

# Метод описания динамики системы, позволяющий обойти «скрытые параметры»\*

А. А. Демидов

3 декабря 2015 г.

## Аннотация

К двум существующим предлагается 3-й способ описания динамики системы, который предоставляет больше информации, нежели принятый в квантовой механике способ описания с помощью эволюции состояния. В частности, устраняется неопределённость выбора разбиения системы на подсистемы после взаимодействия, что потенциально даёт возможность большей детализации при рассмотрении взаимодействия. Это происходит за счёт пополнения векторов состояния информацией о законе эволюции системы, который известен априори, поэтому эта информация не относится к категории «скрытых параметров».

## 1 3-й способ задания динамики

Состояние классической динамической системы можно описать двумя разными способами:

1. Действительной функцией (или вектором), если эту систему понимать как состояние ограниченной области некоторого поля. Функция  $x \mapsto \phi$  каждому значению координаты ставит в соответствие значение потенциала в этой точке.
2. Двумя действительными функциями (или векторами), если эту систему понимать механистически как совокупность элементарных частей, движущихся на пространственном фоне. Первая функция  $n \mapsto x$ , где  $n \in \mathbb{N}$ , задаёт координаты частей системы, а вторая  $n \mapsto v$  — скорости этих частей.

Динамика классической системы в обоих случаях задаётся как эволюция её состояния в фазовом пространстве в соответствии с некоторым детерминированным законом  $U: x \rightarrow x'$  (будем записывать в виде  $x' = Ux$ ).

В квантовой механике обнаружилось, что 2-й вариант задания состояния избыточен. Если мы знаем координату, то не знаем импульс, и наоборот. То есть состояние системы не содержит столько информации, чтобы описать координату и импульс одновременно.

---

\*Предложенный способ описания динамики системы удивительным образом соответствует формализму программных алгебр Н. Н. Непейводы

Предложим 3-й способ описания динамики системы, который раньше не использовался. Если в 1-м варианте система понималась как область в пространстве, над состоянием  $x$  которой производятся преобразования оператором  $U$ , то мы будем её понимать в активном смысле — как преобразующую саму себя (оператор  $U$  в данном случае становится лишним).

С этой целью произвольным образом разобьём систему на две части  $x = x_a \otimes x_b$  (операция  $\otimes$  означает объединение подсистем в одну систему). И будем считать, что каждой из подсистем в зависимости от её состояния сопоставлена функция  $f_x: X \rightarrow X$ , преобразующую состояния так, чтобы

$$Ux = x' = x'_a \otimes x'_b = f_b(x_a) \otimes f_a(x_b)$$

— здесь можно добавить зависимость от времени, но для простоты записи этого делать не будем так же, как не делали в для оператора  $U$ .

Разные разбиения позволяют задать динамику системы множеством различных способов: ту же систему можно представить в виде  $x = x_c \otimes x_d$  и описать взаимодействие с помощью подсистем  $c$  и  $d$ . Однако как только мы выбрали начальное разбиение, конечное разбиение системы после взаимодействия перестает быть произвольным (его можно варьировать выбором функции  $f_x$ , тем не менее сам этот выбор необходимо сделать).

Будем записывать это преобразование в виде

$$\begin{cases} x'_a = x_a \odot x_b & = f_b(x_a) \\ x'_b = x_b \odot x_a & = f_a(x_b). \end{cases}$$

Другими словами, пусть каждому состоянию подсистемы сопоставлена функция, преобразующую состояние второй подсистемы таким образом, чтобы в совокупности состояние полной системы преобразовывалось так же, как и в результате действия  $x' = Ux$ . Это сопоставление однозначно и не зависит от выбора систем, подсистем и прочего: каждому состоянию  $x$  однозначно ставится в соответствие функция  $f_x$ . Поэтому можно считать, что функция  $f_x$  собственно и задаёт состояние системы, никакие другие параметры для его описания не требуются. По этой причине в дальнейшем мы будем отождествлять состояние системы  $x$  с функцией  $f_x$ .

Таким образом, 3-й способ описания эволюции системы сводится к тому, что каждой подсистеме приписывается некоторая функция, после чего составляющие части системы преобразуют друг друга безо всякого закона  $U$ , заданного извне.

Ещё раз укажем разницу между тремя вариантами описания.

1. Система рассматривается как состояние ограниченной области некоторого поля. Динамика системы — как процесс изменения конфигурации этого поля. Естественно, по динамике возмущений мы не можем установить где какая подсистема находится после взаимодействия.
2. Система рассматривается как набор материальных точек, перемещающихся на пространственном фоне. Это описание даёт возможность отследить перемещение каждой точки в отдельности, поэтому не содержит неопределённости. Но не реализуется на практике.
3. Система рассматривается как состояние ограниченной области некоторого поля, как и в 1-м варианте. Однако закон динамики системы

включается в её описание, что позволяет избежать неопределённости после взаимодействия. И мы можем восстановить расположение подсистем в пространстве после взаимодействия.

## 2 Сравнение полноты описания

Покажем, что 3-й способ описания более полон по сравнению с 1-м. Действительно, если бы подсистемы  $a$  и  $b$  не взаимодействовали друг с другом, их эволюцию можно было бы описать независимо

$$x' = Ux = Ua \otimes Ub.$$

Однако при наличии взаимодействия каждая из подсистем является для другой окружением, влияющим на неё случайным образом, поэтому в этом случае оператор  $U$  стал бы неоднозначным. Поэтому, если мы имеем конечное состояние  $x'$  и заданное нами разбиение начального состояния на подсистемы  $a$  и  $b$ , мы не всегда можем сказать, какой из двух вариантов эволюции реализовался  $x' = x'_a \otimes x'_b$  или  $x' = x'_b \otimes x'_a$  (т.е. после взаимодействия подсистемы могли поменяться местами). Это — *неопределённость*, от которой свободен предложенный 3-й вариант.

**Теорема 2.1.** *Любой способ разбиения итоговой системы на части содержит неопределённость, не позволяющую однозначно задать правила трансформации исходной динамической системы на основе уравнения её эволюции.*

*Доказательство.* Пусть эволюция динамической системы задана уравнением  $x' = Ux$ . Произвольным образом выберем начальное  $x_a \otimes x_b = x$  и конечное  $x'_c \otimes x'_d = x'$  разбиения этой системы. Тогда взаимодействие систем  $x_a$  и  $x_b$  может быть задано одной из двух альтернатив

$$\begin{cases} x'_c = x_a \odot x_b \\ x'_d = x_b \odot x_a \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x'_d = x_a \odot x_b \\ x'_c = x_b \odot x_a, \end{cases}$$

то есть конечное состояние  $x'_c$  определяется в первом случае начальным состоянием  $x_a$  (при воздействии  $x_b$ ), а во втором — состоянием  $x_b$  (при воздействии  $x_a$ ); то же самое верно и для  $x'_d$ .

Поскольку уравнение  $x' = Ux$  справедливо в обоих случаях, оно не даёт оснований предпочесть тот или иной вариант. Поэтому допустимы обе альтернативы, то есть две предыдущие системы уравнений на самом деле определяют многозначные функции

$$\begin{cases} \{x'_c, x'_d\} = x_a \odot x_b \\ \{x'_d, x'_c\} = x_b \odot x_a. \end{cases}$$

Таким образом, имеет место неопределённость, не позволяющая однозначно задать правила трансформации каждой из подсистем.  $\square$

**Теорема 2.2.** *Правила трансформации обратимой динамической системы могут быть однозначно определены.*

*Доказательство.* Рассмотрим динамическую систему, определённую в ходе доказательства теоремы 2.1, переписав правила трансформации в функциональном виде

$$\begin{cases} \{x'_c, x'_d\} = f_b(x_a) \\ \{x'_d, x'_c\} = f_a(x_b). \end{cases}$$

Обратная эволюция  $x = U^{-1}x'$  этой динамической системы задаётся уравнениями

$$\begin{cases} x_a = f_b^{-1}(x'_c) \\ x_a = f_b^{-1}(x'_d) \\ x_b = f_a^{-1}(x'_c) \\ x_b = f_a^{-1}(x'_d). \end{cases}$$

Функции  $f_b^{-1}$  и  $f_a^{-1}$  не могут быть однозначными, поскольку тогда они будут отображать различные аргументы в одинаковый результат, то есть не будут биекциями, что влечёт необратимость эволюции  $x = U^{-1}x'$  и приводит к противоречию. Следовательно, эти функции — многозначные, вида

$$\begin{cases} \{x_a, x_k\} = f_b^{-1}(x'_c) \\ \dots, \end{cases}$$

где  $x_k \in X$  — некоторое состояние.

Поскольку полная система  $x$  является замкнутой, она не взаимодействует со своим окружением. При обращении времени замкнутой является и система  $x'$ , поэтому  $x_k = x_b$ .

Ещё раз обратив время, для прямой эволюции  $x' = Ux$  получим

$$\begin{cases} \{x'_c, x'_d\} = f_b(x_a) \\ \{x'_d, x'_c\} = f_b(x_b) \\ \dots \end{cases}$$

Выражение  $f_b(x_b)$  не зависит от  $x_a$ , в то время как его результат  $\{x'_d, x'_c\}$ , очевидно, зависит. Указанное противоречие доказывает теорему.  $\square$

Описание по 3-му варианту более полно по сравнению с 1-м, поскольку в само состояние включён закон, по которому происходит эволюция системы. А это — дополнительная информация.

Указанный ранее 2-й вариант задания динамики системы, где состояние описывается двумя функциями — координат и скоростей, также позволяет восстановить разбиение системы после взаимодействия. Начальную часть векторов можно отвести под параметры одной подсистемы, конечную — под параметры второй, и это разбиение, естественно, сохраниться и после взаимодействия. Однако, как было указано, данный вариант избыточен и не реализуется в действительности.

Интересно, как поведёт себя 3-й вариант задания состояния при попытке построить квантовую теорию на его основе. Если некоторые функции будут недопустимы, то какие. Состояние системы здесь сводится к композиции состояния подсистем, т.е. тоже является *одной* функцией. И дополнительная информация берётся из известного нам закона эволюции системы, т.е. этой информации как бы нет, и всё же она как бы есть.

В квантовой механике неопределённость устраняется путём измерения. То есть, если формализм содержит внутри себя источник, генерирующий неопределённость, то эту неопределённость нам придётся устранять только с помощью измерения. А он содержит. Как было показано выше, закон эволюции системы можно внести непосредственно в описание состояния, что сразу устраняет неопределённость разбиения на подсистемы после взаимодействия. **Эта информация не является «скрытыми параметрами»**, поскольку не является дополнительной — закон эволюции мы и так знали. С другой стороны, информационное наполнение функций (векторов) состояния возрастает, что потенциально даёт возможность описать и разглядеть взаимодействие более детально.

*Остаётся вопрос, реализуется ли 3-й вариант в действительности, поскольку 2-й вариант, очевидно, не реализуется.*

Несепарабельные состояния образуются в результате взаимодействия подсистем. Как раз там, где предложенный 3-й вариант описания динамики может дать лучшую детализацию.

### 3 Детали 3-го способа описания

Модель взаимодействия динамических систем вполне определяется двумя операциями:

$$\begin{aligned} \otimes: \Psi^2 &\rightarrow \Psi, && \text{«из чего состоит» в пространстве,} \\ \odot: \Psi^2 &\rightarrow \Psi, && \text{«как изменяется» во времени.} \end{aligned} \quad (1)$$

Операция « $\otimes$ » ассоциативна, поскольку свойство «из чего состоит», очевидно, удовлетворяет тождеству  $(\psi_a \otimes \psi_b) \otimes \psi_c = \psi_a \otimes (\psi_b \otimes \psi_c)$ . Но не коммутативна — порядок аргументов важен, поскольку задаёт расположение объектов в координатном пространстве. Об операции « $\odot$ » известно пока только то, что она некоммутативна.

Зададим начальное разбиение детерминированной динамической системы  $\psi \in \Psi$  в координатном пространстве  $X$  так, чтобы она состояла из трёх подсистем следующим образом:  $\psi_a \psi_b \psi_c = \psi$ . Будем попарно объединять эти подсистемы и описывать взаимодействие объединённой подсистемы с оставшейся частью полной динамической системы.

Поскольку результат операции « $\otimes$ » зависит от порядка аргументов, при объединении необходимо следить за тем, в какой системе координат производится данное действие. Для удобства введём унарную операцию  $\neg: \Psi \rightarrow \Psi$  поворота системы координат, связанную с операцией « $\otimes$ » тождеством

$$\neg(\psi_a \psi_b) = \neg\psi_b \neg\psi_a. \quad (2)$$

Объединим подсистемы  $\psi_a \psi_b = \psi_{ab}$ , тогда правила трансформации динамической системы  $\psi_a \psi_b \psi_c = \psi_{ab} \psi_c$  запишутся в виде

$$\begin{cases} \psi'_{ab} = \psi_{ab} \odot \psi_c = \psi_c(\psi_{ab}) \\ \psi'_c = \neg(\neg\psi_c \odot \neg\psi_{ab}) = \neg\psi_{\neg b \neg a}(\psi_{\neg c}). \end{cases}$$

Во втором уравнении появляется операция обращения аргументов, поскольку относительно подсистемы  $\psi_c$ , на которую действует объединённая подсистема, подсистемы  $\psi_a$  и  $\psi_b$  расположены в порядке  $\psi_b, \psi_a$  — именно в таком

порядке и происходит действие. Операция обращения всего выражения отвечает за возврат системы координат в исходное положение.

Теперь объединим подсистемы  $\psi_b\psi_c = \psi_{bc}$ , тогда правила трансформации динамической системы  $\psi_a\psi_b\psi_c = \psi_a\psi_{bc}$  запишутся в виде

$$\begin{cases} \psi'_a = \psi_a \odot \psi_{bc} = \psi_{bc}(\psi_a) \\ \psi'_{bc} = \neg(\neg\psi_{bc} \odot \neg\psi_a) = \neg\psi_{\neg a}(\psi_{\neg c\neg b}). \end{cases}$$

Во втором уравнении также появляется операция обращения аргументов по аналогичной причине: подсистема  $\psi_a$  действует сперва на ближайшую к ней подсистему  $\psi_b$ , и только затем — на  $\psi_c$ . Операция обращения всего выражения отвечает за возврат системы координат в исходное положение.

Поскольку  $\psi'_{ab}\psi'_c = \psi'_a\psi'_{bc} = \psi' = U\psi$ , то можно приравнять правила трансформации первой и второй систем уравнений:

$$\begin{aligned} & ((\psi_a \otimes \psi_b) \odot \psi_c) \otimes \neg(\neg\psi_c \odot (\neg\psi_b \otimes \neg\psi_a)) = \\ & = (\psi_a \odot (\psi_b \otimes \psi_c)) \otimes \neg((\neg\psi_c \otimes \neg\psi_b) \odot \neg\psi_a). \end{aligned}$$

Равенство выполняется, если и только если существует унарная операция  $\alpha: \Psi \rightarrow \Psi$ , связывающая операции « $\odot$ » и « $\otimes$ » тождеством

$$\alpha(\psi_a\psi_b) = \psi_a \odot \psi_b, \quad (3)$$

— тогда равенство можно преобразовать к очевидной форме:

$$\begin{aligned} & \alpha((\psi_a \otimes \psi_b) \otimes \psi_c) \otimes \neg \alpha(\neg\psi_c \otimes (\neg\psi_b \otimes \neg\psi_a)) = \\ & = \alpha(\psi_a \otimes (\psi_b \otimes \psi_c)) \otimes \neg \alpha((\neg\psi_c \otimes \neg\psi_b) \otimes \neg\psi_a). \end{aligned}$$

Унарная операция « $\alpha$ » существенно ограничивает возможный вид операции « $\odot$ », в частности, должно соблюдаться условие

$$(\forall \psi_x, \psi_y \in \Psi) \quad \psi_x\psi_y = \psi_a \rightarrow \psi_x \odot \psi_y = \alpha \psi_a,$$

которое означает, что все решения уравнения  $x \otimes y = \psi_a$  с двумя неизвестными также являются решениями уравнения  $x \odot y = \alpha \psi_a$ . В этом смысле операции « $\otimes$ » и « $\odot$ » эквивалентны с точностью до преобразования масштаба, определяемого операцией « $\alpha$ ». При этом операция « $\odot$ » оказывается, вообще говоря, неассоциативной:

$$(\psi_a \odot \psi_b) \odot \psi_c \neq \psi_a \odot (\psi_b \odot \psi_c),$$

$$\alpha(\alpha(\psi_a\psi_b)\psi_c) \neq \alpha(\psi_a \alpha(\psi_b\psi_c)).$$

Введём формальное обозначение  $\alpha^{-1}\alpha \psi_a = \psi_a$  и перепишем тождество (3) в виде

$$\alpha(\psi_a\psi_b) = \alpha^{-1}\alpha \psi_a \odot \alpha^{-1}\alpha \psi_b,$$

обозначим операцию « $\odot$ » вместе с преобразованием « $\alpha^{-1}$ » обратного масштабирования её аргументов через  $\hat{\odot}: \Psi^2 \rightarrow \Psi$ , тогда станет очевиден изоморфизм

$$\alpha(\psi_a \otimes \psi_b) = \alpha \psi_a \hat{\odot} \alpha \psi_b. \quad (4)$$

Также, после замены переменных  $\psi_a \rightarrow \alpha \psi_a$  и  $\psi_b \rightarrow \alpha \psi_b$  в тождестве (3) и перехода к обозначению  $\tilde{\otimes}: \Psi^2 \rightarrow \Psi$ , объединяющему операцию « $\otimes$ » вместе с преобразованием « $\alpha$ » прямого масштабирования её аргументов, выявляется изоморфизм

$$\alpha (\psi_a \tilde{\otimes} \psi_b) = \alpha \psi_a \odot \alpha \psi_b. \quad (5)$$

Изоморфизмы (4) и (5) связывают пространства времени  $T$  и координат  $X$  преобразованием масштаба, определяемом операцией (3).

Операция « $\otimes$ » — ассоциативна, поэтому полугруппа  $\langle \Psi, \otimes \rangle$  вкладывается в полугруппу трансформаций множества  $\Psi$ . В силу изоморфизма (4) операция « $\odot$ » тождественна операции « $\otimes$ », если все её аргументы переведены в пространство  $T$  преобразованием « $\alpha^{-1}$ ». Следовательно, инъекция  $\xi: \Psi \rightarrow 2^\Psi$  является однозначным гомоморфизмом относительно операции « $\tilde{\otimes}$ ».

**Следствие 3.1.** *Операции « $\otimes$ » и « $\odot$ » являются своего рода проекциями одной операции « $\star$ » на координатное и временное подпространства единого пространства  $\alpha TX$ , и то, «как изменяется» система во времени, полностью определяется тем, «из чего состоит» эта система в пространстве.*