Решение Задачи об N ферзях

Андрея Борисовича Скрыпника (Эл.почта - ansk66@mail.ru)

2017 год

Содержание

1 Формулировка Задачи об N ферзях 1

2 Алгоритм решения Задачи об N ферзях 2
2.1 Первая детализация условий . . . 2
2.2 Вывод 1 . . . 2
2.3 Формулы для исходных условий . . . 2
2.4 Новые понятия для расположения ферзей . . . 2
2.5 Выражение для ферзей . . . 2
2.6 Вторая формулировка задачи . . . 3
2.7 Вторая детализация условий . . . 3
2.7.1 Деление поля по вертикали . . . 3
2.7.2 Деление поля по горизонтали . . . 3
2.8 Особенность новых последовательностей . . . 3
2.9 Вывод 2 . . . 3
2.10 Первый вариант . . . 4
2.11 Второй вариант . . . 4
2.12 Вывод 3 . . . 5
2.13 Вывод 4 . . . 5
2.14 Окончательная формулировка . . . 5
2.15 Первое основное решение . . . 6
2.16 Вторoe основное решение . . . 6
2.17 Третье основное решение . . . 7
2.18 Четвёртое основное решение . . . 8
2.19 Основное решение для N>3 . . . 10
2.20 Дополнительные и производные решения . . . 11
2.20.1 Первое дополнительное решение . . . 11
2.20.2 Второе дополнительное решение . . . 11
2.20.3 Третье дополнительное решение . . . 12
2.20.4 Производные решения . . . 13

1 Формулировка Задачи об N ферзях

Исходная формулировка: Рассчитать алгоритм, позволяющий расставить N ферзей на шахматном поле со сторонами, равными N, где $N \geq 4$, так, чтобы ни один из них не находился под боем другого.

2 Алгоритм решения Задачи об N ферзях

2.1 Первая детализация условий

Согласно условиям при последовательном решении задачи параметр N поочерёдно будет принимать чётные (N_{2M}) и нечётные (N_{2M+1}) значения:

$$N_{2M} = 2 * M, \qquad \text{где } M \geq 2, \tag{1}$$

$$N_{2M+1} = 2 * M + 1, \qquad \text{где } M \geq 2. \tag{2}$$

Пусть, кроме N, даны параметры N_{2M} (1), N_{2M+1} (2) и соответствующие им M.

2.2 Вывод 1

Пусть: x - значение отдельного ферзя по вертикали, y - значение отдельного ферзя по горизонтали.
Согласно условиям в каждом ряду клеток, как по горизонтали, так и по вертикали, должен находиться один ферзь - то есть в задаче задействован каждый ряд клеток, как по горизонтали, так и по вертикали. Следовательно, расположение каждого ферзя по вертикали (x) и по горизонтали (y) для всех ферзей можно представить в виде двух равных последовательностей натуральных чисел:

$$x \in \{x_n \mid n \in \mathbb{N},\ x_n \in \mathbb{N},\ 1 \leq x_n \leq N\}, \tag{3}$$

$$y \in \{y_n \mid n \in \mathbb{N},\ y_n \in \mathbb{N},\ 1 \leq y_n \leq N\}. \tag{4}$$

Из выражений (3) и (4) можно сделать следующий вывод:
Вывод 1: Так как последовательности натуральных чисел $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ совпадают, все вычисления можно выполнять с одной переменной x_n.

2.3 Формулы для исходных условий

Условия размещения ферзей на шахматном поле для последовательностей $\{x_n\}$ (3) и $\{y_n\}$ (4) можно представить так:

$$x_{n1} + y_{n1} \neq x_{n2} + y_{n2}, \quad \text{где} \quad n1 \in \{n \mid 1 \leq n \leq N\}, \quad n2 \in \{n \mid 1 \leq n \leq N\}; \tag{5}$$

$$x_{n1} - y_{n1} \neq x_{n2} - y_{n2}, \quad \text{где} \quad n1 \in \{n \mid 1 \leq n \leq N\}, \quad n2 \in \{n \mid 1 \leq n \leq N\}. \tag{6}$$

2.4 Новые понятия для расположения ферзей

Согласно условиям (2.3) введём новые понятия для сравнения расположения ферзей на шахматном поле:

$$\varSigma = x + y, \tag{7}$$

$$S = x - y. \tag{8}$$

2.5 Выражение для ферзей

С учётом выражений (7), (8) и условий размещения ферзей на шахматном поле (2.3) для каждого ферзя в задаче будет верно следующее выражение:

$$(\varSigma) \wedge x = y + S. \tag{9}$$

2.6 Вторая формулировка задачи

Одну из последовательностей натуральных чисел, характеризующих расположение ферзей по вертикали, $\{x_n\}$ (3), можно представить заранее известной и перевести в условия задачи. В таком случае неизвестной остаётся только последовательность натуральных чисел, характеризующих расположение ферзей по горизонтали, $\{y_n\}$ (4).
Теперь можно уточнить Исходную формулировку:
Вторая формулировка задачи: Расположить последовательность натуральных чисел $\{y_n\}$ вдоль равной последовательности натуральных чисел $\{x_n\}$ так, чтобы выполнялись условия (2.3).
(Примечание ко Второй формулировке задачи: Расположение последовательности натуральных чисел вдоль равной другой означает то, что если первые члены обеих последовательностей совпадают, то и последние их члены будут совпадать. Если первый член второй последовательности соответствует $(N - x_n)$-му члену первой последовательности, то последний член второй последовательности соответствует $(N - (x_n + 1))$-му члену первой последовательности, где $1 \leq x_n \leq N - 2$.)

2.7 Вторая детализация условий

Для решения этой задачи и-за неоднозначности условий (2.3) необходимо последовательности $\{x_n\}$ (3) и $\{y_n\}$ (4) разделить на равные подмножества. Это деление для вертикали и горизонтали должно происходить по различным правилам.

2.7.1 Деление поля по вертикали

Последовательность $\{x_n\}$ (3) разделим на последовательность натуральных чисел до M и последовательность натуральных чисел от $(M + 1)$ до N:

$$x \in \{x_{\leq M} \mid x_{\leq M} \in \mathbb{N},\ 1 \leq x_{\leq M} \leq M\}, \tag{10}$$

$$x \in \{x_{>M} \mid x_{>M} \in \mathbb{N},\ M + 1 \leq x_{>M} \leq N\}. \tag{11}$$

2.7.2 Деление поля по горизонтали

Последовательность натуральных чисел $\{y_n\}$ (4) разделим на последовательность чётных чисел $\{y_{2x}\}$ и последовательность нечётных чисел $\{y_{2x-1}\}$:

$$y \in \{2 * x_n \mid n \in \mathbb{N}, 1 \leq x_n \leq M\}, \tag{12}$$

$$y \in \{2 * x_n - 1 \mid n \in \mathbb{N}, \quad \text{для } N_{2M} : 1 \leq x_n \leq M; \quad \text{для } N_{2M+1} : 1 \leq x_n \leq M + 1\}. \tag{13}$$

2.8 Особенность новых последовательностей

По количеству членов как для N_{2M} (1), так и для N_{2M+1} (2) последовательность $\{x_{\leq M}\}$ (10) равна последовательности $\{y_{2x}\}$ (12), а последовательность $\{x_{>M}\}$ (11) равна последовательности $\{y_{2x-1}\}$ (13). Следовательно в нижней половине шахматного поля ферзи будут размещаться на чётных по горизонтали клетках. В верхней половине шахматного поля ферзи будут размещаться на нечётных по горизонтали клетках.

2.9 Вывод 2

Из выражения для ферзей (9) следует, что только S может принимать как отрицательные, так и положительные значения, а также принимать значение $S = 0$. Но хотя, согласно (8) у N-го количества ферзей количество значений $S_n < 0$ может быть равно $(N - 1)$, условия (2.3) так ограничивают это

количество, что позволяет сделать следующий вывод:
Вывод 2: Для N-го количества ферзей на шахматном поле со сторонами, равными N, количество значений $S_n < 0$ должно быть равно или приблизительно равно количеству значений $S_n \geq 0$ (8).
Учитывая Вывод 2, значение первого члена и шаг последовательности чётных чисел $\{y_{2x}\}$, следует разместить или все значения $S_n < 0$, или абсолютное большинство значений $S_n < 0$ в выражения для ферзей (9), соответствующие известной последовательности натуральных чисел до M $\{x_{\leq M}\}$ (10) или нижней половине шахматного поля. Тогда в выражениях для ферзей, соответствующих известной последовательности натуральных чисел от $(M+1)$ до N $\{x_{>M}\}$ (11) или верхней половине шахматного поля, будут в основном значения $S_n \geq 0$.
В соответствии с тем, что решение задачи начинается с малых величин ($M \geq 2$) (2.1), только два варианта распределения последовательности $\{y_{2x}\}$ (12) вдоль последовательности $\{x_{\leq M}\}$ подходят для решения задачи: первый вариант - когда все выражения для ферзей имеют $S_n < 0$; второй вариант - когда выражение для одного ферзя имеет $S_n \geq 0$.

2.10 Первый вариант

В этом варианте в выражениях для ферзей (9), расположенных в нижней половине шахматного поля, т. е. включающих последовательность $\{x_{\leq M}\}$ (10), есть только значения $S_n < 0$ (8).
Чтобы разместить все значения $S_n < 0$ в выражения для ферзей (9), включающие $\{x_{\leq M}\}$, и чтобы соблюдались условия (2.3), необходимо последовательность чётных чисел $\{y_{2x}\}$ (12) расположить вдоль равной последовательности натуральных чисел $\{x_{\leq M}\}$ так, чтобы первые члены обеих последовательностей совпадали.
Приведём последовательность расположения ферзей в виде выражения (9) в нижней половине шахматного поля, соответствующего последовательности $\{x_{\leq M}\}$. Это выражение и будет первым вариантом для решения задачи:

$$(3 * x_n) \wedge x_n = 2 * x_n + (-x_n), \quad \text{где} \quad 1 \leq n \leq M, \quad 1 \leq x_n \leq M. \tag{14}$$

В выражении (14) есть следующая закономерность для всех ферзей этой последовательности:

$$\Sigma_n = 3 * x_n, \quad \text{где} \;\; 1 \leq x_n \leq M. \tag{15}$$

Так как в данном алгоритме последовательность $\{y_{2x}\}$ располагается вдоль последовательности $\{x_{\leq M}\}$, то для условия (2.3) достаточно, чтобы в случае одного выражения для ферзей (9) в решении задачи все Σ_n принадлежали одному из приведенных ниже множеств:

$$\Sigma_n \in \{3 * x_n \mid x_n \geq 1\}, \tag{16}$$

$$\Sigma_n \in \{3 * x_n + 1 \mid x_n \geq 1\}, \tag{17}$$

$$\Sigma_n \in \{3 * x_n + 2 \mid x_n \geq 1\}. \tag{18}$$

В случае двух или трёх выражений для ферзей в одном решении задачи для условия (2.3) достаточно, чтобы Σ_n этих двух или трёх выражений для ферзей принадлежали разным множествам (16), (17) или (18).

2.11 Второй вариант

В этом варианте в выражениях для ферзей (9), расположенных в нижней половине шахматного поля, т. е. включающих последовательность $\{x_{\leq M}\}$ (10), кроме значений $S_n < 0$ (8) есть одно значение $S_n \geq 0$.
Чтобы соблюдались Вывод 2 и условия (2.3), необходимо последовательность чётных чисел $\{y_{2x}\}$ (12) расположить вдоль равной последовательности натуральных чисел $\{x_{\leq M}\}$ (10) так, чтобы первый член

последовательности $\{y_{2x}\}$ совпадал с последним членом последовательности $\{x_{\leq M}\}$.
Приведём последовательность расположения ферзей в нижней половине шахматного поля, соответствующего последовательности $\{x_{\leq M}\}$, теперь в двух выражениях, которые и будут вторым вариантом для решения задачи:

$$\begin{aligned} &1.\ (3 * x_n + 2) \wedge x_n = (2 * x_n + 2) + (-x_n - 2), \quad \text{где} \quad 1 \leq n \leq M-1, \quad 1 \leq x_n \leq M-1; \\ &2.\ (M+2) \wedge M = 2 + (M-2). \end{aligned} \tag{19}$$

2.12 Вывод 3

В (19) в первом выражении есть следующая закономерность для выражений со значениями $S_n < 0$:

$$\Sigma_n = 3 * x_n + 2, \quad \text{где} \quad 1 \leq n \leq M-1, \quad 1 \leq x_n \leq M-1. \tag{20}$$

Следовательно, так как $(M+2) < (3 * x_n + 2)$ при $x_n = M - 1$, для выполнения условий (2.3) должно соблюдаться следующее неравенство:

$$M + 2 \neq 3 * x_n + 2, \quad \text{где} \quad x_n \geq 1. \tag{21}$$

Выразим из выражения(21) M:

$$M \neq 3 * x_n, \quad \text{где} \quad x_n \geq 1. \tag{22}$$

Из выражения (22) следует вывод:
Вывод 3: Выражения (19) будут вторым вариантом для решения задачи для чётных и нечётных N (N_{2M} и N_{2M+1}) при $M = 3 * x_n + 1$ или $M = 3 * x_n - 1$, где $x_n \geq 1$.

2.13 Вывод 4

Неоднозначность условий (2.3), Вывод 3 и необходимость соблюдения непрерывности последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ в выражениях для ферзей приводят к следующему выводу:
Вывод 4: Для окончательного избавления от неоднозначности условий (2.3) при решении задачи натуральный ряд $N \geq 4$ необходимо разделить не только на последовательности чётных (N_{2M}) и нечётных (N_{2M+1}) чисел (2.1), но и по следующим значениям M данного N:

$$M \in \{3 * x_n \mid x_n \geq 1\}, \tag{23}$$

$$M \in \{3 * x_n + 1 \mid x_n \geq 1\}, \tag{24}$$

$$M \in \{3 * x_n - 1 \mid x_n \geq 1\}. \tag{25}$$

2.14 Окончательная формулировка

Из-за малого количества вариантов выражения первого (14) и второго (19) вариантов (при условии соответствия выражений (19) Выводу 3) можно перевести в условия задачи. То есть требуется следующее уточнение:
Окончательная формулировка: При данных в (14) или (19) выражениях для ферзей в нижней половине шахматного поля до $x = M$ расположить последовательность нечётных чисел $\{y_{2x-1}\}$ (13) в верхней половине поля вдоль последовательности натуральных чисел от $M + 1$ до N ($\{x_{>M}\}$) так, чтобы выполнялись условия (2.3).

2.15 Первое основное решение

Теперь можно приступить к решению задачи согласно Вывода 4. Рассмотрим последовательность $\{x_{>M}\}$ (11) при условии первого варианта (14) для чётных N_{2M} (1).
В первом варианте (14) собраны все значения $S < 0$. Чтобы в выражениях для ферзей (9) в верхней половине шахматного поля, т. е. с последовательностью $\{x_{>M}\}$, были только $S \geq 0$, необходимо совпадение первых членов последовательностей $\{x_{>M}\}$ и $\{y_{2x-1}\}$ (13).
Приведём последовательность расположения ферзей в верхней половине шахматного поля в виде выражения для ферзей (9), соответствующего последовательности $\{x_{>M}\}$:

$$\begin{gathered}(3*x_n - 2*M - 1) \wedge x_n = (2*x_n - 2*M - 1) + (2*M - x_n + 1),\\ \text{где} \quad M+1 \leq n \leq 2*M, \quad M+1 \leq x_n \leq 2*M.\end{gathered} \tag{26}$$

Так как в выражении (14) $\Sigma_n = 3*x_n$, где $1 \leq x_n \leq M$, возможно совпадение Σ_n у последних членов выражения для ферзей (14) с Σ_n у первого члена выражения для ферзей (26).
Следовательно для выполнения условий (2.3) должно соблюдаться следующее неравенство:

$$3*(M+1) - 2*M - 1 \neq 3*x_n, \quad \text{где} \quad 1 \leq x_n \leq M \tag{27}$$

Выразим из (27) условие для M:

$$M \neq 3*x_n - 2 = 3*(x_n - 1) + 1, \quad \text{где} \quad x_n \geq 2. \tag{28}$$

Следовательно, должно быть $M \in \{3*x_n \mid x_n \geq 1\}$ или $M \in \{3*x_n - 1 \mid x_n \geq 1\}$ (см. Вывод 4).
При сложении выражений (26) и(14) получим выражения для ферзей для всего шахматного поля:

$$\begin{gathered}1.\ (3*x_n) \wedge x_n = 2*x_n + (-x_n), \quad \text{где} \quad 1 \leq n \leq M, \quad 1 \leq x_n \leq M;\\ 2.\ (3*x_n - 2*M - 1) \wedge x_n = (2*x_n - 2*M - 1) + (2*M - x_n + 1),\\ \text{где} \quad M+1 \leq n \leq 2*M, \quad M+1 \leq x_n \leq 2*M.\end{gathered} \tag{29}$$

Убрав из выражений для ферзей (29) Σ_n и S_n, получим **Первое основное решение** задачи для чётных N_{2M} (1) с $M \in \{3*x_n \mid x_n \geq 1\}$ или $M \in \{3*x_n - 1 \mid x_n \geq 1\}$, где x_n - значение ферзей по вертикали, y_n - значение ферзей по горизонтали:

$$\begin{aligned}&1.\ y_n = 2*x_n, \quad \text{где} \quad 1 \leq n \leq M, \quad 1 \leq x_n \leq M;\\ &2.\ y_n = 2*x_n - 2*M - 1, \quad \text{где} \quad M+1 \leq n \leq 2*M, \quad M+1 \leq x_n \leq 2*M.\end{aligned} \tag{30}$$

2.16 Второе основное решение

Теперь рассмотрим последовательность $\{x_{>M}\}$ (11) при условии первого варианта (14) для нечётных N_{2M+1} (2).
Из-за условия только $S \geq 0$ в выражениях для ферзей снова необходимо, чтобы первые члены последовательностей $\{x_{>M}\}$ и $\{y_{2x-1}\}$ (13) совпадали.
Приведём последовательность расположения ферзей в верхней половине шахматного поля в виде выражения для ферзей (9), соответствующего последовательности $\{x_{>M}\}$:

$$\begin{gathered}(3*x_n - 2*M - 1) \wedge x_n = (2*x_n - 2*M - 1) + (2*M - x_n + 1),\\ \text{где} \quad M+1 \leq n \leq 2*M+1, \quad M+1 \leq x_n \leq 2*M+1.\end{gathered} \tag{31}$$

Выражение (31) отличается от (26) только добавлением последнего члена с $x = 2*M+1$ и $y = 2*M+1$. У него $S = 0$. Для выражения (31) также верно условие (28).

При сложении выражений (31) и (14) получим выражения для ферзей для всего шахматного поля:

$$\begin{aligned}&1.\ (3*x_n)\wedge x_n = 2*x_n + (-x_n), \quad \text{где} \quad 1 \le n \le M, \quad 1 \le x_n \le M;\\&2.\ (3*x_n - 2*M - 1)\wedge x_n = (2*x_n - 2*M - 1) + (2*M - x_n + 1),\\&\quad \text{где} \quad M+1 \le n \le 2*M+1, \quad M+1 \le x_n \le 2*M+1.\end{aligned} \tag{32}$$

Убрав из выражений для ферзей (32) Σ_n и S_n, получим **Второе основное решение** задачи для нечётных N_{2M+1} (2) с $M \in \{3*x_n \mid x_n \ge 1\}$ или $M \in \{3*x_n - 1 \mid x_n \ge 1\}$, где x_n - значение ферзей по вертикали, y_n- значение ферзей по горизонтали:

$$\begin{aligned}&1.\ y_n = 2*x_n \quad \text{где} \quad 1 \le n \le M, \quad 1 \le x_n \le M;\\&2.\ y_n = 2*x_n - 2*M - 1, \quad \text{где} \quad M+1 \le n \le 2*M+1, \quad M+1 \le x_n \le 2*M+1.\end{aligned} \tag{33}$$

2.17 Третье основное решение

Из-за условия (28) и Вывода 3 для чётных N_{2M} (1) и нечётных N_{2M+1} (2) с $M \in \{3*x_n + 1 \mid x_n \ge 1\}$ условием задачи будет второй вариант (19).
Рассмотрим выражения для ферзей (9) с последовательностью $\{x_{>M}\}$ (11) при условии (19) для чётных N_{2M}. Так как в (19) есть одно выражение для ферзей с положительной $S_n = M - 2$, а отрицательные $S_n \le -3$, необходимо чтобы в выражениях для ферзей с последовательностью $\{x_{>M}\}$ были значения отрицательных $0 > S_n > -3$. Для максимального $y_n = 2*M - 1$ есть лишь два варианта взаимного расположения последовательностей $\{x_{>M}\}$ и $\{y_{2x+1}\}$ (13).

Приведём последовательность расположения ферзей в верхней половине шахматного поля в виде выражений для ферзей (9), соответствующих последовательности $\{x_{>M}\}$ с одним отрицательным значением $S_n = -1$:

$$\begin{aligned}&1.\ (3*x_n - 2*M + 3)\wedge x_n = (2*x_n - 2*M + 3) + (2*M - x_n - 3),\\&\quad \text{где} \quad M+1 \le n \le 2*M-2, \quad M+1 \le x_n \le 2*M-2;\\&2.\ (3*x_n - 2*M - 5)\wedge x_n = (2*x_n - 2*M - 5) + (2*M - x_n + 5),\\&\quad \text{где} \quad 2*M-1 \le n \le 2*M, \quad 2*M-1 \le x_n \le 2*M.\end{aligned} \tag{34}$$

Наименьшие Σ_n как первого, так и второго выражения (34) при замене x_n на M будут больше $\Sigma_n = M+2$ последнего выражения (19):

$$3*x_n - 2*M + 3 = 3*M + 3 - 2*M + 3 = M + 6 > M + 2, \quad \text{где} \quad M \ge 4; \tag{35}$$

$$3*x_n - 2*M - 5 = 3*M - 3 - 2*M - 5 = 4*M - 8 > M + 2, \quad \text{где} \quad M \ge 4. \tag{36}$$

Обозначим здесь x_n выражений (19) как x_{n1}. Так как у первого выражения (19) $\Sigma_n = 3*x_{n1} + 2$, выясним к какому из множеств (16), (17) или (18) принадлежат Σ_n первого и второго выражений (34), подставив для этого в выражения Σ_n значение $M = 3*x_{n1} + 1$, где $x_{n1} \ge 1$ из условия (2.17):

$$3*x_n - 2*M + 3 = 3*(x_n - 2*x_{n1}) + 1, \quad \text{где} \quad M+1 \le x_n \le 2*M-2, \quad x_{n1} \ge 1; \tag{37}$$

$$3*x_n - 2*M - 5 = 3*(x_n - 2*x_{n1} - 3) + 2, \quad \text{где} \quad 2*M-1 \le x_n \le 2, \quad x_{n1} \ge 1. \tag{38}$$

Σ_n первого выражения (19) и Σ_n (38) принадлежат одному множеству (18), Σ_n (37) принадлежат множеству (17). Сравним наименьший Σ_n (38) и наибольший Σ_n первого выражения (19), выразив их через M:

$$3*x_n - 2*M - 5 = 4*(M-2) < 3*x_{n1} + 2 = 3*(M-1) + 2, \quad \text{где} \quad 4 \le M \le 7. \tag{39}$$

Σ_n (38) при $M < 8$ будут совпадать с Σ_n первого выражения (19). Условия (2.3) не соблюдаются и выражения для ферзей (34) не могут быть решением задачи.

Приведём последовательность расположения ферзей в верхней половине шахматного поля в виде выражений для ферзей (9), соответствующих последовательности $\{x_{>M}\}$ с двумя отрицательными значениями $S_n \geq -2$:

$$\begin{aligned}
&1.\ (3*x_n-2*M+5)\wedge x_n=(2*x_n-2*M+5)+(2*M-x_n-5),\\
&\quad \text{где}\quad M+1\leq n\leq 2*M-3,\quad M+1\leq x_n\leq 2*M-3;\\
&2.\ (3*x_n-2*M-3)\wedge x_n=(2*x_n-2*M-3)+(2*M-x_n+3),\\
&\quad \text{где}\quad 2*M-2\leq n\leq 2*M,\quad 2*M-2\leq x_n\leq 2*M.
\end{aligned} \tag{40}$$

Наименьшие Σ_n как первого, так и второго выражения (40) при замене x_n на M будут больше $\Sigma_n = M+2$ последнего выражения (19):

$$3*x_n-2*M+5=3*M+3-2*M+5=M+8>M+2,\quad \text{где}\quad M\geq 4; \tag{41}$$

$$3*x_n-2*M-3=3*M-3-2*M-3=4*M-9>M+2,\quad \text{где}\quad M\geq 4. \tag{42}$$

Обозначим здесь x_n выражений (19) как x_{n1}. Так как у первого выражения (19) $\Sigma_n = 3*x_{n1}+2$, выясним к какому из множеств (16), (17) или (18) принадлежат Σ_n первого и второго выражений (40), подставив для этого в выражения Σ_n значение $M = 3*x_{n1}+1$, где $x_{n1} \geq 1$ из условия (2.17):

$$3*x_n-2*M+5=3*(x_n-2*x_{n1}+1),\quad \text{где}\quad M+1\leq x_n\leq 2*M-3,\quad x_{n1}\geq 1; \tag{43}$$

$$3*x_n-2*M-3=3*(x_n-2*x_{n1}-2)+1,\quad \text{где}\quad 2*M-2\leq x_n\leq 2*M,\quad x_{n1}\geq 1. \tag{44}$$

Σ_n первого выражения (19) принадлежат множеству (18), Σ_n (43) принадлежат множеству (16), а Σ_n (44) принадлежат множеству (17). То есть все условия для решения задачи соблюдаются.
При сложении выражений (40) и (19) получим выражения для ферзей для всего шахматного поля:

$$\begin{aligned}
&1.\ (3*x_n+2)\wedge x_n=(2*x_n+2)+(-x_n-2),\quad \text{где}\quad 1\leq n\leq M-1,\quad 1\leq x_n\leq M-1;\\
&2.\ (M+2)\wedge M=2+(M-2);\\
&3.\ (3*x_n-2*M+5)\wedge x_n=(2*x_n-2*M+5)+(2*M-x_n-5),\\
&\quad \text{где}\quad M+1\leq n\leq 2*M-3,\quad M+1\leq x_n\leq 2*M-3;\\
&4.\ (3*x_n-2*M-3)\wedge x_n=(2*x_n-2*M-3)+(2*M-x_n+3),\\
&\quad \text{где}\quad 2*M-2\leq n\leq 2*M,\quad 2*M-2\leq x_n\leq 2*M.
\end{aligned} \tag{45}$$

Убрав из выражений для ферзей (45) Σ_n и S_n, получим **Третье основное решение** задачи для чётных N_{2M} (1) с $M \in \{3*x_n+1 \mid x_n \geq 1\}$, где x_n - значение ферзей по вертикали, y_n - значение ферзей по горизонтали:

$$\begin{aligned}
&1.\ y_n=2*x_n+2,\quad \text{где}\quad 1\leq n\leq M-1,\quad 1\leq x_n\leq M-1;\\
&2.\ y_n=2;\quad \text{при}\quad x_n=M;\\
&3.\ y_n=2*x_n-2*M+5,\quad \text{где}\quad M+1\leq n\leq 2*M-3,\quad M+1\leq x_n\leq 2*M-3;\\
&4.\ y_n=2*x_n-2*M-3,\quad \text{где}\quad 2*M-2\leq n\leq 2*M,\quad 2*M-2\leq x_n\leq 2*M.
\end{aligned} \tag{46}$$

2.18 Четвёртое основное решение

Рассмотрим выражения для ферзей (9) с последовательностью $\{x_{>M}\}$ (11) при условии (19) для нечётных N_{2M+1} (2) с $M \in \{3*x_n+1 \mid x_n \geq 1\}$.

Вычисление здесь такое же, как в (2.17). Необходимо чтобы в выражениях для ферзей с последовательностью $\{x_{>M}\}$ были значения отрицательных $0 > S_n > -3$. Для максимального $y_n = 2*M+1$ есть лишь два варианта взаимного расположения последовательностей $\{x_{>M}\}$ и $\{y_{2x+1}\}$ (13).

Приведём последовательность расположения ферзей в верхней половине шахматного поля в виде выражений для ферзей (9) , соответствующих последовательности $\{x_{>M}\}$ с одним отрицательным значением $S_n = -1$:

$$\begin{aligned} &1.\ (3*x_n - 2*M+1) \wedge x_n = (2*x_n - 2*M+1) + (2*M - x_n - 1), \\ &\quad \text{где} \quad M+1 \le n \le 2*M, \quad M+1 \le x_n \le 2*M; \\ &2.\ (2*M+2) \wedge 2*M+1 = 1 + 2*M. \end{aligned} \tag{47}$$

Наименьшие Σ_n первого выражения (47) при замене x_n на M, и второго выражения (47) будут больше $\Sigma_n = M+2$ последнего выражения (19):

$$3*x_n - 2*M+1 = 3*M+3-2*M+1 = M+4 > M+2; \tag{48}$$

$$2*M+2 > M+2. \tag{49}$$

Обозначим здесь x_n выражений (19) как x_{n1}. Так как у первого выражения (19) $\Sigma_n = 3*x_{n1}+2$, выясним к какому из множеств (16), (17) или (18) принадлежат Σ_n первого и второго выражений (47), подставив для этого в выражения Σ_n значение $M = 3*x_{n1}+1$, где $x_{n1} \ge 1$ из условия (2.18):

$$3*x_n - 2*M+1 = 3*(x_n - 2*x_{n1} - 1) + 2, \quad \text{где} \quad M+1 \le x_n \le 2*M, \quad x_{n1} \ge 1; \tag{50}$$

$$2*M+2 = 3*(2*x_{n1}+1)+1, \quad \text{где} \quad x_{n1} \ge 1. \tag{51}$$

Σ_n (50) и Σ_n первого выражения (19) принадлежат одному множеству (18), Σ_n (51) принадлежат множеству (17). Сравним наименьший Σ_n (50) и наибольший Σ_n первого выражения (19), выразив их через M:

$$3*x_n - 2*M+1 = M+4 < 3*x_{n1}+2 = 3*(M-1)+2, \quad \text{где} \quad M \ge 4. \tag{52}$$

Σ_n (50) всегда будут совпадать с Σ_n первого выражения (19). Условия (2.3) не соблюдаются и выражения для ферзей (47) не могут быть решением задачи.

Приведём последовательность расположения ферзей в верхней половине шахматного поля в виде выражений для ферзей (9), соответствующих последовательности $\{x_{>M}\}$ с двумя отрицательными значениями $S_n \ge -2$:

$$\begin{aligned} &1.\ (3*x_n - 2*M+3) \wedge x_n = (2*x_n - 2*M+3) + (2*M - x_n - 3), \\ &\quad \text{где} \quad M+1 \le n \le 2*M-1, \quad M+1 \le x_n \le 2*M-1; \\ &2.\ (3*x_n - 2*M-7) \wedge x_n = (2*x_n - 2*M-7) + (2*M - x_n + 7), \\ &\quad \text{где} \quad 2*M \le n \le 2*M+1, \quad 2*M \le x_n \le 2*M+1. \end{aligned} \tag{53}$$

Наименьшие Σ_n первого и второго выражения (53) при замене x_n на M будут больше $\Sigma_n = M+2$ последнего выражения (19):

$$3*x_n - 2*M+3 = 3*M+3-2*M+3 = M+6 > M+2; \tag{54}$$

$$3*x_n - 2*M-7 = 3*2*M-3-2*M-7 = 4*M-7 > M+2, \quad \text{где} \quad M \ge 4. \tag{55}$$

Обозначим здесь x_n выражений (19) как x_{n1}. Так как у первого выражения (19) $\Sigma_n = 3*x_{n1}+2$, выясним к какому из множеств (16), (17) или (18) принадлежат Σ_n первого и второго выражений (53), подставив для этого в выражения Σ_n значение $M = 3*x_{n1}+1$, где $x_{n1} \ge 1$ из условия (2.18):

$$3*x_n - 2*M+3 = 3*(x_n - 2*x_{n1}) + 1, \quad \text{где} \quad M+1 \le x_n \le 2*M-1, \quad x_{n1} \ge 1; \tag{56}$$

$$3 * x_n - 2 * M - 7 = 3 * (x_n - 2 * x_{n1} - 3), \quad \text{где} \quad 2 * M \le x_n \le 2 * M + 1, \quad x_{n1} \ge 1. \tag{57}$$

Σ_n первого выражения (19) принадлежат множеству (18), Σ_n (56) принадлежат множеству (17), а Σ_n (57) принадлежат множеству (16). То есть все условия для решения задачи соблюдаются.
При сложении выражений (53) и (19) получим выражения для ферзей для всего шахматного поля:

$$\begin{aligned}
&1.\ (3 * x_n + 2) \wedge x_n = (2 * x_n + 2) + (-x_n - 2), \quad \text{где} \quad 1 \le n \le M - 1, \quad 1 \le x_n \le M - 1;\\
&2.\ (M + 2) \wedge M = 2 + (M - 2);\\
&3.\ (3 * x_n - 2 * M + 3) \wedge x_n = (2 * x_n - 2 * M + 3) + (2 * M - x_n - 3),\\
&\quad \text{где} \quad M + 1 \le n \le 2 * M - 1, \quad M + 1 \le x_n \le 2 * M - 1;\\
&4.\ (3 * x_n - 2 * M - 7) \wedge x_n = (2 * x_n - 2 * M - 7) + (2 * M - x_n + 7),\\
&\quad \text{где} \quad 2 * M \le n \le 2 * M + 1, \quad 2 * M \le x_n \le 2 * M + 1.
\end{aligned} \tag{58}$$

Убрав из выражений для ферзей (58) Σ_n и S_n, получим **Четвёртое основное решение** задачи для нечётных N_{2M+1} (2) с $M \in \{3 * x_n + 1 \mid x_n \ge 1\}$, где x_n - значение ферзей по вертикали, y_n - значение ферзей по горизонтали:

$$\begin{aligned}
&1.\ y_n = 2 * x_n + 2, \quad \text{где} \quad 1 \le n \le M - 1, \quad 1 \le x_n \le M - 1;\\
&2.\ y_n = 2; \quad \text{при} \quad x_n = M;\\
&3.\ y_n = 2 * x_n - 2 * M + 3, \quad \text{где} \quad M + 1 \le n \le 2 * M - 1, \quad M + 1 \le x_n \le 2 * M - 1;\\
&4.\ y_n = 2 * x_n - 2 * M - 7, \quad \text{где} \quad 2 * M \le n \le 2 * M + 1, \quad 2 * M \le x_n \le 2 * M + 1.
\end{aligned} \tag{59}$$

2.19 Основное решение для N>3

N-ое количество ферзей на шахматном поле со сторонами, равными N, где $N \ge 4$, расставляется при помощи набора **Четырёх основных решений**:
1) Для $N = 2 * M$ с $M \in \{3 * x_n \mid x_n \ge 1\}$ или $M \in \{3 * x_n - 1 \mid x_n \ge 1\}$, где x_n - значение ферзей по вертикали, y_n - значение ферзей по горизонтали:

$$\begin{aligned}
&1.\ y_n = 2 * x_n, \quad \text{где} \quad 1 \le n \le M, \quad 1 \le x_n \le M;\\
&2.\ y_n = 2 * x_n - 2 * M - 1, \quad \text{где} \quad M + 1 \le n \le 2 * M, \quad M + 1 \le x_n \le 2 * M.
\end{aligned} \tag{60}$$

2) Для $N = 2 * M + 1$ с $M \in \{3 * x_n \mid x_n \ge 1\}$ или $M \in \{3 * x_n - 1 \mid x_n \ge 1\}$, где x_n - значение ферзей по вертикали, y_n - значение ферзей по горизонтали:

$$\begin{aligned}
&1.\ y_n = 2 * x_n \quad \text{где} \quad 1 \le n \le M, \quad 1 \le x_n \le M;\\
&2.\ y_n = 2 * x_n - 2 * M - 1, \quad \text{где} \quad M + 1 \le n \le 2 * M + 1, \quad M + 1 \le x_n \le 2 * M + 1.
\end{aligned} \tag{61}$$

3) Для $N = 2 * M$ с $M \in \{3 * x_n + 1 \mid x_n \ge 1\}$, где x_n - значение ферзей по вертикали, y_n - значение ферзей по горизонтали:

$$\begin{aligned}
&1.\ y_n = 2 * x_n + 2, \quad \text{где} \quad 1 \le n \le M - 1, \quad 1 \le x_n \le M - 1;\\
&2.\ y_n = 2; \quad \text{при} \quad x_n = M;\\
&3.\ y_n = 2 * x_n - 2 * M + 5, \quad \text{где} \quad M + 1 \le n \le 2 * M - 3, \quad M + 1 \le x_n \le 2 * M - 3;\\
&4.\ y_n = 2 * x_n - 2 * M - 3, \quad \text{где} \quad 2 * M - 2 \le n \le 2 * M, \quad 2 * M - 2 \le x_n \le 2 * M.
\end{aligned} \tag{62}$$

4) Для $N = 2 * M + 1$ с $M \in \{3 * x_n + 1 \mid x_n \ge 1\}$, где x_n - значение ферзей по вертикали, y_n - значение ферзей по горизонтали:

$$\begin{aligned}
&1.\ y_n = 2 * x_n + 2, \quad \text{где} \quad 1 \le n \le M - 1, \quad 1 \le x_n \le M - 1;\\
&2.\ y_n = 2; \quad \text{при} \quad x_n = M;\\
&3.\ y_n = 2 * x_n - 2 * M + 3, \quad \text{где} \quad M + 1 \le n \le 2 * M - 1, \quad M + 1 \le x_n \le 2 * M - 1;\\
&4.\ y_n = 2 * x_n - 2 * M - 7, \quad \text{где} \quad 2 * M \le n \le 2 * M + 1, \quad 2 * M \le x_n \le 2 * M + 1.
\end{aligned} \tag{63}$$

Таким образом, если необходимо решение **Задачи о восьми ферзях** для последовательности натуральных чисел $N \geq 4$, основное решение состоит в последовательном применении следующего алгоритма:

1.	**Первое основное решение** (60)
2.	**Второе основное решение** (61)
3.	**Первое основное решение** (60)
4.	**Второе основное решение** (61)
5.	**Третье основное решение** (62)
6.	**Четвёртое основное решение** (63)

2.20 Дополнительные и производные решения

Для решения задачи набор **Четырёх основных решений** является самым простым и исчерпывающим алгоритмом. Но существует ещё набор дополнительных решений, дублирующих более простые основные решения или имеющих дополнительные условия.

2.20.1 Первое дополнительное решение

В (2.12) в Выводе 3 сказано, что второй вариант (19) может быть условием решения задачи для N с $M = 3 * x_n - 1$, где $x_n \geq 1$. Но для такого M подходят и более удобные **Первое** (30) и **Второе** (33) **основные решения**. Путём приведенных в (2.17) и (2.18) вычислений для **Третьего** (46) и **Четвёртого** (59) **основных решений** можно вычислить, что **Третье основное решение** задачи (46) для чётных N_{2M} (1) с $M \in \{3 * x_n + 1 \mid x_n \geq 1\}$ является ещё и **Первым дополнительным решением** задачи для чётных N_{2M} с $M \in \{3 * x_n - 1 \mid x_n \geq 1\}$.

2.20.2 Второе дополнительное решение

В (2.17) было сказано, что из-за условия (28) для чётных N_{2M} (1) с $M \in \{3 * x_n + 1 \mid x_n \geq 1\}$ условием решения задачи будет второй вариант (19).
Но если к условию $M \in \{3 * x_n + 1 \mid x_n \geq 1\}$ добавить условие $M \in \{2 * x_{n1} \mid x_{n1} \geq 2\}$, то можно вернуться к первому варианту (14). Вернёмся и к **Первому основному решению** задачи (30).
Сначала вычислим дополнительное условие для этого решения:

$$M = 2 * x_{n1} = 3 * x_{n2} + 1 = 3 * (2x_n - 1) + 1, \quad \text{где} \quad x_n \geq 1, \quad x_{n2} = 2 * x_n - 1. \tag{64}$$

Последовательность нечётных чисел $\{y_{2x-1}\}$ (13), первый член которой совпадает с первым членом последовательности $\{x_{>M}\}$ (11), на всём протяжении разобьём на пары. Внутри каждой пары разменяем $y_{(2x-1)1}$ и $y_{(2x-1)2}$.
Приведём выражения для ферзей (9) в верхней половине шахматного поля, соответствующей последовательности $\{x_{>M}\}$:

$$\begin{aligned}
&1.\ (3 * x_n - 2 * M + 1) \wedge x_n = (2 * x_n - 2 * M + 1) + (2 * M - x_n - 1),\\
&\quad \text{где} \quad n \in \{M + (2 * x_{n3} - 1) \mid 1 \leq x_{n3} \leq (M/2)\},\\
&\quad\quad x_n \in \{M + (2 * x_{n3} - 1) \mid 1 \leq x_{n3} \leq (M/2)\};\\
&2.\ (3 * x_n - 2 * M + 3) \wedge x_n = (2 * x_n - 2 * M - 3) + (2 * M - x_n + 3),\\
&\quad \text{где} \quad n \in \{M + (2 * x_{n3}) \mid 1 \leq x_{n3} \leq (M/2)\},\\
&\quad\quad x_n \in \{M + (2 * x_{n3}) \mid 1 \leq x_{n3} \leq (M/2)\}.
\end{aligned} \tag{65}$$

Значения Σ_n в (65) совпадают со значениями Σ_n в ранее проведенных вычислениях. Согласно (50), Σ_n первого выражения (65) принадлежат множеству (18). Согласно (37), Σ_n второго выражения (65)

принадлежат множеству (17). Σ_n (14) принадлежат множеству (16). То есть все условия для решения задачи соблюдаются.
При сложении выражений (65) и (14) получим выражения для ферзей для всего шахматного поля:

$$\begin{aligned}
&1.\ (3*x_n) \wedge x_n = 2*x_n + (-x_n), \quad \text{где} \quad 1 \le n \le M, \quad 1 \le x_n \le M;\\
&2.\ (3*x_n - 2*M+1) \wedge x_n = (2*x_n - 2*M+1) + (2*M - x_n - 1),\\
&\qquad \text{где} \quad n \in \{M + (2*x_{n3} - 1) \mid 1 \le x_{n3} \le (M/2)\},\\
&\qquad\quad x_n \in \{M + (2*x_{n3} - 1) \mid 1 \le x_{n3} \le (M/2)\};\\
&3.\ (3*x_n - 2*M+3) \wedge x_n = (2*x_n - 2*M-3) + (2*M - x_n + 3),\\
&\qquad \text{где} \quad n \in \{M + (2*x_{n3}) \mid 1 \le x_{n3} \le (M/2)\},\\
&\qquad\quad x_n \in \{M + (2*x_{n3}) \mid 1 \le x_{n3} \le (M/2)\}.
\end{aligned} \tag{66}$$

Убрав из выражений для ферзей (66) Σ_n и S_n, получим **Второе дополнительное решение** задачи для чётных N_{2M} (1) с $M \in \{3*(2*x_n - 1) + 1 \mid x_n \ge 1\}$, где x_n - значение ферзей по вертикали, y_n - значение ферзей по горизонтали:

$$\begin{aligned}
&1.\ y_n = 2*x_n, \quad \text{где} \quad 1 \le n \le M, \quad 1 \le x_n \le M;\\
&2.\ y_n = 2*x_n - 2*M + 1,\\
&\qquad \text{где} \quad n \in \{M + (2*x_{n3} - 1) \mid 1 \le x_{n3} \le (M/2)\},\\
&\qquad\quad x_n \in \{M + (2*x_{n3} - 1) \mid 1 \le x_{n3} \le (M/2)\};\\
&3.\ y_n = 2*x_n - 2*M - 3,\\
&\qquad \text{где} \quad n \in \{M + (2*x_{n3}) \mid 1 \le x_{n3} \le (M/2)\},\\
&\qquad\quad x_n \in \{M + (2*x_{n3}) \mid 1 \le x_{n3} \le (M/2)\}.
\end{aligned} \tag{67}$$

Для нечётных N_{2M+1} (2) при этих условиях задача не имеет решения из-за приведенного в (2.16) условия только $S \ge 0$ в выражениях для ферзей (9), соответствующих последовательности $\{x_{>M}\}$ (11).

2.20.3 Третье дополнительное решение

В (2.17) было сказано, что последовательность расположения ферзей в верхней половине шахматного поля в виде выражений для ферзей (9), соответствующих последовательности $\{x_{>M}\}$ с одним отрицательным значением $S_n = -1$ не может быть решением задачи из-за того, что Σ_n(38) при $M < 8$ будут совпадать с Σ_n первого выражения (19). Следовательно, при $M \ge 8$ условия для решения задачи будут соблюдаться.
При сложении выражений (34) и (19) получим выражения для ферзей для всего шахматного поля:

$$\begin{aligned}
&1.\ (3*x_n + 2) \wedge x_n = (2*x_n + 2) + (-x_n - 2), \quad \text{где} \quad 1 \le n \le M-1, \quad 1 \le x_n \le M-1;\\
&2.\ (M+2) \wedge M = 2 + (M-2);\\
&3.\ (3*x_n - 2*M+3) \wedge x_n = (2*x_n - 2*M+3) + (2*M - x_n - 3),\\
&\qquad \text{где} \quad M+1 \le n \le 2*M-2, \quad M+1 \le x_n \le 2*M-2;\\
&4.\ (3*x_n - 2*M-5) \wedge x_n = (2*x_n - 2*M-5) + (2*M - x_n + 5),\\
&\qquad \text{где} \quad 2*M-1 \le n \le 2*M, \quad 2*M-1 \le x_n \le 2*M.
\end{aligned} \tag{68}$$

Убрав из выражений для ферзей (68) Σ_n и S_n, получим **Третье дополнительное решение** задачи для чётных N_{2M} (1) с $M \in \{3*x_n + 1 \mid x_n \ge 3\}$, где x_n - значение ферзей по вертикали, y_n - значение ферзей по горизонтали:

$$\begin{aligned}
&1.\ y_n = 2*x_n + 2, \quad \text{где} \quad 1 \le n \le M-1, \quad 1 \le x_n \le M-1;\\
&2.\ y_n = 2; \quad \text{при} \quad x_n = M;\\
&3.\ y_n = 2*x_n - 2*M + 3, \quad \text{где} \quad M+1 \le n \le 2*M-2, \quad M+1 \le x_n \le 2*M-2;\\
&4.\ y_n = 2*x_n - 2*M - 5, \quad \text{где} \quad 2*M-1 \le n \le 2*M, \quad 2*M-1 \le x_n \le 2*M.
\end{aligned} \tag{69}$$

2.20.4 Производные решения

Решения названы так, потому что они являются производными от основных и дополнительных решений задачи. Основаны они на том, что при соответствии определённому x_n для соседних y_n одного из множеств Σ_n (16), (17) или (18) верно выражение:

$$y_{n1} = y_{n2} \pm 6. \tag{70}$$

Следовательно, в готовых выражениях для ферзей основных или дополнительных решений можно выбрать такие y_n, разность между которыми будет равна 6, и разменять их. При этом необходимо выполнить дополнительные вычисления, чтобы у каждого выражения для ферзей (9) был уникальный набор Σ_n, x_n, y_n и S_n. Так для выражений (45) **производное решение** получится при размене $y_n = 9$ и $y_n = 3$. Для выражений (58) **производное решение** получится при размене $y_n = 7$ и $y_n = 1$. Возможны более сложные размены с тремя и более y_n, затрагивающие выражения для ферзей, у которых в результате размена Σ_n станет принадлежать другому множеству из (16), (17) или (18), если такой Σ_n не будет равен любому Σ_n из этого множества в выражениях для ферзей как для нижней, так и для верхней половины шахматного поля. С ростом N растёт количество возможных разменов y_n. Но это требует дополнительных вычислений при уже готовых основных и дополнительных решениях и ничего нового не добавляет к **Алгоритму решения Задачи об N ферзях**.

Публикации: http://samlib.ru/editors/b/bezymjannyj_a/w8.shtml