А так ли необходима многомировая интерпретация квантовой механики?

В.А. Касимов (E-mail: *quadrica-m@mail.ru*)

Любая интерпретация, являясь переводом с одного языка (например, *микро*-) на другой язык (например, *макро*-), "упирается" в недоказанную возможность одинаковой выводимости или выразительности при описании явлений разного уровня онтологизации. В этом смысле любая интерпретация по своей сути - спекулятивна. Есть язык теории - на этом языке и следует общаться. Кроме того существует метаязык философских обобщений. Всё остальное - от лукавого!

Как пример можно рассмотреть эвереттовскую интерпретацию квантовой механики. Обстоятельная критика этой интерпретации приведена МА Марковым в книге: *О трёх интерпретациях квантовой механики*[1]. Мы подойдём к этой проблеме немного с другой стороны.

Что предлагает Эверетт? Он предлагает заменить описание квантовомеханической процедуры измерения наблюдаемых на "родном языке" квантовой механики (так называемую борновскую интерпретацию) на интерпретацию в многомировой реальности. В чём суть увиденной им проблемы?

Квантовая механика в шредингеровской картине. В квантовой механике состояния системы описываются векторами гильбертова пространства $|\Psi(t)\rangle$. Скалярные произведения векторов $A_{\Phi\Psi} = \langle\Phi|\Psi\rangle$ представляют амплитуды вероятности перехода из одного состояния $|\Psi\rangle$ в другое $|\Phi\rangle$: $|\Psi\rangle \to |\Phi\rangle$, так что модуль $|A_{\Phi\Psi}|$ будет представлять вероятность этого перехода[1)].

Если квантовомеханическая система представляется гамильтонианом H, то согласно квантовой теории, эволюция системы описывается волновым вектором $|\Psi(t)\rangle$, который является решением уравнения Шредингера с заданными начальными условиями:

$$\boldsymbol{i}\hbar\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}|\boldsymbol{\Psi(t)}\rangle = \boldsymbol{H}|\boldsymbol{\Psi(t)}\rangle \qquad \textbf{(1)}$$

Важным свойством вектора $|\Psi(t)\rangle$ является его непрерывность по времени t, позволяющая установить факт генетической тождественности объекта самому себе в процессе его эволюционного изменения.

Как известно, любой волновой вектор $|\Psi(t)\rangle$может быть представлен в виде суперпозиции полной системы собственных векторов $|\beta_i\rangle$ какого-либо оператора наблюдаемой B.

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_1^n b_i|\beta_i;t\rangle \qquad (2)$$

Здесь β_i - собственные значения оператора B, а $b_i = \langle\Psi|\beta_i\rangle$- амплитуда вероятности для состояния $|\beta_i;t\rangle$ в суперпозиции (2). В этом можно непосредственно убедиться, вычислив скалярное произведение $\langle\beta_i|\Psi\rangle$. Модуль $|b_i|$ представляет собой вероятность обнаружить у квантовой системы, находящейся в состоянии $|\Psi\rangle$ значение β_i наблюдаемой B при её измерении.

Процедуры измерения в квантовой механике описываются с помощью проекционных операторов

$$\pi_k = |\beta_k\rangle\langle\beta_k| \qquad (3)$$

Здесь π_k - оператор проектирования любого вектора на собственный вектор $|\beta_k\rangle$ с собственным значением β_k наблюдаемой B.

Перед измерением значения динамической переменной B, когда квантовая система находится в состоянии $|\Psi(t)\rangle$, мы не можем достоверно сказать - в каком из состояний $|\beta_i\rangle$ находится квантовая система и какое из собственных значений β_i оператора B она имеет в данном состоянии: просто она находится в суперпозиции (2) всех возможных состояний $|\beta_i\rangle$ до тех пор пока над системой, описываемой этой функцией не производятся измерения.

Результатом действия оператора проектирования π_k на вектор состояния $|\Psi(t)\rangle$ (измерения наблюдаемой B) будет:

$$\pi_k|\Psi(t)\rangle = |\beta_k\rangle\langle\beta_k|\sum_1^n b_i|\beta_i;t\rangle = \sum_1^n |\beta_k\rangle\langle\beta_k|\beta_i;t_0\rangle b_i = \sum_1^n |\beta_k\rangle\,\delta_{ik}b_i = b_k|\beta_k\rangle \qquad (4)$$

Таким образом, результатом измерения наблюдаемой B в состоянии $|\Psi(t)\rangle$ становится собственный вектор $|\beta_k\rangle$ (ненормированный) с собственным значением β_k. Нетрудно убедиться, что повторное измерение этой наблюдаемой уже в состоянии $|\beta_k\rangle$ даст опять вектор $|\beta_k\rangle$, принадлежащий тому же собственному значению.

Важным обстоятельством здесь является то, что вероятностный смысл коэффициентов b_i, как амплитуд вероятностей наблюдения значений β_i при измерениях B надёжно установлен многочисленными экспериментами, а сами процедуры измерений, описываемые (4), используются как элементы технологии приготовления микросостояний с

---

1) Подробнее об аксиоматике квантовой механики можно посмотреть, например, в *Квантовая механика (принципы)* [2].

заданными свойствами. Таким образом, язык квантовой механики вполне адекватен природе явлений и имеет полное эмпирическое подтверждение.

Однако процедура измерения приводит к выбору не только единственного β_k из всех возможных значений наблюдаемой B, но и к редукции всей волновой функции $|\Psi(t)\rangle$, то есть к выбору единственного члена ряда (2). При этом меняются не только её характеристики гладкости, но и сам вид функции. В этих условиях возможна потеря и генетического сродства системы или объекта в процедуре измерения, которое обеспечивалось, например в классической физике, временн***о***й и пространственной непрерывностью, а в квантовой механике только временн***о***й непрерывностью волновой функции. Таким образом, в моменты измерения поведение системы не описывается уравнением Шредингера; при этом теряется и сама возможность идентифицировать объект с самим собой.

Состояния, которые могут быть представлены векторами гильбертова пространства называются *чистыми состояниями*. Их поведение во времени или их эволюция описывается уравнением Шредингера. Однако в самом определении чистых состояний заложена неопределённость: вектора чистых состояний определены с точностью до произвольного множителя (в силу линейности уравнения Шредингера). Частичное снятие этой неопределённости достигается дополнительной операцией нормировки. То есть на самом деле, изначально, состоянию квантового объекта соответствует целый луч гильбертова пространства, а нормировкой направляющего вектора мы достигаем возможности описывать квантовые состояния с помощью векторов. Однако и в результате нормировки волновой вектор определяется с точностью фазового множителя, равного по модулю единице. У каждой квантовой системы или объекта - своя неопределённость в виде такого фазового множителя. Учитывая, что фазовый множитель неизмерим, можно заметить, что в процедурах измерения нарушается и эта "когерентность", причём неконтролируемым образом.

Так или иначе, но встаёт вопрос: *а после измерения имеем ли мы дело с тем же объектом, что и до измерения*?

Мы не знаем доподлинно, что подвигло Эверетта на создание многомировой интерпретации квантовой механики. Но выявленные здесь весьма серьёзные причины и могли стать главным мотивом для появления новой интерпретации. Основной же целью многомировой интерпретации было сохранение детерминизма в истолковании редукции волновой функции.

Однако история распорядилась по-новому. После появления матриц плотности (ЛД Ландау, 1927 г.) и формулировки на её основе квантовой механики, после опубликования работы Е. Швингера в 1959 г. [3], "спасение" физики от коллапса волновой функции и вовсе стало неактуальным. Статистическая интерпретация квантовой механики стала не только "интерпретацией", но и фактическим языком квантовой механики. Попытка же "реанимации" лапласовского детерминизма даже на уровне волновой функции привела по-существу к онтологизации случайности, то есть к признания случайности не как непознанной необходимости, а как объективного фактора.

Описание квантовой механики с помощью матрицы плотности. Наряду с векторным представлением, чистое состояние $|c\rangle$ может быть представлено и эрмитовой матрицей в некотором ортонормированном базисе

$$M_{ik}(c) = c_i c_k^* \text{ или } M(c) = |c\rangle\langle c| \quad (5)$$

Сразу необходимо отметить, что в таком представлении исчезает произвол, связанный с неопределённостью фазы волновой функции. Матрица $M(c)$ называется *матрицей плотности*. Рассмотрим особенности этого способа описания.

Нетрудно убедиться, что среднее значение $\overline{F} = \langle F \rangle$ наблюдаемой F квантовомеханической системы $\mathcal{C}$ в чистом состоянии $|c\rangle$ вычисляется через матрицу плотности следующим образом:

$$\overline{F} = \mathrm{Sp}\{M(c)F\} = \mathrm{Sp}\{FM(c)\} \quad (6)$$

Здесь через Sp $O = \sum_i O_{ii}$ обозначен след (шпур) оператора O (сумма диагональных элементов).

Очевидно, что условие нормировки вектора состояния $\langle c|c\rangle = 1$ эквивалентно условию

$$\mathrm{Sp}M(c) = 1 \quad (7)$$

Из определения (5) следует, что если матрица $M(c)$ описывает чистое состояние $|c\rangle$, то она удовлетворяет условию

$$M^2(c) = M(c) \quad (8)$$

Таким образом, матрица плотности обладает свойствами проекционного оператора. Из того, что собственные значения проекционного оператора равны либо 0, либо 1, а Sp$M(c)$ = 1, следует, что только одно собственное значение матрицы плотности принимает значение, равное 1, остальные равны 0. Это следует из того, что матрица $M(c)$ может быть приведена к диагональному виду унитарным преобразованием, оставляющим неизменным след. На геометрическом языке это означает, что $M(c)$ – оператор проектирования, который действуя на произвольный вектор $|a\rangle$, проектирует его на собственный вектор $|c\rangle$, принадлежащий собственному значению 1 оператора M.

Таким образом, оператор проектирования $M(c_r)$ играет роль своего рода символа селективного измерения, поскольку он выбирает из всех исследуемых объектов только те, у которых характеристика C имеет значение, равное c_r, и отбрасывает все остальные.

Среднее значение матрицы плотности $M(c)$ в состоянии $|a\rangle$ оказывается теперь равным вероятности обнаружить значение c наблюдаемой C , если известно, что величина A принимает значение a:

$$\overline{M(c)} = \langle a|M(c)|a\rangle = \langle a|c\rangle\langle c|a\rangle = |\langle a|c\rangle|^2 \qquad (9)$$

Поскольку среднее значение эрмитова оператора $M(c)$ в состоянии $|a\rangle$, которое характеризуется $M(a)$, вычисляется по общей формуле (6), можно получить следующий результат:

$$|\langle a|b\rangle|^2 = \mathrm{Sp}[M(a)M(b)] \qquad (10)$$

Мы получили важный результат: *используя только матрицу плотности, можно получить полное физическое описание чистых состояний.*

Квантовомеханическое описание с помощью матрицы плотности обладает тем преимуществом, что оно позволяет придать смысл даже в тех случаях, когда объект не находится в чистом состоянии и когда матричные элементы M принципиально невозможно представить в виде, аналогичном (5). С помощью матрицы плотности можно описывать состояния, которые не характеризуются каким-либо вектором состояния. Такие состояния называются *смешанными*.

Необходимость описания с помощью матрицы плотности возникает в связи с рассмотрением следующей ситуации.

Рассмотрим систему $\mathcal{C}$. Согласно квантовомеханическому подходу её состояние описывается с помощью вектора состояния, и это состояние называется *чистым состоянием*. Пусть нас интересует поведение не всей системы в целом, а лишь её части, то есть подсистемы $\mathcal{B}$. Тогда оставшуюся часть $\mathcal{A}$ полной системы $\mathcal{C}$ мы должны рассматривать как окружение, влияющее на эволюцию $\mathcal{B}$. Формально же отношение рассматриваемых подсистем $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ к системе $\mathcal{C}$ можно записать так: $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

Вектор состояния системы $\mathcal{C}$ или её волновая функция не распадаются на произведение волновых функций подсистем $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Поэтому ни подсистема $\mathcal{A}$, ни $\mathcal{B}$ не могут быть описаны с помощью векторов состояний. Для того чтобы волновая функция системы $\mathcal{C}$ распалась (в данный момент времени) на такое произведение, измерение, в результате которого была создана такая конфигурация, должно полным образом описывать и систему $\mathcal{C}$, и подсистемы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Для того же, чтобы волновая функция продолжала иметь такой вид и в будущие моменты времени, необходимо, также, чтобы подсистемы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ замкнутой системы $\mathcal{C}$ не взаимодействовали между собой. Однако, ни то, ни другое теперь не предполагается.

Пусть измерения производятся над статистическим ансамблем, состоящим из N частиц, которые могут находиться в различных квантовых состояниях. Предположим, что каждая из N частиц может находиться в некотором числе возможных квантовых состояний и описывается матрицей плотности $M_n = M(b_n)$. Максимальная информация относительно наблюдаемой A будет получена в этом случае, если средние значения $\overline{A}_n$ наблюдаемой A усреднить ещё и по ансамблю, а именно

$$\overline{\overline{A}} = \sum_n p_n \overline{A}_n, \qquad (11)$$

где p_n – вероятность найти значение $\overline{A}_n$ в ансамбле

$$\sum_n p_n = 1, p_n \geq 0 \qquad (12)$$

Формула, позволяющая вычислять среднее значение какой-либо характеристики в чистом состоянии при помощи матрицы плотности, может быть обобщена на рассматриваемый случай, если ввести обобщённую матрицу плотности

$$M = \sum_n p_n M_n , \qquad (13)$$

которая в силу соотношения (12) удовлетворяет условию

$$\mathrm{Sp}M = 1 \qquad (14)$$

и приводит к требуемому результату

$$\overline{\overline{A}} = \mathrm{Sp}(MA) = \sum_n p_n \mathrm{Sp}(M_n A) = \sum_n p_n \overline{A}_n \qquad (15)$$

Обобщённая матрица плотности (13) больше не удовлетворяет условию $M^2 = M$, за исключением случая, когда все M_n равны M . Таким образом, *условие* $M^2 = M$ *является условием того, что система находится в чистом состоянии.*

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим систему, состоящую из двух подсистем, описываемых матрицами плотности M_1 и M_2, так что

$$M = p_1 M_1 + p_2 M_2\,, \quad p_1, p_2 \geq 0, p_1 + p_2 = 1 \qquad (16)$$

Квадрат этой матрицы

$$M^2 = p_1^2 M_1^2 + p_2^2 M_2^2 + p_1 p_2 (M_1 M_2 + M_2 M_1) \qquad (17)$$

в силу тождеств

$$M_1 M_2 + M_2 M_1 = M_1^2 + M_2^2 - (M_1 - M_2)^2 \qquad (18)$$

и

$$p_1^2 + p_1 p_2 = p_1(p_1 + p_2) = p_1, \qquad p_2^2 + p_1 p_2 = p_2 \qquad (19)$$

может быть записан в виде

$$M^2 = p_1 M_1^2 + p_2 M_2^2 - p_1 p_2 (M_1 - M_2)^2 \qquad (20)$$

Так как матрицы M_1 и M_2 каждая в отдельности удовлетворяют условию $M^2 = M$, находим

$$M - M^2 = p_1 p_2 (M_1 - M_2)^2 \qquad (21)$$

Правая часть (21) представляет собой положительную матрицу; следовательно, M будет равна M^2 только в том случае, если $(M_1 - M_2)^2 = 0$. Квадрат эрмитовой матрицы обращается в нуль только тогда, когда все её элементы равны нулю. Поэтому необходимым условием выполнения равенства $M^2 = M$является равенство $M_1 = M_2$. Доказательство для общего случая следует по индукции.

Основной постулат динамики в квантовой механике представляется в следующей форме:

$$\frac{\overline{dA}}{dt} = \frac{d\overline{A}}{dt}$$

Это соотношение включает в себя уравнения динамики всех квантовомеханических картин: Шредингера, Гейзенберга и Дирака. Запишем его в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{dA}}{dt} &= i\overline{[H,A]} + \frac{\overline{\partial A}}{\partial t} = \\ &= i\,\langle b|[H,A]|b\rangle + \langle b|\frac{\partial A}{\partial t}|b\rangle = i\mathrm{Sp}([H,A]) + \mathrm{Sp}(\frac{\partial A}{\partial t}) \end{aligned} \qquad (22)$$

В зависимости от того, представляется ли среднее значение $\overline{A}$ наблюдаемой A в виде $\overline{A} = \langle b|A|b\rangle$ или $\overline{A} = \mathrm{Sp}(AM)$, скорость изменения $\overline{A}$ в каждом случае записывается по-разному, а именно

$$\frac{d\overline{A}}{dt} = \langle b|\frac{dA}{dt}|b\rangle + \left(\frac{d}{dt}\langle b|\right)A|b\rangle + \langle b|A(\frac{d}{dt}|b\rangle) \qquad (23)$$

$$\frac{d\overline{A}}{dt} = \mathrm{Sp}\left(\frac{dA}{dt}M\right) + \mathrm{Sp}(A\frac{dM}{dt}) \qquad (24)$$

Из соотношений (22), (24) следует уравнение эволюции состояния объекта со временем на языке матрицы плотности $\boldsymbol{M_S}$ в представлении Шредингера:

$$\boldsymbol{\frac{dM_S}{dt} = i[H, M_S] + \frac{\partial M_S}{\partial t}} \qquad \mathbf{(25)}$$

Алгебра квантовых измерений. Оказывается, множество измерений в квантовой механике формально можно рассматривать как алгебру. Это стало возможным после работы Е. Швингера [3].

Следуя [4], представим основные моменты этой алгебры.

Измерения первого типа. Назовём селективным измерением *первого типа* такое измерение, которое осуществляется прибором, выбирающим из всей совокупности исследуемых объектов лишь те, у которых характеристика A имеет значение α_i и отбрасывает все остальные. Обозначим символом $M(\alpha_i)$ единичный акт такого измерения.

Произведение двух измерений первого типа $M(\alpha_i)$ и $M(\beta_k)$ определим, как результат двух селективных измерений, выполненных последовательно в произвольном порядке.

Очевидно, что в результате процедуры $M(\alpha_i)M(\alpha_k)$ при $i = k$ остаются объекты с заданными характеристиками α_i, а при $i \neq k$ все объекты отбрасываются. Результат произведения измерений в первом случае обозначим через I, во втором - через O. Тогда можем написать:

$$M(\alpha_i)M(\alpha_k) = M(\alpha_k)M(\alpha_i) = \delta_{ik}M(\alpha_i) \tag{26}$$

где

$$\delta_{ik} = \begin{cases} I \text{ при } i = k \\ O \text{ при } i \neq k \end{cases} \tag{27}$$

Суммой двух селективных измерений первого типа $M(\alpha_i)$ и $M(\beta_k)$ мы будем называть такое измерение, при котором отбираются объекты с характеристиками, равными либо α_i, либо β_k. Если ввести сумму однотипных измерений одной наблюдаемой, тогда условие полноты набора измерений наблюдаемой A можно записать в виде:

$$\sum_i M(\alpha_i) = I \tag{28}$$

Измерения второго типа. Определим более общее селективное измерение с помощью такого прибора, на входе которого пропускаются лишь объекты, находящиеся в состоянии β_i, на выходе появляются только объекты, находящиеся в состоянии α_k. Обозначим такой процесс измерения символом $M(\alpha_k, \beta_i)$. Следует подчеркнуть, что предполагается полное отсутствие сведений о том, происходит внутри прибора в промежутке между входом и выходом. Очевидно, что $M(\alpha_k, \beta_i)$ не совпадает с $M(\alpha_k)M(\beta_i)$. В частности, символ $M(\alpha_k, \alpha_j)$ при $k \neq j$ не эквивалентен символу O. Операция $M(\alpha_i)$может рассматриваться как частный случай селективного измерения, при котором не происходит изменения состояния:

$$M(\alpha_i) = M(\alpha_i, \alpha_i) \tag{29}$$

Составные измерения. Рассмотрим сложное измерение $M(\alpha_m, \beta_j)M(\gamma_k, \delta_i)$. Это измерение можно рассматривать, как измерение типа $M(\alpha_m, \delta_i)$, а связь между символами измерений выразить соотношением:

$$M(\alpha_m, \beta_j)M(\gamma_k, \delta_i) = \langle\beta_j|\gamma_k\rangle M(\alpha_m, \delta_i), \tag{30}$$

где $\langle\beta_j|\gamma_k\rangle$ - множитель пропорциональности, выражающий статистическую взаимозависимость состояний β_j и γ_k, определяющий в конечном счете долю перехода $M(\alpha_m, \delta_i)$ после операции $M(\gamma_k, \delta_i)$.

В частном случае совместимых наблюдаемых величин β_j и γ_k значение $\langle\beta_j|\gamma_k\rangle$ определяется исходя из соотношения:

$$M(\alpha_m, \beta_j)M(\beta_k, \delta_i) = \delta_{jk}M(\alpha_m, \delta_i), \tag{31}$$

Следовательно,

$$\langle\beta_j|\beta_k\rangle = \delta_{jk} \tag{32}$$

Из (29) и (30) следует:

$$M(\alpha_j)M(\beta_k, \gamma_i) = \langle\alpha_j|\beta_k\rangle M(\alpha_j, \gamma_i), \tag{33}$$

$$M(\alpha_j, \beta_k)M(\gamma_i) = \langle\beta_k|\gamma_i\rangle M(\alpha_j, \gamma_i), \tag{34}$$

$$M(\gamma_k, \delta_i)M(\alpha_m, \beta_j) = \langle\delta_i|\alpha_m\rangle M(\gamma_k, \beta_j), \tag{35}$$

Сравнивая (30) и (35) можно увидеть, что произведение символов измерения в общем случае некоммутативно. Из условия полноты (28) и (33), (34) следует:

$$\sum_j M(\alpha_j)M(\beta_k, \gamma_i) = M(\beta_k, \gamma_i) = \sum_j \langle\alpha_j|\beta_k\rangle M(\alpha_j, \gamma_i), \tag{36}$$

$$\sum_i M(\alpha_j, \beta_k)M(\gamma_i) = M(\alpha_j, \beta_k) = \sum_i \langle\beta_k|\gamma_i\rangle M(\alpha_j, \gamma_i), \tag{37}$$

Произведя дважды подобное разложение, получим:

$$M(\gamma_k, \delta_i) = \sum_m \sum_j M(\alpha_m)\, M(\gamma_k, \delta_i)\, M(\beta_j) = \sum_m \sum_j \langle\alpha_m|\gamma_k\rangle\langle\delta_i|\beta_j\rangle\, M(\alpha_m, \beta_j), \tag{38}$$

Величины $\langle\alpha_i|\beta_k\rangle$, устанавливающие связи между символами измерения называют функцией преобразования, связывающего $A-$ и $B-$ описания.

Нетрудно проверить, что функции преобразования обладают свойством

$$\sum_k \langle\alpha_j|\beta_k\rangle\langle\beta_k|\gamma_i\rangle = \langle\alpha_j|\gamma_i\rangle \tag{39}$$

Назовём оператором Xлинейную комбинацию символов измерения

$$X = \sum_i \sum_k \langle\alpha_k|X|\beta_i\rangle\, M(\alpha_k, \beta_i) \tag{40}$$

Коэффициенты $\langle\alpha_k|X|\beta_i\rangle$ называются *матричными элементами* оператора X, которые представляют собой матрицу ранга N, а N - число различных значений α_i, представляющих полный набор наблюдаемой A.

Определим след символа измерения Sp $M(\beta_k, \alpha_j)$

$$\mathrm{Sp}\, M(\beta_k, \alpha_i) = \langle \alpha_i | \beta_k \rangle \tag{41}$$

Согласно (38) и (41), имеем:

$$\mathrm{Sp}\, M(\gamma_k, \delta_i) = \sum_m \sum_j \langle \alpha_m | \gamma_k \rangle \langle \delta_i | \beta_j \rangle\, \mathrm{Sp}\, M(\gamma_m, \beta_j) =$$
$$= \sum_m \sum_j \langle \alpha_m | \gamma_k \rangle \langle \delta_i | \beta_j \rangle \langle \beta_j | \alpha_m \rangle = \sum_j \langle \delta_i | \beta_j \rangle \langle \beta_j | \gamma_m \rangle = \langle \delta_i | \gamma_k \rangle, \tag{42}$$

что полностью согласуется с определением (41).

Из определений (41) и (29), с учётом (27) следует

$$\mathrm{Sp}\, M(\alpha_k, \alpha_i) = \delta_{ik} \tag{43}$$

$$\mathrm{Sp}\, M(\alpha_i) = I \tag{44}$$

Нетрудно показать, что след произведения двух операторов, даже некоммутирующих, не зависит от порядка их умножения

$$\mathrm{Sp}(X, Y) = \mathrm{Sp}(Y, X) \tag{45}$$

Непосредственным вычислением можно убедиться, что

$$\mathrm{Sp}[M(\alpha_i) M(\beta_i)] = \langle \beta_k | \alpha_i \rangle \langle \alpha_i | \beta_k \rangle \tag{46}$$

Соотношения (30) и (41) инвариантны относительно преобразований

$$M(\alpha_k, \beta_i) \to \rho^{-1}(\alpha_k) M(\alpha_k, \beta_i) \rho(\beta_i)$$
$$\langle \alpha_k | \beta_i \rangle \to \rho(\alpha_k) \langle \alpha_k | \beta_i \rangle \rho^{-1}(\beta_i) \tag{47}$$

где величины $\rho(\alpha_k)$ и $\rho(\beta_i)$ могут принимать произвольные ненулевые значения. Величины $M(\alpha_i)$ и $\langle \alpha_i | \alpha_k \rangle = \delta_{ik}$, как легко видеть, также инвариантны.

Рассмотрим последовательность измерений $M(\beta_i) M(\alpha_k) M(\beta_i)$, отличающуюся от $M(\beta_i)$, поскольку на этапе $M(\alpha_k)$ при измерении наблюдаемой A неконтролируемое возмущение для наблюдаемой B. Только часть объектов, отобранных на первой стадии измерения $M(\beta_i)$, пройдут через последнюю стадию измерения $M(\beta_i)$.

Последовательность измерений можно выразить уравнением

$$M(\beta_i) M(\alpha_i) M(\beta_i) = p(\alpha_k, \beta_i) M(\beta_i) \tag{48}$$

Очевидно, что входящая в (48) величина $p(\alpha_k, \beta_i)$ в отличие от $\langle \alpha_k | \beta_i \rangle$ инвариантна относительно преобразований (47) и обладает свойством аддитивности.

Имеем:

$$M(\beta_i) \left[M(\alpha_k) + M(\alpha_j) \right] M(\beta_i) = [p(\alpha_k, \beta_i) + p(\alpha_j, \beta_i)] M(\beta_i). \tag{49}$$

Учитывая

$$M(\beta_i) \left[\sum_k M(\alpha_k) \right] M(\beta_i) = M(\beta_i), \tag{50}$$

получаем

$$\sum_k p(\alpha_k, \beta_i) = 1 \tag{51}$$

Таким образом, величина $p(\alpha_k, \beta_i)$ может рассматриваться как вероятность наблюдения α_k, если известно, что объект находится в состоянии β_i. Так как вероятность всегда действительна и неотрицательна, естественно наложить на величины $\langle \alpha_k | \beta_i \rangle$ условие:

$$\langle \beta_i | \alpha_k \rangle = \langle \alpha_k | \beta_i \rangle^* \tag{52}$$

поскольку при этом

$$p(\alpha_k, \beta_i) = |\langle \alpha_k | \beta_i \rangle|^2 \geq 0 \tag{53}$$

Условие (52) налагает на входящие в (47) величины $\rho(\alpha_k)$и $\rho(\beta_i)$ ограничение

$$\rho^*(\alpha_k) = \rho^{-1}(\alpha_k) \tag{54}$$

означающее, что эти величины должны иметь вид

$$\rho(\alpha_k) = e^{i\Phi(\alpha_k)}, \tag{55}$$

где $\Phi(\alpha_k)$ - произвольная вещественная фаза.

Исходя из определений (40) и (41) матричные элементы оператора можно представить в виде

$$\langle\alpha_k|X|\beta_i\rangle = \mathrm{Sp}[XM(\beta_i,\alpha_k)] \tag{56}$$

Выражение для среднего значения оператора X в состоянии β_i следует из (56) как частный случай

$$\bar{X} = \langle\beta_i|X|\beta_i\rangle = \mathrm{Sp}[XM(\beta_i)] \tag{57}$$

Таким образом, отсюда следует, что символ измерения $M(\beta_i)$ совпадает с матрицей плотности.

Аргументом для представления среднего значения в виде (57) служит выражение

$$p(\alpha_k,\beta_i) = \mathrm{Sp}[M(\alpha_k)M(\beta_i)], \tag{58}$$

которое вытекает из определения вероятности и позволяет записать среднее значение наблюдаемой величины

$$\bar{A}_{\beta_i} = \sum_k \alpha_k\, p(\alpha_k,\beta_i) \tag{59}$$

в виде

$$\bar{A}_{\beta_i} = \sum_k \mathrm{Sp}[\alpha_k M(\alpha_k)M(\beta_i)] = \mathrm{Sp}[AM(\beta_i)], \tag{60}$$

где

$$A = \sum_k \alpha_k\, M(\alpha_k) \tag{61}$$

Символы селективного измерения $M(\alpha_i) = M(\alpha_i,\alpha_i)$ представляют прибор, который не только разбивает ансамбль объектов на подансамбли, находящиеся в разных состояниях $\alpha_1,\alpha_2,\ldots$, но и выбирает среди них единственный подансамбль α_i, отбрасывая все остальные.

Теперь рассмотрим прибор, который производит неселективное измерение наблюдаемой B заключающееся только в разделении ансамбля на подансамбли, без какого-либо их отбора. Соответствующий символ измерения будем обозначать M_β.

Нетрудно убедиться, что из (34) и (56) следует

$$\langle\alpha_j|M(\beta_k)|\gamma_i\rangle = \mathrm{Sp}\big[M(\gamma_i,\alpha_j)M(\beta_k)\big] = \langle\alpha_j|\beta_k\rangle \mathrm{Sp}M(\gamma_i,\beta_k) = \langle\alpha_j|\beta_k\rangle\langle\beta_k|\gamma_i\rangle \tag{62}$$

Пусть над объектом производится сначала селективное измерение $M(\beta_k,\gamma_i)$, затем $M(\alpha_j,\beta_k)$. Используя (62), получаем вероятность того, что при таком измерении будет получено значение β_k наблюдаемой B, а затем α_i наблюдаемой A

$$p(\alpha_j,\beta_k,\gamma_i) = p(\alpha_j,\beta_k)p(\beta_k,\gamma_i) = \big|\langle\alpha_j|\beta_k\rangle\langle\beta_k|\gamma_i\rangle\big|^2 = \big|\langle\alpha_j|M(\beta_k)|\gamma_i\rangle\big|^2 \tag{63}$$

Выключим теперь промежуточное измерение наблюдаемой B. Тогда символ этого измерения в матричном элементе (62) может быть заменён оператором тождественного преобразования $I = \sum_k M(\beta_k)$, а соответствующая вероятность принимает вид:

$$p(\alpha_j,I,\gamma_i) = \big|\langle\alpha_j|\gamma_i\rangle\big|^2 = \left|\sum_k \langle\alpha_j|M(\beta_k)|\gamma_i\rangle\right|^2 \tag{64}$$

Мы видим, что в случае когерентных B-подансамблей, согласно (64), имеет место сложение амплитуд вероятностей, что приводит проявлению интерференционных эффектов.

Однако, если в промежуточной стадии включается прибор, производящий B-разделение, но без отбора состояний, то вероятность обнаружения α_j при условии, что начальному состоянию соответствовало значение γ_i, даётся выражением

$$p(\alpha_j,\beta,\gamma_i) = \sum_k p(\alpha_j,\beta_k,\gamma_i) = \sum_k \big|\langle\alpha_j|M(\beta_k)|\gamma_i\rangle\big|^2 \tag{65}$$

Здесь для совокупности некогерентных B-подансамблей складываются вероятности, а не амплитуды. При этом в отличие от (64) отсутствуют члены, отвечающие интерференции между различными состояниями β_j.

Учитывая вышеизложенное, можно сказать, что символ, соответствующий неселективному измерению B, необходимо представить в виде:

$$M_\beta = \sum_k e^{i\Phi(\beta_k)}\, M(\beta_k) \tag{66}$$

где $\Phi(\beta_k)$ - фазы, распределённые по случайному закону, которые отражают принципиальную неконтролируемость возмущения, вносимого неселективным измерением. Действительно, выражение для вероятности (65) приобретает вид, подобный (63),

$$p(\alpha_j,\beta,\gamma_i) = \big|\langle\alpha_j|M_\beta|\gamma_i\rangle\big|^2 \tag{67}$$

Поскольку при неселективном измерении объекты не отбрасываются, то из этого должно следовать

$$\sum_j p(\alpha_j,\beta,\gamma_i) = \sum_j \langle\gamma_i|M_\beta^+|\alpha_j\rangle\langle\alpha_j|M_\beta|\gamma_i\rangle = \langle\gamma_i|M_\beta^+ M_\beta|\gamma_i\rangle = 1 \tag{68}$$

что означает - операторы M_β являются унитарными:

$$M_\beta^+ M_\beta = M_\beta M_\beta^+ = I \tag{69}$$

Заметим, что согласно (66) символ селективного измерения $M(\beta_k)$ можно получить из символа неселективного измерения M_β, если все фазы, кроме одной, положить равными положительным бесконечно большим мнимым числам, что соответствует затуханию всех подансамблей, образующихся при измерении M_β, за исключением одного.

Литература

1. Марков М.А. *О трёх интерпретациях квантовой механики.* Наука. М., 1991 г.
2. Касимов В.А. *Квантовая механика (принципы).* Сибпринт. Новосибирск. 2013 г. https://www.academia.edu/32434510/
3. J. Schwinger. The algebra of microscopic measurement. Proc.N.A.S., US, **45**,1542 (1959)
4. Ф. Кемпфер. *Основные положения квантовой механики.* Мир. М., 1967

*****

Для связи:
quadrica-m@mail.ru

Авторский семинар
http://my.mail.ru/community/physiks.princips/?ref=cat

http://quadrica.ucoz.net/
https://independent.academia.edu/KasimovVladimir
https://vk.com/public128913510
https://www.facebook.com/quadrica.m
http://orcid.org/0000-0002-1435-9220

*****

В.А. Касимов. А так ли необходима многомировая интерпретация квантовой механики?

Аннотация
Любая интерпретация, являясь переводом с одного языка (например, *микро*-) на другой язык (например, *макро*-), "упирается" в недоказанную возможность одинаковой выводимости или выразительности при описании явлений разного уровня онтологизации. В этом смысле любая интерпретация по своей сути - спекулятивна. Есть язык теории - на этом языке и следует общаться. Кроме того существует метаязык философских обобщений.

V.A. Kasimov. Is it necessary the many-worlds interpretation of quantum mechanics?

Abstract

Any interpretation, being a translation from one language (for example, micro-) to another language (for example, macro-), "rests" in the unproven possibility of the same conclusionbility or expressiveness in describing phenomena of different levels of ontology. In this sense, any interpretation is inherently speculative. There is the language of the theory - and we should communicate by it. In addition, there is a meta-language of philosophical generalizations.