Тогда имеет место следующее соотношение:

$$R^n_{k;n} = \frac{1}{2} R_{;k} \quad (2.3.29)$$

В свою очередь тензор Эйнштейна определяется как тензор, дивергенция которого равна нулю,

$$\mathcal{G}^n_{k;n} = 0 \quad (2.3.30)$$

В общем виде этот тензор можно выразить через тензор Риччи согласно соотношению:

$$\mathcal{G}^m_k = R^m_k - \frac{1}{2} R \delta^m_k + \Lambda \delta^m_k \quad (2.3.31)$$

где Λ – произвольная константа, исторически введённая Эйнштейном при решении частной задачи о структуре вселенной и поэтому называемая космологической.

Уравнения (2.3.30) имеют глубокий физический смысл. Как было выяснено выше, равенство нулю дивергенции тензора \mathcal{G}^n_k выражает собой его закон сохранения, выраженный через потоки и плотности. Как будет показано далее, \mathcal{G}^n_k представляет собой тензор энергии-импульса гравитационного поля.

Основные свойства введённых тензоров приведены в Приложении 1

Тензор Эйнштейна обладает свойствами тензора энергии импульса. В дальнейшем будет показано, что он непосредственно связан с тензором энергии-импульса материи и несёт в себе информацию об энергии-импульсе гравитационного поля.

Уравнения Эйнштейна-Гильберта

(Псевдо)евклидовость “ближнего пространства-времени” – теоретически осознанный эмпирический факт. Однако нет ни одного эмпирического подтверждения того же самого для “дальнего пространства-времени”. Более того, непосредственные “измерения” геометрии в глобальном масштабе никогда не осуществлялись. Да их, по-видимому, невозможно и осуществить в полномасштабном варианте. В силу этого возникает необходимость отказаться от априорной евклидовости пространственно-временных отношений и работать с более общими пространствами, естественно, включающими в себя возможность описания евклидовости “ближнего пространства”.

Обобщение СТО до ОТО – это шаг, обусловленный отказом от априорных свойств евклидовости пространственно-временных отношений. Необходимость этого шага не должна вызывать каких-либо сомнений в его целесообразности, а статус ОТО необходимо сохранять до тех пор, пока прямые эксперименты, не относящиеся к гравитации, или какие-либо другие обстоятельства не заставят отказаться от кривизны пространственно-временных отношений.

На повестке дня с неизбежностью возникает вопрос о связи геометрии пространственно-временных отношений с материей “наполняющей” содержанием эти отношения.

Начнём с интерпретации метрического тензора g_{ik} . Для этого представим его в виде, в котором пространственная часть сохраняет свойство евклидовости:

$$(g_{ik}) = \begin{vmatrix} g_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (2.3.32)$$

Используя (2.3.32) запишем уравнения геодезической (2.1.21) выделив в них временную и пространственные части. В представлении (2.3.32) справедливы следующие соотношения для символов Кристоффеля:

$$\Gamma_{0,00} = \Gamma_{\alpha,\beta 0} = \Gamma_{0,\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha,\beta\gamma} = 0 \quad (2.3.33)$$

$$\Gamma_{\alpha,00} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha}; \quad \Gamma_{0,\alpha 0} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha} \quad (2.3.34)$$

Тогда для пространственной части получаем

$$g_{\alpha k} \frac{du^k}{ds} = -\Gamma_{\alpha,kl} u^k u^l \quad (2.3.35)$$

В нерелятивистском приближении имеем:

$$u^i = (1, v^\alpha); \quad ds = dt \quad (2.3.36)$$

После несложных преобразований с учётом (2.3.33), (2.3.34) и (2.3.36) из (2.3.35) получаем:

$$\frac{dv_\alpha}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha} \quad (2.3.37)$$

Для временной части уравнения геодезической получаем:

$$g_{0k} \frac{du^k}{ds} = -\Gamma_{0,kl} u^k u^l \quad (2.3.38)$$

Нетрудно видеть, что левая часть (2.3.38) обращается в нуль, поскольку

$$g_{0k} \frac{du^k}{ds} = g_{00} \frac{du^0}{ds} + g_{0\alpha} \frac{du^\alpha}{ds} = g_{00} \frac{du^0}{ds} = 0 \quad (2.3.39)$$

Для правой части имеем:

$$\begin{aligned} \Gamma_{0,kl} u^k u^l &= \Gamma_{0,0l} u^0 u^l + \Gamma_{0,\alpha l} u^\alpha u^l = \\ &= \Gamma_{0,00} u^0 u^0 + \Gamma_{0,0\alpha} u^0 u^\alpha + \Gamma_{0,\alpha 0} u^\alpha u^0 + \Gamma_{0,\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha} u^0 u^\alpha = \\ &= \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha} v^\alpha = \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{dt} = \frac{\partial g_{00}}{\partial t} = 0 \end{aligned}$$

Таким образом, временная часть уравнения геодезической превращается в тождество $0 = 0$.

218.

Вернёмся к полученному равенству (2.3.37). Произведя замену переменных

$$g_{00} = 2\varphi + const \quad (2.3.40)$$

получим уравнение

$$\dot{\vec{v}} = -\nabla\varphi, \quad (2.3.41)$$

которое совпадает с уравнением свободного движения в гравитационном поле - уравнением для ускорения “свободного падения” при отождествлении φ с гравитационным потенциалом. Как известно, потенциал гравитационного поля определён с точностью до константы, что и отражено в (2.3.40). Однако, при решении уравнений для слабого гравитационного поля эта константа приобретает значение 1. Тогда (2.3.40) окончательно приобретает вид:

$$g_{00} = 2\varphi + 1 \quad (2.3.42)$$

Уже приближение (2.3.32) и (2.3.42) позволяет рассчитать наблюдаемые и экспериментально проверяемые эффекты проявления гравитации. Именно эти эффекты и были обнаружены ещё до создания РТГ.

В первую очередь это относится к расчётам отклонения луча света в гравитационном поле Солнца и знаменитое красное смещение. Кроме того, здесь же возможно установить связь координатного времени x^0 и собственного τ , которая выводится из (2.1.35).

С точностью до членов первого порядка, подставляя (2.3.42) в (2.1.35), получаем:

$$\tau = x^0(1 + \varphi) \quad (2.3.43)$$

Таким образом, собственное время течёт тем медленнее, чем меньше гравитационный потенциал в данной точке пространства, то есть чем больше его абсолютная величина (потенциал φ отрицателен). Если из двух одинаковых часов одни находились в точке с гравитационным потенциалом, то после этого часы, бывшие в поле, окажутся отстающими.

Аналогичным образом для слабого гравитационного поля выводится соотношение

$$\omega = \omega_0(1 - \varphi) \quad (2.3.44)$$

Здесь ω_0 — частота, измеренная координатным временем, а ω — частота, измеренная собственным временем.

Из (2.3.44) видим, что частота света возрастает с увеличением абсолютной величины потенциала гравитационного поля, то есть при приближении к создающим поле телам. Наоборот, при удалении луча света от этих тел частота света уменьшается; это явление называется *красным смещением*.

С помощью элементарных расчётов можно получить величину отклонения луча света $\Delta\theta$ в гравитационном поле Солнца

$$\Delta\theta = \frac{akM}{\rho} \quad (2.3.45)$$

Здесь: k — гравитационная постоянная, M — масса Солнца, ρ — минимальное расстояние траектории от центра Солнца, $a=2$.

Все формулы (2.3.43), (2.3.44), (2.3.45) получены в первом приближении без привлечения уравнений поля. Конечно, эти выводы подлежат уточнению с использованием более строгих исходных посылок, и особенно это относится к результату (2.3.45), поскольку вывод с использованием уравнений поля даёт значение для числового коэффициента a в два раза больше^[93]: $a = 4$.

Однако на этом этапе для нас важна качественная сторона результатов. А результат таков: *скалярный потенциал ϕ ньютоновой механики в ОТО принимает тензорную форму g_{ik}* . И здесь встаёт вопрос о связи тензорного потенциала гравитационного поля (метрического тензора) с его источниками (материей).

А.Эйнштейн усмотрел нетривиальное сходство тензоров G_{ik} и T_{ik} , объединив их в равенстве $G_{ik} = \kappa T_{ik}$. В свою очередь Д.Гильберт также установил это соотношение, но с помощью формальных рассуждений с использованием вариационных методов.

В историческом аспекте становление релятивистской теории гравитации изложено в работах^[2a, 2b]. Мы же будем стараться вскрыть логическую необходимость формулировки уравнений Эйнштейна-Гильберта в том виде, в котором они сейчас и представляются в физике. Воспроизведём логику возникновения этой связи.

Эквивалентность ускоренного движения и гравитации как это показано в (2.3.41), позволяет отождествить потенциалы гравитационного поля с компонентами метрического тензора псевдоевклидова пространства-времени. Возникает совершенно новая парадигма в трактовке неевклидовости пространственно-временных отношений: неевклидовость пространственно-временных отношений является следствием влияния материи на геометрию этих отношений, а сама гравитация является следствием проявления неевклидовости геометрии.

Источником возникновения гравитационного поля является материя. Распределение движущейся материи описывается тензором энергии-импульса T_{ik} . Поэтому уравнения для гравитационного поля должны выглядеть так:

$$\mathfrak{R}_{(**)} = \kappa \mathfrak{T}_{(**)} \quad (2.3.46)$$

Слева этого равенства должен стоять тензор, описывающий метрические свойства 4-пространства-времени и определяться потенциалами гравитационного поля g_{ik} ; справа – материальный тензор, определяющий эти свойства, то есть тензор энергии-импульса материи T_{ik} . Таким образом, $\mathfrak{T}_{(**)} = T_{ik}$

Тензор g_{ik} обладает структурой, схожей со структурой тензора энергии-импульса T_{ik} : он имеет ранг 2, симметричный, и дивергенция его равна нулю. Однако в качестве левой части полевых уравнений (2.3.46) он не может быть использован, поскольку ковариантные производные g_{ik} равны нулю. Это обстоятельство накладывает очень жёсткие условия на потоки и плотности энергии-импульса, а уравнения сохранения перестают описывать непрерывность движения этих потоков.

Как уже отмечалось, метрические свойства неевклидова пространства можно определять или задавать не только на основе метрического тензора g_{ik} , но и используя тензор кривизны R_{iklm} . В силу теоремы Римана эти два описания эквивалентны. Однако эти тензоры имеют разный ранг. Но из тензора кривизны можно получить тензор второго ранга – тензор Риччи R_{ik} , который обладает свойством симметричности и имеет тот же ранг, что и g_{ik} . “Похожесть” тензоров R_{ik} и T_{ik} привели Эйнштейна (1912 г. с Гроссманом) к первой

формулировке уравнений поля в форме $R_{ik} = \kappa T_{ik}$. Однако формулировка уравнений в таком виде противоречила общему принципу ковариантности, поскольку закон сохранения энергии-импульса в дифференциальной ковариантной форме не мог выполняться: дивергенция тензора Риччи в силу (2.3.29) не равна нулю. Кроме того, эти “укороченные” уравнения в пределе слабых статических полей (ньютоновы́й случай) не сводились к уравнению Пуассона и, тем самым, не согласовались с принципом соответствия. Отказ от такой формы уравнений вернул идее общей ковариантности основополагающий статус.

Гильберту удалось показать весьма тривиально с помощью вариационных методов единственность представления левой части уравнения в виде $R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R$ и представить уравнения в общековариантном виде $R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = -\kappa T_{ik}$. Вывод уравнений, исходя из вариационного принципа, представляя фактически метод Гильберта, приведён в ^[93].

Путь же Эйнштейна к окончательной формулировке уравнений поля был более “драматичным”. Но сегодняшний взгляд на этот вывод поражает своей изящностью и прозрачностью.

Для того, чтобы тензоры псевдоримановой геометрии пространства-времени и материи, создающей гравитационное поле входили в уравнения поля одинаковым образом и выражали закон сохранения энергии-импульса необходимо просто-напросто “нормировать” тензор Риччи на величину его свёртки. То есть использовать в левой части уравнения не непосредственно тензор Риччи, а его “нормированный” вариант - тензор Эйнштейна (2.3.31). Тогда уравнения (2.3.46) приобретают вид:

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R + \Lambda g_{ik} = \kappa T_{ik} \quad (2.3.47)$$

и получают законченную и полную интерпретацию. Левая часть уравнения (2.3.47) представляет тензор энергии-импульса гравитационного поля, правая – тензор энергии-импульса материи, а само уравнение – общий закон сохранения при обмене энергией-импульсом между материей и гравитационным полем.

222.

Добавочный член $(1/2)g_{ik}R$ привёл к тому, что тензоры энергии-импульса поля $\mathfrak{R}=\mathcal{G}_{ik}$ и материи $\mathfrak{S}=T_{ik}$ вошли в уравнение (2.3.47) одинаковым образом, что и обеспечило его трактовку, как выражение общего закона сохранения энергии-импульса материи и гравитации. Константа $\kappa = 8\pi k$, где k – гравитационная постоянная, определяется при предельном переходе к закону тяготения Ньютона.

Свёрткой (2.3.47) можно получить соотношение:

$$R = 4\Lambda - \kappa T \quad (2.3.48)$$

пользуясь которым представить уравнение (2.3.47) в виде:

$$R_{ik} = \kappa \left(T_{ik} - \frac{1}{2} T g_{ik} - \frac{\Lambda}{\kappa} g_{ik} \right) \quad (2.3.49)$$

Уравнения Эйнштейна-Гильберта представляют собой по существу закон сохранения энергии-импульса системы материя-гравитационное поле.

“Феномен” Калуцы

Объединение гравитации и электромагнетизма в 5-мерном пространстве времени

В конце 1921 года в Германии была опубликована статья Теодора Франца Эдуарда Калуцы, в которой предложен способ объединения релятивистской теории гравитации и теории электромагнитного поля на основе общей теории относительности, а именно – гипотезы о том, что наш мир представляет собой искривленное 5-мерное пространство-время. В этой работе было показано, что при объединении полей в пятимерном пространстве-времени в первом приближении из 5-мерных уравнений Эйнштейна-Гильберта выводятся 4-мерные уравнения для гравитационного поля и уравнения Максвелла. Однако в 1927 году Эйнштейном было установлено, что эти уравнения получаются не только в первом приближении, но и точно - в общем случае. Для того, чтобы подробнее поведать о “чудесах”, которые возникают при таком объединении, рассмотрим формальную сторону дела.

Будем рассматривать 5-мерное пространство-время, в котором $\Sigma^{(5)}$ - произвольная система координат. Любая точка 5-мерного пространства-времени (5-событие) описывается координатами $(x^0, x^1, x^2, x^3, x^5)$. Здесь в нумерации координат пропущена четверка, поскольку некоторые авторы используют нумерацию четырехмерного многообразия, начиная с единицы (по традиции).

Квадрат дифференциала интервала между двумя бесконечно близкими событиями 5-мерного многообразия равен

$$dI^2 = G_{AB} dx^A dx^B; \quad A, B = (0, 1, 2, 3, 5) \quad (2.3.50)$$

Здесь G_{AB} - метрический тензор 5-мерного пространства-времени с сигнатурой $(+ - - - -)$. Преобразования $\Sigma^{(5)} \Rightarrow \Sigma^{(5)'}$ координат 5-мерного пространства-времени

$$x^A = F^A(x'^B) \quad (2.3.51)$$

сохраняют величину интервала (2.3.50).

224.

Нам необходимо соотнести 4-мерное пространство-время традиционных ОТО и СТО с рассматриваемым 5-пространством, то есть реализовать каким-то образом процедуру расщепления $5 \rightarrow 4 + 1$. Оказывается, что подобная процедура расщепления не может быть реализована однозначно без наложения некоторых дополнительных условий.

Первая неоднозначность связана с выбором четырехмерной гиперповерхности в пятимерном пространстве. Проблема аналогична той, которая возникает при выборе, например, плоскости в трехмерном евклидовом пространстве. Действительно, в трехмерном пространстве можно построить бесконечное число двухмерных плоскостей. На какую из этих плоскостей могут "поселиться" двухмерные существа? Поскольку пространства одинаковой размерности изоморфны друг другу, то "поселиться" двухмерные существа могут на любую из плоскостей, но на одну-единственную. Аналогичная ситуация возникает и при выборе 4-мерного пространства-времени, погруженного в 5-мерное пространство.

Вторая неоднозначность. В 5-мерном пространстве с координатами $(x^0, x^1, x^2, x^3, x^5)$ в качестве 4-мерного подпространства-времени, не умаляя общности, можно рассматривать гиперповерхность, описываемую координатами (x^0, x^1, x^2, x^3) и соотношением $x^5 = \mathcal{N} = const$. Систему координат на 4-гиперповерхности реального пространства-времени, определяемой соотношением $x^5 = \mathcal{N}$, будем обозначать как $\Sigma^{(4)}$. Здесь через \mathcal{N} обозначен некий фундаментальный параметр, который определяет положение по пятой координате 4-мерного пространства-времени в 5-мерном исходном пространстве.

Квадрат дифференциала интервала между двумя бесконечно близкими событиями 4-подпространства $x^5 = \mathcal{N}$ приобретает вид:

$$dI^2 = G_{ik} dx^i dx^k; \quad i, k = (0, 1, 2, 3,) \quad (2.3.52)$$

здесь G_{ik} "играет роль" метрического тензора 4-мерного подпространства-времени. Следующие обстоятельства, которые обуславливают причины возникновения второй неоднозначности, обязывают говорить о том, что G_{ik} именно "играет роль" метрического 4-тензора, но не является им!

Рассмотрим два события 1 и 2, лежащие на 4-гиперповерхности $x^5 = \mathcal{X}$. Интервал I_{12} , связывающий эти события, можно рассчитать как интеграл от (2.3.52) по минимальному пути, лежащим целиком на гиперповерхности. *Однако последнее не означает, что этот путь описывается геодезической 5-пространства.*

Пример. Поверхность сферы представляет пример двухмерного подпространства, погруженного в трехмерное пространство. Геодезическая, соединяющая полюса сферы, с точки зрения геометрии сферы, представляется одним из меридианов с длиной πR ; геодезическая же с точки зрения трехмерного евклидова пространства, проходящая через точки, соответствующие этим же полюсам, представляется уже прямой, а длина отрезка соединяющего эти точки равна $2R$. Здесь наглядно видно, что и формы кривых и их длины различаются, хотя обе из них геодезические, но в разных пространствах и соответствующих метриках.

Если рассматривать преобразования $\Sigma^{(4)} \Rightarrow \Sigma^{(4)'}$ координат 4-мерного подпространства-времени

$$x^i = f^i(x'^k); \quad i, k = (0, 1, 2, 3) \quad (2.3.53)$$

при которых интервал (2.3.52) остаётся инвариантом, то G_{ik} можно рассматривать как 4-тензор относительно этих преобразований. *Однако и инвариантность 4-мерного интервала (2.3.52), и тензорный характер G_{ik} относительно (2.3.53) не имеют места относительно общих преобразований (2.3.51).*

Появление очередной проблемы неоднозначности связано с выбором "начальной" метрики для 4-мерного пространства-времени. Что здесь имеется в виду?

Фиксируем 4-мерное подпространство $\Sigma^{(4)}$ в 5-мерном пространстве $\Sigma^{(5)}$. Если арифметизация 4-подпространства осуществлялась с помощью стандартных сигналов, то в этом подпространстве величины интервалов между событиями, связанными этими сигналами, равны нулю по определению. Далее, рассматриваем всевозможные 4-тензорные преобразования $\Sigma^{(4)} \Rightarrow \Sigma^{(4)'}$. В результате мы получим одно из семейств всех возможных и "дозволенных" ОТО и СТО метрик G'_{ik} 4-мерного подпространства-времени. В этом семействе метрик величины интервалов остаются инвариантными при преобразованиях координат

226.

(2.3.53) и, в частности, нулевыми между событиями, связанными стандартными сигналами.

Другое аналогичное семейство метрик можно получить тем же самым способом после общего 5-преобразования $\Sigma^{(5)} \Rightarrow \Sigma^{(5)'}$ 5-мерного пространства-времени. После этого преобразования рассматриваемое 4-мерное подпространство (гиперповерхность $x^5 = const$) будет описываться уравнением

$$x^5 = const = F^5(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3, x'^5) \quad (2.3.54)$$

где (2.3.54) представляет одно из соотношений преобразования (2.3.51) с $A = 5$.

Однако, нулевые интервалы между событиями, связанными стандартными сигналами и рассматриваемыми в системе координат $\Sigma^{(5)}$, перестают быть нулевыми в системе координат $\Sigma^{(5)'}$. В то же время последующие всевозможные 4-тензорные преобразования опять-таки 4-мерного подпространства-времени $\Sigma^{(4)'}$ будут оставлять интервалы инвариантными. Конечно, и здесь имеется возможность переопределить интервалы между событиями, связанными стандартными сигналами, откалибровав их должным образом, и рассматривать гиперповерхность (2.3.54) как другое и также возможное 4-мерное подпространство-время для ОТО или СТО.

Ясно, что рассмотренные два семейства 4-метрик неравноправны, поскольку нарушается инвариантность скорости распространения стандартного сигнала при переходе из одной системы координат в другую: скорость распространения стандартного сигнала *меняется!* Возникает естественный вопрос: *какое из двух семейств метрик более предпочтительно?*

На самом деле подобных семейств 4-метрик ровно столько, сколько преобразований 5-мерного пространства – бесконечно много. Какая из 5-метрик должна стать “родительской” для семейства метрик реального 4-пространства-времени? Вопрос касается определенности и однозначности: каким образом выйти на метрические соотношения реального 4-пространства из 5-пространства?

Оказывается проблема однозначности решается с помощью теоремы Пифагора, которой необходимо придать статус локального

метрического принципа: связь квадратов дифференциалов длин проекций вектора с квадратом дифференциала длины вектора в локальной псевдоевклидовой метрике должна описываться пятимерным аналогом теоремы Пифагора. По существу же, мы требуем, как и для 4-мерного пространства-времени, локальной псевдоевклидовости от 5-мерного многообразия.

В силу этого, представим в системе координат $\Sigma^{(5)}$ интервал (2.3.50) в форме 5-аналога теоремы Пифагора:

$$dI^2 = ds^2 - (d\mu)^2, \quad (2.3.55)$$

где ds^2 определяется через метрический тензор g_{ik} 4-мерного пространства-времени $x^5 = \mathfrak{N}$:

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k; \quad i, k = (0, 1, 2, 3), \quad (2.3.56)$$

а дифференциал $d\mu$ новой пятой координаты μ :

$$d\mu = \mu_A dx^A; \quad A = (0, 1, 2, 3, 5) \quad (2.3.57)$$

Из (2.3.55), (2.3.56), с учетом (2.3.57) имеем:

$$dI^2 = -(\mu_5 dx^5)^2 - 2\mu_5 \mu_i dx^5 dx^i + (g_{ik} - \mu_i \mu_k) dx^i dx^k \quad (2.3.58)$$

Соотношение (2.3.50) представим в виде

$$dI^2 = G_{55} (dx^5)^2 + 2G_{5i} \mu_i dx^5 dx^i + G_{ik} dx^i dx^k \quad (2.3.59)$$

Сравнивая (2.3.58) и (2.3.59), получаем:

$$\mu_5 = \sqrt{-G_{55}}; \quad \mu_i = -\frac{G_{5i}}{\sqrt{-G_{55}}}; \quad g_{ik} = G_{ik} - \frac{G_{5i} G_{5k}}{G_{55}} \quad (2.3.60)$$

Из (2.3.55) и (2.3.60) мы видим, что в любой окрестности 5-мерного пространства-времени существует пара – “4-площадка” и нормальный к ней вектор $d\mu$. Квадраты дифференциалов длин линии на “4-площадке” и нормального к ней вектора связаны теоремой Пифагора (разумеется, с учетом сигнатуры метрики). Компоненты нормального вектора $d\mu$ и соответствующая метрика на “площадке” g_{ik} определяются согласно (2.3.60).

Пары “4-площадка” и нормальный к ней вектор, собранные по всей гиперповерхности $x^5 = \mathfrak{N}$ дают факторизованное представление 5-пространства в виде 4-мерного пространства-времени, дополненного еще одним измерением.

Систему координат 5-мерного пространства-времени, обладающую свойством (2.3.55), будем обозначать как Σ^μ и называть μ -монадной. В такой системе координат в качестве новой координаты вместо x^5 необходимо выбрать μ . Отметим, что синхронные системы отсчёта, введённые в главе 3 являются τ -монадными системами координат. Переход к τ -монадным системам координат в четырёхмерном пространстве-времени позволил нам выделить системы отсчёта из общих систем координат.

Таким образом, процедуру расщепления $5 \rightarrow 4 + 1$, о которой говорилось в начале раздела, можно реализовать с помощью перехода к μ -монадной системе координат, а последнее соотношение (2.3.60) решает проблему определения метрики реального 4-пространства-времени через компоненты метрического 5-тензора.

Представим метрический тензор G_{AB} в одной из форм:

$$G_{AB} = \begin{array}{c|cccc|c} G_{00} & G_{01} & G_{02} & G_{03} & G_{05} \\ G_{10} & G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{15} \\ \hline G_{20} & G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{25} \\ G_{30} & G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{35} \\ \hline G_{50} & G_{51} & G_{52} & G_{53} & G_{55} \end{array} \equiv \quad (2.3.61)$$

$$\equiv \begin{array}{c|c|} G_{ik} & G_{i5} \\ \hline G_{5k} & G_{55} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|c|} g_{ik} & A_i \\ \hline A_k & G_{55} \end{array}$$

Последняя форма устанавливает метрическую связь 5-мерия с 4-мерием. Эта связь описывается формулами (2.3.60).

Роль остальных компонент тензора G_{AB} была определена Т. Калуцей следующим образом: четыре компоненты G_{5i} (точнее, четыре комбинации $G_{5i}/\sqrt{-G_{55}}$) следует отождествить с точностью до размерного коэффициента с четырьмя компонентами

электромагнитного векторного потенциала A_i , а 15-ю компоненту A_{55} - с потенциалом неизвестного скалярного поля.

Почему именно компоненты G_{5i} должны сопоставляться с компонентами A_i ? Потому что для такого сопоставления имеются весьма основательные причины.

Если представить уравнение геодезической (2.1.21) в виде

$$\frac{du_i}{ds} = -\Gamma_{i,kl}u^k u^l \quad (2.3.62)$$

то можно увидеть, что символы Кристоффеля играют роль компонент гравитационного поля. Ранее было замечено, что сам метрический тензор играет роль потенциалов поля. Продолжим эту аналогию.

Тензор электромагнитного поля F_{ik} выражается через компоненты векторного потенциала с помощью соотношения:

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \quad (2.3.63)$$

Символы Кристоффеля для пятимерного пространства запишем в виде:

$$\Theta_{A,BC} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G_{AB}}{\partial x^C} + \frac{\partial G_{CA}}{\partial x^B} - \frac{\partial G_{BC}}{\partial x^A} \right) \quad (2.3.64)$$

Положим индекс $C = 5$ и потребуем, чтобы G_{AB} не зависел от x_5 (это так называемое условие цилиндричности по x_5). В этом случае получаем:

$$\Theta_{i,k5} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G_{5i}}{\partial x^k} - \frac{\partial G_{k5}}{\partial x^i} \right) \quad (2.3.65)$$

Сравнивая (2.3.65) с (2.3.63) мы видим, что действительно компоненты G_{5i} метрического 5-тензора могут играть роль векторного потенциала электромагнитного поля с точностью до коэффициента пропорциональности, а компоненты $\Theta_{i,k5}$ компонент тензора электромагнитного поля F_{ik} .

Таким образом, мы выяснили, что в 5-теории можно получить объединение гравитационного и электромагнитного полей с потенциалами, описываемыми метрическим 5-тензором G_{AB} и компонентами самого поля, описываемыми 5-символами Кристоффеля $\Theta_{A,BC}$.

Если произвести указанные отождествления, то из 5-мерных уравнений Эйнштейна-Гильберта получаются ошеломляющие результаты. Не вникая в подробности, перечислим их:

1. В искривлённом пространстве-времени частицы движутся по геодезическим линиям. Если записать 5-мерные уравнения геодезических линий (их будет пять) и произвести в них указанные отождествления, то четыре из них совпадут с известными уравнениями движения заряженных частиц в гравитационном и электромагнитном полях. В частности, из члена с символом Кристоффеля (2.3.64) получится известная сила Лоренца. Здесь необходимо будет положить, что пятая компонента скорости частицы имеет физический смысл отношения электрического заряда e к массе m частицы:

$$\frac{dx^5}{ds} = -\frac{1}{2\sqrt{k}} \frac{e}{m} \quad (2.3.66)$$

2. Уравнения Эйнштейна-Гильберта для пятимерного пространства (а их 15) распадаются на систему из десяти обычных уравнений для гравитационного поля и на систему из четырёх уравнений Максвелла. Кроме того появляется ещё одно уравнение для скалярного поля G_{55} .
3. В десяти получающихся 4-мерных уравнениях Эйнштейна-Гильберта автоматически появляется справа источник гравитационного поля, который в точности равен тензору энергии-импульса электромагнитного поля. Нужный знак этого выражения, соответствующий положительной определённости энергии электромагнитного поля, получается в том случае, когда пятая координата является пространственной.
4. В электродинамике Максвелла векторный потенциал A_i определён с точностью до градиентных преобразований. Оказывается, это следует из возможности преобразования пятой координаты

$$x'^5 = x^5 + f(x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (2.3.67)$$

при котором $A_i = G_{5i}$ должны изменяться, как компоненты 5-мерного тензора.

“Полностью учитывая все физические и теоретико-познавательные трудности, громоздившиеся на нашем пути при изложенном подходе, все же нелегко примириться с мыслью, что все эти соотношения, которые вряд ли можно превзойти по достигнутой в них *степени формального единства*, - всего лишь капризная игра обманчивой случайности. Но если удастся показать, что за предполагаемыми взаимосвязями стоит нечто большее, нежели пустой формализм, то это будет новым триумфом общей теории относительности Эйнштейна, о логическом применении которой к случаю пятимерного мира здесь шла речь”.

Т. Калуца. *К проблеме единства физики*

Резюме к главе 3

Законы сохранения выражают те определённости, благодаря которым вообще возможно рациональное предсказание поведения системы. Они же позволяют придать зависимостям физических величин вид уравнений движения.

Законы сохранения для локализованных объектов всегда можно представить в форме интегральных соотношений – просто интегралы должны браться за пределами локализации объекта, по тем областям, где плотности присутствия объекта нулевые. Для распределённых же и нелокализованных объектов, к которым относятся физические поля, в общем виде нельзя придать интегральную форму. Поэтому они имеют дифференциальную форму представления, в виде равенства нулю дивергенции потоков.

Именно в таком виде и записывается основное уравнение для поля, источником которого является некий материальный тензор, определяющий метрические свойства пространства-времени. Этим уравнением является уравнение Гильберта-Эйнштейна. Следует отметить, что вид уравнения диктуется дисциплиной ОТО. На этом этапе РТГ ещё не вступила в “своё законное правообладание разделом физики”: РТГ начинается с интерпретации g_{ik} как потенциалов гравитационного поля в манере интерпретации согласно (2.3.43), (2.3.44), (2.3.45) и интерпретации движения тела по геодезическим линиям, как под воздействием гравитационного поля. Основным моментом в такой интерпретации является выполнимость принципа эквивалентности, о котором будет идти речь ниже.

Глава 4. *Общие свойства уравнений Эйнштейна-Гильберта*

Неоднозначность решения, асимптотика^[96]

Калибровочная инвариантность

Симметричный тензор Эйнштейна \mathcal{G}_{ik} имеет 10 независимых компонент, поэтому полевые уравнения Эйнштейна-Гильберта (2.3.47) состоят из 10 независимых уравнений. Незвестный метрический тензор g_{ik} так же имеет 10 независимых компонент. Казалось бы, уравнений, число которых равно числу неизвестных функций и заданных граничных условий достаточно для полного определения всех независимых компонент метрического тензора g_{ik} . Однако здесь необходимо учесть, что компоненты тензора Эйнштейна связаны условием:

$$\mathcal{G}^k_{i;k} = 0 \quad (2.4.1)$$

Тогда из 10 уравнений (2.3.47) для их решения остаётся только $10 - 4 = 6$ уравнений, оставляющих четыре компоненты g_{ik} произвольными. Это означает, что если g_{ik} является решением полевых уравнений (2.3.47), то решение g'_{ik} , полученное из g_{ik} с помощью координатных преобразований $x \rightarrow x'$, будет также удовлетворять этим уравнениям. Такое преобразование порождает четыре произвольные функции $x^i = f^i(x'^k)$, соответствующие преобразованиям координат в ОТО (ср. (2.1.4)).

Ситуация аналогична той, которая возникает при определении потенциалов в электродинамике с помощью уравнений Максвелла. Неоднозначность определения потенциалов в электродинамике (калибровочная инвариантность) приводит к необходимости введения калибровочных условий, налагаемых на потенциалы.

Неопределённость решения уравнений (2.3.47) может быть устранена аналогичным образом – введением калибровочных условий на гравитационные потенциалы g_{ik} . Одним из способов такой калибровки является введение условия гармоничности координат:

234.

$$\Gamma^i \equiv g^{kl} \Gamma_{kl}^i = 0 \quad (2.4.2)$$

При преобразовании координат символы Кристоффеля преобразуются согласно формулам:

$$\Gamma'^i_{kl} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial x'^k} \frac{\partial x^p}{\partial x'^l} \Gamma^m_{np} + \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} \frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^k \partial x'^l} \quad (2.4.3)$$

Эти формулы могут быть получены из выражения для любой ковариантной производной сравнением левой и правой частей результатов после применения координатного преобразования.

Дифференцируя равенство

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} = \delta_i^i \quad (2.4.4)$$

по x'^k можно получить

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x^m} \frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^k \partial x'^l} = - \frac{\partial x^m}{\partial x'^l} \frac{\partial x^p}{\partial x'^k} \frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^p \partial x^m} \quad (2.4.5)$$

Подставляя (2.4.5) в (2.4.3), получаем

$$\Gamma'^i_{kl} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial x'^k} \frac{\partial x^p}{\partial x'^l} \Gamma^m_{np} - \frac{\partial x^m}{\partial x'^l} \frac{\partial x^p}{\partial x'^k} \frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^m \partial x^p} \quad (2.4.6)$$

Свёртывая это уравнение с g'^{kl} , находим

$$\Gamma'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} \Gamma^m - g'^{mp} \frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^m \partial x^p} \quad (2.4.7)$$

Таким образом, при выборе системы координат удовлетворяющих дифференциальным уравнениям второго порядка в частных производных

$$g'^{mp} \frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^m \partial x^p} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} \Gamma^m \quad (2.4.8)$$

мы всегда можем обратить Γ'^i в нуль.

Используя соотношение (2.1.29), эти условия можно записать в виде

$$\frac{\partial \sqrt{-g} g^{ik}}{\partial x^k} = 0 \quad (2.4.9)$$

Соотношения (2.4.8) и (2.4.9) можно переписать в виде

$$\square^2 \psi \equiv (g^{ik} \psi_{;i})_{;k} = 0, \quad (2.4.10)$$

где \square^2 есть инвариантный даламбериан, а уравнение (2.4.10) - волновое уравнение, записанное в ковариантной форме. Функции, удовлетворяющие уравнению Даламбера (2.4.10), называются гармоническими функциями. Это обстоятельство и объясняет возникновение названия “условия гармоничности координат” и соответствующей калибровки потенциалов гравитационного поля.

Особенностью условий калибровки (2.4.2) является то, что они не являются ковариантными. Однако и задача была такая – избавиться от неоднозначности определения потенциалов гравитационного поля (g_{ik}). При дальнейшем же использовании этой калибровки в конкретных условиях необходимо будет следить за ковариантностью формы представления конечных результатов решения.

Очевидно, что для метрики (2.1.2), представляемой тензором \dot{g}_{ik} , условия (2.4.9) выполняются. Таким образом, в отсутствие гравитационных полей метрика псевдоевклидова пространства (пространства Минковского) явным образом удовлетворяет гармоническому условию (2.4.9).

Решение полевых уравнений с начальными данными:

$$g_{ik}, (\partial g_{ik} / \partial x^0) |_{x^0=t}$$

Используя (2.3.47) и (2.3.31), запишем уравнения Эйнштейна-Гильберта в виде:

$$\mathcal{G}^{ik} = \kappa T^{ik} \quad (2.4.11)$$

Рассмотрим возможность решения уравнений (2.4.11) по начальным данным. Пусть нам заданы g_{ik} и $\partial g_{ik} / \partial x^0$ на пространственной гиперповерхности $x^0 = t$. Уравнения поля содержат $g_{ik}, \partial g_{ik} / \partial x^l, \partial^2 g_{ik} / \partial (x^0)^2$. Если бы мы смогли алгебраически извлечь из уравнений поля по значениям $g_{ik}, \partial g_{ik} / \partial x^l$

236.

на гиперповерхности $x^0 = t$ значения $\partial^2 g_{ik} / \partial (x^0)^2$ на этой же гиперповерхности, то у нас появилась бы возможность получить значения g_{ik} , $\partial g_{ik} / \partial x^i$ уже в “момент времени” $x^0 = t + \delta t$ по формулам, аналогичным следующим:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^0} (\dots) = (\dots) \Rightarrow \delta \frac{\partial}{\partial x^i} (\dots) = (\dots) \delta t \quad (2.4.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^0} (\dots) = (\dots) \Rightarrow \delta (\dots) = (\dots) \delta t \quad (2.4.13)$$

Этим самым мы вернулись бы к исходной постановке задачи, но уже с начальными данными $x^0 = t + \delta t$. Продолжая же этот процесс, мы смогли бы распространить решение уравнения на всю координатную ось x^0 и получить полное решение уравнений.

Однако, если рассмотреть тождество, следующее из (2.3.30)

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \mathcal{G}^{i0} \equiv -\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \mathcal{G}^{i\alpha} - \Gamma_{kl}^i \mathcal{G}^{lk} - \Gamma_{kl}^k \mathcal{G}^{il}, \quad (2.4.14)$$

то можно увидеть, что в правой части (2.4.14) нет членов с производными по времени старше второго порядка. Следовательно, их нет и в левой части тождества. Но тогда и \mathcal{G}^{i0} не содержит членов с производными по времени старше первого порядка. В этом случае четыре уравнения

$$\mathcal{G}^{i0} = \kappa T^{i0} \quad (2.4.15)$$

не дадут требуемой информации об эволюции гравитационного поля, что не позволит воспользоваться описанным методом решения полевых уравнений, а эти уравнения можно рассматривать лишь как некоторые дополнительные связи, налагаемые на начальные данные.

Таким образом, для решения исходной эволюционной задачи у нас осталось всего лишь шесть уравнений

$$\mathcal{G}^{\alpha\beta} = \kappa T^{\alpha\beta}, \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3) \quad (2.4.16)$$

Решение задачи опять, как и в предыдущем, “наткнулось” на неопределённость, связанную с произвольностью выбора системы координат ($10 - 6 = 4$). От этой неопределённости можно избавиться только наложив четыре координатных условия, фиксирующих систему координат. Выберем систему координат, удовлетворяющую условиям гармоничности:

$$\frac{\partial^2}{\partial (x^0)^2} (\sqrt{-g} g^{i0}) = -\frac{\partial^2}{\partial x^0 \partial x^\alpha} \sqrt{-g} g^{i\alpha} \quad (2.4.17)$$

Десяти уравнений (2.4.16) и (2.4.17) достаточно, чтобы найти вторые производные по времени от всех компонент g_{ik} .

В процессе решения задачи по алгоритму, представленному (2.4.12) и (2.4.13) необходимо потребовать, чтобы на каждом шаге соблюдались условия (2.4.15). Оказывается, условиям на начальные данные достаточно удовлетворить в один момент времени $x^0 = t$. Действительно, из (2.4.1) следует, что независимо от того, удовлетворяются или нет уравнения поля, должен выполняться закон сохранения:

$$(G^{ik} - \kappa T^{ik})_{;k} = 0 \quad (2.4.18)$$

Не трудно видеть, что при выполнении начальных условий (2.4.15) выражение в скобках при $x^0 = t$ равно нулю. Отсюда следует, что

$$\frac{\partial}{\partial x^0} (G^{i0} - \kappa T^{i0}) = 0 \text{ при } x^0 = t, \quad (2.4.19)$$

а потому поля, вычисленные в момент времени $x^0 = t + \delta t$ будут также автоматически удовлетворять условиям (2.4.15).

Законы сохранения для гравитационного поля

Для рассмотрения свойств энергии и импульса гравитационного поля представим уравнения (2.3.47) в удобном для этих целей виде. Произведём ряд тождественных преобразований.

Добавим в левую и правую части уравнения (2.3.47) выражение $Z_{ik} - \frac{1}{2}\eta_{ik}Z^l_l$. Здесь Z^l_l - след тензора Z_{ik} . В результате получаем:

$$Z_{ik} - \frac{1}{2}\eta_{ik}Z^l_l + R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R + \Lambda g_{ik} = \kappa T_{ik} + Z_{ik} - \frac{1}{2}\eta_{ik}Z^l_l$$

$$Z_{ik} - \frac{1}{2}\eta_{ik}Z^l_l = \kappa T_{ik} - R_{ik} + \frac{1}{2}g_{ik}R - \Lambda g_{ik}Z_{ik} - \frac{1}{2}\eta_{ik}Z^l_l$$

238.

Введя обозначение

$$t_{ik} = -\frac{1}{\kappa} \left[R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R + \Lambda g_{ik} - Z_{ik} + \frac{1}{2} \eta_{ik} Z^l_l \right],$$

окончательно получим

$$Z_{ik} - \frac{1}{2} \eta_{ik} Z^l_l = \kappa (T_{ik} + t_{ik}) \quad (2.4.20)$$

Далее. Дифференциальную форму выражения (2.3.23) можно лишь условно назвать законом сохранения. На самом деле это выражение описывает изменения тензорной величины T_{ik} и связывает эти изменения в связи с возникновением её потоков. Естественнее назвать соотношение (2.3.23) уравнением непрерывности (впрочем, как оно и трактовалось изначально). Смысл же закона сохранения это выражение приобретает при исчезновении потоков.

Если нам удастся локализовать распределённую среду, для которой сформулирована дифференциальная форма уравнения непрерывности, в ограниченной части пространства-времени, возможным станет переход от дифференциальной формы к интегральной, в которой формулировка приобретёт истинный смысл закона сохранения.

Законы сохранения в дифференциальной форме обычно формулируются для распределённых сред. А при формулировке этих же законов в интегральной форме необходимо локализовать область присутствия распределённых объектов. В этом случае сам распределённый объект можно рассматривать в областях, полностью включающих его как целостность и рассматривать его интегральные характеристики, такие как энергию, импульс и момент импульса.

Будем рассматривать именно такой случай. Для этого представим метрику пространства-времени в виде

$$g_{ik} = \eta_{ik} + \theta_{ik} \quad (2.4.21)$$

где

$$\eta_{ik} = \overset{\circ}{g}_{ik} \quad (2.4.22)$$

метрика Минковского, описываемая метрическим тензором (2.1.2)¹⁸⁾

Другими словами, за пределами локализации распределённого объекта будем считать, что пространство-время является плоским, причём θ_{ik} исчезает на бесконечности, а метрика g_{ik} приближается к метрике Минковского η_{ik} .

Используя выражение для тензора Риччи (2.п.100), можно получить в линейном по θ_{ik} приближении:

$$R^{(1)}_{ik} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \theta^l_l}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 \theta^l_i}{\partial x^l \partial x^k} - \frac{\partial^2 \theta^l_k}{\partial x^l \partial x^i} + \frac{\partial^2 \theta_{ik}}{\partial x^l \partial x^l} \right) \quad (2.4.23)$$

По существу, $R^{(1)}_{ik}$ является асимптотикой R_{ik} в предположении (2.4.21), (2.4.22).

Подставляя в общее соотношение (2.4.20)

$$Z_{ik} = R^{(1)}_{ik}, \quad (2.4.24)$$

получаем

$$R^{(1)}_{ik} - \frac{1}{2} \eta_{ik} R^{(1)l}_l = \kappa [T_{ik} + t_{ik}], \quad (2.4.25)$$

где

$$t_{ik} \equiv -\frac{1}{\kappa} [R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R^l_l - R^{(1)}_{ik} + \frac{1}{2} \eta_{ik} R^{(1)l}_l] \quad (2.4.26)$$

Левая часть (2.4.25) может быть представлена в виде¹⁹⁾

$$R^{(1)ik} - \frac{1}{2} \eta^{ik} R^{(1)l}_l = \frac{\partial}{\partial x^m} Q^{mik}, \quad (2.4.27)$$

где

$$Q^{mik} \equiv \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \theta^l_l}{\partial x_i} \eta^{mk} - \frac{\partial \theta^l_l}{\partial x_m} \eta^{ik} - \frac{\partial \theta^{li}}{\partial x^l} \eta^{mk} + \right. \\ \left. + \frac{\partial \theta^{lm}}{\partial x^l} \eta^{ik} + \frac{\partial \theta^{ik}}{\partial x_m} - \frac{\partial \theta^{mk}}{\partial x_i} \right\} \quad (2.4.28)$$

¹⁸⁾ Требования (2.4.21) и (2.4.22) обуславливают необходимость положить $\Lambda=0$, поскольку обратное соотношение нарушает условие "плоского пространства" на бесконечности.

¹⁹⁾ Индексы $\theta_{ik}, R^{(1)}_{ik}$ и $\partial/\partial x^i$ поднимаются и опускаются с помощью η , например $\theta^k_k \equiv \eta^{ki} \theta_{ki}$ и $\partial/\partial x_k \equiv \eta^{ki} \partial/\partial x^i$

Имеет место антисимметричность Q^{mik} по первым двум индексам:

$$Q^{mik} = -Q^{imk} \quad (2.4.29)$$

Можно видеть, что (2.4.25) представляет собой уравнения Гильберта-Эйнштейна “вдали” от локализованной распределённой материи. Характерной особенностью уравнения является присутствие двух источников гравитационного поля – T_{ik} и t_{ik} . При этом T_{ik} является исходным материальным тензором, а t_{ik} описывает источник, возникший в результате энергетического проявления самого гравитационного поля.

Таким образом, поле θ_{ik} порождается полными плотностями и потоками энергии и импульса, а t_{ik} есть “тензор” энергии-импульса лишь самого гравитационного поля. Тогда величину

$$\tau^{ik} \equiv \eta^{in}\eta^{km}[T_{nm} + t_{nm}] \quad (2.4.30)$$

мы должны интерпретировать как полный тензор вещества, создающего гравитационное поле.

τ^{ik} и всё такое ...

Не трудно показать, что величины $R^{(1)}_{ik}$ удовлетворяют соотношению:

$$\frac{\partial}{\partial x^k} [R^{(1)kl} - \frac{1}{2}\eta^{kl}R^{(1)m}_m] \equiv 0 \quad (2.4.31)$$

Тогда из уравнения поля (2.4.25) следует, что τ^{ik} локально сохраняется:

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \tau^{km} = 0 \quad (2.4.32)$$

При сравнении (2.4.32) с (2.3.14), согласно (2.3.16), видим, что величину

$$P^i = \int \tau^{i0} dV \quad (2.4.33)$$

необходимо интерпретировать как полный вектор энергии-импульса, включающий материю и гравитацию, а $\tau^{i\alpha}$ - как соответствующий

поток. Полный 4-вектор энергии-импульса гравитационного поля, соответствующий закону сохранения (2.4.32) даётся выражением:

$$P^i \equiv \int \tau^{ik} dS_k \quad (2.4.34)$$

Аналогично (2.3.7), (2.3.8) и (2.3.9), получаем выражение для момента импульса гравитационного поля M^{ik} и его закон сохранения в дифференциальной форме:

$$M^{ik} \equiv \int (x^i dp^k - x^k dp^i) = \int (x^i \tau^{kl} - x^k \tau^{il}) dS_l \quad (2.4.35)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^l} (x^i \tau^{kl} - x^k \tau^{il}) = 0 \quad (2.4.36)$$

Введём

$$\mathcal{M}^{lki} = \tau^{lk} x^i - \tau^{li} x^k \quad (2.4.37)$$

так, что

$$M^{ki} = \int_V \mathcal{M}^{0ki} dV \quad (2.4.38)$$

Очевидно, что

$$M^{ik} = -M^{ki} \quad (2.4.39)$$

Таким образом, \mathcal{M}^{0ki} и \mathcal{M}^{aki} можно интерпретировать как плотность и поток полного момента импульса.

Ранее мы выяснили, что в РТГ компоненты метрического тензора представляют собой компоненты потенциала гравитационного поля (см. (2.3.40)). На больших расстояниях потенциалы в теории тяготения Ньютона (при $r \rightarrow \infty$) убывают обратно пропорционально расстоянию r . Учитывая это обстоятельство, согласно (2.4.21), можно получить асимптотические оценки:

$$\theta_{ik} = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{\partial \theta_{ik}}{\partial x^l} = O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad \frac{\partial^2 \theta_{ik}}{\partial x^l \partial x^m} = O\left(\frac{1}{r^3}\right) \quad (2.4.40)$$

242.

Используя (2.4.26) и (2.4.38), получаем оценку и для t_{ik} :

$$t_{ik} = O\left(\frac{1}{r^4}\right) \quad (2.4.41)$$

В этом случае интегралы (2.4.34) и (2.4.33), определяющие полную энергию и импульс, сохраняются.

Следует отметить, что оценки (2.4.40) и (2.4.41) не всегда справедливы. Их нарушения следует ожидать при рассмотрении явлений, связанных с излучением и распространением гравитационных волн, когда нельзя говорить о локализации гравитационного поля в обычном понимании.

Величины $t_{ik}, \tau^{ik}, \mathcal{M}^{ikl}$ не являются тензорами и, тем не менее, они обладают свойством лоренц-ковариантности. В силу этого в замкнутой системе P^i, M^{ik} не только постоянны, но и подчиняются преобразованиям Лоренца.

Используя (2.4.25) совместно с (2.4.27) и (2.4.33), найдём выражение интегрального “вектора” энергии-импульса гравитационного поля:

$$P^k = \frac{1}{\kappa} \int_V \frac{\partial Q^{m0k}}{\partial x^m} d^3x = \frac{1}{\kappa} \int_V \frac{\partial Q^{\alpha 0k}}{\partial x^\alpha} d^3x \quad (2.4.42)$$

Применяя теорему Гаусса-Остроградского для трёхмерного пространства, получаем

$$P^k = \frac{1}{\kappa} \oint Q^{\alpha 0k} dS_\alpha \quad (2.4.43)$$

Интеграл здесь берётся по поверхности большой сферы в области, описываемой метрикой Минковского.

Подставляя (2.4.28) в (2.4.43), получаем:

$$P^\alpha = \frac{1}{\kappa} \oint_S \left\{ -\frac{\partial \theta_{\gamma\gamma}}{\partial t} \delta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \theta_{\gamma 0}}{\partial x^\gamma} \delta_{\alpha\beta} - \frac{\partial \theta_{\alpha 0}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \theta_{\beta\alpha}}{\partial t} \right\} dS_\beta \quad (2.4.44)$$

$$P^0 = \frac{1}{\kappa} \oint_S \left\{ \frac{\partial \theta_{\alpha\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \theta_{\beta\alpha}}{\partial x^\alpha} \right\} dS_\beta \quad (2.4.45)$$

Для “тензора” момента импульса, согласно (2.4.37), имеем:

$$M^{ki} = \int_V (x^k \tau^{0i} - x^i \tau^{0k}) dV =$$

$$= \frac{1}{c} \int_V \left\{ x^k \frac{\partial Q^{\alpha 0i}}{\partial x^\alpha} - x^i \frac{\partial Q^{\alpha 0k}}{\partial x^\alpha} \right\} dV \quad (2.4.46)$$

Компоненты M^{ik} , представляющие физический интерес – это три независимые чисто пространственные компоненты

$$M_1 = M^{23}, \quad M_2 = M^{31}, \quad M_3 = M^{12} \quad (2.4.47)$$

Применяя теорему Гаусса-Остроградского для трёхмерного пространства к (2.4.46), находим эти компоненты в виде

$$M^{\alpha\beta} = \frac{1}{c} \oint_S \left\{ -x_\alpha \frac{\partial \theta_{0\beta}}{\partial x^\gamma} + x_\beta \frac{\partial \theta_{0\alpha}}{\partial x^\gamma} + x_\alpha \frac{\partial \theta_{\beta\gamma}}{\partial t} - \right.$$

$$\left. -x_\beta \frac{\partial \theta_{\alpha\gamma}}{\partial t} + \theta_{0\beta} \delta_{\gamma\alpha} - \theta_{0\alpha} \delta_{\gamma\beta} \right\} dS_\gamma \quad (2.4.48)$$

Таким образом, для того чтобы найти полный импульс, энергию и момент импульса произвольной конечной системы, необходимо знать асимптотическое поведение $\theta_{\alpha\beta}$ на больших расстояниях.

Доказана теорема о положительной энергии. Согласно этой теореме в предположении *доминантного энергетического условия* (см. в главе 5) P^0 всегда положительно и принимает нулевое значение только в пустом пространстве, свободном от всякой материи.

Хотя τ^{ik} не является тензором, а P^i – вектором, полная энергия импульс обладают важным свойством инвариантности при любых преобразованиях координат, сводящихся на бесконечности к тождественным.

Если вещество в системе разделяется на отдельные удалённые подсистемы, то полную энергию и импульс можно вычислить как сумму их значений для каждой подсистемы отдельно. Таким образом, вектор энергии-импульса P^i , является лоренцевым 4-вектором и обладает свойством аддитивности.

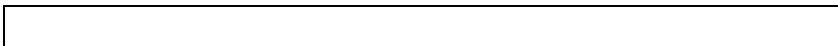
Резюме к главе 4

Уравнения Эйнштейна-Гильберта и принципы общей относительности позволяют сделать довольно общие выводы.

Решение уравнений Эйнштейна-Гильберта неоднозначно. Однако эта неоднозначность вполне соответствует возможности ковариантного описания физических закономерностей в произвольных системах координат. Требование же однозначности решения как раз и соответствует требованию выбора определённой системы координат.

Возможность решения уравнений с начальными условиями (задача Коши) позволяет ставить задачи определения эволюции системы, вплоть до получения космологических решений.

Уравнения дают возможность рассматривать такие асимптотические свойства решений, которые позволяют рассматривать локализованные подсистемы, а значит, и получать законы сохранения в интегральных формах для энергии, импульса, момента импульса ...



Глава 5. *Масса и энергия*

Как было выяснено в предыдущей главе, уравнения Эйнштейна-Гильберта представляют собой по существу закон сохранения энергии-импульса системы материя-гравитационное поле, но в дифференциальной форме. Дифференциальные же формы законов позволяют определять характеристики и поведение системы в точке и её окрестности. Однако основные наблюдаемые и измеряемые характеристики системы носят интегральный характер. Ранее, при рассмотрении вопросов измерения пространственных расстояний и промежутков времени в ОТО, было выяснено, что операции интегрирования, вообще говоря, не обладают свойством ковариантности. Именно поэтому в нестационарной метрике и теряют смысл понятия расстояния и интервала времени. Но энергия, импульс, момент импульса, масса имеют также интегральный смысл. Рассмотрим массу, как самую элементарную интегральную характеристику.

Концепция массы в РТГ более содержательна, нежели в СТО. Фактически, РТГ не может предложить единственного определения понятия массы; здесь существует ряд концептуальных определений, которые по-разному уточняются в контексте различных условий. Возможны и такие ситуации, когда масса системы не может быть определена.

В специальной теории относительности инвариантная масса (далее просто “масса”) изолированной системы может быть определена в терминах энергии-импульса с помощью релятивистского соотношения:

$$m = \frac{\sqrt{E^2 - (pc)^2}}{c^2} \quad (2.5.1)$$

Здесь E – полная энергия системы, p – полный импульс системы, c – скорость света.

Таким образом, *масса системы в СТО равняется норме (длине) 4-вектора энергии-импульса, которая инвариантна при преобразованиях Лоренца.*

Определение массы в РТГ

Концепции и особенности

В 1918 году в письме О. Клейну Д. Гильберт писал о трудностях определения энергии для гравитационных полей и ошибочности энергетической теоремы. В этом же письме Гильберт предположил, что ошибка является характерной особенностью теории гравитации, а трудности определения энергии обязаны именно ошибкам в энергетических теоремах.

Это предположение, как правильная догадка Гильберта, было вскоре доказано Э. Нётер. Теорема Нётер применима к любой системе, которая может быть описана с помощью принципа наименьшего действия, и связывает сохранение энергии с трансляционной симметрией во времени. Когда трансляционная симметрия времени описывается конечно-параметрической непрерывной группой, такой как группа Пуанкаре, теорема Нётер определяет для системы скалярную сохраняющуюся энергию. Однако, если симметрия описывается бесконечно-параметрической группой, существование сохраняющейся энергии не гарантируется. Аналогичным образом теорема Нётер связывает сохранение импульса с симметрией пространственных сдвигов. Поскольку ОТО является теорией инвариантов диффеоморфизмов²⁰⁾, она имеет бесконечную непрерывную, а не конечно-параметрическую группу симметрий. Такая групповая структура, не гарантирует существование законов сохранения. И здесь теорема Нётер оказалась чрезвычайно плодотворной для объединения различных идей определения масс, энергий и импульсов систем в РТГ. Иллюстрацией применения теоремы Нётер является пример введения в стационарном пространстве-времени *Komar*-массы (А.Комар 1959). Хотя в общем пространстве-времени отсутствует конечно-параметрическая трансляционная симметрия времени, стационарное пространство-

²⁰⁾ Диффеоморфизм - гомеоморфизм, являющийся дифференцируемым отображением. Гомеоморфизм – взаимно однозначное непрерывное отображение топологических пространств.

время обладает такой симметрией, связанной с векторами Киллинга²¹⁾. Теорема Нётер доказывает, что такое стационарное пространство-время должно иметь ассоциированную сохраняющуюся энергию. Эта энергия определяет и сохраняющуюся массу - *Komar*-массу.

ADM-масса была определена в 1960 году (по первым буквам фамилий – *Arnowitt R.*, *Deser S.*, *Misner C.*) в первоначальной формулировке РТГ. Позднее в 1980 году она была переопределена в терминах группы асимптотической симметрии пространственной бесконечности (*SPI*). Эта переопределение в значительной степени уточнило теорию, включая объяснение, почему *ADM*-импульс и *ADM*-энергия преобразуются как компоненты 4-вектора. Следует отметить, что *SPI*-группа фактически бесконечномерная. Существование сохраняющихся величин обусловлено тем обстоятельством, что “супертрансляционная” *SPI*-группа имеет 4-параметрическую подгруппу “чистых” трансляций, которые согласно теореме Нётер, генерируют сохраняющийся 4-вектор энергии-импульса. Норма этого вектора и определяет *ADM*-массу.

Bondi-масса была введена (М. Бонди, 1962 год) при изучении потерь массы в физических системах при гравитационном излучении. *Bondi*-масса также связана с группой асимптотических симметрий, с *BMS*-группой 0-бесконечности. Как и *SPI*-группа при пространственной бесконечности, *BMS*-группа при 0-бесконечности - бесконечномерна и также имеет 4-параметрическую подгруппу “чистых” трансляций.

Другим подходом к проблеме энергии в общей теории относительности является использование псевдотензоров, таких как псевдотензор Ландау-Лифшица (ЛД Ландау, ЕМ Лифшиц 1962 год). Псевдотензоры не обладают свойством ковариантности. Вследствие этого они дают калибровочно-независимые ответы для полной энергии только при дополнительных ограничениях, таких, как асимптотическая (псевдо)евклидовость 4-пространства.

²¹⁾ Векторное поле ξ , обладающее следующим свойством: если любое множество точек сместить на $\xi d\lambda$ ($d\lambda$ – бесконечно малая величина), и все метрические соотношения при этом остаются неизменными – это поле называется векторным полем Киллинга.

При обобщении определения массы (энергии) в СТО до уровня релятивистской теории гравитации возникает ряд проблем. В самом деле, оказывается невозможным найти общее определение полной массы (энергии) системы. Основной причиной этого является то, что “энергия гравитационного поля” не является частью тензора энергии-импульса T_{ik} ; она является частью эйнштейновского тензора G_{ik} , представленного с другой стороны эйнштейновских уравнений, и эта часть должна быть учтена, как вклад гравитационного поля в полную энергию. На возможность “хорошего” учёта вклада гравитации в полную энергию при этих обстоятельствах накладывается специфика нелинейности уравнений поля. В определённых ситуациях всё же существуют возможности переписать уравнение так, чтобы “гравитационная энергия” заняла своё место наряду с другими источниками, но только в виде псевдотензора энергии-импульса. Конечно, такое представление энергии нековариантно и поэтому не будет истинным для всех наблюдателей. Кроме того, отсутствует общее определение такой процедуры.

Каким же образом определить полную массу системы, что так изящно определяется в классической механике и обобщается в СТО?

Оказывается, это можно сделать, по-крайней мере, для асимптотически плоского пространства-времени, грубо говоря, для изолированных гравитирующих систем, то есть пустых и свободных от гравитации на бесконечности с помощью ADM расщепления $3 + 1$ ²²⁾, ведущего к решению: как и в обычной гамильтоновом формализме, ось времени, получаемая при расщеплении ассоциируется с энергией, которая может быть проинтегрирована для получения общего количества известного как *ADM*-масса (или *ADM*-энергии, соответственно).

Существует и альтернативное определение массы для стационарного пространства-времени. В случаях, когда в пространстве-времени существуют времениподобное векторное поле Киллинга, его можно рассматривать как генерирующее поле для времени, для которого энергия будет являться сопряжённой

²²⁾ Пионерские же работы по этой теме восходят к имени советского учёного Зельманова АЛ^[89], к его теории хроногеометрических инвариантов.

величиной в смысле теоремы Нётер. В результате такого обобщения и появляется понятие, так называемой, *Komar*-массы.

Хотя это определение и получено другим путём, можно показать, что оно эквивалентно определению *ADM*-массы для стационарного пространства-времени. *Komar*-интегральное определение массы может быть обобщено для нестационарных полей, для которых свойственна, по крайней мере, асимптотическая трансляционная симметрия во времени. Включая определённые процедуры перенормировки можно определить так называемую *Bondi*-энергию так, чтобы она обращалась в нуль на бесконечности (*null infinity*). Таким образом, если *ADM*-энергия включает всю энергию, содержащуюся в пространстве-времени, то *Bondi*-энергия исключает ту часть, которая “выносится” гравитационными волнами в бесконечность.

Важным этапом в связи с новыми определениями масс в РТГ явилось доказательство теоремы о положительности масс при весьма общих условиях. Положительность или существование нижнего предела для значений масс и энергий обуславливает решение основополагающего вопроса об устойчивости пространственно-временных отношений в РТГ: если бы не существовало нижнего предела (положительного значения), тогда изолированная система была бы абсолютно нестабильна; всегда существовала бы возможность распада системы в состояние ещё меньшей полной энергией.

Существует несколько доказательств теоремы о положительности массы, как для *ADM*, так и для *Bondi*. Доказанная теорема для этих случаев в действительности означает стабильность пространства-времени Минковского: здесь оба значения для нижнего предела равны нулю.

Хотя основное внимание было уделено энергии, аналогичные замечания имеют место и для импульсов; рассматривая угловые векторы Киллинга, с помощью *Komar*-техники, можно определить полные импульс и момент импульса системы.

Ограниченность всех определений, упоминавшихся до сих пор, проявляется в том, что они определены только с учётом поведения свойств на бесконечности (нуль или пространственная

Теория относительности.

250.

евклидовость). Однако, начиная с 70-х годов прошлого столетия физики и математики реализуют уже более амбициозные цели определения подходящих *квазилокальных* величин таких, как масса изолированной системы, определяемой с использованием величин определённых в ограниченной области пространства, включающей саму систему. Хотя и имеется целый ряд подходящих определений, таких как *Hawking*-энергия, *Gerlach*-энергия или *Penrose-квазилокальный* энергия-импульс, определяемых на основе твисторных методов, тем не менее, поле сохраняет свойство потока. Есть надежда ввести подходяще определения квазилокальных масс для того, чтобы дать более точные формулировки *hoop*-гипотезы, доказать так называемое неравенство Пенроуза для чёрных дыр, касающееся её массы, и найти квазилокальную версию законов механики чёрных дыр.

***Komar*-масса в стационарном пространстве-времени**

Простым определением стационарного пространства-времени является следующее: это пространство-время, в котором компоненты $g_{\mu\nu}$ не зависят от времени. К общим примерам стационарных пространств можно отнести: метрику Шварцшильда чёрной дыры, и метрику Кэрра вращающейся чёрной дыры.

По определению, стационарное пространство-время обладает трансляционной симметрией времени. Технически это означает существование в 4-пространстве времениподобного вектора Киллинга. Поскольку и система в таком пространстве-времени будет обладать трансляционной симметрией во времени, теорема Нётер гарантирует существование у системы сохраняющейся энергии.

Стационарные системы допускают существование хорошо определяемых покоящихся систем отсчёта, в которых импульс может равняться нулю. В этом случае определение энергии по существу означает определение и массы. *Komar*-масса определяется только для стационарных систем.

Komar-масса определяется как поверхностный интеграл от потока с помощью теоремы Гаусса-Остроградского, подобно тому как определяется заряд в объёме через интеграл от напряжённости по поверхности, заключающей этот объём. Однако техника использования поверхностного интеграла в определении *Komar*-массы

немного отличается при определении заряда в случае электрического поля: величина интегрируемого поля берётся на бесконечности.

Из двух определений, определение *Komar*-массы с помощью трансляционной симметрии во времени обеспечивает более глубокое понимание её сути.

ADM- и Bondi-массы

в асимптотически плоском пространстве-времени

Если система, содержащая гравитационные источники окружена бесконечным пустым пространством, то и пространство-время при удалении наблюдателя будет приближаться по свойствам к свойствам 4-пространства Минковского с геометрией СТО. Такие 4-пространства известны как асимптотически плоские.

Для систем, в которых пространство-время асимптотически плоское, возможно определение *ADM*- и *Bondi*-энергий, масс и импульсов. С точки зрения теоремы Нётер, *ADM*-энергия, импульс и масса определяются так называемой *симметрией пространственной бесконечности* (*spatial infinity*), а *Bondi*-энергия, импульс и масса определяются симметрией *0-бесконечности* (*null infinity*). Масса вычисляется как длина 4-вектора энергии-импульса, на “бесконечности”.

Ньютоновский предел

для плоского пространства-времени

В ньютоновом приближении для квазистатических систем в почти плоском пространстве-времени полная энергия может быть получена сложением негравитационных составляющих энергий системы и вычитанием ньютоновской энергии взаимодействия

Переводя это утверждение на язык РТГ, мы должны сказать, что для системы в почти плоском пространстве-времени полные энергия и импульс даются выражениями:

$$E = \int_V T_{00} dV, \quad P_\alpha = \int_V T_{0\alpha} dV \quad (2.5.2)$$

Когда компоненты вектора импульса равны нулю, то есть $P_\alpha = 0$, то масса системы вычисляется по формуле

252.

$(E + E_{binding})/c^2$, где $E_{binding}$ будучи отрицательным членом, представляет ньютонову энергию связи.

Когда говорят о квазистатичной системе, предполагается, что в системе нет значительных энергий в форме гравитационных волн, а когда говорят, что система находится в почти плоском пространстве-времени, это означает, что метрический тензор совпадает с диагональным тензором пространства Минковского, что приемлемо для экспериментальных целей.

При обобщении определения массы (энергии) в СТО до уровня релятивистской теории гравитации возникает ряд проблем. В самом деле, оказывается невозможным найти общее определение полной массы (энергии) системы. Основной причиной этого является то, что “энергия гравитационного поля” не является частью тензора энергии-импульса T_{ik} ; она является частью эйнштейновского тензора G_{ik} , представленного с другой стороны эйнштейновских уравнений, и эта часть должна быть учтена, как вклад гравитационного поля в полную энергию. На возможность “хорошего” учёта вклада гравитации в полную энергию при этих обстоятельствах накладывается специфика нелинейности уравнений поля. В определённых ситуациях всё же существуют возможности переписать уравнение так, чтобы “гравитационная энергия” заняла своё место наряду с другими источниками, но только в виде псевдотензора энергии-импульса. Конечно, такое представление энергии нековариантно и поэтому не будет истинным для всех наблюдателей. Кроме того, отсутствует общее определение такой процедуры.

Однако для асимптотически плоского пространства-времени, грубо говоря, для изолированных гравитирующих систем, то есть пустых и свободных от гравитации на бесконечности, массы и энергии могут быть определены вполне корректно. В частности масса определяется, как полная энергия локализованной подсистемы в системе отсчёта, в которой импульс подсистемы равен нулю.

Энергетические условия

В релятивистской теории гравитации энергетические условия представляются различными альтернативными соотношениями, которые могут быть использованы в конкретных случаях для наполнения теории содержанием. Любая корректная постановка вопроса или задачи будет содержать в себе такие условия или сохранит их черты в определённых ситуациях. Энергетические условия часто используются (или требуются) при доказательствах важных теорем о чёрных дырах, таких как, например, теорем “об отсутствии волос”²³⁾ или законов термодинамики чёрных дыр.

В РТГ и её применениях распределение масс, моментов и давлений, обусловленных присутствием материи и любых негравитационных полей, описывается материальным тензором энергии-импульса T_{ik} . Однако полевые уравнения Эйнштейна-Гильберта не очень “разборчивы” к материальным источникам гравитации и к полям негравитационного происхождения, формирующих модель пространственно-временного описания. Это обстоятельство можно рассматривать и как преимущество теории, поскольку РТГ должна быть максимально независима от любых предположений, касающихся негравитационной физики, и как слабость теории, поскольку без детализации критериев полевые уравнения могут давать нефизические решения, которые будут слишком далеки от физической реальности даже приблизительно.

Энергетические условия представляют собой общие критерии различения подобных ситуаций. Грубо говоря, эти условия описывают общие состояния материи для всех (или почти всех)

²³⁾ Теоремы об “отсутствии волос”. (No hair theorems). Теоремы об “отсутствии волос” у чёрной дыры говорят о том, что у стационарной чёрной дыры не может быть внешних характеристик, помимо массы, момента импульса и определённых зарядов (специфических для различных материальных полей), а детальная информация о материи будет потеряна (и частично излучена вовне) при коллапсе. Большой вклад в доказательство подобных теорем для различных систем физических полей внесли Брэндон Картер, Вернер Израэль, Роджер Пенроуз, Пётр Крушель (Chruściel), Маркус Хойслер. Сейчас представляется, что данная теорема верна для известных в настоящее время полей, хотя в некоторых экзотических случаях, аналогов которых в природе не обнаружено, она нарушается.

254.

негравитационных полей хорошо известных физике. Будучи достаточно сильными, они позволят исключить заведомо нефизические решения полевых уравнений (это не относится к дираковскому полю).

Наиболее отличительной особенностью энергетических условий является, главным образом, ограничения на собственные значения и собственные вектора материального тензора. Более тонкой, но не менее важной особенностью является то, что они вводятся для событий на уровне тангенциальных пространств. Поэтому они не используют особенности глобальных характеристик, построенных на “замкнутых” времениподобных кривых.

Рассмотрим некоторые из них.

Для того чтобы понять содержание различных условий на энергию, необходимо прежде всего познакомиться с физической интерпретацией скалярных и векторных объектов, получаемых из материального тензора, произвольных времениподобных и нуль-векторов.

Во-первых, единичное времениподобное векторное поле X^i может быть интерпретировано как определение мировых линий некоторого семейства (возможно неинерциального) идеальных наблюдателей. Тогда скалярное поле

$$\rho = T_{ik} X^i X^k \quad (2.5.3)$$

может интерпретироваться как полная масс-энергетическая плотность (материальная плюс полевая энергия любых негравитационных полей) измеренная наблюдателем из нашего семейства (для каждого события на своей мировой линии). Аналогично, векторное поле с компонентами $T^i_k X^k$ будет представлять момент (проекцию), измеренный нашими наблюдателями.

Во-вторых, для заданного произвольного нуль-векторного поля k^i , скалярное поле

$$v = T_{ik} k^i k^k \quad (2.5.4)$$

можно рассматривать как своего рода предельный случай плотности масс-энергии.

В-третьих, в случае РТГ, заданное произвольное времениподобное векторное поле X^i , снова трактуется как описание движения в семействе линий времени идеальных наблюдателей. Скаляр Райкаудури (АК Raychaudhuri) получается как след тензора соответствующего наблюдателям за каждым событием:

$$E[X]^i_i = R_{ik}X^iX^k \quad (2.5.5)$$

Эта величина играет центральную роль в уравнениях Райкаудури²⁴⁾. Используя (2.5.5) из (2.3.47) при $\Lambda = 0$ сразу получаем

$$\frac{1}{8\pi}E[X]^i_i = \frac{1}{8\pi}R_{ik}X^iX^k = \left(T_{ik} - \frac{1}{2}Tg_{ik}\right)X^iX^k \quad (2.5.6)$$

где $T = T^i_i$ является следом материального тензора.

Математические формулировки

Существуют альтернативные формулировки энергетических условий:

- *Слабое энергетическое условие* предполагает, что для каждого будущего события времениподобного векторного поля X^i плотность материи для наблюдателей всегда неотрицательна:

$$\rho = T_{ik}X^iX^k \geq 0 \quad (2.5.7)$$

- *Сильное энергетическое условие* предполагает, что для каждого будущего события времениподобного векторного поля X^i след тензора (2.5.5) для наблюдателей всегда неотрицателен:

$$\left(T_{ik} - \frac{1}{2}Tg_{ik}\right)X^iX^k \geq 0 \quad (2.5.8)$$

²⁴⁾ Уравнение было получено независимо АК Райкаудури и ЛД Ландау. Представляет фундаментальный результат описывающий взаимодействие материальных частиц. Уравнение важно как основополагающая лемма для теоремы о сингулярности Пенроуза-Хокинга и для изучения точных решений в РТГ, но представляет и независимый интерес, поскольку подтверждает наши интуитивных представления о гравитации как об универсальном взаимодействии между двумя масс-энергетическими телами в общей относительности на манер ньютоновой теории гравитации.

256.

- *Нулевое энергетическое условие* предполагает, что для всех будущих событий нуль-векторного поля k^i

$$\rho = T_{ik}k^ik^k \geq 0 \quad (2.5.9)$$

- *Доминантное энергетическое условие* предполагает, что при выполнении слабого энергетического условия для всех будущих событий причинно обусловленного векторного поля (времениподобного или нулевого) Y^i , векторное поле $T^i_k Y^k$ должно быть будущим причинно-связанным вектором. Таким образом, энергия-масса никогда не может быть наблюдаема раньше света.

Отмеченные выше замечания выполняются только в среднем вдоль линий соответствующих векторных полей. Например, усреднённое нулевое энергетическое условие утверждает, что для каждой линии C (криволинейного интеграла) от нуль-векторного поля k^i должно выполняться:

$$\int_C T_{ik}k^ik^k d\lambda \geq 0 \quad (2.5.10)$$

Идеальная жидкость

Для идеальной жидкости материальный тензор принимает вид:

$$T^{ik} = \rho u^i u^k + p h^{ik},$$

где u^i – компоненты 4-скорости материальных частиц и $h^{ik} \equiv g^{ik} + u^i u^k$ – тензор, проецирующий на элементы площадок гиперповерхности ортогональных 4-скорости для каждого события. По отношению к системе отсчёта, сопутствующей движению материальных частиц, материальный тензор примет диагональную форму:

$$T^{ik} = \begin{vmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{vmatrix} \quad (2.5.11)$$

Здесь ρ – плотность энергии, а p – давление.

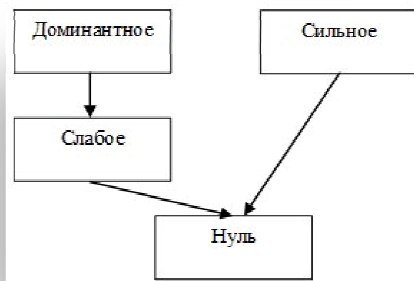


Рис.2. 6 Связь энергетических условий в случае идеальной жидкости

Энергетические условия могут быть выражены через эти собственные значения тензора (2.5.11):

- Слабое энергетическое условие $\rho \geq 0, \rho + p \geq 0$ (2.5.12)

- Нулевое энергетическое условие $\rho + p \geq 0$ (2.5.13)

- Сильное энергетическое условие $\rho + p \geq 0, \rho + 3p \geq 0$ (2.5.14)

- Доминантное энергетическое условие $\rho \geq |p|$ (2.5.15)

Связь энергетических условий в случае идеальной жидкости представлена на рис. 2.6. Заметим, что некоторые из этих условий допускают отрицательные давления. Кроме того, сильные энергетические условия не включают в себя слабые даже в контексте идеальной жидкости.

Пример

Как уже отмечалось, цель ввода энергетических условий заключается в том, чтобы предоставлять простые критерии, которые смогли бы помочь исключать многие нефизические ситуации. Между тем, принимая какую-либо ситуацию разумной и реалистичной, поскольку она была проверена экспериментально, мы можем фактически нарушать какие-либо энергетические условия. В частности, при эффекте Казимира в зазоре шириной d между двумя

258.

параллельными пластинами наблюдается отрицательная плотность энергии:

$$\varepsilon = -\frac{\pi^2 \hbar}{720 d^2} \quad (2.5.16)$$

Отметим, что эффект Казимира чувствителен к геометрической и топологической конфигурации среды, в которой проводится эксперимент. Плотность же энергии, будучи отрицательной для параллельных пластин, будет положительной в экспериментах со сферой.

К счастью, различные квантовые неравенства свидетельствуют о том, что в таких случаях усреднённые подходящим образом энергетические условия могут быть выполнены. В частности, в эффекте Казимира усреднённое энергетическое условие выполняется. Фактически, для тензоров энергии-импульса, выводимых из релятивистской квантовой теории, усреднённые энергетические условия выполняются для квантовых полей, рассматриваемых сегодня. Однако расширение этих результатов является открытой проблемой. Наблюдения же за *темной* энергией или космологической константой, показывают, что даже в среднем сильное энергетическое условие для космологических решений не должно удовлетворяться.

В РТГ и её применениях распределение масс, моментов и давлений, обусловленных присутствием материи и любых негравитационных полей, описывается тензором энергии-импульса (материальным тензором) T_{ik} . Однако полевые уравнения Эйнштейна-Гильберта не очень “разборчивы” к материальным источникам гравитации и к полям негравитационного происхождения, формирующих модель пространственно-временного описания. Это обстоятельство можно рассматривать и как преимущество теории, поскольку РТГ должна быть максимально независима от любых предположений, касающихся негравитационной физики, и как слабость теории, поскольку без детализации критериев полевые уравнения могут давать нефизические решения, которые будут слишком далеки от физической реальности, даже приблизительно.

Энергетические условия представляют собой общие критерии различения подобных ситуаций. Грубо говоря, эти условия описывают общие для всех (или почти всех) состояния материи и все негравитационные поля хорошо известные физике. Будучи достаточно сильными, они позволят исключить заведомо нефизические решения полевых уравнений (это не относится к дираковскому полю). Можно так же сказать, что сформулированные энергетические условия, исходя из физических соображений, позволяют доказать геометрически весьма общие теоремы, то есть средствами ОТО.

Теорема о положительной энергии

В ОТО теорема о положительной энергии (известная и как теорема о положительной массе в дифференциальной геометрии) утверждает, что в предположении *доминантного энергетического условия*, масса асимптотически плоского пространства неотрицательна; кроме того, масса обращается в нуль только для пространства-времени Минковского. Эта теорема устанавливает жёсткую геометрическую связь скалярной кривизны с асимптотическими граничными условиями.

Оригинальное доказательство теоремы для ADM -масс²⁵⁾ было получено в 1979 (Richard Schoen, Shing-Tung Yau) с использованием вариационных методов. Более простое доказательство в 1981 дал Edward Witten на основе использования спиноров в контексте супергравитации. Распространение теоремы на *Bondi*-массу было дано авторами: Ludvigsen, James Vickers, Gary Horowitz, Malcolm Perry, Schoen, Yau.

Gary Gibbons, Stephen Hawking, Horowitz, Perry асимптотически распространили теорему до *anti-de Sitter*'овских пространств-времени²⁶⁾ и теории Эйнштейна-Максвелла. Масса асимптотически *anti-de Sitter*'овского пространства-времени неотрицательна и равна нулю только для пространства-времени *anti-de Sitter*'а. В теории Эйнштейна-Максвелла для пространства времени с электрическим зарядом Q и магнитным зарядом \mathcal{M} масса пространства-времени удовлетворяет

$$M \geq \sqrt{Q^2 + \mathcal{M}^2} \quad (2.5.17)$$

²⁵⁾ ADM -энергия, как и ADM -масса, вводится для определения энергии в РТГ, применимой для специальных геометрий пространства-времени, асимптотически приближающимся к известным метрикам на бесконечности, например, к метрике пространства-времени Минковского. В этих случаях ADM -энергия определяется как функция отклонения компонент метрического тензора от их значений на бесконечности. Другими словами, ADM -энергия вычисляется как сила гравитационного поля на бесконечности.

²⁶⁾ n -мерное пространство *анти-де Ситтера*, обозначаемое AdS_n , представляет собой максимально симметричное, односвязное, псевдориманово многообразие постоянной отрицательной кривизны. Его можно считать псевдоримановым аналогом n -мерного гиперболического пространства. На языке общей теории относительности, пространство *анти-де Ситтера* является максимально симметричным решением уравнений Эйнштейна в вакууме с отрицательной космологической постоянной Λ .

260.

со знаком равенства для решений Majumdar–Papapetrou для внешней чёрной дыры.

Теорема о положительности энергии формулируется для пространства-времени, удовлетворяющего уравнениям Эйнштейна

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \kappa T_{ik}$$

Единственное требование на тензор энергии-импульса T_{ik} — локальная плотность T_{00} положительна (или нуль) в каждой точке пространства-времени в лоренцевой системе отсчёта. Кроме того, предполагается, что в этом пространстве-времени существует асимптотически евклидова пространственно-подобная гиперповерхность, которая должна рассматриваться в качестве исходной поверхности. Более точно, предполагается, что вблизи этой пространственно-подобной гиперповерхности метрика ведёт себя на пространственной бесконечности как (2.4.40) и (2.4.41).

В доказательстве Виттена нет предположений о топологии исходной поверхности.

Полная энергия системы определяется как асимптотический поверхностный интеграл от гравитационного поля согласно (2.4.45).

Утверждение доказанной теоремы заключается в том, что энергия $E = P^0$ - всегда положительная величина или нуль только для плоского пространства Минковского.

Весьма показательным является доказательство теоремы о положительной энергии (массы) при выполнении доминантного энергетического условия. Теорема доказана сугубо геометрически, то есть исключительно средствами ОТО. В ньютоновой механике и в СТО это так, что никогда не вызывало никаких озабоченностей. Казалось бы, как обобщение, масса должна быть положительной и в ОТО. Однако не надо забывать, что и в классической механике, и в СТО речь идёт о локализованных объектах, одним из свойств которых является положительное численное значение массы. В ОТО же речь идёт о нелокализованных объектах. Сам закон сохранения энергии-импульса (в виде полевых уравнений Эйнштейна-Гильберта) сформулирован в дифференциальном виде. Тогда, чтобы получить численное значение массы или энергии, необходимо проинтегрировать соответствующие компоненты тензора. Однако эта операция нарушает, вообще говоря, ковариантность соотношений. Реально же это ведёт к различным определениям массы и энергии. То есть определения массы и энергии становятся неоднозначными (как и в случае глобальных длин и времён в ОТО - они не имеют чётких и однозначных определений, по крайней мере для нестационарных метрик). Эта некорректность может сильно менять концептуальные свойства и массы, и энергии. И здесь надо

сказать, что теорема о положительности массы имеет фундаментальное значение не как фиксирующая её положительность, а как теорема, ограничивающая её минимальное значение. Отсутствие этого свойства просто означало бы предопределённый распад любой массово-энергетической системы, то есть полная нестабильность нашего Космоса и его исчезновение. Никакая теория не может допустить такого сценария! Доказанная теорема о положительной энергии гарантирует, что уравнений Гильберта-Эйнштейна дадут решение, которое будет описывать гравитационно-устойчивую систему.

Резюме к главе 5

Наполнение ОТО физическим содержанием по поводу влияния материи на геометрию пространственно-временных отношений начинается с придания тензору T_{ik} определённого вида. В этом плане весьма существенными становятся те физические определённости, которые будут ограничивать структуру и вид материального тензора T_{ik} . Физические же определённости, которые мы накладываем на структуру и вид материального тензора T_{ik} будут задавать и физические рамки наполнения ОТО как релятивистской теории гравитации.

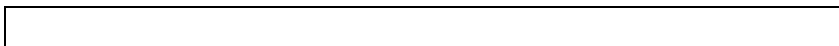
В этом плане весьма существенным является определение общих свойств материального тензора, общих условий, накладываемых на свойства энергии, масс, импульсов в связи с особенностями метрики пространства-времени:

И здесь весьма показательным является доказательство теоремы о положительной энергии (массы) при выполнимости доминантного энергетического условия. Теорема доказана сугубо геометрически, то есть исключительно средствами ОТО. В ньютоновой механике и в СТО это так, что никогда не вызывало никаких озабоченностей. Казалось бы, как обобщение, масса должна быть положительной и в ОТО. Однако не надо забывать, что и в классической механике, и в СТО речь идёт о локализованных объектах, одним из свойств которых является положительное численное значение массы. В ОТО же речь идёт о нелокализованных объектах. Сам закон сохранения энергии-импульса (в виде полевых уравнений Эйнштейна-Гильберта) сформулирован в дифференциальном виде. Тогда, чтобы получить численное значение массы или энергии, необходимо проинтегрировать соответствующие компоненты тензора. Однако эта операция нарушает, вообще говоря, ковариантность соотношений. Реально же это ведёт к различным определениям массы и энергии. То есть определения массы и энергии становятся неоднозначными (как и в случае глобальных длин и времён в ОТО – они не имеют чётких и однозначных определений, по крайней мере для нестационарных метрик). Эта некорректность

может сильно менять концептуальные свойства и массы, и энергии. И здесь надо сказать, что теорема о положительности массы имеет фундаментальное значение не как фиксирующая её положительность, а как теорема, ограничивающая её минимальное значение. Отсутствие этого свойства просто означало бы предопределённый распад любой массово-энергетической системы, то есть полная нестабильность нашего Космоса и его исчезновение. Никакая теория не может допустить такого сценария! Доказанная теорема о положительной энергии гарантирует, что уравнений Гильберта-Эйнштейна дадут решение, которое будет описывать гравитационно-устойчивую систему.

Этими соображениями и обуславливается необходимость специального рассмотрения таких вопросов, как:

- определения масс при разных асимптотических условиях на пространственно-временные отношения;
- энергетические условия, которые играют важную роль при доказательстве важных и общих теорем космологии и термодинамики чёрных дыр, где конкретные условия и свойства зачастую нечётко определены.



Глава 6. Экспериментальные основания ОТО и РТГ^[3]

Эйнштейновский принцип эквивалентности (EEP)

Принцип эквивалентности сыграл исторически важную роль в развитии теории гравитации. Ньютон считал его краеугольным камнем механики, что и отметил как Первый принцип в знаменитых *Математических началах натуральной философии*. В 1907 году Эйнштейн использовал этот принцип как основной элемент в разработке общей теории относительности. Сейчас принцип эквивалентности рассматривается как основа не только для ньютоновской гравитации или РТГ, но и как общая идея при построении теорий в искривленном пространстве-времени. Существенную определённую в эту идею внёс Роберт Дикке в период между 1960 и 1965 гг. Он же использовал этот принцип и для обоснования теории гравитации. Всё это было обобщено и изложено в лекциях, прочитанных в Summer School of Theoretical Physics в Les Houches в 1963 году^[7] и стало называться принципом эквивалентности Эйнштейна (EEP).

Современная формулировка EEP является более мощной, далеко идущей концепцией и она утверждает:

1. *Слабый принцип эквивалентности (WEP);*
2. *Принцип локальной лоренц-инвариантности (LLI);*
3. *Принцип локальной позиционной инвариантности (LPI).*

Что же утверждают эти принципы?

Самой первой формулировкой EEP можно считать ньютоново утверждение о пропорциональности инертной и гравитационной масс, что стало называться слабым принципом эквивалентности (WEP). Другой формулировкой этого принципа является утверждение о независимости траектории свободного полёта тела (не подверженного воздействиям таких сил, как электромагнитные или приливные

гравитационные силы²⁷⁾ от его внутренней структуры и состава. В простейшем случае падения двух различных тел в гравитационном поле *WEP* утверждает, что падение тел будет происходить с одинаковыми ускорениями (этот факт часто называют универсальным законом свободного падения).

Принцип локальной лоренц-инвариантности утверждает, что результаты любого локального негравитационного эксперимента²⁸⁾ не зависят от скорости свободно движущейся системы отсчёта, в которой этот эксперимент выполняется.

Принцип локальной позиционной инвариантности утверждает, что процесс и результаты любого локального негравитационного эксперимента не зависят от того, где и когда во вселенной этот эксперимент выполняется.

Триединый эйнштейновский принцип эквивалентности (*EEP*) является сутью теории гравитации в том смысле, что если этот принцип справедлив, то гравитация должна рассматриваться, как единственная причина искривления пространства-времени или, другими словами, проявление гравитации должно быть полностью эквивалентно эффекту существования физических тел в искривлённом пространстве-времени. Как следствие этого, можно сказать, что только те теории гравитации, которые смогут полностью воплотить в себе принцип *EEP*, будут удовлетворять постулатам *метрической теории гравитации*:

1. Пространственно-временные отношения описываются симметричной метрикой (g_{ik});
2. Траектория свободного движения тела является геодезической в этой метрике;
3. В локальной свободно движущейся системе отсчёта негравитационные законы физики описываются на языке специальной теории относительности.

²⁷⁾ возникают в движущихся телах конечных размеров при наличии градиента поля.

²⁸⁾ например, измерение электрической силы взаимодействия между двумя заряженными телами является негравитационным экспериментом; измерение же гравитационной силы между двумя телами (типа опыта Кавендиша) таковым не является.

Как следствие *EEP*, можно сказать, что в локальной свободно движущейся системе отсчёта результаты экспериментов не должны зависеть от её скорости движения (*принцип локальной лоренц-инвариантности*), значения различных атомных константы не должны меняться (*принцип локальной позиционной инвариантности*). Примером полного воплощения этих принципов являются уравнения Максвелла, которые полностью совместимы с СТО. Кроме того, в локальной свободно движущейся системе отсчёта тела двигаются не ускоренно, или другими словами, по прямым линиям; но эти “локально прямые линии” просто соответствуют геодезическим в искривлённом пространстве^[8].

РТГ является метрической теорией гравитации. Однако существуют и другие, например, теория Бранса-Дике и её обобщения. Теории, в которых негравитационные константы непосредственно связываются с динамическими полями, взаимодействующими с материей, не являются метрическими теориями. В этом смысле теория суперструн, базирующаяся на фундаменте пространственно-временной метрики и включающая дополнительные поля (дилатоны, модули), которые могут образовывать материализующиеся перекрёстные энергетические пары, может вести к нарушению *WEP*.

Важно отметить, однако, что существует некоторая неопределённость при трактовке отрицательных результатов *EEP*-экспериментов – рассматривать ли такие результаты, как нарушение принципа эквивалентности или как проявление дополнительной материи, подобно случаям электромагнетизма или слабых взаимодействий. Так или иначе, но понятие искривлённого пространства – это общее и фундаментальное понятие. Поэтому очень важно тщательно проверить различные аспекты эйнштейновского принципа эквивалентности. Далее мы рассмотрим эксперименты и результаты, опишем некоторые теоретические аспекты формализма, которые были разработаны для этого. Обзоры по теоретическим и экспериментальным интерпретациям *EEP* приведены и у других авторов^[9,10].

Проверка слабого принципа эквивалентности (WEP)

Прямая проверка WEP заключается в сравнении ускорений тел различного состава в лабораторной системе отсчёта под воздействием внешнего гравитационного поля. При нарушении принципа должны быть зафиксированы различные ускорения.

Самый простой способ определить возможные нарушения WEP в форме, пригодной для сравнения с экспериментом, предположить, что для пробного тела инертная m_I и гравитационная m_P массы отличаются так, что в гравитационном поле ускорение свободного падения a будет определяться соотношением: $a = (m_P/m_I)g$.

Инерционная масса любого физического тела включает в себя различные типы масс-энергий: массу покоя, электромагнитной энергии, энергии слабого взаимодействия и другие. Если одна из форм энергии, дающая вклад в m_P будет отличаться от соответствующего вклада в m_I , то будет зафиксирован факт нарушения WEP. Можно записать

$$m_P = m_I + \sum_A \frac{\eta^A E^A}{c^2} \quad (2.6.1)$$

где E^A – внутренняя энергия тела, генерируемая взаимодействием A , η^A – безразмерный параметр, показывающий нарушение принципа WEP этого взаимодействия при измерении – так называемое отношение Этвеша (Eötvös-отношение) для взаимодействия A , c – скорость света. Усреднённое по всем взаимодействиям отношение Этвеша можно представить в виде:

$$\eta \equiv \frac{\Delta a}{\langle a \rangle} = 2 \frac{|a_1 - a_2|}{|a_1 + a_2|} \cong \frac{a_1 - a_2}{g} = \sum_A \eta^A \left(\frac{E_1^A}{m_1 c^2} - \frac{E_2^A}{m_2 c^2} \right) \quad (2.6.2)$$

Здесь индекс I для инерционной массы опущен. Таким образом, экспериментальная величина η устанавливает предел возможного нарушения WEP факторами η^A .

К настоящему времени уже выполнено много высокоточных экспериментов этвешевского типа (Этвеш Л.) – от маятниковых экспериментов Ньютона, Бесселя и Поттера до классических, с крутильными весами (Этвеш P^[11], Дикке^[12], Брагинский^[13]).

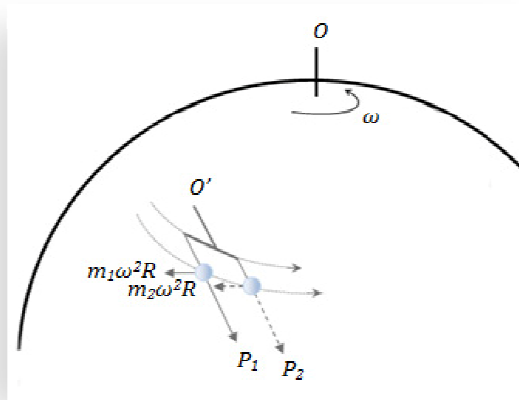


Рис 2.7. Принципиальная схема эксперимента Этвеша

В эксперименте наблюдалось действие силы тяжести на крутильные весы, к коромыслу которых были прикреплены два грузика, подвергавшиеся одновременному действию двух сил: силы притяжения Земли и центробежной силы, создаваемой вращением Земли. Если бы две массы различного состава по-разному реагировали на эти две силы, то они вызвали бы некоторый поворот коромысла. Наблюдая равновесие весов в различных азимутах, Этвеш убедился, что никакого существенного поворота коромысла не происходит.

В современных экспериментах с крутильными весами два тела различного состава связываются коромыслом, которое вертикально подвешивается. Схематично такое устройство изображено на рис.2.7. На первое тело действует пара сил: вес P_1 и центробежная сила $m_1\omega^2R$. Аналогичная пара сил действует и на второе тело: P_2 и $m_2\omega^2R$. Здесь: O – ось вращения Земли, R – расстояние тела до оси вращения Земли, ω – угловая скорость вращения Земли. Если гравитационные ускорения тел отличаются, то и P_1 , и P_2 также будут различными. Вследствие этого, при их векторном сложении с центробежными силами возникнет крутящий момент, передающийся оси O' . Изменение угла поворота системы вокруг оси O' фиксируется с помощью оптических приборов.

Эксперименты подобного типа впервые были проведены Л. Этвешем: первая серия экспериментов – в 1889 г., вторая – в 1908 г. Эти эксперименты с большой точностью показали, что ускорение силы тяжести постоянно.

В экспериментах Дикке и Брагинского в качестве источника гравитационного потенциала использовалось гравитационное поле Солнца. Вследствие вращения Земли вокруг своей оси возмущение на крутильные весы подвергалось модуляции с периодом равным 24 часа^[8].

Начиная со второй половины 1980-х годов, были проведены многочисленные эксперименты по поиску “пятой силы”. Но и здесь были получены нулевые результаты, касающиеся проверки *WEP*.

В эксперименте свободного падения (галилеевского типа), поведённом в Университете Колорадо, сравнение ускорений двух тел из урана и меди производилось с помощью техники лазерной интерферометрии.

Группа Эт-Ваш (Eöt-Wash) Университета в Вашингтоне использовала сложные торсионные подвески для сравнения ускорений различных материалов в подвижной лаборатории с максимально возможным учётом влияния гравитационных полей Земли, Солнца, Галактики^[14,15] и достигла уровня точности 3×10^{-13} ^[17].

Результаты измерений²⁹⁾ верхних пределов отношения Этвеша в разных экспериментах представлены на рис.2.8^[8]; библиография экспериментов до 1991 года см. в^[16].

²⁹⁾ На рис. 7, 8, 9, 10 представлены экспериментальные данные по проверке *EEP*, полученные в разное время, разными авторами. Результаты экспериментов приведены к единому формату. Значения представляют верхний предел возможного нарушения (ВПН) соответствующего принципа. Выше этих значений нарушений не обнаружено, что составляет положительное и твёрдо установленное содержание полученных экспериментальных данных.

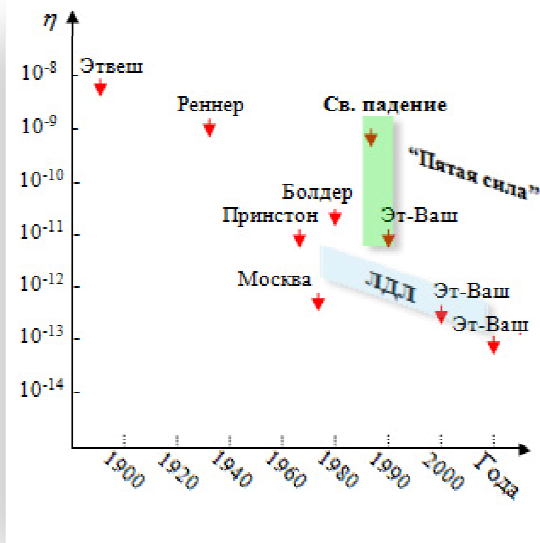


Рис 2.8. Экспериментальная проверка слабого принципа эквивалентности

Представлены эксперименты по проверке слабого принципа эквивалентности, показывающие границы значений η для тел из разных материалов. Много экспериментов со свободным падением и эксперименты группы Эт-Ваш впервые выполнялись для поиска “Пятой силы” (отмечено зелёным цветом). Голубое поле представляет эксперименты по лазерной дальнометрии Луны (ЛДЛ).

Независимость ускорения различных тел, падающих в гравитационном поле Земли, от их состава может быть проверена на много порядков точнее в космических лабораториях. По сравнению с наземными лабораториями эксперименты в космосе могут быть освобождены от многих помех в гораздо большей степени, чем это достижимо в земных условиях: сейсмических, термальных и многих других источников негравитационных шумов. Существует множество проектов для экспериментов, которые предлагается провести для проверки *WEP* в космосе. Эти проекты представляют возможности увеличить точность показателя η от 10^{-14} до 10^{-18} . Представим самые показательные проекты, не вдаваясь в технические детали ^[6].

МикроМасштаб (MicroScope) представляет собой космический эксперимент при комнатной температуре, использующий электростатические дифференциальные акселерометры. Проект находится на стадии развития при поддержке Французского космического агентства (CNES) с запуском, запланированным на 2010 год. Конечная цель состоит в измерении разности ускорений с точностью до 10^{-15} .

Проверка принципа эквивалентности (POEM – Principle of Equivalence Measurement) представляет собой тест *WEP* в земных условиях и находится в стадии разработки. С помощью этого теста можно зафиксировать границу ВПВН для *WEP* на уровне $5 \cdot 10^{-14}$ в коротком (несколько дней) варианте, и на порядок выше при более продолжительном эксперименте. Эксперимент основан на оптических измерениях расстояний с помощью лазерной метрологии по частоте. Вслед за этим проектом был предложен эксперимент *SR-POEM*, основанный на предыдущем проекте – проверка *WEP* во время суборбитального полёта на ракетном зонде (*SR - Sounding Rocket*). Ожидается, что это улучшит точность измерений до 10^{-16} ; в настоящее время исследуются возможности выхода и на более высокий уровень точности. Кроме того, сейчас разрабатывается проект космического эксперимента *Космическая проверка универсальности свободного падения (STUFF – Space Test of Universality of Free Fall)*; данный проект также опирается на оптическую метрологию. Предполагается, что *STUFF* позволит достигнуть точности на уровне 10^{-17} .

Проверка принципа эквивалентности с помощью квантового интерферометра (QuITE – Quantum Interferometer Test of the Equivalence Principle) предполагает метод проверки *WEP*, основанный на холодных атомах. *QuITE* предполагает измерить абсолютное разностное ускорение с точностью 10^{-16} вдоль одной оси, используя для этого два близко расположенных атомных интерферометра, работающих на атомах двух разных типов. *QuITE* позволит улучшить текущие пределы точности, установленные в наземных экспериментах, на семь-девять порядков. Кроме того, проект *I.C.E.*, создаваемый во Франции при поддержке CNES, направлен на разработку высокоточного акселерометра, основанного на когерентных атомных источниках, расположенных в космосе. Точная проверка *WEP* является одной из главных целей проекта *I.C.E.*

Галилео Галилей (GG – Galileo Galilei) – итальянский космический эксперимент, цель которого состоит в проверке WEP при комнатных температурах с точностью 10^{-17} .

Спутниковая проверка принципа эквивалентности (STEP – Satellite Test of Equivalence Principle) – эксперимент по проверке WEP, который предполагается провести на свободно падающей платформе в космосе, которую представляет бесшумный КА (с минимальным лобовым сопротивлением), вращающийся вокруг Земли. STEP позволит проверить независимость гравитационного ускорения от композиции пробных масс, контролируемых при низких температурах, путём поиска нарушений WEP с точностью до 10^{-18} . Этот амбициозный эксперимент позволит проверить существование каких-либо новых неметрических далекодействующих физических взаимодействий.

Проверка принципа локальной лоренц-инвариантности (LLI)

Хотя специальная теория относительности “ничего и не получила” от таких решающих экспериментов как смещение перигелия Меркурия, отклонение света, сыгравших существенную роль в признании и самой общей теории относительности, и её автора Эйнштейна, постоянное накопление экспериментальных данных, успешное объединение СТО и квантовой механики привели к принятию ее в конце 1920-х годов в качестве физического стандарта. Стандарт же экспериментального базиса СТО на сегодняшний день составляет:

- классический эксперимент Майкельсона-Морли и их последователей ^[18,19,20,21];
- эксперименты Айвса–Стилвелла, Росси–Холла и других по дилатации интервалов времени ^[22,23,24];
- проверки независимости скорости распространения света от состояния источника света по наблюдениям за рентгеновским излучением от двойных звёзд и за пионами с высокой энергией ^[25,26];
- тесты на изотропию скорости распространения света ^[27,28,29].

Помимо этих прямых экспериментов в квантовой механике появилось уравнение Дирака с предсказанием античастиц и спина, после чего последовала чрезвычайно успешная релятивистская теория квантовой электродинамики.

В 2005 году, в год 100-летнего юбилея специальной теории относительности, закономерно возник вопрос: *А где пределы применимости СТО?* Ведь специальная теория относительности так глубоко интегрировалась в ткань современной физики, что её справедливость могли оспорить лишь чудачки, да сумасшедшие. Ирония судьбы в том, что именно в течение последних лет в международном масштабе стали предприниматься энергичные усилия

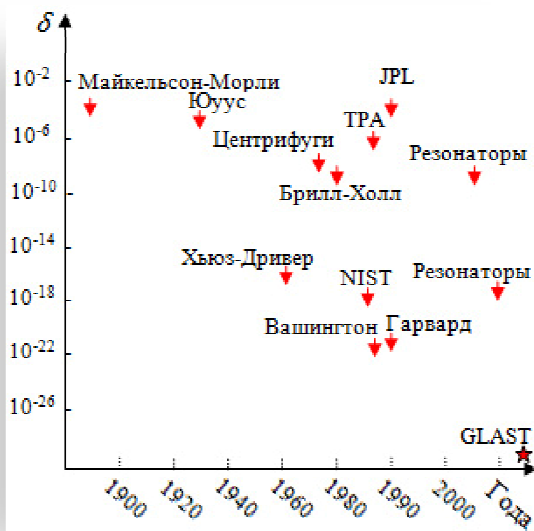


Рис 2.9. Экспериментальная проверка локальной лоренц-инвариантности

Представленные тесты принципа локальной лоренц-инвариантности показывают границы параметра δ , который показывает степень нарушения принципа в электромагнетизме. Тесты Майкельсона-Морли, Брилли-Холла и резонаторы демонстрируют эксперименты по проверке изотропии распространения света в режиме "туда и обратно". Центрифуга, TPA (двухфотонное поглощение), JPL представляют эксперименты по проверке изотропии распространения света в режиме однонаправленного распространения света. Наиболее точные эксперименты проверяют изотропию атомных энергетических уровней. Предполагается, что скорость Земли равна 370 км/сек. относительно покоящейся системы отсчёта во Вселенной.

Теория относительности.

теоретического и экспериментального характера для поиска возможных нарушений специальной теории относительности. Мотивацией этих усилий было не стремление отказаться от эйнштейновского наследия, но составляло поиски “новой физики” в рамках тех теорий, в которых возможно перестают работать макропредставления пространственно-временных отношений и где, поэтому возможны нарушения лоренц-инвариантности, в частности, в некоторых моделях квантовой гравитации.

При квантовании гравитации возникает характерный масштаб равный $L_{Pl} = (\hbar G/c^3)^{1/2} = 1.6 \times 10^{-33}$ см., который называется *планковской длиной*. Поскольку длина не обладает свойством инвариантности при преобразованиях Лоренца, можно ожидать и нарушения принципа лоренц-инвариантности в будущих теориях квантовой гравитации. В сценариях мира с *бранами*, хотя физика локально и остаётся лоренц-инвариантной, но в пространстве с большей размерностью при рассмотрении взаимодействий, связанных с переходами из этого пространства в четырёхмерную брану, можно ждать эффектов нарушения принципа лоренцевской инвариантности. В таких моделях как теория струн, дополнительные скалярные, векторные и тензорные поля в больших масштабах, которые объединяются в рамках стандартной модели также могут проявиться возможные нарушения симметрии Лоренца. Эти и другие идеи и побудили предпринять новым усилия к серьёзным проверкам лоренц-инвариантности с большей точностью и в связи с появлением новых теорий.

LLI – основополагающий принцип теории относительности, постулирующий, что результат локального эксперимента не зависит ни от скорости и ни от ориентации экспериментального оборудования. Для того, чтобы обнаружить нарушение этого принципа, необходимо построить альтернативную теорию в целях интерпретации экспериментов. Простой и удобный способ интерпретации некоторых современных экспериментов называется c^2 -формализмом. Суть его в следующем.

В c^2 -формализме предполагается, что есть выделенная, универсальная покоящаяся система отсчёта, в которой скорость света

c_0 изотропна (по определению, $c_0 = 1$ в системе единиц измерения РСИ). Эту выделенную систему отсчёта обычно связывают с реликтовым фоновым излучением. Сквозь среду этой универсальной системы мы движемся со скоростью около 370 км/сек.^[30]

Предположим, что в электромагнитных взаимодействиях может незначительно нарушаться лоренц-инвариантность, что заключается в изменении скорости распространения электромагнитного излучения c относительно предельной скорости пробных частиц среды, другими словами, $c \neq 1$. Такое лоренц-неинвариантное электромагнитное взаимодействие должно стать причиной сдвигов энергетических уровней атомов и ядер в зависимости от ориентации квантовых осей и квантовых чисел состояния относительно вектора универсальной скорости. Наличие таких энергетических сдвигов при сравнении энергий двух частиц может свидетельствовать о нарушении лоренц-инвариантности. Одним из способов обнаружения сдвигов энергетических уровней состояний, которые в обычных условиях вырождены, является наблюдение зеемановского расщепления основного состояния на $2J + 1$ подуровней ядерного спина в магнитном поле; другой способ – сравнение уровней сложных ядер с уровнями тонкой структуры водородного лазера. Магнитуда временной анизотропии будет пропорциональна величине $\delta \equiv |c^{-2} - 1|$.

Ранние эксперименты по анизотропии часов были выполнены в период 1959-60, независимо Хьюзом в Йельском Университете и Древером в Университете Глазго, однако мотивация для этих экспериментов была несколько иной^[31,32]. Эксперименты Хьюза-Древера дали чрезвычайно точные результаты, ограничивающие значение параметра $\delta \equiv c^{-2} - 1$, представленные на рис. 2.9. Значительно улучшенные результаты были получены в 80-е годы прошлого столетия с помощью охлаждённых лазерных ловушек атомов и ионов^[33,34,35]. Этот метод позволил снизить ширину резонансных линий столкновений и улучшить оценки δ . На рис. 2.9 эти эксперименты обозначены как NIST, Вашингтон и Гарвард, соответственно.

На рис.2.9 представлены также результаты экспериментов типа Майкельсона-Морли (см. обзор в^[36]). В этих экспериментах

276.

наблюдалось распространение света по двум плечам движущегося интерферометра, и сравнивались соответствующие скорости распространения. В электродинамике c^2 -формализма может быть показано, что компенсирующее сокращение Лоренца-Фицджеральда параллельного плеча определяется скоростью $c_0 = 1$. Поэтому эксперимент Майкельсона-Морли и его последующие варианты позволяют измерить коэффициент $c^{-2} - 1$. Одним из таких вариантов является эксперимент Брилл-Холла^[21], в котором использовался лазерный интерферометр Фабри-Перота. В последней серии экспериментов сравнивались частоты электромагнитных резонаторных колебаний в различных ориентациях друг с другом с атомными часами при различных ориентациях лаборатории [37,38,39,40,41]. Эти эксперименты дали границы для $c^{-2} - 1$ на уровне лучше, чем в 10^9 . Naugan и Lämmerzahl^[42] рассмотрели границы для экспериментов типа Майкельсона-Морли для модифицированной электродинамики, включающей “вектор-значение” эффективной фотонной массы.

Ранее c^2 -формализм сосредоточивался исключительно на классической электродинамике. Однако недавно Костельским и его коллегами^[43,44,45] этот формализм был распространён на стандартную модель физики элементарных частиц. Расширенная стандартная модель (*SME* - Standard Model Extension) содержит в себе большое количество потенциально лоренц-нарушаемых параметров. Это обстоятельство открывает множество новых возможностей для экспериментальных проверок. Уже проведены различные эксперименты с анизотропией часов, связывающие параметры модели *SME*^[46]. Например, эксперименты с резонаторами^[37, 38, 39] давали ограничения на коэффициенты тензоров \tilde{k}_{e-} и \tilde{k}_{0+} на уровне 10^{-14} и 10^{-10} , соответственно. Прямое сопоставление атомных часов различных ядер связывалось по параметрам *SME* в секторах нейтронов и протонов в зависимости от характера вовлечённых переходов. Были достигнуты границы в районе от 10^{-27} до 10^{-32} ГэВ

Для проверок возможных нарушений лоренцевской инвариантности используются также и астрофизические наблюдения. Со времён открытия космологических причин вспышек гамма-излучения появился постоянно растущий интерес к использованию этих кратковременных явлений для исследования масштабов энергий

квантовой гравитации в диапазоне от 10^{16} до 10^{19} ГэВ – вплоть до планковского масштаба. Этот энергетический диапазон может проявлять себя в измеряемых модификациях дисперсионного соотношения для электромагнитного излучения (в частности, для высокоэнергичных фотонов, испускаемых с космологических расстояний).

Дисперсионное соотношение для фотонов представляется выражением

$$E^2 = p^2 c^2 + E_{Pl} f^{(1)} |p| c + f^{(2)} p^2 c^2 + \frac{f^{(3)}}{E_{Pl}} |p|^3 c^3 + \dots, \quad (2.6.3)$$

где $E_{Pl} = (\hbar c^5/G)^{1/2}$ - планковская энергия. Тогда скорость света $v_\gamma = \partial E/\partial p$ даётся с точностью до линейных членов $f^{(n)}$ выражением

$$\frac{v_\gamma}{c} \approx 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(n-1) f_\gamma^{(n)} E^{n-2}}{2 E_{Pl}^{n-2}} \quad (2.6.4)$$

Например, лоренцевское нарушение дисперсионного соотношения может быть проявлением эффектов квантовой гравитации.

Оценки времён прихода высокоэнергичных фотонов от источников взрыва на больших расстояниях дали возможность оценить вклады в дисперсию для $n > 2$. Так, наблюдения за 1- и 2-ТэВ γ -лучами блазара Markarian 421^[47] дали такую оценку: $|f^{(3)}| < 128$. Другая оценка была получена при наблюдении двойного лучепреломления в фотонном распространении. Во многих моделях лоренцевского нарушения, различно поляризованные фотоны могут распространяться с разными скоростями, меняя линейную поляризацию на круговую. Если частота фотона зависит от вращения и имеет место дисперсионное соотношение подобное уравнению (2.6.3), тогда изучая “поляризационную диффузию” света от поляризованного источника в заданной полосе пропускания можно получить эффективную оценку. Она была получена и составила $|f^{(3)}| < 10^{-4}$ ^[48]. Другими тестируемыми эффектами нарушения лоренцевской инвариантности могут быть пороговые эффекты взаимодействия частиц, гравитационный эффект Черенкова и нейтринные осцилляции.

278.

Ожидается, что большой космический гамма-телескоп GLAST (the Gamma-ray Large Area Space Telescope) ^[50] сможет улучшить проверки *LLI* на несколько порядков, что позволит достичь точности на уровне $\delta \leq 10^{-26}$ ^[49, 50]. Проект GLAST способен измерить потоки космических γ -лучей в диапазоне от 20 МэВ до более чем 300 ГэВ, позволяя также наблюдать гамма-вспышки от 8 КэВ до 30 МэВ. Успешный запуск этого телескопа (в июле 2008 года) позволит по-новому взглянуть на широкий спектр физических явлений, включая чёрные дыры и активные галактические ядра: оптический и УФ внегалактический фон, гамма-вспышки; происхождение космических лучей и остатков сверхновых; по новому взглянуть на такие гипотетические явления, как аннигиляция суперсимметричной тёмной материи и нарушения лоренц-инвариантности.

Mattingly^[49] дает полный и обновленный обзор теоретических основ и экспериментальных результатов для испытаний *LLI*.

Проверка принципа локальной позиционной инвариантности (*LPI*)

Принцип локальной позиционной инвариантности (*LPI*) — третья составляющая принципа *EEP*. Этот принцип может быть проверен в экспериментах, связанных с гравитационным красным смещением, Идея такого эксперимента впервые была предложена Эйнштейном. Несмотря на тот факт, что Эйнштейн рассматривал подобный эксперимент критичным для подтверждения теории релятивистской гравитации, теперь уже ясно, что результаты подобных экспериментов не дают возможности отличить эйнштейновскую теорию гравитации от других метрических теорий. В типичном эксперименте по измерению красного смещения измеряется частотный или волновой сдвиг $Z \equiv \Delta\nu/\lambda\nu = -\Delta\lambda/\lambda$ в показаниях двух идентичных частотных часов, размещённых на разных высотах в статическом гравитационном поле.

Если частота данного типа атомных часов не меняется при измерениях в локальной, свободно падающей системе отсчёта (лоренцевская система отсчёта), и не зависит от положения или скорости системы, тогда сравнение частот двух часов в покое в различных положениях сводится к сравнению скоростей двух

локальных лоренцевских систем отсчёта, одной — покоящейся относительно одних часов в момент испускания сигнала, другой —

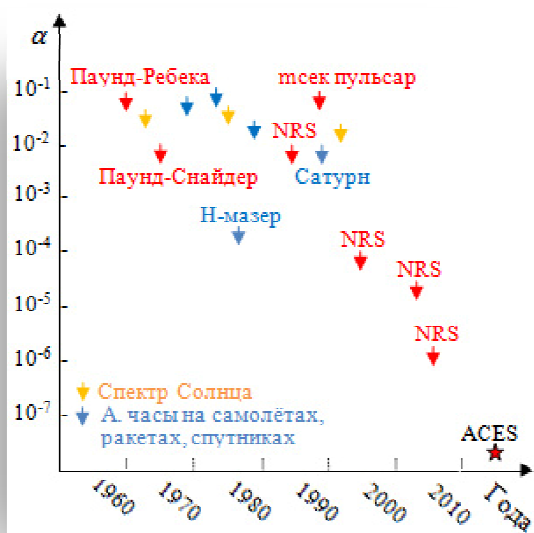


Рис 2.10. Экспериментальная проверка локальной позиционной инвариантности

Представлены результаты проверок принципа локальной позиционной инвариантности с помощью экспериментов по гравитационному красному смещению, показывающие границы значения параметра α , описывающего отклонения красного смещения от $\Delta\nu/\nu = \Delta U/c^2$. В экспериментах NRS оценки α указаны с учётом различия между часами разных типов.

покоящейся относительно других часов в момент принятия сигнала. Частотный сдвиг является следствием доплеровского эффекта первого порядка между системами отсчёта. Природа часов не играет никакой роли. Результат сдвига даётся выражением:

$$Z = \frac{\Delta U}{c^2} \quad (2.6.5)$$

где ΔU — разность ньютоновых гравитационных потенциалов между точками приёма и испускания сигнала. При нарушении LPI эту разность можно записать в виде:

$$Z = (1 + \alpha) \frac{\Delta U}{c^2}, \quad (2.6.6)$$

где параметр α оценивается по результатам эксперимента и показывает границу возможного нарушения LPI при проведении дальнейших уточняющих экспериментов. Параметр α может зависеть и от природы часов, используемых для измерения частотного сдвига^[8].

Первый успешный высокоточный результат измерения красного смещения был получен в серии экспериментов Пауда-Ребеки-Снайдера в 1960-1965 годах. Эксперимент основывался на использовании эффекта Мёссбауэра резонансного поглощения γ -излучения изотопа железа ^{57}Fe при вертикальном удалении источника излучения от его приёмника на расстоянии 22.5 м, что равнялось высоте башни Физической лаборатории Джефферсона в Гарвардском Университете. В ходе экспериментов ещё раз было подтверждено влияние гравитации на частоту света при проверке сдвига частоты $\Delta\nu$ в гравитационном поле, величина которой даётся соотношением, вытекающим из WEP :

$$\Delta\nu/\nu = gh/c^2 = (2.57 \pm 0.26) \cdot 10^{-15}, \quad (2.6.7)$$

где g – ускорение свободного падения, h – высота падения^[51, 52]. Эксперименты Пауда-Ребеки-Снайдера привели к следующей оценке границы α возможного нарушения LLI : $\alpha \cong 10^{-2}$ ^[53].

С 1960 года параллельно с экспериментами Пауда-Ребеки-Снайдера проводились и другие эксперименты: измерялся сдвиг спектральных линий в гравитационном поле Солнца; измерялась разница хода атомных часов, размещаемых на самолётах, ракетах, спутниках.³⁰ На рис. 2.10 представлены результаты наиболее важных экспериментов, которые были выполнены с 1960 года^[8].

³⁰⁾ По сравнению с изменением масштабов интервалов координатного времени при переходе от одной системы отсчёта к другой, изменение масштабов собственного времени имеет другую природу. Если под часами подразумевать какой-либо стандартный периодический процесс, а под темпом хода таких часов частоту этого периодического процесса, то, как было показано в главе 2 (см. 2.1.34, 2.1.35), темп хода часов будет зависеть от координат точечных часов. В качестве таких часов используются частоты фотонов, рождающихся при переходах с одной орбиты на

Почти 50 лет безрезультатных и противоречивых попыток оценки гравитационного красного смещения спектральных линий Солнца завершились, наконец, его надежным измерением. Технические трудности измерения красного смещения линий солнечного спектра в собственном гравитационном поле в первые годы существования теории релятивистской гравитации породили некоторые сомнения в справедливости теории. Однако подобные измерения не являются простыми, поскольку солнечные спектральные линии искажаются, так называемым, краевым эффектом. В наблюдаемом солнечном излучении присутствуют компоненты от конвекционных и турбулентных движений в фото- и хромосферах со своими доплеровскими сдвигами. Сложность проведения измерений заключалась в эффективном разделении этих компонент, поскольку наблюдения “смешивались” с поперечными движениями солнечного лимба. Выход был найден в использовании “сильных” симметричных линий спектра, что позволило достичь определённости в измерениях. Успешные измерения были проведены в 1962 и 1972 годах^[8]. В 1991 году LoPresto с коллегами^[54] измерили сдвиги солнечных спектральных линий и установили согласие с принципом *LPI* с точностью около 2%, наблюдая за триплетом линий в спектрах кислорода, как поглощения, так и испускания.

Первое точное измерение красного смещения было выполнено в суборбитальном эксперименте Вессо-Левина в июне 1976 года^[55]. В этом эксперименте сравнивались частоты двух водородных мазеров, один из которых был расположен в ракете на высоте около 10 000 км, другой — на Земле. В эксперименте использовалась частотная стабилизация мазеров при отслеживании частотного сдвига в зависимости от высоты. Разработанная система обработки данных позволила исключить эффекты Доплера первого порядка, обусловленные движением ракеты, сохраняя при этом полезную информацию о локализации и скорости (для оценки разности потенциалов ΔU и релятивистского “замедления времени”). Результаты эксперимента установили предел $|\alpha| < 2 \cdot 10^{-4}$.

другую или де-бройлевские частоты элементарные частиц. Измерения разницы хода часов осуществляется с помощью экспериментов по проверке принципа локальной позиционной инвариантности.

282.

С помощью эксперимента по нулевому красному смещению (NRS), выполненного в 1978 году, были проверены темпы хода двух часов различного типа в зависимости от расположения. Показания двух часов на основе водородных мазеров с использованием устройства сверхпроводящих резонаторов стабилизированных частот (SCSO- superconducting-cavity stabilized oscillator) были сопоставлены спустя 10 дней после начала эксперимента. В течение времени проведения эксперимента гравитационный потенциал Солнца U/c^2 менялся по синусоиде с 24-часовым периодом на величину 3×10^{-13} из-за вращения Земли вокруг своей оси и линейно на 3×10^{-12} день вследствие 90-градусного положения Земли от перигелия в апреле. Анализ данных показал неразличимость показаний в пределах достигнутой точности и дал оценку для параметра α : $|\alpha^H - \alpha^{SCSO}| < 2 \cdot 10^{-2}$ ^[56]. Эта граница была улучшена с использованием более стабильной частоты атомных часов ^[57, 58, 59]. Из сравнения показаний цезиевых атомных часов и водородного мазера годовая разница составила $|\alpha^H - \alpha^{Cs}| < 2.1 \cdot 10^{-5}$ ^[59].

С точностью до 10 процентов по часам, связанным с Землёй^[60] относительно стабильных миллисекунд пульсара РОО 1937+21, было измерено гравитационное красное смещение, обусловленное движением Земли в гравитационном поле Солнца вокруг центра масс Земля-Луна (амплитуда 4000 км). Два измерения красного смещения с использованием стабильных часов были проведены с однопроцентной точностью: один на космическом аппарате “Вояджер” в гравитационном поле Сатурна ^[61], другой на станции “Галилео” в поле Солнца ^[62]. Результаты представлены на рис.2.10

Точность экспериментов по гравитационному красному смещению может быть улучшена до уровня 10^{-10} с использованием лазерных охлаждённых атомных часов на борту космического аппарата, путешествующего на расстоянии в пределах четырёх солнечных радиусов ^[63].

Современные технологии в области навигации, используя атомные часы на орбите Земли, осуществляя регулярно точную передачу синхронизирующих сигналов, должны принимать в расчет, как эффекты гравитационного красного смещения, так и “замедления

координатного времени” Например, глобальная система позиционирования (GPS) обеспечивает точность позиционирования до 15 метров (и даже большую в военных целях) и 50-наносекундные интервалы времен при локализации объектов в любом месте на Земле. Тем не менее, разница величин между спутниковыми и земными часами как результат релятивистских эффектов составляет 39 миллисекунд (+46 мсек. вследствие гравитационного красного смещения и -7 мсек. вследствие “координатного замедления времени”). При отсутствии точного учёта этих эффектов GPS не смогла бы функционировать с заявленной точностью. Этот факт является примером практического применения релятивистской теории гравитации в реальной практике! О роли GRT в технологиях GPS см.^[64,65]; более популярно вопрос изложен в^[66].

Принцип локальной позиционной инвариантности имеет и временной аспект: если *LPI* справедлив, то фундаментальные постоянные не гравитационной физики должны оставаться постоянными во времени. В табл. 2.1 представлены установленные в экспериментах текущие границы точности для безразмерных констант. Ссылки и обсуждения по этому вопросу для начала можно увидеть в^[8] или ^[67]. Для более подробного знакомства с экспериментами и теоретическими обоснованиями по изменению констант см.^[68].

Проводимые эксперименты можно сгруппировать по тём типам:

1. эксперименты, в которых сравниваются показания либо разных атомных часов, либо атомных часов со сверхстабильными осцилляторами;
2. измерения спектров поглощения и испускания удалённых атомов, например, линий поглощения квазаров с большим красным смещением;
3. измерения с использованием реликтовых радиоактивных остатков (метеориты, естественные реакторы на Земле)

В тестах на сравнение показаний часов, в которых взаимно сравниваются высокостабильные атомные часы различной физической природы, продолжают обычно в течение периодов от месяца до года (варианты экспериментов NRS). Если частоты часов по-разному зависят от постоянной тонкой структуры α_{EM} , от электрон-

284.

протонного отношения масс m_e/m_p или гиромангнитного отношения g_p , например, для протона, то различие частот приведёт к “дрейфу” границ на значения этой константы. Зависимость частоты от констант может быть довольно сложной, в зависимости от участвующих в эксперименте атомов.

Для достижения экстремальной точности при сравнении частот в самых последних экспериментах использовалась техника атомных фонтанов, лазерного охлаждения и ловушек. Измерялись и сравнивались частоты переходов сверхтонкой структуры рубидия-87^[69], квадрупольных переходов ионов ртути-199^[72], переходы $1S-2S$ атомов водорода^[70], оптических переходов в иттербии-177^[71], против переходов сверхтонкой структуры цезия-133 наземных часов. Эти эксперименты показали на сегодня для постоянной тонкой структуры: $\dot{\alpha}_{EM}/\alpha_{EM} < 3 \cdot 10^{-15} \text{ год}^{-1}$.

Получаемые границы для той или иной константы, как результаты проведённых экспериментов, могут отличаться по двум признакам: первая группа значений границ возникает в экспериментах первого типа, которые связаны с проведением экспериментов в лабораториях и станциях на предмет их сегодняшних значений; вторая группа результатов для границ возникает в экспериментах при проведении измерений, связанных с реликтовыми процессами, произошедшими в далёком прошлом, как результат астрономических измерений спектральных линий красного смещения от далёких источников или как результат измерений ядерных процессов, произошедших на ранних этапах геологической истории Земли.

Границы точности на изменения основных космологических констант негравитационных физики^[68] **Табл. 2.1**

Константа k	Ограничение на \dot{k}/k (год ⁻¹)	Красное смещение	Метод
Постоянная тонкой структуры ($\alpha_{EM} = e^2/\hbar c$)	$< 30 \times 10^{-16}$	0	Сравнение часов ^[69, 72, 70, 71]
	$< 0.5 \times 10^{-16}$	0.15	Естественный реактор в Окло ^[73, 74, 75]
	$< 3.4 \times 10^{-16}$	0.45	Распад ¹⁸⁷ Re в метеоритах ^[76]
	$(6.4 \pm 1.4) \times 10^{-16}$	0.2 – 3.7	Спектр удалённых квазаров ^[77, 78]

	$< 1.2 \times 10^{-16}$	0.4 – 2.3	Спектр удалённых квазаров [79, 80]
Постоянная слабого взаимодействия ($\alpha_W = G_f m_p^2 / \hbar^3$)	$< 1 \times 10^{-11}$	0.15	Естественный реактор в Окло [73]
	$< 5 \times 10^{-12}$	10^9	Ядерный синтез БВ [81, 82]
Отношение масс m_e/m_p	$< 3 \times 10^{-15}$	2.6 – 3.0	Спектр удалённых квазаров [83]

Ранние эксперименты по сравнению спектральных линий различных атомных переходов в удалённых галактиках и квазарах дали оценки на границы точности α_{EM} , g_p , (m_e/m_p) , которые составили величину порядка 10 процентов хаббловского масштаба^[84]. Однако значительный прогресс в астрономической и лабораторной спектроскопии, возможность моделирования сложных астрономических сред, где продуцировались линии поглощения и испускания, возможности достичь больших величин красного смещения позволили существенно повысить точность границ. Как факт, в 1999 году Уэбб с соавторами^[77, 78] объявил, что измерения линий поглощения Mg, Al, Si, Cr, Fe, Ni и Zn квазаров в области красного смещения $0.5 < Z < 3.5$ показали малое значение α_{EM} в ранних эпохах, а именно $\Delta \alpha_{EM} / \alpha_{EM} = (-0.72 \pm 0.18) \times 10^{-5}$, соответствующее $\dot{\alpha}_{EM} / \alpha_{EM} = (6.4 \pm 1.4) \times 10^{-16} \text{год}^{-1}$ (в предположении линейного дрейфа во времени). Измерения по другим группам пока не подтвердили этот эффект^[79, 80, 85]; последний анализ спектра поглощения Mg в квазарах при $0.4 < Z < 2.3$ дал $\dot{\alpha}_{EM} / \alpha_{EM} = (-0.6 \pm 0.6) \times 10^{-16} \text{год}^{-1}$ ^[79].

Ещё один важный ряд границ точности констант получен из анализа процессов происходивших в естественном ядерном реакторе в Окло (Габон, Африка) около 1,8 миллиарда лет назад. Измерения проб руды показали аномально низкое отношение содержащихся в них двух изотопов Самария - $^{149}\text{Sm}/^{147}\text{Sm}$. Ни тот, ни другой из изотопов не являются продуктами распада, но ^{149}Sm мог быть истощён благодаря исходящему потоку нейтронов. Оценки нейтронного потока (суммарной величины) на этапе “работы” естественного реактора с учётом распространённых аномалий, дали значение сечения рассеяния нейтронов для ^{149}Sm , соответствующее периоду времени около 1.8

286.

миллиардов лет назад, которое согласуется с современными данными. Однако сечение захвата очень чувствительно к энергиям низких уровней ($E \sim 0.1$ эВ), так что изменение в энергии этого уровня только на 20МэВ через миллиард лет должно было бы изменить сечение захвата от сегодняшнего значения более, чем на наблюдаемую величину. Впервые это проанализировал в 1976 году Shlyakter^[86]. Последние повторные анализы “Окло”-данных^[73, 74, 75] дали границы точности на изменения $\dot{\alpha}_{EM}$ около 5×10^{-17} год⁻¹. Аналогично, последний анализ скорости распада ¹⁸⁷Re в древних остатках метеоритов (возрастом 4.5 миллиардов лет) дали значение $\dot{\alpha}_{EM}/\alpha_{EM} < 3.4 \times 10^{-16}$ год⁻¹^[76].

В 2010 году были опубликованы две работы по результатам экспериментов по точному измерению гравитационного красного смещения интерференцией волн материи и измерению вариации постоянной тонкой структуры.

Одно из главных предсказаний метрических теорий тяготения, таких как, общая теория относительности – предсказание замедления хода часов в гравитационном поле с потенциалом U . Величина этого замедления должна определяться множителем $1+U/c^2$, где c - скорость света. Замедление же хода часов должно проявиться при сравнении показаний часов, находящихся в гравитационном поле, с часами, находящимися вне зоны действия гравитационного потенциала. Учёт влияния этого эффекта, известного как гравитационное красное смещение, крайне важен при разработках и эксплуатации систем глобального позиционирования, при обслуживании систем эталонного времени, для предстоящих экспериментов со сверхточными часами при их распределённом пространственном базировании в таких экспериментах, как исследование изменений численных значений фундаментальных констант. Гравитационное красное смещение измерялось и ранее с использованием часов на башне, самолете и ракете, достигнув точности - $7 \cdot 10^{-5}$. В работе^[87] показано, что лабораторные эксперименты, основанные на квантовой интерференции атомов, допускают более точное измерение и достигают точности - $7 \cdot 10^{-9}$. Результаты экспериментов согласуются с той точкой зрения, которая утверждает, что гравитация является следствием кривизны пространства-времени, что является основой принципа общей

относительности. Это обстоятельство является весьма важным в связи с продолжением исследований в области квантовой теории гравитации. Совершенствование инструментария измерений, основанных на использовании эффекта красного смещения особенно важно, поскольку этот тест уже проводился, но точность результатов была ниже той, которая требуется для подтверждения теорий искривлённого пространства-времени. В связи с этим необходимо отметить – авторы увеличили точность измерения на четыре порядка.

Дж. Вебб, В. Фламбаум и их коллеги^[88] из австралийского университета Нового Южного Уэльса в статье^[88] представили результаты измерения постоянной тонкой структуры в ходе анализа излучения квазаров, находящихся в миллиардах световых лет от Земли. Группа Вебба еще в 1998 году начала эксперимент по поиску свидетельств изменчивости постоянной тонкой структуры. Ученые изучали спектры квазаров, излучение от которых путешествует миллиарды лет, в частности, проходя сквозь газовые облака. Изучая спектр поглощения в них, можно выяснить их химический состав, а также вычислить значение постоянной тонкой структуры. Команда Вебба исследовала сотни квазаров на северном небе и пришла к выводу, что миллиарды лет назад постоянная тонкой структуры была примерно на одну сотысячную меньше, чем сегодня. Однако тогда не все физики признали этот результат. Теперь Вебб и его коллеги проанализировали излучение от 153 квазаров на южном небе с помощью телескопа VLT в Европейской южной обсерватории (Чили). Результат оказался противоположным: постоянная тонкой структуры на южном небе 10 миллиардов лет назад была на одну сотысячную больше, чем сегодня. Эта асимметрия между двумя полушариями названа исследователями "австралийским диполем".

Резюме к главе 6

На протяжении более чем 90 лет со времени своего появления, РТГ на основе ОТО продолжает легко преодолевать все испытания. Такая долговечность и успех сделали симбиоз этих теорий стандартной теорией гравитации для всех практически приложений, включая навигацию КА и астрометрию, а также астрофизику, астрономию, космологию и фундаментальную физику.

Эксперименты говорят о том, что на макроуровне пространственно-временные отношения подчиняются СТО (без материи) и ОТО (в присутствии материи)

В подтверждении СТО говорят результаты многочисленных экспериментов по проверке локального принципа лоренц-инвариантности, а для подтверждения ОТО необходим всего-навсего один эксперимент – измерение кривизны пространства и, разумеется, теория, которая объяснит искривление и даст возможность распространить и рассчитать геометрические свойства макроскопического пространства-времени.

Изменения негравитационных констант (например, постоянной тонкой структуры) может свидетельствовать о том, что геометрия пространственно-временных отношений (g_{ik}) может определяться не только распределением материи и гравитацией. То есть метрика может изменяться не только материей, но и какими-то другими факторами. В исходных уравнения Эйнштейна-Гильберта эти факторы “выключены”.

Заключение

Специальная теория относительности (СТО) по существу является теорией пространственно-временных отношений реальных объектов. В ней рассматриваются два типа объектов – локализованные и нелокализованные, их сосуществование во взаимодействии. Локализованные объекты представляются материальными точками, нелокализованные – полями. Описание их сосуществования, пространственно-временных отношений происходит на фоне функциональной непрерывности в *ТМК-топологии*, инерциальной симметрии и принципа относительности. Пространственно-временная непрерывность рассматривается как макроскопическое приближение этих отношений.

В кинематическом плане, с точки зрения пространственно-временных отношений, теория относительности является теорией хронометрических инвариантов с заменой в измерениях традиционных эталонов длины и времени на единый эталон скорости распространения стандартного сигнала. Роль стандартного сигнала и величины эталонной скорости становятся главными. Для вывода же кинематических преобразований Лоренца достаточно факта инвариантности интервала при переходах между инерциальными системами отсчёта. Поэтому значимость второго постулата Эйнштейна для кинематических соотношений в СТО отодвигается на второй план.

С точки зрения динамики, СТО - это теория ковариантного описания законов физики в инерциальных системах отсчёта при распространении принципа инерциальной симметрии на динамические уравнения, включая уравнения электродинамики.

Весьма распространённое заблуждение – отождествление общей теории относительности (ОТО) и релятивистской теории гравитации (РТГ). Обусловлено тем, что истоки обеих теорий связывают с одним именем А.Эйнштейна.

Однако, во-первых, в создании этих двух революционных теорий принимало участие гораздо больше людей и не менее гениальных. Все они нашли вполне достойное место на “иконостасе”

290.

не только физики, но и философии; во-вторых, на самом же деле существует триединство этих теорий:

- ☞ ОТО;
- ☞ РТГ или другие теории гравитации;
- ☞ симбиоз “ОТО-РТГ”.

Дисциплина ОТО как раздел физики, является обобщением СТО до неевклидовой геометрии. В чём же суть этого обобщения?

Как показывает опыт, “ближнее” физическое пространство (*макро-*) является трёхмерным и евклидовым. Поэтому для описания единого четырёхмерного пространственно-временного многообразия становится возможным использование псевдоевклидовой 4-геометрии. Можно даже сказать, что СТО – это псевдоевклидова геометрия 4-пространственно-временных отношений пустого мира. Признаком евклидовости пространства является справедливость теоремы Пифагора. В четырёхмерном пространственно-временном многообразии справедлива та же теорема Пифагора, но с сигнатурой (+ ---):

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Однако априорное утверждение о евклидовости физического пространства требует эмпирических подтверждений. Но кроме как в локальных масштабах, таких подтверждений нет. Да, наше “ближнее” пространство евклидово. Но как быть с “дальним” пространством, неоднородным и наполненным материей?

И здесь мы просто обязаны выбрать более общую пространственную метрику. Единственное требование к новой метрике – она должна быть локально евклидовой. В самом общем случае этим требованиям удовлетворяет риманова геометрия. *В этом и есть суть перехода от СТО к ОТО.* Теперь известную 4-теорему Пифагора с известной сигнатурой должно заменить выражение для “расстояния” между двумя мировыми точками 4-псевдориманова пространства-времени:

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$$

Здесь g_{ik} – метрический тензор. В локальном приближении тензор принимает диагональный вид, соответствующий теореме Пифагора. Эта геометрия включает описание всех предыдущих теорий.

Критическим же экспериментом для проверки ОТО в её геометрическом аспекте может быть только непосредственная проверка пространственно-временной метрики. Например, для проверки кривизны 3-пространства можно измерить сумму углов “большого” пространственного треугольника и сравнить с суммой углов, получаемой в евклидовой геометрии (180^0). Для проверки же псевдоевклидовости 4-пространства (пространства-времени) необходимы более сложные хроногеометрические измерения. Однако подобные эксперименты не смогут дать нам значений для всех компонент метрического тензора g_{ik} во всех точках. Метрический тензор как объект геометрии, может быть получен только в рамках теории, связывающей его значения с распределением материи в пространстве и с проявлением других факторов. Первой такой теорией стала релятивистская теория гравитации (РТГ) Эйнштейна-Гильберта. Позже появились и другие теории конкурирующие с РТГ.

Таким образом, сегодня совершенно ясно, что *общая теория относительности (ОТО) и теория гравитации - это, вообще говоря, сосуществующие теории, а не одно целое*: первая - как парадигма нового описания пространственно-временных отношений в макро- и мегамире, как обобщение СТО до произвольной метрики; вторая - как теория гравитации, связывающая метрику с распределением материи в пространстве-времени: РТГ наполняет ОТО конкретной метрикой. При возможности существования альтернативных теорий гравитации, у ОТО, как парадигмы, альтернативы пока нет.

Именно на этом основании, на основании различимости ОТО, как обобщающей концепции пространственно-временных отношений макромира и РТГ, как наполняющей метрику конкретикой присутствия материи, сегодня стало возможным более чётко формулировать задачи экспериментального подтверждения различных аспектов теорий, описывающих симбиоз метрических и гравитационных аспектов нашего мира. При этом следует отметить, что ОТО как абстрактная теория пространственно временных отношений, сегодня может получить своё подтверждение только

292.

через РТГ или другие теории гравитации. Собственно поэтому большинство экспериментов, проводимых в связи с этим, имеют гравитационную направленность.

О связи ОТО и РТГ необходимо ещё раз сказать следующее:

- ✓ РТГ как теория, начинается с отождествления g_{ik} с тензорным потенциалом гравитационного поля. Основанием для этого является эмпирическое подтверждение принципа эквивалентности;
- ✓ поскольку метрика (g_{ik}) не определяется в ОТО, а задаётся извне, изменения негравитационных констант (например, постоянной тонкой структуры) может свидетельствовать о том, что геометрия пространственно-временных отношений (g_{ik}) может определяться не только распределением материи и гравитацией. То есть метрика может изменяться не только материей, но и какими-то другими факторами. В исходных уравнения Эйнштейна-Гильберта эти факторы “выключены”;
- ✓ на сегодняшний день нет никаких оснований сомневаться в обобщениях и выводах ОТО.

Основные выводы

1. Существование максимальной скорости распространения сигнала обуславливает единственность её значения и возможность выбора значения этой скорости, как нового эталона измерения пространственно-временных отношений. Введение нового эталона пространственно-временных отношений позволило преодолеть искусственную факторизацию отношений на пространственную и временную, то есть на отдельные составляющие, и восстановить целостность описания механического движения с помощью введения нового упорядочивающего фактора – 4-интервала (s) вместо 1-временного (t). При этом 4-ТМК-топология отношений пришла на смену старой (3+1)-ТМК-топологии.

2. Преобразования Лоренца являются по существу преобразованиями координат абстрактных точек пустого ньютонова пространства. Между тем, предметом кинематики СТО является "алгебра" нуль-событий. Неучёт этого обстоятельства обуславливает появление "ножниц" в интерпретации распространённых пространственно-временных парадоксов.

3. Возникновение концепции эволюционного времени и понятийное разделение времени на эволюционное (собственное) и динамическое

(координатное). В этом случае синхронизации часов представляется просто как техническая процедура установления связи эволюционного и динамического времён. В "пустом пространстве" средствами СТО возможно описание сохраняющейся синхронизации в рамках инерциальной системы отсчёта. В случае "пространства, заполненного материей" (ОТО), такое описание в общем случае неприменимо.

4. "Появление" нелокализованных сущностей (например, электромагнитных полей), как целостных объектов, которые не требуют для обоснования своего существования неких "строительных" сосуществующих частей. Их возникновение обуславливается существованием точечных зарядов. Квантовая механика "укрепляет" позиции существования таких нелокализованных объектов: квантовые объекты существуют сами по себе, как объективная реальность и описываются волновыми векторами, но уже другого пространства — гильбертова.

5. Феномен Калуцы демонстрирует возможность объединения полей с увеличением размерности пространственно-временных отношений — их основного топологического параметра. Обратные действия по дифференциации объединённого взаимодействия, вскрывают механизм "конденсации" многомерия микромира в трёхмерии макромира. Эта идея нашла успешное воплощение в современной теории элементарных частиц.

Вот что сказал в одной из своих лекций Д. Гросс о пространственно-временных отношениях в связи с развитием теории струн:

Многие теоретики струн внутренне согласны с Эдвардом Виттенем, сказавшим, что пространство-время, должно быть, обречены

Во-первых, в теории струн число измерений пространства-времени — величина отнюдь не фундаментальная.

Во-вторых, в теории струн мы можем непрерывным образом изменять топологию пространства-времени. В обычной общей теории относительности этого сделать нельзя, не породив сингулярностей ...

В-третьих, в теории струн гладкие многообразия фундаментальной роли не играют.

На сегодняшний день многие из нас убеждены, что пространство и время — x, y, z, t , — не первичные, а, скорее, производные понятия. У нас есть много примеров, указывающих на то, что часть или даже всё пространство — не фундаментально, но является лишь удобной крупномасштабной концепцией. Мы имеем дуальные представления теории струн на некоем фоне, из которых пространство, включая гравитацию, возникает — частично или полностью.

Учитывая урок теории относительности, мы обязаны считать, что раз пространство является концепцией производной, значит, и концепция пространства-времени должна являться таковой. Однако у нас нет ни малейшей идеи, как формулировать физику, если время не фундаментально. В конце концов, физику мы традиционно понимаем как науку о процессах, протекающих во времени, сама же роль физики сводилась к предсказанию будущего на основе настоящего. В квантовой механике динамика определяется через гамильтониан в качестве генератора унитарной временной эволюции. Если же время — понятие производное и не являющееся независимым, трудно представить, как нам дальше формулировать физику.

Чтобы завершить построение новой физической концепции, нам нужно понять, каким образом, подобно пространству, зарождается время. Мы не знаем как, но одно ясно — пространственно-временные отношения потеряли свою бесструктурность и изначальность! ”

На пространственно-временные отношения можно посмотреть и с другой стороны, поскольку существует и другая парадигма описания эволюционных процессов. Например, эволюция, согласно “дарвиновской триаде”^[28], описывается независимыми составляющими: *изменчивостью, наследованием и отбором.*

Под изменчивостью здесь необходимо понимать переход системы из одного состояния в другое. Переход же из одного состояния в другое – это, вообще говоря, бифуркация. Если между предыдущим состоянием и последующим в процессе перехода появляется “посредник”, то это уже рассматривается как причинное описание. Одинаковая топология последовательностей состояний и “посредников”, наличие “больших” “параметров обуславливает возможность перехода к макронепрерывному причинному описанию.

Под наследованием следует понимать то постоянство, которое сопровождает переход из одного состояния в другое. При макронепрерывном причинном описании наследование может описываться функционально, то есть с помощью уравнений движения.

Под отбором надо понимать все те правила, по которым формируется и реализуется конечное состояние системы. Ими могут быть, например: принцип наименьшего действия, принципы симметрии, правила отбора, суперотбора и, конечно, результат решения уравнений движения в случае макронепрерывного причинного описания.

Такая парадигма эволюции способна объединить разные этажи познания общей действительности. Нынешнее же место наших познаний в этой приведённой схеме — самое скромное: оно представляется макронепрерывным причинным описанием — самой простой реализацией "дарвиновской триады". Но именно парадигма этой триады способна дать перспективы на объединение трёх ипостасей единого мира: микро-, макро- и мега-.

Приложение 1. Тензоры. Криволинейные координаты

Излагаемый здесь материал является уточнением и дополнением к Приложению в^[1]. Первоисточником же является работа^[95], представляющая собой изящное и компактное изложение тензорного анализа Ю.И. Кулаковым в НГУ.

Элементы теории определителей

Определители

Используя стандартное определение линейной алгебры для определителя $\det \|a_{ik}\|$ матрицы $\|a_{ik}\|$, можно показать, что выражение

$$a_0 = \frac{1}{n!} e^{ik\dots l} e^{mn\dots p} a_{im} a_{kn} \dots a_{lp} \quad (2.п.1)$$

удовлетворяет этому определению.

Для сохранения ковариантной формы различных выражений целесообразно ввести и такие формы:

$$a^0 = \frac{1}{n!} e_{ik\dots l} e_{mn\dots p} a^{im} a^{kn} \dots a^{lp} \quad (2.п.2)$$

$$a = \frac{1}{n!} e^{ik\dots l} e_{mn\dots p} a_i^m a_k^n \dots a_l^p \quad (2.п.3)$$

Миноры матрицы

$$M_{\frac{i\dots k}{k}; \frac{m\dots n}{k}} = \delta_{\frac{i\dots k}{k}}^{u\dots v} \underbrace{a_{um} \dots a_{vn}}_k \quad (2.п.4)$$

$$M_{\frac{i\dots k}{k}; \frac{m\dots n}{k}} = \delta_{\frac{u\dots v}{k}}^{i\dots k} \underbrace{a^{um} \dots a^{vn}}_k \quad (2.п.5)$$

$$M_{\frac{i\dots k}{k}}^{m\dots n} = \delta_{\frac{i\dots k}{k}}^{u\dots v} \underbrace{a_u^m \dots a_v^n}_k \quad (2.п.6)$$

Алгебраические дополнения

$$A_{\frac{i\dots k}{k}; \frac{m\dots n}{k}} = \frac{1}{(n-k)!} e_{\frac{i\dots k}{k} \frac{u\dots v}{n-k}} e_{\frac{m\dots n}{k} \frac{p\dots q}{n-k}} \underbrace{a_{up} \dots a_{vq}}_{n-k} \quad (2.п.7)$$

$$A_{\frac{i\dots k}{k}; \frac{m\dots n}{k}} = \frac{1}{(n-k)!} e_{\frac{i\dots k}{k} \frac{u\dots v}{n-k}} e_{\frac{m\dots n}{k} \frac{p\dots q}{n-k}} \underbrace{a^{up} \dots a^{vq}}_{n-k} \quad (2.п.8)$$

$$A_{\overline{k}}^{i\dots k} = \frac{1}{(n-k)!} e^{\overline{k} \quad i\dots k \quad u\dots v} e_{\overline{k} \quad n-k}^{m\dots n p\dots q} \underbrace{a_u^p \dots a_v^q}_{n-k} \quad (2.п.9)$$

Разложение определителя на миноры и алгебраические дополнения. Формула Лапласа

$$a_0 = \frac{(n-k)!}{n! k!} M_{u\dots v; m\dots n} A^{u\dots v; m\dots n} \quad (2.п.10)$$

Некоторые свойства определителей

$$a_0 e_{ik\dots l} = e^{mn\dots p} a_{im} a_{kn} \dots a_{lp} \quad (2.п.11)$$

$$a^0 e^{ik\dots l} = e_{mn\dots p} a^{im} a^{kn} \dots a^{lp} \quad (2.п.12)$$

$$a e_{ik\dots l} = e_{mn\dots p} a_i^m a_k^n \dots a_l^p \quad (2.п.13)$$

Если

$$a = \frac{1}{n!} e^{ik\dots l} e_{mn\dots p} a_i^m a_k^n \dots a_l^p \quad (2.п.14)$$

$$b = \frac{1}{n!} e^{mn\dots p} e_{ik\dots l} b_m^i b_n^k \dots b_p^l \quad (2.п.15)$$

то

$$ab = \frac{1}{n!} e^{ik\dots l} e_{mn\dots p} (ab)_i^m (ab)_k^n \dots (ab)_l^p \quad (2.п.16)$$

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_{ik}} = A^{i;k} \quad (2.п.17)$$

$$\frac{\partial a_0}{\partial x^r} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial x^r} A^{i;k} \quad (2.п.18)$$

Связь между минорами и алгебраическими дополнениями

$$A_{n-k \quad n-k}^{i\dots l; m\dots r} = \frac{1}{(k!)^2} e^{i\dots l u\dots v} e^{m\dots r p\dots q} M_{\overline{k} \quad \overline{k}}^{u\dots v; p\dots q} \quad (2.п.19)$$

$$A_{\overline{n-k} \quad \overline{n-k}}^{i\dots l; m\dots r} = \frac{1}{(k!)^2} e_{i\dots l u\dots v} e_{m\dots r p\dots q} M_{\overline{k} \quad \overline{k}}^{u\dots v; p\dots q} \quad (2.п.20)$$

$$A_{\overline{n-k}}^{i\dots l} = \frac{1}{(k!)^2} \delta_{m\dots r p\dots q}^{i\dots l u\dots v} M_{\overline{k}}^{p\dots q} \quad (2.п.21)$$

$$M_{n-k \quad n-k}^{i\dots l; m\dots r} = \frac{1}{(k!)^2} e^{i\dots l u\dots v} e^{m\dots r p\dots q} A_{\overline{k} \quad \overline{k}}^{u\dots v; p\dots q} \quad (2.п.22)$$

$$M_{\substack{i\dots l; m\dots r \\ n-k \quad n-k}} = \frac{1}{(k!)^2} e_{i\dots l u\dots v} e_{m\dots r p\dots q} A_{\substack{u\dots v; p\dots q \\ k \quad k}} \quad (2.п.23)$$

$$M_{\substack{i\dots l \\ m\dots r \\ n-k}} = \frac{1}{(k!)^2} \delta_{m\dots r p\dots q}^i \dots^v A_{\substack{p\dots q \\ k}} \quad (2.п.24)$$

Метрический тензор

Метрический тензор g_{ik} определяет метрику пространства, арифметические свойства которого устанавливаются введённой системой координат x^i :

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k \quad (2.п.25)$$

$$g_{ik} = g_{ki} \quad (2.п.26)$$

Наряду с ковариантным тензором g_{ik} рассматривается также контравариантный тензор g^{ik} . При этом

$$g_{il} g^{lk} = \delta_i^k \quad (2.п.27)$$

Легко убедиться в том, что g^{ik} равно алгебраическому дополнению

$$G^{l;k} = \frac{1}{(n-1)!} e^{\substack{lp\dots q \\ n-1}} e^{\substack{ku\dots v \\ n-1}} \underbrace{g_{pu} \dots g_{qv}}_{n-1} \quad (2.п.28)$$

делённому на определитель

$$g_0 = \frac{1}{n!} e^{mp\dots q} e^{ru\dots v} g_{mr} g_{pu} \dots g_{qv} \quad (2.п.29)$$

В самом деле, образуя свёртку

$$g_{ik} \frac{G^{l;k}}{g_0} = \frac{1}{(n-1)! g_0} e^{lp\dots q} e^{ku\dots v} g_{ik} g_{pu} \dots g_{qv} \quad (2.п.30)$$

и замечая, что

$$e^{lp\dots q} e^{ku\dots v} g_{ik} g_{pu} \dots g_{qv} = (n-1)! g_0 \delta_i^l \quad (2.п.31)$$

$$g_{ik} \frac{G^{l;k}}{g_0} = \delta_i^l \quad (2.п.32)$$

Таким образом, действительно

$$g^{ik} = \frac{G^{i;k}}{g_0} \quad (2.п.33)$$

Между определителями ковариантного и контравариантного метрических тензоров существует соотношение:

$$g_0 g^0 = 1 \quad (2.п.34)$$

Используя формулы преобразования

$$g_{ik} = \bar{c}_i^u \bar{c}_k^v g'_{uv} \quad \text{и} \quad g^{ik} = \underline{c}_u^i \underline{c}_v^k g'^{uv},$$

получаем следующие соотношения для определителей метрических тензоров g и матриц преобразований c :

$$g_0 = \bar{c}^2 g'_0 \quad (2.п.35)$$

$$g^0 = \underline{c}^2 g'^0 \quad (2.п.36)$$

Ко- и контравариантные тензоры Леви-Чивита

Рассмотрим определители \bar{c} и \underline{c} , построенные соответственно из \bar{c}_i^n и \underline{c}_n^i . Имеем:

$$e_{ik\dots l} \bar{c} = e_{mp\dots q} \bar{c}_i^m \bar{c}_k^p \dots \bar{c}_l^q \quad (2.п.37)$$

$$e^{ik\dots l} \underline{c} = e^{mp\dots q} \underline{c}_m^i \underline{c}_p^k \dots \underline{c}_q^l \quad (2.п.38)$$

Воспользовавшись соотношениями (2.п.34), (2.п.35), (2.п.36), перепишем (2.п.37) и (2.п.38) в виде:

$$e_{ik\dots l} \sqrt{g_0} = \bar{c}_i^m \bar{c}_k^p \dots \bar{c}_l^q e_{mp\dots q} \sqrt{g'} \quad (2.п.39)$$

$$e^{ik\dots l} \frac{1}{\sqrt{g_0}} = \underline{c}_m^i \underline{c}_p^k \dots \underline{c}_q^l e^{mp\dots q} \frac{1}{\sqrt{g'_0}}, \quad (2.п.40)$$

откуда видно, что объекты

$$\mathcal{E}_{ik\dots l} = e_{ik\dots l} \sqrt{g_0} \quad (2.п.41')$$

$$\mathcal{E}^{ik\dots l} = e^{ik\dots l} \frac{1}{\sqrt{g_0}} \quad (2.п.42')$$

преобразуются как ко- и контравариантные тензоры, которые называются тензорами Леви-Чивита.

Определитель метрического тензора псевдоевклидова пространства

$$|\overset{\circ}{g}_{ik}| = -1,$$

а пространственно-временное многообразие ОТО — локально псевдоевклидово. В силу (2.п.35), (2.п.36) определитель

метрического тензора всегда будет отрицательным. Конечно, ничего не мешает рассматривать определения (2.п.41') и (2.п.42') как тензоры с мнимой единицей. Однако переопределив тензоры согласно

$$E_{ik\dots l} = e_{ik\dots l} \sqrt{-g_0} \quad (2.п.41)$$

$$E^{ik\dots l} = e^{ik\dots l} \frac{1}{\sqrt{-g_0}} \quad (2.п.42)$$

мы получим объекты, которые также подчиняются закону преобразований для ко- и контравариантных тензоров. Именно эти объекты и используются в общей теории относительности.

Довольно часто возникает необходимость по одному тензору построить другой. Это можно сделать, например, свертывая данный тензор с ко- и контравариантными тензорами Леви-Чивита.

Тензор, полученный путём свертывания данного тензора с тензором Леви-Чивита по k выделенным индексам, называется тензором, дуальным данному по k индексам. Если исходный тензор антисимметричен по всем k индексам, то при определении дуального тензора свёртку обычно делят на $k!$.

Интегрирование в криволинейном пространстве

Назовём элементами интегрирования в четырёхмерном пространстве, соответствующими элементарным ячейкам с $1, 2, 3, 4$ упорядоченными рёбрами следующие выражения:

$$[dx^i]_\alpha = d_\alpha x^i \quad (2.п.43)$$

$$[dx^i dx^k]_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}^{\mu\nu} d_\mu x^i d_\nu x^k \quad (2.п.44)$$

$$[dx^i dx^k dx^l]_{\alpha\beta\gamma} = \delta_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\lambda} d_\mu x^i d_\nu x^k d_\lambda x^l \quad (2.п.45)$$

$$[dx^i dx^k dx^l dx^m]_{\alpha\beta\gamma\delta} = \delta_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\mu\nu\lambda\tau} d_\mu x^i d_\nu x^k d_\lambda x^l d_\tau x^m \quad (2.п.46)$$

Здесь латинские индексы i, k, l, m индексируют компоненты вектора (компоненты ребра элемента интегрирования), а греческие индексы – номера векторов (рёбер элемента интегрирования), участвующих в построении элемента интегрирования. Если в процессе решения задач не предполагаются перестановки местами этих векторов (рёбер), то индексацию векторов (рёбер) обычно опускают.

В четырёхмерном пространстве соответственно видам элементов интегрирования (2.п.43), (2.п.44), (2.п.45), (2.п.46) могут рассматриваться четыре вида интегральных выражений:

$$\int_{(1)} \omega_{(\dots)} = \int_{(1)} a_{(\dots)i} [dx^i] \quad (2.п.47)$$

$$\int_{(2)} \omega_{(\dots)} = \int_{(2)} a_{(\dots)ik} [dx^i dx^k] \quad (2.п.48)$$

$$\int_{(3)} \omega_{(\dots)} = \int_{(3)} a_{(\dots)ikl} [dx^i dx^k dx^l] \quad (2.п.49)$$

$$\int_{(4)} \omega_{(\dots)} = \int_{(4)} a_{(\dots)iklm} [dx^i dx^k dx^l dx^m] \quad (2.п.50)$$

где $a_{(\dots) i\dots m}$ – известные функции координат. В интегральных выражениях (2.п.47), (2.п.48), (2.п.49) и (2.п.50) интегрирование производится по одно-, двух-, трёх- и четырёхмерному многообразиям. Выражение $\omega_{(\dots)} = a_{(\dots) i\dots m} [dx^i \dots dx^m]$ называется внешней дифференциальной формой Картана.

Справедливо следующее утверждение: если многообразие V_m является m -мерной границей многообразия V_{m+1} , то при любых $\omega_{(\dots)} = a_{(\dots) i\dots m} [dx^i \dots dx^m]$ имеет место соотношение, называемое *обобщённой теоремой Стокса*:

$$\begin{aligned} & \int_{(m)} a_{(\dots) i\dots m} [dx^i \dots dx^m] = \\ & = \int_{(m+1)} \frac{\partial a_{(\dots) i\dots m}}{\partial x^n} [dx^n dx^i \dots dx^m] \end{aligned} \quad (2.п.51)$$

В качестве исходных элементов интегрирования обычно берутся так называемые ковариантные объёмы $d\tau_{(\dots)}$, которые являются тензорами, дуальными к дифференциальным формам $[dx^i dx^k \dots dx^m]$. Связь между этими объектами даётся формулами:

$$d\tau_{\frac{u\dots v}{n-m}} = \frac{1}{m!} E_{\frac{u\dots v}{n-m} \frac{i\dots l}{m}} \underbrace{[dx^i \dots dx^l]}_m \quad (2.п.52)$$

$$\underbrace{[dx^i \dots dx^l]}_m = \frac{1}{(n-m)!} E_{\frac{u\dots v i\dots l}{n-m} \frac{l}{m}} d\tau_{\frac{u\dots v}{n-m}} \quad (2.п.53)$$

Приведём формулы, позволяющие переходить от внешних форм $[dx^i dx^k \dots dx^m]$ к ковариантным объёмам $d\tau_{(\dots)}$:

$$dl^i = [dx^i] \quad (2.п.54)$$

$$df_{ik}^* = d\tau_{ik} = \frac{1}{2!} E_{iklm} [dx^l dx^m] \quad (2.п.55)$$

$$df^{ik} = [dx^i dx^k] \quad (2.п.55')$$

$$dS_i = d\tau_i = \frac{1}{3!} E_{iklm} [dx^k dx^l dx^m] \quad (2.п.56)$$

$$d\Omega = d\tau = \frac{1}{4!} E_{iklm} [dx^i dx^k dx^l dx^m] \quad (2.п.57)$$

и обратно

$$[dx^i] = dl^i \quad (2.п.58)$$

$$[dx^i dx^k] = \frac{1}{2!} E^{lmik} df_{lm}^* \quad (2.п.59)$$

$$[dx^i dx^k dx^l] = E^{mikl} dS_m \quad (2.п.60)$$

$$[dx^i dx^k dx^l dx^m] = E^{iklm} d\Omega \quad (2.п.61)$$

Итак, возможны четыре варианта интегрирования по многообразиям четырёхмерного пространства.

Интеграл по одномерному многообразию в 4-пространстве (по кривой). Элементом интегрирования является 4-вектор dx^i .

Интеграл по двумерной поверхности в 4-пространстве. Элементом интегрирования является тензор df_{ik}^* .

Интеграл по гиперповерхности, то есть по трёхмерному многообразию. Элементом интегрирования является 4-вектор dS_i . Геометрически dS_i представляет 4-вектор, по величине равный “площади” элемента гиперповерхности и по направлению нормальный к этому элементу (то есть перпендикулярный ко всем прямым, проведённым в элементе гиперповерхности). В частности, $dS_0 = dx dy dz$, то есть представляет собой элемент трёхмерного объёма dV – проекцию элемента гиперповерхности на гиперплоскость $x^0 = \text{const}$.

Интеграл по четырёхмерному объёму. Элементом интегрирования является $d\Omega$

Аналогично теоремам Гаусса и Стокса трёхмерного векторного анализа существуют теоремы, позволяющие преобразовывать друг в друга четырёхмерные интегралы.

Аналог теоремы Гаусса-Остроградского

$$\oint_S A^i dS_i = \int_{\Omega} \frac{\partial A^i}{\partial x^i} d\Omega \quad (2.п.62)$$

Таким образом, интеграл по замкнутой гиперповерхности можно преобразовать в интеграл по заключённому в ней 4-объёму путём замены элемента интегрирования dS_i на оператор:

$$dS_i \rightarrow d\Omega \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (2.п.63)$$

Например, для интеграла от вектора A^i имеем:

$$\oint A^i dS_i = \int \frac{\partial A^i}{\partial x^i} d\Omega \quad (2.п.64)$$

Эта формула и является обобщением теоремы Гаусса.

В галилеевой системе координат x^i (СТО) интеграл от скаляра по $d\Omega' = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ тоже есть скаляр, то есть элемент $d\Omega'$ ведёт себя при интегрировании как скаляр. При преобразовании к криволинейным координатам x^i элемент интегрирования $d\Omega'$ переходит в

$$d\Omega' \rightarrow \sqrt{-g} d\Omega$$

Таким образом, в криволинейных координатах при интегрировании по 4-объёму ведёт себя как инвариант произведение $\sqrt{-g} d\Omega$.

Интеграл по двумерной поверхности

$$\oint A^{ik} df_{ik}^* = \int \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k} dS_i - \int \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^i} dS_k \quad (2.п.65)$$

Интеграл по двумерной поверхности преобразуется в интеграл по “охватываемой” ею гиперповерхности заменой элемента интегрирования df_{ik}^* на оператор:

$$df_{ik}^* \rightarrow dS_i \frac{\partial}{\partial x^k} - dS_k \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (2.п.66)$$

Например, для интеграла от антисимметричного тензора A^{ik} имеем:

$$\frac{1}{2} \oint A^{ik} df_{ik}^* = \frac{1}{2} \int \left(dS_i \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k} - dS_k \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^i} \right) = \int dS_i \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k} \quad (2.п.67)$$

Аналог теоремы Стокса

$$\oint_L A_k dx^k = \int_S \frac{\partial A_k}{\partial x^i} df^{ik} \quad (2.п.68)$$

Интеграл по четырёхмерной замкнутой линии преобразуется в интеграл по охватываемой ею поверхности путём замены

$$dx^i \rightarrow df^{ki} \frac{\partial}{\partial x^k} \quad (2.п.69)$$

Так, для интеграла от вектора имеем:

$$\oint A_i dx^i = \int df^{ki} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} = \frac{1}{2} \int df^{ki} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) \quad (2.п.70)$$

что является обобщением теоремы Стокса.

Ковариантные производные второго порядка

Тензор кривизны

Применяя дважды операцию ковариантного дифференцирования к ковариантному вектору A_i несложно получить

$$A_{k;l;m} - A_{k;m;l} = R^i_{klm} A_i \quad (2.п.71)$$

где

$$R^i_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{rl} \Gamma^r_{km} - \Gamma^i_{rm} \Gamma^r_{kl} \quad (2.п.72)$$

Наряду с тензором со смешанными компонентами R^i_{klm} часто используется и ковариантный тензор R_{iklm} . Связь между тензорами даётся обычным соотношением:

$$R^i_{klm} = g^{in} R_{nkml} \quad (2.п.73)$$

$$A_{k;l;m} - A_{k;m;l} = R_{iklm} A^i \quad (2.п.74)$$

$$R_{iklm} = \frac{\partial \Gamma_{i,km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{i,kl}}{\partial x^m} + \Gamma^r_{im} \Gamma_{r,kl} - \Gamma^r_{il} \Gamma_{r,km} \quad (2.п.75)$$

Тензоры (2.п.72) и (2.п.75) называются тензорами Римана-Кристоффеля и являются важной характеристикой риманового пространства. Тождества (2.п.71, 74) носят имя тождеств Риччи.

Выясним ещё одно важное свойство тензора Римана-Кристоффеля.

Согласно (2.2.6), изменение вектора при параллельном обходе вдоль бесконечно малого замкнутого контура даётся выражением:

$$\Delta A_i = \oint \Gamma^l_{ik} A_l dx^k \quad (2.п.76)$$

Запишем (2.п.70) в виде

$$\oint B_{ik} dx^k = \frac{1}{2} \int_{\Delta f} \left(\frac{\partial B_{in}}{\partial x^m} - \frac{\partial B_{im}}{\partial x^n} \right) df^{nm} \quad (2.п.77)$$

Обозначив $B_{ik} = \Gamma_{ik}^l A_l$ и подставив в (2.п.77), получим:

$$\begin{aligned} \Delta A_i &= \frac{1}{2} \int_{\Delta f} \left(\frac{\partial(\Gamma_{in}^l A_l)}{\partial x^m} - \frac{\partial(\Gamma_{im}^l A_l)}{\partial x^n} \right) df^{nm} = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Delta f} \left(\frac{\partial \Gamma_{in}^l}{\partial x^m} A_l - \frac{\partial \Gamma_{im}^l}{\partial x^n} A_l + \Gamma_{in}^l \frac{\partial A_l}{\partial x^m} - \Gamma_{im}^l \frac{\partial A_l}{\partial x^n} \right) df^{nm} \quad (2.п.78) \end{aligned}$$

С точностью до членов первого порядка, учитывая, что на границе контура $\partial A_l / \partial x^m = \delta A_l / dx^m = \Gamma_{lm}^n A_n$, где δA_l определяется согласно (2.2.6) из (2.п.78) получаем:

$$\Delta A_i = \frac{1}{2} R_{inm}^k A_k \Delta f^{nm} \quad (2.п.79)$$

где R_{inm}^k определяется согласно (2.п.72).

Рассмотрим некоторые свойства тензоров R_{klm}^i и R_{iklm} .

Непосредственной подстановкой определений (2.п.72, 75) можно убедиться в следующих свойствах симметрии:

$$R_{iklm} = R_{ikml} \quad (2.п.80)$$

$$R_{iklm} = -R_{kilm} \quad (2.п.81)$$

$$R_{iklm} = R_{lmik} \quad (2.п.82)$$

$$R_{iklm}^i + R_{imk}^i + R_{mkl}^i = 0 \quad (2.п.83)$$

$$R_{iklm} + R_{ilmk} + R_{imkl} = 0 \quad (2.п.84)$$

Число независимых компонент

$$N = \frac{1}{12} n^2 (n^2 - 1) \quad (2.п.85)$$

Действительно, число компонент с двумя различными индексами вида R_{ikki} равно $\frac{1}{2} n(n-1)$; число компонент с тремя различными индексами вида R_{ikil}, R_{kikl} и R_{iilk} равно $3 \cdot \frac{1}{3!} n(n-1)(n-2)$; число компонент с четырьмя различными индексами вида R_{ikmn}, R_{imnk} ($R_{inkm} = -R_{ikmn} - R_{imnk}$) равно $2 \cdot \frac{1}{4!} n(n-1)(n-2)(n-3)$. Таким образом, полное число независимых компонент тензора кривизны равно $N = \frac{1}{12} n^2 (n^2 - 1)$.

306.

Так для двумерной поверхности ($n = 2$) тензор кривизны из $2^4 = 16$ имеет одну независимую компоненту и выражается через скаляр k следующим образом:

$$R_{ikmn} = E_{ik}E_{mn}k \quad (2.п.86)$$

Для трёхмерного пространства ($n = 3$) тензор кривизны из $3^4 = 81$ имеет 6 независимых компонент и выражается через симметричный симметрический тензор G^{pq}

$$R_{ikmn} = E_{ikp}E_{mnq}G^{pq} \quad (2.п.87)$$

Для четырёхмерного пространства ($n = 4$) тензор кривизны из $4^4 = 256$ компонент имеет 20 независимых.

Тождества Бианки

$$R^i_{klm;n} + R^i_{kmn;l} + R^i_{knl;m} = 0 \quad (2.п.88)$$

$$R_{iklm;n} + R_{ikmn;l} + R_{iknl;m} = 0 \quad (2.п.89)$$

Для доказательства соотношения (2.п.88) воспользуемся тождеством Риччи

$$A_{i;m;n} - A_{i;n;m} = R^i_{kmn}A_i \quad (2.п.90)$$

Дифференцируя (2.п.90) ковариантно по x^p и осуществляя циклическую перестановку индексов m, n, p получим:

$$A_{i;m;n;p} - A_{i;n;m;p} = R^l_{imn,p}A_l + R^l_{imn}A_{l;p} \quad (2.п.91)$$

$$A_{i;n;p;m} - A_{i;p;n;m} = R^l_{inp,m}A_l + R^l_{inp}A_{l;m} \quad (2.п.92)$$

$$A_{i;p;m;n} - A_{i;m;p;n} = R^l_{ipm,n}A_l + R^l_{ipm}A_{l;n} \quad (2.п.93)$$

Сложив равенства (2.п.91), (2.п.92) и (2.п.93) и перегруппировав члены в левой части, получим:

$$\begin{aligned} & (A_{i;m;n;p} - A_{i;m;p;n}) + (A_{i;n;p;m} - A_{i;n;m;p}) + \\ & + (A_{i;p;m;n} - A_{i;p;n;m}) = \\ & = (R^l_{imn,p} + R^l_{inp,m} + R^l_{ipm,n})A_l + \\ & + R^l_{imn}A_{l;p} + R^l_{inp}A_{l;m} + R^l_{ipm}A_{l;n} \end{aligned} \quad (2.п.94)$$

Рассматривая $A_{i;m;n;p}$ как вторую ковариантную производную от $A_{i;m}$ по x^n и x^p , имеем согласно (2.п.71):

$$(A_{i;m;n;p} - A_{i;m;p;n}) = R^l_{inp}A_{l;m} + R^l_{mnp}A_{i;l} \quad (2.п.95)$$

и аналогично

$$(A_{i;n;p;m} - A_{i;n;m;p}) = R^l_{ipm}A_{l;n} + R^l_{npm}A_{i;l} \quad (2.п.96)$$

$$(A_{i;p,m;n} - A_{i;pnm}) = R^l{}_{imn}A_{l;p} + R^l{}_{pmn}A_{l;i} \quad (2.п.97)$$

Подставив (2.п.95), (2.п.96), (2.п.97) в (2.п.94) и приведя подобные члены, получим:

$$\begin{aligned} & (R^l{}_{mnp} + R^l{}_{npm} + R^l{}_{pmn})A_l = \\ & = (R^l{}_{imn;p} + R^l{}_{inp;m} + R^l{}_{ipm;n})A_l \end{aligned} \quad (2.п.98)$$

В силу цикличности (2.п.83)

$$(R^l{}_{mnp} + R^l{}_{npm} + R^l{}_{pmn}) = 0$$

А поскольку A_l – произвольный вектор, то

$$R^l{}_{imn;p} + R^l{}_{inp;m} + R^l{}_{ipm;n} = 0$$

Второе тождество (2.п.89) доказывается аналогичным образом.

Тензор Риччи

Тензор Риччи определяется как симметричный тензор, получаемый сверткой тензора кривизны $R^i{}_{kmn}$ по двум индексам – первому и последнему

$$R_{im} = R^i{}_{kmi} = g^{ln}R_{ikmn} \quad (2.п.99)$$

или

$$R_{km} = \frac{\partial \Gamma^p{}_{kp}}{\partial x^m} - \frac{\partial \Gamma^p{}_{km}}{\partial x^l} + \Gamma^p{}_{kq}\Gamma^q{}_{mp} - \Gamma^p{}_{km}\Gamma^q{}_{pq} \quad (2.п.100)$$

Тензор R_{km} называется тензором Риччи.

Тензор Риччи симметричен. Это следует непосредственно из определения (2.п.100), если воспользоваться равенством (2.1.28) и преобразовать первое слагаемое к виду

$$\frac{\partial \Gamma^p{}_{kp}}{\partial x^m} = \frac{\partial}{\partial x^m} \left(\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^k} \right) = \frac{1}{g} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^m} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^k} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial^2 \sqrt{-g}}{\partial x^m \partial x^k}$$

Найдём выражение для дивергенции тензора Риччи. Пусть $R^n{}_k = g^{nm}R_{mk}$ – смешанный тензор Риччи, а $R = R^n{}_n$ – скалярная кривизна. Тогда имеет место следующее соотношение:

$$R^n{}_{k;n} = \frac{1}{2}R_{;k} \quad (2.п.101)$$

308.

В самом деле, согласно тождеству Бианки, имеем:

$$R^{pn}_{mk;l} + R^{pn}_{kl;m} + R^{pn}_{lm;k} = 0 \quad (2.п.102)$$

где

$$R^{pn}_{mk} = g^{in} R^p_{imk}$$

После свёртки по двум индексам тождество (2.п.102) принимает вид:

$$R^{pn}_{pn;l} + R^{pn}_{nl;p} + R^{pn}_{lp;n} = 0$$

или

$$R_{;l} - R^p_{l;p} - R^n_{l;n} = R_{;l} - 2R^p_{l;p} = 0$$

Тензор Эйнштейна

Из смешанного тензора Риччи R^m_k легко получить тензор \mathcal{G}^n_k , дивергенция которого равна нулю

$$\mathcal{G}^n_{k;n} = 0 \quad (2.п.103)$$

Тензор \mathcal{G}^n_k , обладающий этим свойством, называется тензором Эйнштейна и имеет вид:

$$\mathcal{G}^m_k = R^m_k - \frac{1}{2} R \delta^m_k + \Lambda \delta^m_k \quad (2.п.104)$$

где Λ – произвольная константа.

Тензор Эйнштейна (2.п.104) может быть записан в ко- и контравариантных видах:

$$\mathcal{G}_{mk} = R_{mk} - \frac{1}{2} R g_{mk} + \Lambda g_{mk} \quad (2.п.105)$$

$$\mathcal{G}^{mk} = R^{mk} - \frac{1}{2} R g^{mk} + \Lambda g^{mk} \quad (2.п.106)$$

Приложение 2. Материалы 2010 г.

Точное измерение гравитационного красного смещения интерференцией волн материи

Х. Мёллер^{1,2}, А. Петерс³ и С. Чу^{1,2,4}

Одно из главных предсказаний метрических теорий тяготения, таких как, общая теория относительности - предсказание “замедления хода часов” в гравитационном поле с потенциалом U . Величина этого “замедления” должна определяться множителем $1+U/c^2$ (Ландау ЛД, Лифшиц ЕМ. Теория поля, стр. 322, формула (88.2)), где c - скорость света. “Замедление же хода часов” должно проявиться при сравнении показаний часов, находящихся в гравитационном поле, с часами, находящимися вне зоны действия гравитационного потенциала. Учёт влияния этого эффекта, известного как гравитационное красное смещение, крайне важен при разработках и эксплуатации систем глобального позиционирования², при обслуживании систем эталонного времени^{3,4}, для предстоящих экспериментов со сверхточными часами при их распределённом пространственном базировании⁵ в таких экспериментах как исследование изменений численных значений фундаментальных констант. Гравитационное красное смещение измерялось и ранее с использованием часов на башне⁶, самолете⁷ и ракете⁸, достигнув точности - $7 \cdot 10^{-5}$. Здесь мы показываем, что лабораторные эксперименты, основанные на квантовой интерференции атомов^{9,10}, допускают более точное измерение, и достигают точности - $7 \cdot 10^{-9}$. Наш результат согласуется с той точкой зрения, которая утверждает, что гравитация является следствием кривизны пространства-времени, что является основой принципа общей относительности. Это обстоятельство является весьма важным в связи с продолжением исследований в области квантовой теории гравитации¹¹. Совершенствование инструментария измерений, основанных на использовании эффекта красного смещения особенно важно, поскольку этот тест уже проводился, но точность результатов была ниже той, которая требуется для подтверждения теорий искривлённого пространства-времени¹. *В связи с этим необходимо отметить – мы увеличили точность измерения на четыре порядка.*

Метрические теории гравитации основываются на эйнштейновском принципе эквивалентности (ЭПЭ), который утверждает, что локально свойства движения в неинерциальной системе отсчёта будут такими же как в инерциальной системе при наличии гравитационного поля. Другими словами, неинерциальная система отсчёта локально эквивалентна некоторому гравитационному полю. ЭПЭ основывается на трёх экспериментальных фактах¹: слабом принципе эквивалентности (СПЭ – универсальность свободного падения, равенство гравитационной и инертной масс), локальной лоренц-инвариантности (ЛЛИ) и инвариантности локального позиционирования (ЛПИ). Первые два факта были подтверждены

Теория относительности.

310.

экспериментально с точностью превосходящей 10^{-13} (хотя и не все “лазейки были прикрыты”)^{1,11}. Проверка инвариантности локального позиционирования требует выводов и результатов выполнения негравитационного эксперимента – результатов, независимых от того, где и когда этот эксперимент был выполнен. Практически, в высокоточных тестах локально-позиционной инвариантности используются измерения гравитационного красного смещения: частота осциллирующей системы (часов) измеряется, как функция положения. Если эксперимент подтверждает ЭПЭ, то при отсутствии возмущений кроме тех, которые обусловлены гравитацией, мы должны будем зафиксировать гравитационное красное смещение.

Основная идея измерения красного смещения в нашем эксперименте заключается в синхронизации пары рядом расположенных часов с последующим перемещением их на разные высоты. Эффект гравитационного красного смещения должен привести к уменьшению частоты осцилляций нижних часов по сравнению с частотой осцилляций верхних часов. Если спустя определённое время поместить часы снова рядом и сопоставить числа произошедших осцилляций у каждого часов, появится возможность измерить фазовый сдвиг между осцилляциями. В довольно известном эксперименте измерялись и сравнивались показания атомных часов, размещённых в лаборатории на воздушном судне и в наземной лаборатории. Этот эксперимент подтвердил эйнштейновское предсказание красного смещения, но с небольшой - 10%-точностью. Точность $7 \cdot 10^{-5}$ была достигнута на часах с использованием водородного мазера, размещённого на космическом корабле⁸. В течение тридцати лет этот результат наблюдения гравитационного красного смещения считался самым точным. Большая точность $3.5 \cdot 10^{-6}$ была достигнута в эксперименте по наблюдению релятивистского красного смещения^{12,13}, при котором измерялось нулевое расхождение между различными часами двигающимися вместе. Конечно, достигнутая к тому времени точность результатов экспериментальной проверки инвариантности локального позиционирования являлась весьма слабой подпоркой в экспериментальном подтверждении ЭПЭ.

Примечание. Нулевой эксперимент по красному смещению (null gravitational redshift experiment) - сравнение хода *неидентичных часов*, расположенных в точках с одинаковыми значениями гравитационного потенциала, при временных вариациях самого потенциала.

Наше наблюдение и определение гравитационного красного смещения основано на измерениях атомной интерференции, что уже применялись при измерениях ускорения свободного падения^{9,10,14}. Как показано на Fig. 1a, охлаждённые атомы “подбрасываются”

вертикально вверх в вакуумную камеру, затем подвергаются последовательному воздействию тремя импульсами от пары антипараллельных вертикальных лазерных лучей с волновыми векторами k_1 и k_2 , соответственно. Каждый лазерный импульс передаёт момент движения $\hbar(k_1+k_2)$ (где $\hbar = h/2\pi$, h – постоянная Планка) двух фотонов атому (Fig. 1b). Переданный момент импульса составит величину $\hbar k$, где $k=k_1+k_2$. Силу и длительность первого импульса подбирают такими, чтобы вероятность реализации этого процесса составляла 50%. Как результат, первый лазерный импульс переводит атом в когерентную суперпозицию двух квантовых состояний, которые физически разделены благодаря переданному моменту $\hbar k$. Второй импульс корректирует момент атома так, чтобы пути двух атомов сошлись в одном месте для взаимодействия с третьим импульсом (Fig. 1a). Более детальная информация об этих механизмах взаимодействия может быть найдена в литературе^{9,10,14}.

Квантовая механика описывает атом на обеих траекториях как волны де Бройля. Поскольку они возникли в результате расщепления единственной волны при первом импульсе, их осцилляции изначально синхронизированы. При наложении волн друг на друга в результате воздействия третьего импульса они могут сложиться с усилением, ослаблением или деструкцией – в зависимости от разности их фаз $\Delta\varphi$. Вероятность обнаружения атома даётся выражением $\cos^2(\Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1)$, где $\Delta\varphi_1$ и $\Delta\varphi_2$ полные квантовые фазы, аккумулированные с момента воздействия первого лазерного импульса до момента воздействия третьего импульса, для каждого пути. При выполнении эксперимента со многими атомами фазовая разность измеряется подсчётом вероятности на выходе двух составляющих. Эффекты влияния на фазовую разность $\Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1$, согласно ОТО, рассчитан в¹⁵, и (в рамках теории параметризованного постньютоновского формализма) в^{16,17}, в предположении выполнимости принципа локальной позиционной инвариантности. Поскольку целью нашего анализа является изучение возможности нарушения принципа локальной инвариантности, полезно начать расчет фаз из первых принципов.

В общей теории относительности время часов, движущихся в искривлённом пространстве, вычисляется по формуле¹⁸

$$\tau = \int d\tau = \int (-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)^{1/2}$$

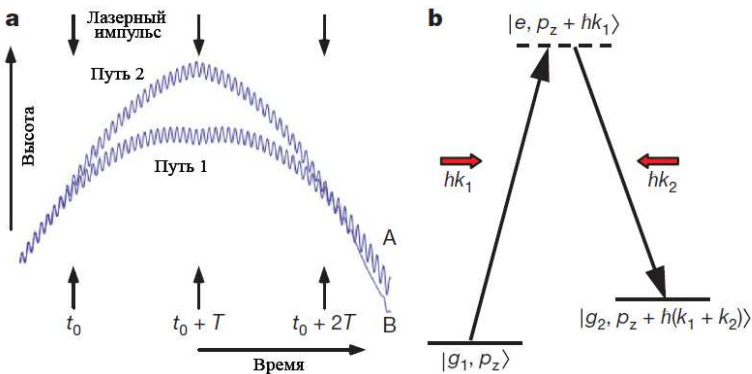


Рис.1 Атомный интерферометр и рамановский волновой splitter

а) Атомный интерферометр (схематично). Траектории атомов представлены как функции времени в лабораторной системе отсчёта. Они ускоряются благодаря воздействию гравитации. Осцилляционные линии изображают фазовые накопления волн материи. Стрелки показывают лазерные импульсы в моменты времени t_0 , t_0+T , t_0+2T , в которые происходит изменения траекторий. В момент времени t_0 атом входит в состояние суперпозиции двух траекторий. В момент t_0+T лазерный импульс используется для изменения траектории атомов, а в момент t_0+2T происходит фиксация фазового сдвига $\Delta\varphi = \Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1$.

б) Двухфотонный рамановский лучевой splitter. Атом в квантовом состоянии $|g_1, p_z\rangle$, движущийся вверх с моментом p_z , сталкивается с фотонами двух противоположных лазерных лучей. Первый фотон с моментом $\hbar k_1$ переводит атом в виртуальное возбуждённое состояние $|e_1, p_z + \hbar k_1\rangle$. Второй лазерный луч стимулирует атом испустить фотон с моментом $\hbar k_2$, что переводит атом в другое сверхтонкое гравитационное состояние $|g_2, p_z + \hbar(k_1 + k_2)\rangle$. При выборе подходящих параметров времени и интенсивности лазерного луча, процесс может протекать с 50% или 100% вероятностью, расщепляя или отражая волны материи на атомном уровне.

Метрический тензор $g_{\mu\nu}$ – 4x4-матрица, которая описывает зависимость “собственного времени” от геометрии пространства-времени и положения x^μ часов, что включает в себя и красное смещение, и релятивистский эффект замедления хода часов. Накопленный фазовый сдвиг $\Delta\varphi$ каждой волны в таком случае даётся свободно распространяющейся составляющей $\Delta\varphi_{free}$ и составляющей, взаимодействия свет-атом $\Delta\varphi_{light}$. Величина $\Delta\varphi_{free}$ определяется красивым соотношением (см., например, ¹⁸ на стр. 315-324, и ¹⁹)

$$\Delta\varphi_{free} = \frac{1}{\hbar} \int L d\tau = \frac{1}{\hbar} \int mc^2 d\tau = \int \omega_c dt, \quad (1)$$

здесь L – лагранжиан, а m – масса частицы. Это показывает, что фаза является интегралом по траектории от комптоновской частоты

$\omega_c = \frac{mc^2}{\hbar}$ по собственному времени dt . В фейнмановской формулировке квантовой механике¹⁹ фазовая разность рассчитывается суммированием по всем возможным путям. Однако вклады от всех путей $\int L dt \gg \hbar$, кроме экстремального, минимизирующего время, исчезают. Таким образом, квантовая механика требует, чтобы атом падал вдоль классического пути - по геодезической.

Важно подчеркнуть, что частота осцилляций в уравнении (1) даётся полной энергией атома $E = mc^2 = \hbar\omega_c$, которая включает кинетическую энергию, гравитационную, внутреннюю и, что самое важное – энергию массы покоя. Эта энергия чрезвычайно велика (для атома цезия, например, $\omega_c/2\pi = 3.2 * 10^{25} \text{ Hz}$). Хотя, такие высокие

Table 1 | Interferometer phase shifts larger than 0.3 p.p.b.

Effect	Equation	Phase shift (rad)
Leading order	$(1 + \beta)kgT^2$	3,698,530.529
Redshift, $\Delta\varphi_{\text{redshift}}$	$(1 + \beta)kgT^2$	
Time dilation, $\Delta\varphi_{\text{time}}$	$-kg'T^2$	
Atom-light interaction, $\Delta\varphi_{\text{light}}$	$+kg'T^2$	
Systematic effects²⁰		-0.018 ± 0.013
Fundamental effects¹⁷		
Gravity gradient	$-k \frac{dg}{dz} T^3 \left[v_L T + \frac{7}{12} g T \right]$	-0.108
Finite speed of light	$3kg^2 T^2$	-0.058
Doppler shift	$-3kgv_L T^2$	0.059
First gradient recoil	$-\frac{\hbar k^2}{2m} \frac{dg}{dz} T^3$	-0.001
Sum of other effects*		<0.0001

Вклад в фазовый сдвиг, зафиксированный интерферометром, приведен в верхней строке. Эффективное значение волнового вектора k составляет $2\pi * 2,346,458.735 \text{ m}^{-1}$. Скорость атомов при запуске $v_L = 1.53 \text{ мсек}^{-1}$; гравитационный градиент $dg/dz = -2.9(1) * 10^{-6} \text{ сек}^{-2}$. Гравитационное ускорение обозначено как g , фактическое же ускорение g' атома может слегка отличаться (см. Методы). См. таблицу 1 в¹⁷

частоты и не могут быть измерены непосредственно, квантовые интерференционные методы предоставляют средства чтения малых фазовых разностей, позволяя проверять фундаментальные физические принципы с очень высоким разрешением. Так комптоновские частоты уже использовались, например, для установления верхнего предела в различении гравитационного притяжения K^0 -мезона и его античастицы в предположении, что разница комптоновских частот может быть причиной превращения K -мезона, известного как K_{long} , в другой K -мезон - K_{shot} ^{20, 21}. Анализ нейтринных осцилляций показывает

различие частот при включении в рассмотрение массы покоя. Таким образом, атомный интерферометр обеспечивает “копилку” результатов экспериментов для ОТО: нейтральный атом для этого идеально подходит как тестовая частица со встроенными квантовыми часами.

Вычисление соотношения (1) вдоль траектории атома показывает, что $\Delta\varphi_{free} = \Delta\varphi_{redshift} + \Delta\varphi_{time}$. $\Delta\varphi_{free}$ включает в себя фазовый сдвиг $\Delta\varphi_{redshift}$, являющийся следствием гравитационного красного смещения и $\Delta\varphi_{time}$, как следствие релятивистского “замедления времени” при движении по траектории (см. Методы). Мы должны так же добавить смещение $\Delta\varphi_{light}$, обусловленное взаимодействием свет-атом. Таким образом, полный фазовый сдвиг будет представлен суммой трёх членов $\Delta\varphi = \Delta\varphi_{redshift} + \Delta\varphi_{time} + \Delta\varphi_{light}$. При обычном гравитационном смещении оказывается, что они имеют одинаковые модули, но с противоположными знаками: $\Delta\varphi = \Delta\varphi_{redshift} = -\Delta\varphi_{time} = \Delta\varphi_{light}$ (см. Табл.2.).

Для описания результатов измерений по гравитационному смещению общепринято использовать *ansatz*¹: $\Delta\omega = \omega_0(1 + \beta)\Delta U/c^2$. Здесь: $\Delta\omega$ – изменение частоты, ΔU - разность гравитационных потенциалов, ω_0 - собственная частота часов. Параметр β равен нулю для метрических теорий гравитации, таких как ОТО, не различающих типы часов¹. Вообще говоря, другие теории могут быть построены таким образом, что измерение времени может оказаться чувствительным к типу часов, например, использующие атомные или ядерные энергетические уровни (которые включают сочетания барионных масс покоя, электрослабые и сильные энергии взаимодействия), кинетическую или потенциальную энергии.

Если параметр β в формуле красного смещения не равен нулю, то фазовая разность становится равной $\Delta\varphi = \Delta\varphi_0(1 + \beta)$ (см. Таблицу 1 и Методы). Здесь $\Delta\varphi_0 = kgT^2$ обозначает фазовый сдвиг^{9,10} без красной аномалии; g – локальное гравитационное ускорение и T – время, разделяющее импульсы (Рис. 1а). Это объясняется тем, что $\Delta\varphi_{time} = -\Delta\varphi_{light}$ и эти члены взаимно уничтожаются, а фазовый сдвиг интерферометра становится равным красному смещению $\Delta\varphi = \Delta\varphi_{redshift}$. Таким образом, при известных k , g и T измерение фазы интерферометром даёт прямое измерение красного смещения.

Наиболее точные измерения квантово-механической гравитации к сегодняшнему дню были проведены на интерферометрах с использованием источников атомов цезия^{9,10}. После учёта ряда относительно малых поправок фундаментального^{10,17} и систематического¹⁰ характера (Таблица 1), красное

смещение получено измерением фазы $\Delta\varphi$ как $z_{means} = \Delta\varphi / (kT^2 c^2)$. Мы получили $z_{means} = (1.090322683 \pm 0.000000003) * 10^{-16}$, где стандартная ошибка ± 0.000000003 соответствует относительной точности. Ускорение свободного падения g зависит от места и времени благодаря градиенту гравитации, приливам и отливам. Мы использовали абсолютный гравиметр (FG-5) приспособленный для измерения g (корректировка систематических эффектов таких, как высота, давление, приливы и отливы, полярное движение¹⁰) и определили локально ожидаемую величину красного смещения как $z_0 = g/c^2 = (1.090322675 \pm 0.000000006) * 10^{-16}$ на метр. Измерения относятся к конкретному месту проведения эксперимента: 1 890 м над уровнем пола лаборатории в Stanford, California. Однако, из отношения измеренного и ожидаемого красного смещения мы получили параметр $\beta = z_{means}/z_0 - 1 = (7 \pm 7) * 10^{-9}$, который не зависит от локального значения g и, таким образом, является универсальной константой гравитации. Это согласуется с ОТО в пределах относительной точности. Этот результат был получен при промежутке времени между импульсами $T = 16$ микросекунд и расстоянием между вершинами траекторий равным 0.12мм. Таким образом, эксперимент подтверждает принцип позиционной инвариантности с исключением аномальных изменений для времён более $7 * 10^{28}$ в единицах комптоновских часов. Это соответствует сравнимому промежутку времени, равному 10^{-29} сек.

Отметим, что подобные эксперименты также на основе наблюдения интерференции волн материи, дают возможность проверять гравитационное красное смещение для возвышений в наномасштабе: в экспериментах с осцилляциями Блоха^{22,23} материальные волны атома взаимодействуют с вертикально стоячей волной света с длиной волны λ . Это вызывает возникновение потенциальных минимумов, расположенных на расстоянии $\lambda/2$ для атомов. Гравитационное красное смещение комптоновской частоты между их локализациями равно $\omega_B = (1 + \beta)gm\lambda/(2\hbar)$. Эта частота может наблюдаться как осцилляция скорости атома во времени. Атомы стронция уже использовались в оптических решётках с $\lambda/2 = 266$ нм. Из измерения частоты мы получили $\beta = (4.0 \pm 6.0 \pm 0.3) * 10^{-5}$, где первая стандартная ошибка для g осталась неопределённой (см. Методы), а также и вторая. Были опубликованы результаты аналогичных измерений с атомами рубидия с $\lambda/2 = 394$ нм, которые привели к $\beta = (3 \pm 1) * 10^{-6}$. Имеются более точные значения для g ²⁴ (и F. Viraben – личное общение). Цитируемые стандартные ошибки являются статистическими, поскольку другое при анализе систематических ошибок не сообщалось. Об обзоре точности и длин масштабов измерений красного смещения (см. Рис. 2). Если бы была

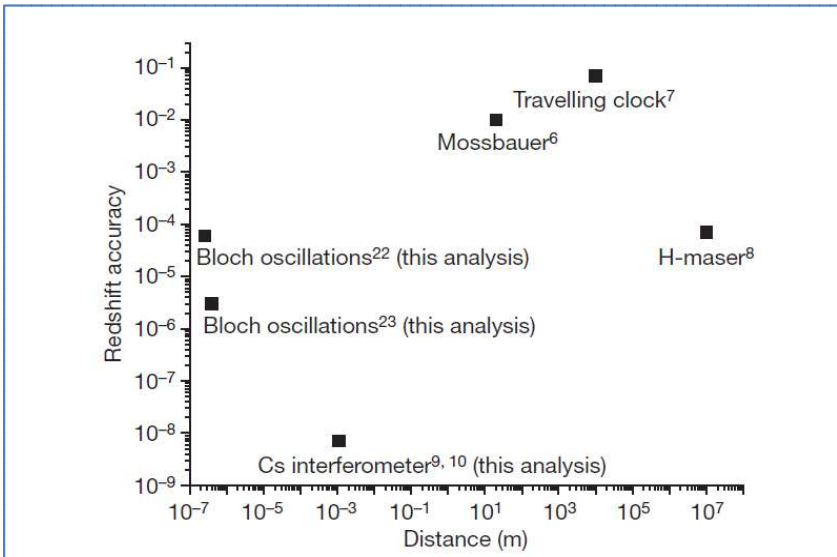


Рис. 2 Определение абсолютной величины гравитационного смещения. Точность β , определяемая как стандартная ошибка (среднестатистическое отклонение), представлена по отношению к относительной высоте часов.

найдена аномалия красного смещения, она должна была бы быть различной для разного типа часов. Более того, поскольку любой тест гравитационного красного смещения не предполагает ЕЕР, мы не должны принимать универсальность свободного падения как должное. Поэтому для параметра красного смещения β^g_{clock} используется двухиндексное обозначение, отмечающее тип часов и метода измерения g . Наши часы – особенные, поскольку вся энергия массы покоя mc^2 используется как частота mc^2/\hbar для этих часов; поэтому возможно, что их красное смещение будет отличаться от результатов экспериментов с общепринятыми атомными часами, в которых энергия перехода является лишь очень маленькой частью энергии массы покоя. Тем не менее, тесты с обычными часами, остаются полезными, даже, несмотря на то, что высокая частота наших часов с частотами волн материи позволяет достичь гораздо большей точности. В контексте ОТО, однако, природа часов не играет никакой роли¹ и наши часы с частотой материальных волн настолько же хороши для тестирования релятивистского красного смещения, насколько и любые другие.

Итак, мы улучшили точность измерений гравитационного красного смещения в 10 000 раз. Это положительно оценено группой ACES Европейского космического агентства, где предполагалось, что релятивистское красное смещение может быть проверено с точностью 2 р.р.м⁵. Кроме того, масштабы расстояний в наших тестах (от микрометров до миллиметров) сильно отличаются от километров и ещё более больших масштабов классических тестов. Наш результат улучшает общую проверку ЭПЭ в 500 раз и в 10000 раз ЛПИ относительно измерений красного смещения.

Наш эксперимент был ограничен неопределённостью в значении g , вызванной местными гравитационными градиентами в лаборатории^{9,10}. Возможно улучшение точности в 10 - 100 раз при составлении более точной карты распределения локального градиента гравитации. Используя различные геометрии атомного интерферометра, могут быть получены верхние пределы значений для различных метрических теорий гравитации¹⁶, кроме того, продемонстрированы более чувствительные атомные интерферометры с интерференционными путями, разделёнными на 24 фотонных момента^{25,26}. Другую возможность увеличения чувствительности можно ожидать от устройств с увеличением времени разделения импульсов¹⁶, что позволит тестировать непосредственно эйнштейновские полевые уравнения¹⁷. Кроме того, возможно разделение различных геометрий для траекторий, для которых относительные вклады между красным смещением, временным замедлением и взаимодействием фаз можно будет изменять.

Общее описание методов

Свободный эволюционный член $\Delta\varphi_{free}$ (уравнение (1)) был оценён для центрально-симметричного поля, даваемого шварцшильдовской метрикой $g_{\mu\nu}$ с центром, совпадающим с центром Земли. Мы упростили выражение для $\Delta\varphi_{free}$, используя тот факт, что скорости атомов значительно меньше скорости света, а разделение траекторий гораздо меньше радиуса Земли. В этом случае мы получаем $\Delta\varphi_{free} = \Delta\varphi_{redshift} + \Delta\varphi_{time}$ как сумму двух членов, где $\Delta\omega_{redshift} = \omega_C \int (gz/c^2) dt$ – интеграл от гравитационного красного смещения по траектории, а $\Delta\varphi_{time}$ обуславливается эффектом “замедления времени”. В аномальном случае гравитационное красное смещение даётся выражением: $\Delta\omega = \omega_0(1 + \beta)gz/c^2$, где β – параметр красного смещения, а $\Delta\varphi_{redshift}$ принимает вид $\Delta\varphi_{redshift} = (1 + \beta)\omega_C \int (gz/c^2) dt$. Мы рассчитываем $\Delta\varphi_{light}$, используя обычные методы и выражаем фазы в терминах модуля волнового вектора k и интервала между импульсами T . Результат (Таблица 1) согласуется с вычислениями для нерелятивистского случая^{9,10}, если $\beta = 0$. Это так, потому что оба случая представляются интегралом от гравитационной потенциальной энергии по

Теория относительности.

318.

времени, определяющим фазу. Основное в реализации замысла – это то, что нерелятивистский формализм позволяет правильно оценить частоту квантовой осцилляции ω_C . Таким образом, если мы допускаем возможности отклонения от принципа локальной позиционной инвариантности, наши аналитические возможности обеспечивают проверку общей относительности с помощью атомной интерферометрии фазы.

Важно отметить, что для интерпретации, данной здесь, нам нет необходимости знать, приведёт ли нестандартное красное смещение к изменению траекторий атома, поскольку любые такие модификации не изменят значительно расстояний между составляющими интерферометра. Кроме того, в случае изменения траекторий тесты универсальности свободного падения и принципа локальной инвариантности остаются концептуально различными как форма исследования для различных атомов при одной локализации²⁸, в то время как последние исследования эффектов подобного рода проводились при различных локализациях.

Описание методов и другую информацию можно получить в режиме *online* на www.nature.com/nature.

Получена 21 августа; принята 10 декабря 2009.

1. Will, C. M. The confrontation between general relativity and experiment. Living Rev. Relativity 9, 3 (2006); <<http://relativity.livingreviews.org/Articles/lrr-2006-3/>>.
2. Ashby, N. Relativity in the global positioning system. Living Rev. Relativity 6, 1 (2003); <<http://relativity.livingreviews.org/Articles/lrr-2003-1/>>.
3. Rosenband, T. et al. Frequency ratio of Al^+ and Hg^+ single-ion optical clocks; metrology at the 17th decimal place. Science 319, 1808–1812 (2008).
4. Pavlis, N. K. & Weiss, M. A. The relativistic gravitational redshift with 3×10^{-17} uncertainty at NIST, Boulder, Colorado. Metrologia 40, 66–73 (2003).
5. Cacciapuoti, L. & Salomon, C. Space clocks and fundamental tests: the ACES experiment. Eur. Phys. J. Spec. Top. 127, 57–68 (2009).
6. Pound, R. V. & Snider, J. L. Effect of gravity on gamma radiation. Phys. Rev. 140, B788–B803 (1965).
7. Hafele, J. C. & Keating, R. E. Around-the-world atomic clocks: observed relativistic time gains. Science 177, 168–170 (1972).
8. Vessot, R. F. C. et al. Test of relativistic gravitation with a space-borne hydrogen maser. Phys. Rev. Lett. 45, 2081–2084 (1980).
9. Peters, A., Chung, K. Y. & Chu, S. A measurement of gravitational acceleration by dropping atoms. Nature 400, 849–852 (1999).
10. Peters, A., Chung, K.-Y. & Chu, S. High-precision gravity measurements using atom interferometry. Metrologia 38, 25–61 (2001).
11. Amelino-Camelia, G., Macias, A. & Muñer, H. in Gravitation and Cosmology (eds Macias, A., Laammerzahl, C. & Nun`ez, D.) 30 AIP Conf. Proc. 758, American Institute of Physics, 2005).
12. Fortier, T. M. et al. Precision atomic spectroscopy for improved limits on variation of the fine structure constant and local position invariance. Phys. Rev. Lett. 98, 070801 (2007).
13. Blatt, S. et al. New limits on coupling of fundamental constants to gravity using ^{87}Sr optical lattice clocks. Phys. Rev. Lett. 100, 140801 (2008).
14. Kasevich, M. & Chu, S. Atomic interferometry using stimulated Raman transitions. Phys. Rev. Lett. 67, 181–184 (1991).
15. Borde, C. J., Karasiewicz, A. & Tourrenc, Ph General relativistic framework for atomic interferometry. Int. J. Mod. Phys. D 3, 157–161 (1994).
16. Dimopoulos, S., Graham, P. W., Hogan, J. M. & Kasevich, M. A. Testing general relativity with atom interferometry. Phys. Rev. Lett. 98, 111102 (2007).

17. Dimopoulos, S., Graham, P. W., Hogan, J. M. & Kasevich, M. A. General relativistic effects in atom interferometry. *Phys. Rev. D* 78, 042003 (2008).
18. Misner, C. W., Thorne, K. S. & Wheeler, J. A. *Gravitation* (Freeman, 1970).
19. Feynman, R. P. & Hibbs, A. R. *Quantum Mechanics and Path Integrals* (McGraw-Hill, 1965).
20. Fitch, V. L. The discovery of charge-conjugation parity asymmetry (Nobel Lecture). *Rev. Mod. Phys.* 53, 367–371 (1981).
21. Good, M. L. K_2^0 and the equivalence principle. *Phys. Rev.* 121, 311–313 (1961).
22. Ivanov, V. V. et al. Coherent delocalization of atomic wave packets in driven lattice potentials. *Phys. Rev. Lett.* 100, 043602 (2006).
23. Clade, P. et al. A promising method for the measurement of the local acceleration of gravity using Bloch oscillations of ultracold atoms in a vertical standing wave. *Europhys. Lett.* 71, 730–736 (2005).
24. Vitushkin, L. et al. Results of the sixth international comparison of absolute gravimeters. *Metrologia* 39, 407–424 (2002).
25. Müller, H., Chiow, S.-w., Long, Q., Herrmann, S. & Chu, S. Atom interferometry with up to 24-photon-momentum-transfer beam splitters. *Phys. Rev. Lett.* 100, 180405 (2008).
26. Müller, H., Chiow, S.-w., Herrmann, S. & Chu, S. Atom interferometers with scalable enclosed area. *Phys. Rev. Lett.* 102, 240403 (2009).
27. Young, B., Kasevich, M. & Chu, S. in *Atom Interferometry* (ed. Berman, P.) 363–406 (Academic, 1997).
28. Dent, Th Eo'tvo's bounds on couplings of fundamental parameters to gravity. *Phys. Rev. Lett.* 101, 041102 (2008).
29. Lemoine, F. G. et al. *The Development of the Joint NASA GSFC and NIMA Geopotential Model EGM96* (NASA Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Maryland, 1998).
30. Fuchs, K. & Soffel, H. in *Landolt-Börnstein – Group V Geophysics Vol. 2a* 317–321

METHODS

The free evolution term $\Delta\varphi_{free}$, given by equation (1), can be written as

$$\Delta\varphi_{free} = \frac{1}{\hbar} \int L d\tau = \frac{1}{\hbar} \int mc^2 \frac{d\tau}{dt} dt \quad (2)$$

so that the integral is now over time coordinate dt . The proper time t of a clock is given by:

$$cd\tau = [-g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta]^{1/2} \quad (3)$$

For central symmetric gravitational fields, we use the Schwarzschild metric¹⁸

$$g_{tt} = -(1 - \mu/r)c^2$$

$$g_{rr} = 1/(1 - \mu/r)$$

(4)

$$g_{\theta\theta} = -r^2$$

$$g_{\varphi\varphi} = -r^2 \sin^2\theta$$

where t , r , θ , φ are the time, radius, and angular coordinates, respectively, and $\mu = 2GM/c^2$, with G the gravitational constant and M the Earth mass. Then,

$$\begin{aligned} mc^2 \frac{d\tau}{dt} &= \sqrt{-g_{tt} - g_{rr} \dot{r}^2} = mc \sqrt{c^2 \left[1 - \frac{\mu}{r}\right] - \frac{1}{1-\mu/r} \dot{r}^2} \approx \\ &\approx mc^2 \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{r_\oplus} - \frac{2gz}{c^2}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{z}}{c}\right)^2\right] \end{aligned} \quad (6)$$

where $r=r+r_\oplus$ with $z \ll r_\oplus$, where r_\oplus is the radius of the Earth and $g = \mu c^2 / (2r_\oplus^2)$ the acceleration of free fall at the Earth's surface. In calculating the phase difference between the two paths, the constant terms can be dropped, and we are left with:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\hbar} \int L(z, \dot{z}) dt = -\frac{mc^2}{\hbar} \int \left[\frac{gz}{c^2} - \frac{1}{2} \frac{\dot{z}^2}{c^2}\right] dt = -\omega_c \int \left[\frac{gz}{c^2} - \frac{1}{2} \frac{\dot{z}^2}{c^2}\right] dt \quad (7)$$

Thus, the free evolution phase shift is given by the integral of the Compton frequency over time, as it is modified by the gravitational redshift gz/c^2 due to the gravitational potential $U=gz$ and by time dilation $\dot{z}^2/(c^2)$ due to the velocity \dot{z} .

For modelling anomalies in the gravitational redshift, we replace the redshift factor by $(1 + \beta) gz/c^2$. Equation (7) then becomes:

$$\Delta\varphi = -\omega_c \int \left[(1 + \beta) \frac{gz}{c^2} - \frac{1}{2} \frac{\dot{z}^2}{c^2} \right] dt \quad (8)$$

By evaluating the integral over the trajectories of the atom and expressing the result in terms of the wavenumber k and the pulse separation time T , we obtain the phases listed in Table 1.

Since the integrals depend on the trajectories of the atom, it might appear necessary to consider whether the physics underlying the violation of local position invariance may also lead to any anomalies in the trajectory of the particle. There is, however, no unique answer. A violation of local position invariance would ultimately be a consequence of refined fundamental laws of physics, such as a version of string theory and loop quantum gravity. No definite version of such a theory, however, exists¹¹. Fortunately, it turns out that under some very general assumptions, the interpretation of the redshift test is independent of possible changes in the atom's trajectories. To see this, we consider two scenarios: First, that there is no modification besides the modified gravitational redshift; in particular, that the non-standard value of β does not alter the trajectories. We then evaluate equation (8) and the interaction phase²⁷ $\Delta\varphi_{light}$ along the standard trajectories. Table 1 shows that the magnitude of the redshift, time dilation, and laser interaction phases are the same if $\beta=0$ and two of these terms cancel each other out. If β is not zero, the time dilation and laser interaction phase still cancel, and the modified redshift directly determines the total phase.

Our second scenario is the more general case that a non-standard value of β does lead to a modified trajectory, which is characterized by a modified acceleration of free fall g' . Such a scenario results, for example, from determining the trajectories by a principle of least action, which states that the trajectories will be the ones for which the phase difference given by equation (8) is lowest. The redshift affects the phase and, therefore, the trajectory. The new trajectory can be derived using the Euler-Lagrange equations. This gives rise to a modified acceleration of free fall g' , which, in turn, determines the time dilation and interaction phases. As Table 1 shows, the time dilation and laser interaction phase still cancel, and the result for the total leading-order phase is still directly determined by the redshift. The only assumption we need to make is that any modification due to non-standard physics is common to both trajectories. The relative elevation z , which determines the redshift in equation (8), is then unaffected. This assumption can be expected to hold, because any differential influence should be suppressed by a power of the ratio of the relative velocity or distance of the arms to the velocity and distance scales of the metric, $|(\dot{z}_1 - \dot{z}_2)/c| \sim 10^{-10}$ and $|(z_1 - z_2)/r_{\oplus} \sim 10^{-9}|$.

We remark that even in the case of modified trajectories, tests of the universality of free fall (UFF) and local position invariance remain conceptually different:¹ Tests of UFF search for the variation for different matter at the same location. For example, the hypothetical modification of trajectories for different matter has been used²⁸ to derive bounds on the coupling of fundamental constants to gravity. Tests of local position invariance, on the other hand, search for effects on similar matter at different locations.

Thus, the leading-order phase shift is the same in both scenarios,

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_{\text{path 2}} - \Delta\varphi_{\text{path 1}} = \frac{mc^2}{\hbar}(1 + \beta) \frac{g(\frac{\hbar k T}{m})T}{c^2} = (1 + \beta)kgT^2 \quad (9)$$

This result is equal to the outcome of the non-relativistic calculation^{9,10} if the redshift agrees with general relativity. In particular, equation (7) agrees with the expression of the non-relativistic Lagrangian:

$$\Delta\varphi = -\frac{1}{\hbar} \int \left[mgz - \frac{1}{2}m\dot{z}^2 \right] dt = \frac{1}{\hbar} \int [PE - KE] dt \quad (10)$$

The similarity of the two formalisms when general relativity is valid roots back to the fact that it is the integral of the gravitational potential energy over time $\int U dt = \int PE dt$ that determines the accumulated phase due to the redshift U/c^2 . The essential realization of this paper is that the non-relativistic equation (10) hides the true quantum oscillation frequency, ω_C , given in equation (7). Thus, if we allow for a departure from local position invariance, our analysis shows that the atom interferometer's phase provides a test of general relativity.

Other atom interferometer geometries can also be described in our framework. For example, Ramsey-Borde interferometers^{25,26} have four pulses, at times 0, T, T+T', and 2T+T', respectively. The three leading order phases for those are $(1 + \beta)kgT(T + T')$ for the redshift, $(\hbar k^2/m)T + kgT(T + T')$ for time dilation, and $-2(\hbar k^2/m)T - kgT(T + T')$ for the laser phase. The sum of these three terms is $-(\hbar k^2/m)T + (1 + \beta)kgT(T + T')$.

To estimate g in Florence, Italy, for the experiment ref. 22, we apply the international gravity formula, with corrections for the elevation and the geoid height²⁹. To estimate the accuracy of this method, we apply it to four Italian cities for which measurements³⁰ have been reported and compare prediction and experiment.

Evidence for spatial variation of the fine structure constant

J. K. Webb¹, J. A. King¹, M. T. Murphy², V. V.
Flambaum¹, R. F. Carswell³, and M. B. Bainbridge¹

¹ *School of Physics, University of New South Wales, Sydney, NSW 2052,
Australia*

² *Centre for Astrophysics and Supercomputing, Swinburne University of
Technology,*

Mail H39, PO Box 218, Victoria 3122, Australia and

³ *Institute of Astronomy, Madingley Road, Cambridge, CB3 0HA,
England.*

(Dated: August 25, 2010)

We previously reported observations of quasar spectra from the Keck telescope suggesting a smaller value of the fine structure constant, α , at high redshift. A new sample of 153 measurements from the ESO Very Large Telescope (VLT), probing a different direction in the universe, also depends on redshift, but in the opposite sense, that is, α appears on average to be larger in the past. The combined dataset is well represented by a spatial dipole, significant at the 4.1σ level, in the direction right ascension 17.3 ± 0.6 hours, declination -61 ± 9 degrees. A detailed analysis for systematics, using observations duplicated at both telescopes, reveals none which are likely to emulate this result.

PACS numbers: 06.20.Jr, 95.30.Dr, 95.30.Sf, 98.62.Ra, 98.80.-k, 98.80.Es,
98.80.Jk

Quasar spectroscopy as a test of fundamental physics. The vast light-travel times to distant quasars allows us to probe physics at high redshift. The relative positions of wavenumbers, ω_z , of atomic transitions detected at redshift $z = \lambda_{obs}/\lambda_{lab} - 1$, can be compared with laboratory values, ω_0 , via the relationship $\omega_z = \omega_0 + Q(\alpha_z^2 - \alpha_0^2)/\alpha_0^2$ and the coefficient Q measures the sensitivity of a given transition to a change in α . The variation in both magnitude and sign of Q for different transitions is a significant advantage of the Many Multiplet method^[1, 2], helping to combat potential systematics.

The first application of this method, 30 measurements of $\Delta\alpha/\alpha = (\alpha_z - \alpha_0)/\alpha_0$, signalled a smaller α at high redshift at the 3σ significance level. By 2004 we had made 143 measurements of α covering a wide redshift range, using further data from the Keck telescope obtained by 3 separate groups, supporting our earlier findings, that towards that general direction in the universe at least, α may have been smaller at high redshift,

Теория относительности.

at the 5σ level^[3-5]. The constant factor at that point was (undesirably) the telescope/instrument.

Subsequently, only 1 further independent statistical study has been completed^[6], but difficulties with the analysis methods mean those results do not add to or provide a check on our earlier results^[7]. A small number of individual α measurements have been made, but provide no general conclusions since the systematic component of the error on $\Delta\alpha/\alpha \sim 10^{-5}$.

New data from the VLT. We have now analyzed a large dataset from a different observatory, the VLT. Full details and searches for systematic errors will be given elsewhere^[8, 9]. Here we summarize the evidence for spatial variation in α emerging from the combined Keck+VLT samples. Quasar spectra, obtained from the ESO Science Archive, were selected, prioritizing primarily by expected signal to noise but with some preference given to higher redshift objects and to objects giving more extensive sky coverage. The ESO MIDAS pipeline was used for the first data reduction step, including wavelength calibration, although enhancements were made to derive a more robust and accurate wavelength solution from an improved selection of thorium-argon calibration lamp emission lines^[10]. Echelle spectral orders from several exposures of a given quasar were combined using UVES_POPLER^[11]. A total of 60 quasar spectra from the VLT have been used for the present work, yielding 153 absorption systems. Absorption systems were identified via a careful visual search of each spectrum, using RG-GEN^[12], scanning for commonly detected transitions at the same redshift, hence aligned in velocity coordinates. Several transition matches were required for acceptance and, given the high spectral resolution, chance matches were eliminated.

Absorption system modelling. As in our previous studies, VPFIT was used to model the profiles in each absorption system^[13] with some enhancements, described in^[8]. A comprehensive list of the transitions used, their laboratory wavelengths, oscillator strengths, and Q coefficients are compiled in^[4, 8].

The following general procedures were adhered to:

- (i) For each absorption system, physically related parameters (redshifts and b-parameters) are tied, in order to minimise the required number of free parameters and derive the strongest possible constraints on line positions, and hence $\Delta\alpha/\alpha$.
- (ii) Parameters were tied only for species with similar ionisation potentials, to minimise possible introduction of random effects on α , mimicked by spatial (and hence velocity) segregation effects;

- (iii) Line broadening is typically dominated by turbulent rather than thermal motion. Both limiting-case models were applied and $\Delta\alpha/\alpha$ determined for each. The final $\Delta\alpha/\alpha$ was derived from a likelihood-weighted average. Details and justification are given in^[8];
- (iv) Where appropriate (and where available), isotopic structures are included in the fitting procedure (for MgI, MgII, AlIII, SIII, and FeII);
- (v) Velocity structures were determined initially choosing the strongest unsaturated transitions in each system. Normalised residuals across each transition fitted were examined and the fit progressively refined with the introduction of each additional transition to the fit;
- (vi) Transitions falling in spectral regions contaminated by telluric features or atmospheric absorption were discarded. Any data regions contaminated by cosmic rays, faulty CCD pixels, or any other unidentified noise effects, were also discarded;
- (vii) A few gravitational lenses were identified by being difficult or impossible to model successfully. The non-point source quasar image and the resultant complex line-of-sight geometry can significantly alter apparent relative line strengths. These systems were discarded;
- (viii) In all cases we derived the final model without solving for $\Delta\alpha/\alpha$. The introduction of $\Delta\alpha/\alpha$ as an additional free parameter was only done once the profile velocity structure had been finalized, eliminating any possible bias towards a 'preferred' $\Delta\alpha/\alpha$. One potential consequence of this approach might conceivably be a small bias on $\Delta\alpha/\alpha$ towards zero, should some 'fitting-away' of $\Delta\alpha/\alpha$ occur, by column density adjustments or velocity structure decisions. The reverse is not true, i.e. it cannot bias towards a non-zero $\Delta\alpha/\alpha$.

VPFIT^[13] minimizes χ^2 simultaneously over all species. Whilst the strongest components may appear in all species, weaker components can sometimes fall below the detection threshold and hence are excluded, such that a component which appears in MgII, for example, does not appear in FeII. There is no solution to this (known) problem but its effect merely adds an additional random scatter on $\Delta\alpha/\alpha$ for an ensemble of observations.

Spatially dependent α . An initial inspection of $\Delta\alpha/\alpha$ vs redshift for the new VLT dataset reveals a redshift trend, opposite in sign compared to the earlier Keck data. Splitting each sample at $z = 1.8$, our 2004 Keck sample^[5] gave $\langle\Delta\alpha/\alpha\rangle_{z<1.8} = -0.54 \pm 0.12 \times 10^{-5}$ and $\langle\Delta\alpha/\alpha\rangle_{z>1.8} =$

$-0.74 \pm 0.17 \times 10^{-5}$. The present 2010 VLT sample, which will be discussed in detail in^[8] gives $\langle \Delta\alpha/\alpha \rangle_{z < 1.8} = -0.06 \pm 0.16 \times 10^{-5}$ and $\langle \Delta\alpha/\alpha \rangle_{z > 1.8} = -0.61 \pm 0.20 \times 10^{-5}$. Errors here and throughout this paper are 1σ estimates.

Errors on individual $\Delta\alpha/\alpha$ values for the VLT sample are $\sigma_{tot}^2 + \sigma_{stat}^2 + \sigma_{sys}^2$, where σ_{sys}^2 was derived empirically using a modification of the Least Trimmed Squares (LTS) method, where only 85% of data, those points with the smallest squared residuals, are fitted. σ_{sys} was assumed constant for all VLT absorbers and was found to be $\approx 0.88 \times 10^{-5}$, showing that the scatter in the VLT $\Delta\alpha/\alpha$ is greater than expected on the basis of statistical-errors alone. Errors on $\Delta\alpha/\alpha$ for the Keck sample are discussed in^[4], although we derive a new estimate of σ_{sys} for the Keck points using the LTS method.

The Keck (Mauna Kea, Hawaii) and VLT (Paranal, Chile) locations on Earth are separated by 45° in latitude and hence, on average, observe different directions on the sky. We are thus motivated to explore a simple spatial dependence using the combined dataset.

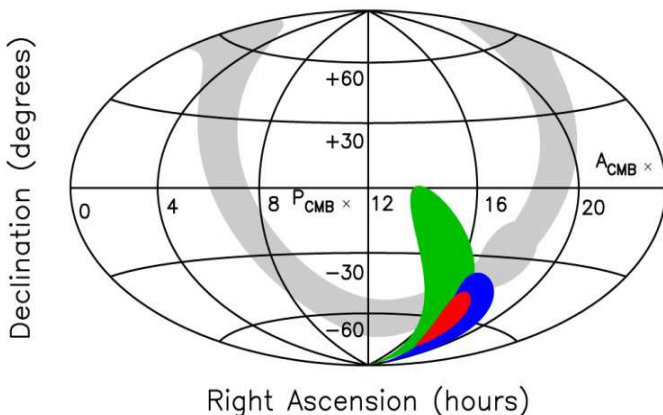


FIG. 1. All-sky plot showing the independent Keck (green) and VLT (blue) best-fit dipoles, and the combined sample (red), in equatorial co-ordinates. Approximate 1σ confidence contours are from the covariance matrix. A bootstrap analysis gives the chance-probability of getting the observed (or better) alignment between the independent Keck and VLT dipoles is only 4%. The cosmic microwave background dipole and antipole are illustrated for comparison.

The Keck sample we use is as presented in^[5] with a minor modification: 3 points were removed. 2 had been included erroneously (from a spectrum known to have calibration problems) and 1 further point was clipped, having a residual greater than 3σ against a modified LTS fit to the Keck data.

Initially the 3 datasets (i.e. Keck, VLT and combined) are fitted using a simple possible dipole+monopole model, represented here by $\Delta\alpha/\alpha = A \cos \theta + m$, where m is a constant allowing an offset from the terrestrial value, θ is the angle on the sky between quasar sightline and best-fit dipole position, and A is the dipole amplitude.

To examine the probability of the observed dipole model arising by chance, we bootstrap the sample, repeatedly randomizing the association between $\Delta\alpha/\alpha$ and quasar sightline, fitting $\Delta\alpha/\alpha = A \cos \theta + m$ at each realisation. We then numerically determine the probability of obtaining a value of χ^2 less than or equal to the actual value by comparing with the χ^2 probability distribution from the bootstrap process.

Figure 1 illustrates the best-fit dipole equatorial coordinates on an all-sky map, with approximate 1σ error contours derived from the

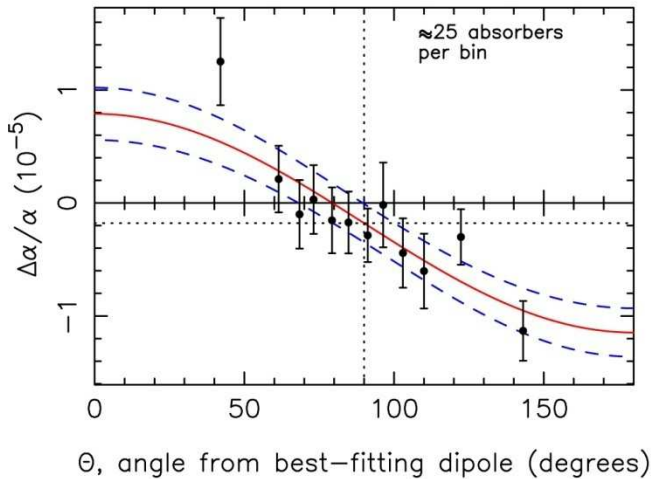


FIG. 2. $\Delta\alpha/\alpha$ for the combined Keck and VLT data vs angle Θ from best-fit dipole, $\Delta\alpha/\alpha = A \cos \Theta + m$, $A = (0.97 \pm 0.21) \times 10^{-5}$ and $m = (-0.18 \pm 0.08) \times 10^{-5}$. Dashed lines illustrate $\pm 1\sigma$ errors on the dipole fit. The best-fit dipole is at right ascension 17.3 ± 0.6 hours, declination -61 ± 9 degrees and is statistically preferred over a monopole model at the 4.1σ level.

covariance matrix. Figure 2 illustrates the $\Delta\alpha/\alpha$ binned data and the best-fit dipole model. Best-fit parameters are given in the captions.

As a second trial model, allowing for a spatial gradient in α , we assign a distance to each $\Delta\alpha/\alpha$ measurement of $r(z) = ct(z)$ where c is the speed of light and $t(z)$ is the look-back time at redshift z . The model is then $\Delta\alpha/\alpha = Br(z)\cos\theta + m$. Figure 3 illustrates $\Delta\alpha/\alpha$ vs look-back time distance projected onto the dipole axis, $r\cos\theta$ using the best-fit dipole parameters for this model. This model seems to represent the data reasonably well and the data show a strong correlation, significant at the $4:1\sigma$ level.

Given the relatively low statistical significance of the monopole term m for both models above (see captions, Figures 2 and 3), and because the theoretical interpretation of a monopole term is unclear, a third model was fitted, $\Delta\alpha/\alpha = Br\cos\theta$, giving $B = 1.10 \pm 0.25 \times 10^{-6} \text{GLyr}^{-1}$ with a significance of 4.2σ and giving parameters right ascension 17.4 ± 0.6 hours, declination -58 ± 6 degrees.

An alternative to empirically increasing the $\Delta\alpha/\alpha$ error bars to incorporate a systematic component is to assume $\sigma_{tot}^2 = \sigma_{stat}^2$ and to iteratively trim the data during model fitting. This provides a further

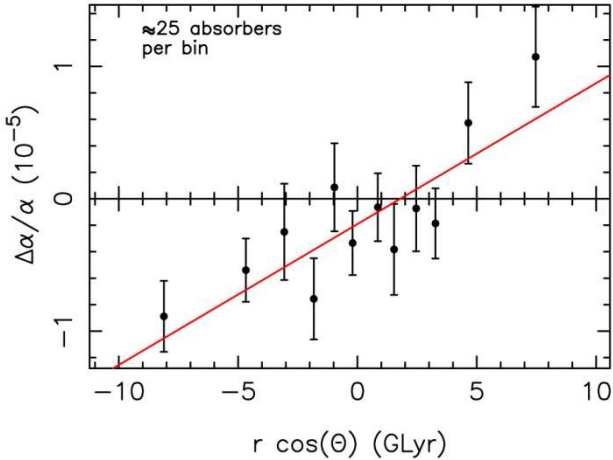


FIG. 3. $\Delta\alpha/\alpha$ vs $Br\cos\theta$ for the model $\Delta\alpha/\alpha = Br\cos\theta + m$ showing the gradient in α along the best-fit dipole. The best-fit direction is at right ascension 17.4 ± 0.6 hours, declination -62 ± 6 degrees, for which $B = (1.1 \pm 0.2) \times 10^{-6} \text{GLyr}^{-1}$ and $m = (-1.9 \pm 0.8) \times 10^{-6}$. This dipole+monopole model is statistically preferred over a monopole-only model also at the 4.1σ level. A cosmology with parameters $(H_0, \Omega_M, \Omega_\Lambda) = (70.5, 0.2736, 0.726)$ was used [14].

stringent test of whether the apparent gradient in α is dominated by a subset of the data, perhaps more prone to some unknown systematic than the remainder. Adopting $\sigma_{tot}^2 = \sigma_{stat}^2$ will clearly result in higher significance levels. In Figure 4 we plot the statistical significance of the dipole in units of σ and find that over 40% of the data must be discarded to push the result below 4σ , implying a remarkable internal consistency within the data.

Empirical test for systematics. One potential effective relative distortion might be due to slight mechanical mis-alignments of the spectrograph slits for the 2 arms, red and blue, of the UVES spectrograph on the VLT. However, this specific effect appears to be substantially smaller than required to explain values of $\Delta\alpha/\alpha \sim 10^{-5}$ seen in the present work^[15].

A more subtle but related effect may be slight off-centre placement of the quasar image in the spectrograph slit, by different amounts for different exposures, at different wavelength settings. This may apply to either or both Keck and VLT spectra. Since spectrograph slit illuminations are different for quasar (point source) and ThAr calibration lamp (uniform illumination), the subsequent combination of individual exposures to form a 1-dimensional spectrum may then contain relative velocity shifts between spectral segments coming from different exposures. This effect will exist in our data at some level and it is clearly important to know the impact on an ensemble of measurements of α .

Fortunately, 6 quasars in our sample have both Keck and VLT spectra, allowing a direct and empirical check on the effect above, and indeed any other systematic which produce relative velocity shifts along the spectrum. To do this we selected small spectral segments, each a few \AA wide, flanked by unabsorbed continuum flux from the quasar, and fitted Voigt profiles using VPFIT, but adding an additional free parameter allowing a velocity shift between the Keck and VLT segments, $\delta v(\lambda_{obs})_i$, where λ_{obs} is the observed wavelength and i refers to the i^{th} quasar. All available absorption lines in the 6 spectra were used, including both Lyman- α forest lines and heavy element lines but excluding telluric features. In this way we can map any effective relative distortions in the calibrations between each pair of spectra. A total of 694 measurements were used from the 6 pairs of spectra over the observed wavelength range $3506 < \lambda < 8945 \text{\AA}$.

We formed a composite function $\delta v(\lambda_{obs})$ after first normalizing $\langle \delta v(\lambda_{obs})_i \rangle = 0$ for each i to remove any potential small constant velocity offsets from each spectrum (expected from off-centering of the quasar in the spectrograph slit), which cannot influence α .

Finally we fit the composite $\delta v(\lambda_{obs})$ with a linear function $f(\delta v) = a\lambda_{obs} + b$ where $a = (-7 \pm 14) \times 10^{-5} \text{ km s}^{-1} \text{\AA}^{-1}$, $b = 0.38 \pm 0.71 \text{ km s}^{-1}$. The final $f(\delta v)$ thus shows a weak (but statistically

insignificant) velocity drift, and provides an empirical transformation between the Keck and VLT wavelength scales. For each quasar absorption system, we modify the input laboratory wavelengths used in the Voigt profile fitting procedure λ_{lab} to $\lambda'_{lab} = \lambda_{lab} + \Delta\lambda_{lab}$ where $\Delta\lambda_{lab} = \lambda_{lab} \delta v(\lambda_{obs})/c$, and finally use the λ'_{lab} to re-compute $\Delta\alpha/\alpha$ for the entire sample. Since we do not know whether the Keck or the VLT observation causes the non-zero values of the parameters a , b above, we applied the transformation separately to both and examine the impact in each case.

There was one complicating aspect of this effect excluded from the discussion above, arising from a 7th spectral pair. The $\delta v(\lambda_{obs})_7$ showed a more significant non zero slope than the other 6, suggesting a small but significant calibration problem with that particular spectrum. We therefore applied a slightly more complicated transformation to the data to allow for this, using a Monte Carlo simulation to estimate the potential impact on our full combined Keck and VLT sample of both the

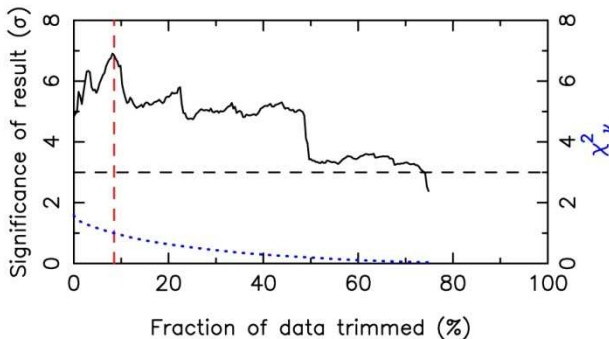


FIG. 4. As an alternative to increasing $\Delta\alpha/\alpha$ error bars, to account for the additional scatter in the data as described in the text, we instead use $\sigma_{tot}^2 = \sigma_{stat}^2$ and iteratively clip the most deviant $\Delta\alpha/\alpha$ value, fitting $\Delta\alpha/\alpha = A \cos \Theta + m$. The vertical dashed line illustrates where the dotted curve $\chi^2 = 1$, when $\sim 8\%$ of the data has been trimmed. Almost 50% of the data must be discarded before the significance drops below 4σ showing that the dipole signal is generally present in entire dataset.

previous effect measured in 6 quasars plus the effect derived from the 7th quasar simultaneously, applied in appropriate proportions. The full details of this analysis will be discussed separately in^[9].

A systematic of the same magnitude as that from the 7th pair cannot be present in any large fraction of our data, otherwise it would generate large numbers of noticeable outliers. If we apply $f(\delta v)$ from the 6 quasar pairs, the significance of the dipole is reduced to $3:1\sigma$. Blindly

including the effect of the 7th pair under a Monte Carlo method reduces the significance to a most likely value of $2:2\sigma$. However, in this circumstance we add significant amounts of extra scatter into the data above what is already observed, implying that this is an overestimate of a systematic effect of this type. Additionally, the trend of $\delta v(\lambda_{obs})_i$ against wavelength is different in magnitude and sign for each quasar pair, implying that these effects are likely to average out for an ensemble of observations. Thus, application of the effect as described above should be regarded as extreme in terms of impact on estimating $\Delta\alpha/\alpha$.

Conclusions. Quasar spectra obtained using 2 separate observatories reveal a spatial dependence of the fine structure constant at a significance of $4:1\sigma$, estimated conservatively, taking into account both statistical and systematic errors. Two independent datasets reveal a striking internal consistency and the directions of the independently derived spatial dipoles agree well, with a chance probability of 4%. The apparent symmetry in magnitude of the $\Delta\alpha/\alpha$ variation between northern and southern hemisphere quasar data is also striking. A subset of the quasar spectra observed at both observatories permits a direct test for systematics. None are found which are likely to emulate the apparent cosmological dipole in α we detect. To explain our results in terms of systematic will require at least 2 different and finely tuned effects. Future similar measurements targeting the apparent pole and anti-pole directions will maximize detection sensitivity, and further observations duplicated on 2 independent telescopes will better constrain systematics. Above all, an independent technique is required to check these results. Qualitatively, our results suggest a violation of the Einstein Equivalence Principle, and could infer a very large or infinite universe, within which our 'local' Hubble volume represents a tiny fraction, with correspondingly small variations in the physical constants.

This work is supported by the Australian Research Council. RFC is grateful to the Leverhulme Trust for an Emeritus grant. We thank Steve Curran, Elliott Koch, Julian Berengut, John Barrow and Paul Davies for discussions throughout this work.



- [1] J. K. Webb et al., Phys. Rev. Lett. 82, 884 (Feb. 1999), arXiv:astro-ph/9803165
- [2] V. A. Dzuba, V. V. Flambaum, and J. K. Webb, Phys. Rev. Lett. 82, 888 (Feb. 1999), arXiv:physics/9802029
- [3] J. K. Webb et al., Phys. Rev. Lett. 87, 091301 (Aug. 2001), arXiv:astro-ph/0012539
- [4] M. T. Murphy, J. K. Webb, and V. V. Flambaum, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 345, 609 (Oct. 2003), arXiv:astro-ph/0306483

332.

- [5] M. T. Murphy, V. V. Flambaum, and J. K. Webb, in *Astrophysics, Clocks and Fundamental Constants*, Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag, Vol. 648, edited by S. G. Karshenboim & E. Peik (2004) pp. 131-150, arXiv:astro-ph/0310318
- [6] H. Chand et al., *Astron. Astrophys.* 417, 853 (Apr. 2004), arXiv:astro-ph/0401094
- [7] M. T. Murphy, J. K. Webb, and V. V. Flambaum, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 384, 1053 (Mar. 2008), arXiv:astro-ph/0612407
- [8] J. A. King et al. (2010), in preparation; to be submitted to *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*
- [9] F. E. Koch et al. (2010), in preparation; to be submitted to *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*
- [10] M. T. Murphy et al., *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 378, 221 (Jun. 2007), arXiv:astro-ph/0703623. [11] M. T. Murphy, "uvex popler," (2010), http://astronomy.swin.edu.au/~mmurphy/UVES_popler
- [12] R. F. Carswell, "rdgen," (2004), <http://www.ast.cam.ac.uk/~rfc/rdgen.html>
- [13] R. F. Carswell and J. K. Webb, "vpfit - Voigt profile fitting program. Version 9.5," (2010), <http://www.ast.cam.ac.uk/~rfc/vpfit.html>
- [14] G. Hinshaw et al., *Astrophys. J. Supp.* 180, 225 (Feb. 2009), arXiv:0803.0732
- [15] P. Molaro et al., *Astron. Astrophys.* 481, 559 (Apr. 2008), arXiv:0712.3345

Библиография

- [1] ВА Касимов. Специальная теория относительности (без второго постулата). Новосибирск, 2010, здесь: стр. 7 или Теория относительности. ТО-01-02-14.pdf
- [2] а.Визгин ВП. *Об открытии и уравнений гравитационного поля Эйнштейном и Гильбертом (новые материалы)*. УФН, 171, 12
- б.Логонов АА, Мествиришвили МА, Петров ВА. *Как были открыты уравнения Гильберта-Эйнштейна? (Из истории физики)*УФН, 174, 6
- [3] Турьшев ВГ. *Экспериментальные проверки общей теории относительности: недавние успехи и будущие направления исследований*. УФН, 179, 1
- [4] Will, CM. *The confrontation between General Relativity and Experiment*.
- [5] В. Паули. *Теория относительности*. Наука, М., 1983
- [4] Will, CM. *Was Einstein Right?: Putting General Relativity to the Test, (Basic Books, New York, U.S.A., 1993), 2nd edition*
- [7] Dicke RH. "Experimental relativity", in DeWitt, C.M., and DeWitt, B.S., eds., *Relativity, Groups and Topology. Relativit e, Groupes et Topologie, Lectures delivered at Les Houches during the 1963 session of the Summer School of Theoretical Physics, University of Grenoble, 165–313, (Gordon and Breach, New York, U.S.A., 1964)*
- [8] Will CM. *Theory and experiment in gravitational physics, (Cambridge University Press, Cambridge, U.K.; New York, U.S.A., 1993), 2nd edition*.
- [9] Haugan MP, and Lämmerzahl C. "Principles of equivalence: Their role in gravitation physics and experiments that test them", in Lämmerzahl C, Everitt CWF and Hehl FW, eds. *Gyros, Clocks, and Interferometers...: Testing Relativistic Gravity in Space, Proceedings of a meeting held at Bad Honnef, Germany, 21–27 August 1999, vol. 562 of Lecture Notes in Physics, 195–212, (Springer, Berlin, Germany; New York, U.S.A., 2001)*.
- [10] Lämmerzahl C. "The Einstein equivalence principle and the search for new physics", in Giulini DJW, Kiefer C and Lämmerzahl C, eds. *Quantum Gravity: From Theory to Experimental Search, vol. 631 of Lecture Notes in Physics, 367–394, (Springer, Berlin, Germany; New York, U.S.A., 2003)*
- [11] Eötvös RV, Pekár, V and Fekete E. "Beitrage zum Gesetze der Proportionalität von Trägheit und Gravität", *Ann. Phys. (Leipzig)*, 68, 11–66, (1922)
- [12] Dicke RH. *Gravitation and the Universe, vol. 78 of Memoirs of the American Philosophical Society. Jayne Lecture for 1969, (American Philosophical Society, Philadelphia, U.S.A., 1970)*
- [13] Braginsky VB and Panov VI. "Verification of the equivalence of inertial and gravitational mass", *Sov. Phys. JETP*, 34, 463–466, (1972)
- [14] Su Y, Heckel BR, Adelberger EG, Gundlach JH, Harris M, Smith GL and Swanson HE. "New tests of the universality of free fall", *Phys. Rev. D*, 50, 3614–3636, (1994)
- [15] Baessler S, Heckel BR, Adelberger EG, Gundlach JH, Schmidt U and Swanson HE. "Improved test of the equivalence principle for gravitational self-energy", *Phys. Rev. Lett.*, 83, 3585–3588, (1999)
- [16] Fischbach E, Gillies GT, Krause DE, Schwan JG and Talmadge CL. "Non-Newtonian gravity and new weak forces: An index of measurements and theory", *Metrologia*, 29, 213–260, (1992)
- [17] Adelberger EG. "New tests of Einstein's equivalence principle and Newton's inverse-square law", *Class. Quantum Grav.*, 18, 2397–2405, (2001)
- [18] Michelson AA and Morley EW. "On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether", *Am. J. Sci.*, 34, 333–345, (1887)

334.

- [19] Shankland RS, McCuskey SW, Leone FC and Kuerti G. “*New analysis of the interferometer observations of Dayton C. Miller*”, *Rev. Mod. Phys.*, 27, 167–78, (1955)
- [20] Jaseja TS, Javan A, Murray J and Townes CH. “*Test of special relativity or of the isotropy of space by use of infrared masers*”, *Phys. Rev.*, 133, A1221–A1225, (1964)
- [21] Brilliet A and Hall JL. “*Improved laser test of the isotropy of space*”, *Phys. Rev. Lett.*, 42, 549–552, (1979)
- [22] Ives HE and Stilwell GR. “*An experimental study of the rate of a moving atomic clock*”, *J. Opt. Soc. Am.*, 28, 215–226, (1938)
- [23] Rossi B and Hall DB. “*Variation of the rate of decay of mesotrons with momentum*”, *Phys. Rev.*, 59, 223–228, (1941)
- [24] Farley FJM, Bailey J, Brown RCA, Giesch M, Jöstlein H, van der Meer S, Picasso E and Tannenbaum, M. “*The Anomalous Magnetic Moment of the Negative Muon*”, *Nuovo Cimento*, 45, 281–286, (1966)
- [25] Brecher K. “*Is the speed of light independent of the velocity of the source?*”, *Phys. Rev. Lett.*, 39, 1051–1054, (1977)
- [26] Alväger T, Farley FJ.M, Kjellman J and Wallin I. “*Test of the second postulate of special relativity in the GeV region*”, *Phys. Lett.*, 12, 260–262, (1977)
- [27] Champeney D C, Isaak GR and Khan A M. “*An “aether drift” experiment based on the Mössbauer effect*”, *Phys. Lett.*, 7, 241–243, (1963)
- [28] Riis E, Anderson L-U A, Bjerre N, Poulson O, Lee SA and Hall J.L. “*Test of the Isotropy of the Speed of Light Using Fast-Beam Laser Spectroscopy*”, *Phys. Rev. Lett.*, 60, 81–84, (1988)
- [29] Krisher TP, Maleki L, Lutes GF, Primas L.E, Logan RT, Anderson JD and Will C.M. “*Test of the isotropy of the one-way speed of light using hydrogen-maser frequency standards*”, *Phys. Rev. D*, 42, 731–734, (1990)
- [30] Lineweaver CH, Tenorio L, Smoot GF, Keegstra P, Banday AJ and Lubin P. “*The dipole observed in the COBE DMR 4 year data*”, *Astrophys. J.*, 470, 38–42, (1996)
- [31] Hughes VW, Robinson HG and Beltran-Lopez V. “*Upper limit for the anisotropy of inertial mass from nuclear resonance experiments*”, *Phys. Rev. Lett.*, 4, 342–344, (1960)
- [32] Drever RWP. “*A search for anisotropy of inertial mass using a free precession technique*”, *Philos. Mag.*, 6, 683–687, (1961)
- [33] Prestage JD, Bollinger, JJ Itano, WM and Wineland DJ. “*Limits for Spatial Anisotropy by Use of Nuclear-Spin-Polarized 9Be^+ Ions*”, *Phys. Rev. Lett.*, 54, 2387–2390, (1985)
- [34] Lamoreaux SK, Jacobs JP, Heckel BR, Raab FJ and Fortson EN. “*New limits on spatial anisotropy from optically-pumped 201Hg and 199Hg* ”, *Phys. Rev. Lett.*, 57, 3125–3128, (1986)
- [35] Chupp T E, Hoare RJ, Loveman R A, Oteiza E R, Richardson J M, Wagshul M E and Thompson A K. “*Results of a new test of local Lorentz invariance: A search for mass anisotropy in 21Ne* ”, *Phys. Rev. Lett.*, 63, 1541–1545, (1989)
- [36] Haugan MP and Will CM. “*Modern tests of special relativity*”, *Phys. Today*, 40, 69–76, (1987)
- [37] Wolf P, Bize S, Clairon A, Luiten AN, Santarelli G and Tobar ME. “*Tests of Lorentz invariance using a microwave resonator*”, *Phys. Rev. Lett.*, 90, 060402–1–4, (2003)
- [38] Lipa JA, Nissen JA, Wang S, Stricker DA and Avaloff D. “*New limit on signals of Lorentz violation in electrodynamics*”, *Phys. Rev. Lett.*, 90, 060403–1–4, (2003)

- [39] Müller H, Herrmann S, Braxmaier C, Schiller S and Peters A. “*Modern Michelson–Morley experiment using cryogenic optical resonators*”, *Phys. Rev. Lett.*, 91, 020401–1–4, (2003)
- [40] Antonini P, Okhapkin M, Göklü E and Schiller S. “*Test of constancy of speed of light with rotating cryogenic optical resonators*”, *Phys. Rev. A*, 71, 050101–1–4, (2005).
- [41] Stanwix PL, Tobar ME, Wolf P, Susli M, Locke CR, Ivanov EN, Winterflood J and van Kann F. “*Test of Lorentz Invariance in Electrodynamics Using Rotating Cryogenic Sapphire Microwave Oscillators*”, *Phys. Rev. Lett.*, 95, 040404, (2005).
- [42] Haugan MP and Lämmerzahl C. “*On the interpretation of Michelson–Morley experiments*”, *Phys. Lett. A*, 282, 223–229, (2001).
- [43] Colladay D and Kostelecký VA. “*CPT violation and the standard model*”, *Phys. Rev. D*, 55, 6760–6774, (1997)
- [44] Colladay D and Kostelecký VA. “*Lorentz-violating extension of the standard model*”, *Phys. Rev. D*, 58, 116002–1–23, (1998).
- [45] Kostelecký VA and Mewes M. “*Signals for Lorentz violation in electrodynamics*”, *Phys. Rev. D*, 66, 056005–1–24, (2002).
- [46] Kostelecký VA and Lane CD. “*Constraints on Lorentz violation from clock-comparison experiments*”, *Phys. Rev. D*, 60, 116010–1–17, (1999)
- [47] Biller SD, Breslin AC, Buckley J, Catanese M, Carson M, Carter-Lewis DA, Cawley MF, Fegan DJ, Finley JP, Gaidos JA, Hillas AM, Krennrich F, Lamb RC, Lessard R, Masterson C, McEnery JE, McKernan B, Moriarty P, Quinn J, Rose HJ, Samuelson F, Sembroski G, Skelton P and Weekes TC. “*Limits to quantum gravity effects on energy dependence of the speed of light from observations of TeV flares in active galaxies*”, *Phys. Rev. Lett.*, 82, 2108–2111, (1999)
- [48] Gleiser RJ and Kozameh CN. “*Astrophysical limits on quantum gravity motivated birefringence*”, *Phys. Rev. D*, 64, 083007, (2001)
- [49] Mattingly D. “*Modern Tests of Lorentz Invariance*”, *Living Rev. Relativity*, 8, lrr-2005-5, (2005)
- [50] Ritz SM et al. (and GLAST Mission Team), in American Astronomical Society Meeting Abstracts. Vol. 211 (Washington. DC: Am. Astron. Soc. , 2007) pp. 98.01
- [51] Pounce RV, Rebeka GA (Jr.). *Phys. Rev. Lett.* 3 439 (1959)
- [52] Pounce RV, Rebeka GA (Jr.). *Phys. Rev. Lett.* 4 337 (1960)
- [53] Pounce RV, Snider JL. *Phys. Rev. Lett.* 13 539 (1964)
- [54] LoPresto JC, Schrader C and Pierce AK. “*Solar gravitational redshift from the infrared oxygen triplet*”, *Astrophys. J.*, 376, 757–760, (1991)
- [55] Vessot RFC, Levine MW, Mattison EM, Blomberg EL, Hoffman TE, Nystrom GU, Farrell BF, Decher R., Eby PB, Baugher C.R, Watts JW, Teuber DL and Wills FD. “*Test of Relativistic Gravitation with a Space-Borne Hydrogen Maser*”, *Phys. Rev. Lett.*, 45, 2081–2084, (1980)
- [56] Turneaure JP, Will CM, Farrell BF, Mattison EM and Vessot RFC. “*Test of the principle of equivalence by a null gravitational redshift experiment*”, *Phys. Rev. D*, 27, 1705–1714, (1983)
- [57] Godone A, Noviero C and Tavella P. “*Null gravitational redshift experiment with nonidentical atomic clocks*”, *Phys. Rev. D*, 51, 319–323, (1995)
- [58] Prestage JD, Tjoelker RL and Maleki L. “*Atomic clocks and variations of the fine structure constant*”, *Phys. Rev. Lett.*, 74, 3511–3514, (1995)
- [59] Bauch A and Weyers S. “*New experimental limit on the validity of local position invariance*”, *Phys. Rev. D*, 65, 081101, (2002)

- [60] Taylor JH. “Astronomical and Space Experiments to Test Relativity”, in MacCallum, M.A.H., ed., *General Relativity and Gravitation*, 209, (Cambridge University Press, Cambridge, U.K.; New York, U.S.A., 1987)
- [61] Krisher TP, Anderson JD and Campbell JK. “Test of the gravitational redshift effect at Saturn”, *Phys. Rev. Lett.*, 64, 1322–1325, (1990)
- [62] Krisher TP, Morabito DD and Anderson JD. “The Galileo solar redshift experiment”, *Phys. Rev. Lett.*, 70, 2213–2216, (1993)
- [63] Maleki L and Prestage JD. “SpaceTime Mission: Clock test of relativity at four solar radii”, in Lämmerzahl C, Everitt CWF and Hehl FW, eds. *Gyros, Clocks, and Interferometers...: Testing Relativistic Gravity in Space, Proceedings of a meeting held in Bad Honnef, Germany, August 21–27, 1999*, vol. 562 of *Lecture Notes in Physics*, 369, (Springer, Berlin, Germany; New York, U.S.A., 2001)
- [64] Ashby N “Relativistic effects in the Global Positioning System”, in Dadhich N and Narlikar JV, eds. *Gravitation and Relativity: At the Turn of the Millenium, Proceedings of the 15th International Conference on General Relativity and Gravitation (GR-15), held at IUCAA, Pune, India, December 16–21, 1997*, 231–258, (Inter-University Center for Astronomy and Astrophysics, Pune, India, 1998)
- [65] Ashby N. “Relativity in the Global Positioning System”, *Living Rev. Relativity*, 6(1), Irr-2003-1, (2003)
- [66] Will CM. “Einstein’s relativity and everyday life”, *other, Americal Physical Society*, (2000)
- [67] Dyson F J. “The fundamental constants and their time variation”, in Salam A and Wigner EP, eds. *Aspects of Quantum Theory*, 213–236, (Cambridge University Press, Cambridge, U.K., New York, U.S.A., 1972)
- [68] Uzan J-P. “The fundamental constants and their variation: observational and theoretical status”, *Rev. Mod. Phys.*, 75, 403, (2003).
- [69] Marion H, Pereira Dos Santos F, Abgrall M, Zhang S, Sortais Y, Bize S, Maksimovic I, Calonico D, Grunert J, Mandache C, Lemonde P, Santarelli G, Laurent P, Clairon A and Salomon C. “Search for variations of fundamental constants using atomic fountain clocks”, *Phys. Rev. Lett.*, 90, 150801–1–4, (2003)
- [70] Fischer M, Kolachevsky N, Zimmermann M, Holzwarth R., Udem T, Hänsch, TW, Abgrall M, Grunert J, Maksimovic I, Bize S, Marion H, Pereira Dos Santos F, Lemonde P, Santarelli G, Laurent P, Clairon A, Salomon C, Haas M, Jentschura UD and Keitel CH. “New limits on the drift of fundamental constants from laboratory measurements”, *Phys. Rev. Lett.*, 92, 230802–1–4, (2004)
- [71] Peik E, Lipphardt B, Schnatz H, Schneider T, Tamm C, and Karshenboim S.G. “Limit on the present temporal variation of the fine structure constant”, *Phys. Rev. Lett.*, 93, 170801–1–4, (2004)
- [72] Bize S, Diddams SA, Tanaka U, Tanner CE, Oskay, WH, Drullinger RE, Parker TE, Heavner TP, Jefferts SR, Hollberg L, Itano WM and Bergquist JC. “Testing the stability of Fundamental Constants with the Hg+ single-ion optical clock”, *Phys. Rev. Lett.*, 90, 150802–1–4, (2003)
- [73] Damour T, and Dyson F. “The Oklo bound on the time variation of the fine-structure constant revisited”, *Nucl. Phys. B*, 480, 37–54, (1996)
- [74] Fujii Y. “Oklo Constraint on the Time-Variability of the Fine-Structure Constant”, in Karshenboim SG and Peik E, eds., *Astrophysics, Clocks and Fundamental Constants, 302nd WE-Heraeus-Seminar, June 2003, Bad Honnef, Germany*, vol. 648 of *Lecture Notes in Physics*, 167–185, (Springer, Berlin, Germany; New York, U.S.A., 2004)
- [75] Petrov YV, Nazarov AI, Onegin MS, Petrov VY and Sakhnovsky EG, “Natural nuclear reactor Oklo and variation of fundamental constants. Part 1: Computation of neutronics of fresh core”, (2005)

- [76] Olive KA, Pospelov M, Qian Y-Z, Manhes G, Vangioni-Flam E, Coc A and Casse M. "Reexamination of the 187Re bound on the variation of fundamental couplings", *Phys. Rev. D*, 69, 027701–1–4, (2004)
- [77] Webb J K, Flambaum V V, Churchill C W, Drinkwater M J and Barrow J D. "Search for time variation of the fine structure constant", *Phys. Rev. Lett.*, 82, 884–887, (1999)
- [78] Murphy MT, Webb JK, Flambaum VV, Dzuba, VA, Churchill, CW, Prochaska JX, Barrow JD and Wolfe AM. "Possible evidence for a variable fine structure constant from QSO absorption lines: motivations, analysis and results", *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 327, 1208–1222, (2001)
- [79] Srianand R, Chand H, Petitjean P and Aracil B. "Limits on the time variation of the electromagnetic fine-structure constant in the low energy limit from absorption lines in the spectra of distant quasars", *Phys. Rev. Lett.*, 92, 121302–1–4, (2004)
- [80] Chand H, Petitjean P, Srianand R and Aracil B. "Probing the time-variation of the fine-structure constant: Results based on Si IV doublets from a UVES sample", *Astron. Astrophys.*, 430, 47–58, (2005)
- [81] Malaney RA and Mathews GJ. "Probing the early universe: A review of primordial nucleosynthesis beyond the standard big bang", *Phys. Rep.*, 229, 147–219, (1993)
- [82] Reeves H. "On the origin of the light elements ($Z < 6$)", *Rev. Mod. Phys.*, 66, 193–216, (1994)
- [83] Ivanchik A, Petitjean P, Varshalovich D, Aracil B, Srianand R, Chand H, Ledoux C and Boisse P. "A new constraint on the time dependence of the proton-to-electron mass ratio: Analysis of the Q 0347-383 and Q 0405-443 spectra", *Astron. Astrophys.*, 440, 45–52, (2005)
- [84] Wolfe AM, Brown RL and Roberts MS. "Limits on the Variation of Fundamental Atomic Quantities over Cosmic Time Scales", *Phys. Rev. Lett.*, 37, 179–181, (1976)
- [85] Quast R, Reimers D and Levshakov SA. "Probing the variability of the fine-structure constant with the VLT/UVES", *Astron. Astrophys.*, 415, L7–L11, (2004)
- [86] Shlyakter AI. "Direct test of the constancy of fundamental nuclear constants", *Nature*, 264, 340, (1976)
- [87] Müller H., Peters A., Chu S. A precision measurement of the gravitational redshift by the interference of matter waves. *Nature Lett*, Vol 463, 18 February, 2010, doi:10.1038/nature08776
- [88] Webb J.K., King J.A., Murphy M.T., Flambaum V.V., Carswell R. F. and Bainbridge M. B. **Evidence for spatial variation of the fine structure constant.** *Physical Review Letters*, 2010. arXiv:1008.3907v1 [astro-ph.CO] 23 Aug 2010
- [89] Зельманов А.Л. ДАН СССР, 61,993. 1948. ДАН СССР, 107, 815. 1956. ДАН СССР, 135, 1367. 1960.
Труды XI Совещания по космогонии. Изд-во АН СССР. Формализм хронометрических инвариантов, приложения к космологии, теория анизотропной неоднородной вселенной. 1959
- [90] Мицкевич НВ. Физические поля в общей теории относительности. Наука, М., 1969
- [91] Румер ЮБ. Исследования по 5-оптике. Гостехиздат, М., 1956
- [92] Владимиров ЮС. Системы отсчёта в теории гравитации. Энергоиздат, М., 1982
- [93] Ландау ЛД, Лифшиц ЕМ. Теоретическая физика в десяти томах. Теория поля (т.2), седьмое издание. Наука, М., 1988
- [94] Мёллер К. Теория относительности. Атомиздат, М., 1975
- [95] Кулаков Ю.И. Тензорный анализ для физиков (Лекции для студентов НГУ). Новосибирск. 1967 г.

338.

[96] Вейнберг С. *Гравитация и топология. Принципы и приложения общей теории относительности*. Мир, М., 1975

Для связи:

quadrica-m@mail.ru

<http://orcid.org/0000-0002-1435-9220>

Авторский семинар

<http://my.mail.ru/community/physiks.princips/?ref=cat>

<http://quadrica.ucoz.net/>

<https://independent.academia.edu/KasimovVladimir>

<https://vk.com/public128913510>

<https://www.facebook.com/quadrica.m>

