Об эволюции понятия массы в физике (релятивистский аспект)

В.А. Касимов (E-mail: *quadrica-m@mail.ru*)

Классическая физика

1. В классической физике есть четыре эпизода, связанные с необходимостью использовать понятие массы. Поэтому для обозначения присутствия массы в понятийном смысле в качестве характеристики необходимо вводить к названиям масс их отличительные признаки.

Первый эпизод.

Движение физического тела описывается пространственно-временным образом с помощью траектории $\vec{r}(t)$. Функциональная зависимость $\vec{r}(t)$ полностью определяет динамику материальной точки в классической физике.

Имея в виду непрерывность и достаточную гладкость функции $\vec{r}(t)$, динамику движущейся точки можно записать в виде разложения $\vec{r}(t)$ в ряд Тейлора

$$\vec{r}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\vec{r}^{(k)}(t_0)}{k!}(t - t_0)^k.$$

Из этого соотношения видно, что для определения положения материальной точки в произвольный момент времени t необходимо, вообще говоря, знание всех производных в точке t_0.

Однако подойти к определению функциональной зависимости $\vec{r}(t)$ можно и по-другому: просто "оборвать" ряд Тейлора на k члене, а причины изменения k-производной формализовать с помощью функции, описывающей некое внешнее воздействие и определяющей уравнение, которое даст возможность описать зависимость от времени t. Тогда для определения зависимости $\vec{r}(t)$ достаточно будет знать первые k производные в момент t_0 при решении этого уравнения.

Независимость от времени производной k-го порядка, то есть её постоянство в определённых ситуациях, позволяет реализовать описанную возможность определения функциональной зависимости $\vec{r}(t)$.

Так, например, при условии постоянства $\dot{\vec{r}}(t)$ получаем такую зависимость от времени:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \dot{\vec{r}}(t_0)(t - t_0),$$

то есть для полного определения динамики, согласно последнему соотношению, необходимо задать положение материальной точки $\vec{r}(t_0)$ и первую производную $\dot{\vec{r}}(t_0)$ в начальный момент времени t_0, а причину изменения $\dot{\vec{r}}(t_0)$ формализовать с помощью введения функции $\vec{f}(t)$, определяемой дополнительным уравнением. Тогда имеем:

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \dot{\vec{r}}(t_0)(t - t_0), & \{\text{при } \vec{f} \equiv 0\}, \\ \vec{r}(t)\colon \ddot{\vec{r}}(t) = \vec{f}(t, \vec{r})/m, & \{\text{при } \vec{f} \not\equiv 0, \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0, \dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{v}_0. \end{cases}$$

Аналогично, если $\ddot{\vec{r}}(t) = \text{const}$, то зависимость от времени будет определяться соотношением

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \dot{\vec{r}}(t_0)(t - t_0) + \ddot{\vec{r}}(t_0)\frac{(t - t_0)^2}{2}.$$

Здесь для определения динамики необходимо задать в момент времени t_0 значение функции $\vec{r}(t_0)$, её первую и вторую производные - $\dot{\vec{r}}(t_0)$, $\ddot{\vec{r}}(t_0)$. В этом случае причины изменения $\ddot{\vec{r}}(t_0)$ необходимо будет формализовать с помощью введения, как и в предыдущем случае, другой функции, определяемой другим дополнительным уравнением. Этот ряд примеров можно продолжить.

Как известно, первая производная $\dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}(t)$ называется *скоростью* движения $\vec{v}(t)$ материальной точки, а вторая производная $\ddot{\vec{r}}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \vec{a}(t)$ – её *ускорением* $\vec{a}(t)$.

Научные озарения, связанные с именами Галилея и Ньютона, позволили конкретизировать и саму идею определения динамической зависимости $\vec{r}(t)$ по сравнению с представлением в виде ряда Тейлора. В чём же суть догадок Галилея и Ньютона?

Первой догадкой является следующее. Поскольку движение физического тела является его основным состоянием, то для поддержания движения не требуется никаких причин. Установление этого эмпирического факта связывают с именем Галилея. В евклидовом пространстве это утверждение как закон инерции гласит: *всякое свободное движение происходит с постоянной по величине и направлению скоростью*. Системы отсчёта, в которых выполняется этот закон, называются *инерциальными* системами отсчёта. Таким образом, невозмущаемое внешними причинами движение ($\vec{f} \equiv 0$), рассматриваемое относительно инерциальной системы отсчёта, само себя поддерживает с постоянной скоростью и не требует установления причин своего движения.

Вторая догадка заключается в утверждении, что описание изменения движения тела $\delta\vec{v} = \ddot{\vec{r}}\ \delta t$ по инерции с постоянной скоростью $\vec{v}$ возможно при формализации причины изменения этого движения с помощью введения понятия силы ($\vec{f} \not\equiv 0$), воздействующей на тело:

$$\ddot{\vec{r}} \sim \vec{f},$$

здесь $\vec{f}$ – формализованное представление причины изменения движения по инерции известное как *сила*, действующая на тело. Формулировку этого представления в виде пропорциональности силы $\boldsymbol{f}$ и ускорения $\ddot{\vec{r}}$ связывают с именем Ньютона:

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{f}/m.$$

Коэффициент пропорциональности m является одной из основных характеристик физического тела называемой *массой*.

Уравнение движения в таком виде называется *вторым законом Ньютона*. Это уравнение позволяет существенно упростить нахождение функциональной зависимости $\vec{\boldsymbol{r}}(t)$ с помощью его решения. Для частицы, находящейся во внешнем потенциальном поле уравнение движения принимает вид:

$$m\ddot{\vec{\boldsymbol{r}}} = -\frac{\partial}{\partial\vec{\boldsymbol{r}}}V(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\boldsymbol{\nabla}\,V(\vec{\boldsymbol{r}}).$$

В процессе формулировки уравнения движения мы получили ответ на один из сакраментальных вопросов физики: *почему дифференциальные уравнения динамики имеют второй порядок по времени*? Ответ следующий: *в силу закона инерции Галилея*.

Введение же массы как коэффициента пропорциональности при второй производной в аналитическом представлении обрезанного ряда Тейлора является также прямым следствием закона инерции Галилея справедливым для инерциальных систем отсчёта. Поэтому вполне естественно назвать эту массу *инерциальной* (связанной со свойствами инерциальных систем отсчёта).

Масса как характеристика физического тела, появляется как необходимый параметр при координатном описании его движения. И здесь возникает естественный вопрос о её преобразовании при замене старой системы отсчёта, в которой описывалось движение, на новую. О том, что и для классической физики этот вопрос не является тривиальным говорит эпизод 2.

Второй эпизод.

Рассмотрим движение тела по круговой траектории в инерциальной системе отсчёта Σ. Такое движение может быть обеспечено действием центростремительной силы, направленной к центру круга, например, натяжением верёвки. Простые геометрические вычисления позволяют получить величину этой силы: $|f_{\text{цс}}| = m\omega^2 R$. Перейдя во вращающуюся систему отсчёта Σ', для описания движения тела, находящегося уже в состоянии покоя, мы вынуждены ввести силу, равную центростремительной и противоположного знака. Это необходимо сделать для удовлетворения второму закону Ньютона. Возникшую силу называют центробежной силой инерции. При таком переходе величины ω и R не меняются. А это значит, что их можно рассматривать как инварианты преобразования координат при переходе $\Sigma \to \Sigma'$. Массу при возникшей силе инерции необходимо отличать от ранее введённой инерциальной массы, поскольку она возникает при переходе $\Sigma \to \Sigma'$ и исчезает вместе с силой инерции при переходе $\Sigma' \to \Sigma$ в силу функциональной привязки к формулам преобразования координат. Это означает, что эта масса не обладает свойством инвариантности в отличие от предыдущих. Более того, по той же причине (второй закон Ньютона) и при тех же условиях ($\omega, R -$ инварианты, как характеристики в инерциальной системе Σ) при увеличении Ω от 0 до ω и далее до ∞, инерционная масса по непрерывности должна уменьшаться от m (при $\Omega = 0$) до 0 (при $\Omega = \omega$) и далее до $-\infty$ (при $\Omega > \omega$ и $\Omega \to \infty$). Этой массе естественно дать название *инерционной* (связанной с описанием инерционных сил).

Третий эпизод.

Этот эпизод возникает при рассмотрении закона всемирного тяготения. Здесь, как известно, масса выступает в роли гравитационного заряда.

Четвёртый эпизод.

Хорошо известны опыты Галилея по измерению ускорения свободного падения. Эти опыты дают, как результат, одинаковые времена падения с одной высоты тел разных масс. Интерпретация результатов этих опытов приводит к появлению принципа эквивалентности (в так называемой слабой форме) гравитации и инерционных сил ускорения. Независимость ускорения тел при падении от массы тела и его состава (состав тел определяется составом молекул, атомов и, в конечном счёте элементарных частиц во многообразии взаимодействий) приводит у необходимости постулировать нечто такое, что объединяет все вещества. Эту характеристику можно назвать *инертной* массой (связанной инвариантной характеристикой любого вещества). Благодаря этому контексту можно сказать, что всё что характеризуется присутствием энергии, имеет свою эквивалентную массу. Именно поэтому и "запах" может иметь массу, связанную с изменением энергии (как химическое соединение с замещённым компонентом)! При релятивистском обобщении понятия массы эта характеристики приобретает свою энергетическую конкретность. Именно энергия в конечно счёте определяет в РТГ метрику нашего мира согласно уравнениям Гильберта-Эйнштейна.

2. При математической формализации воздействия *причины* на движение физического тела в инерциальных системах отсчёта *масса* в классической физике выступает как коэффициент пропорциональности между величиной воздействия и приобретаемым при этом *ускорением* тела, описываемым *безразмерной материальной точкой.*

Причину при этом стали называть *силой* $\vec{\boldsymbol{F}}$, а изменение движения стали измерять как изменение скорости, то есть ускорение движения $\vec{\boldsymbol{a}} = \dot{\vec{\boldsymbol{v}}} = \ddot{\vec{\boldsymbol{r}}}$. Сама же связь приобретаемого ускорения $\vec{\boldsymbol{a}}$ с воздействием силы $\vec{\boldsymbol{F}}$ приобрела форму *второго закона Ньютона*:

$$\vec{\boldsymbol{F}} = m^{(\text{и})}\vec{\boldsymbol{a}} \qquad (1)$$

Здесь через $m^{(\text{и})}$ обозначен введённый коэффициент пропорциональности, который получил название *инерциальной* массы.

Почему (1), а не, скажем, $\vec{\boldsymbol{F}} = m\vec{\boldsymbol{v}}$? В силу открытого Галилеем закона инерции: *тело сохраняет состояние равномерного и прямолинейного движения при отсутствии на него внешних воздействий.* Дело в том, что воздействие на тело внешней силы должно приводить к изменению именно второй производной координаты положения или первой производной скорости тела, которые называются ускорением тела $\boldsymbol{a} = \ddot{\vec{\boldsymbol{r}}} = \dot{\vec{\boldsymbol{v}}}$. Закон инерции впоследствии получил название *первого закона Ньютона*.

3. В 1666-67 годах Ньютоном был сформулирован закон всемирного тяготения

$$|\vec{\boldsymbol{F}}| = \gamma \frac{m_1^{\text{г}} m_2^{\text{г}}}{r_{12}^2} \qquad (2)$$

Здесь $m_1^{\text{г}}$ и $m_1^{\text{г}}$ - гравитационные "заряды", определяющие силу взаимного притяжения между двумя точечными телами, находящихся на расстоянии r_{12}; γ - гравитационная постоянная, измеренная впоследствии Этвешем.

Используя (1) и (2), вычислим величину ускорения свободного падения точечного тела в поле тяготения Земли.

Имеем:

$$m^{(\text{и})} a = \gamma \frac{m^{(\text{г})} M_{\text{з}}^{(\text{г})}}{r^2} \text{ или}$$

$$a = \gamma \frac{M_{\text{з}}^{\text{г}}}{r^2} \frac{m^{(\text{г})}}{m^{(\text{и})}} \qquad (3)$$

4. На рубеже XVI - XVII веков было замечено (знаменитые опыты Галилея), что времена падения тел с одинаковой высоты, но с разными массами совпадают. Это привело к заключению о том, что масса падающего тела не влияет на его ускорение свободного падения. Согласно (3) это возможно лишь при условии равенства масс $m^{(\text{и})}$ и $m^{(\text{г})}$ падающего тела, то есть

$$m^{(\text{и})} = m^{(\text{г})} \qquad (4)$$

Тогда (3) приобретает вид:

$$a = \gamma \frac{M_{\text{з}}^{\text{г}}}{r^2} \qquad (5)$$

Соотношение (4) получило название *принципа эквивалентности* инерциальной и гравитационной масс, а соотношение (5) стало универсальной формулой для практических приложений в астрономии при вычислении потенциалов гравитационного поля для планет. Сама же формула (5) определяет не потенциал, а напряженность гравитационного поля, совпадающей с ускорением свободного падения. Формула же для потенциала имеет вид:

$$\varphi(r) = \gamma \frac{M_{\text{з}}^{\text{г}}}{r} \qquad (6)$$

По определению, ни гравитационная, ни инерциальная массы не изменяются при преобразованиях Галилея, то есть являются скалярами этих преобразований: скаляр ─ это тензор нулевого ранга.

Релятивистская физика (СТО)

В связи с релятивистским обобщением пространственно-временных отношений классической физики, необходимо уточнить понятие массы и её взаимосвязи с гравитационными свойствами. Эта связь весьма важна в той роли, которую будет играть масса в релятивистской теории гравитации (РТГ).

"Второй закон Ньютона" в релятивистском оформлении для точечной частицы представляется в виде:

$$\frac{dp^i}{ds} = mc\frac{du^i}{ds} = mc\frac{d^2x^i}{ds^2} = g^i, (i = 0,1,2,3) \qquad (7)$$

Здесь: x^i - координаты события в метризованном четырёхмерном пространстве-времени Минковского; ds - элемент интервала, между двумя бесконечно близкими событиями, связанными движущейся точкой и служащий "расстоянием" в 4-пространстве-времени; u^iи p^i - 4-скорость и 4-импульс точечной частицы; g^i - 4-сила, действующая на частицу; m - масса точечной частицы.

Определения 4-векторов динамических характеристик: скорости (u^i) и импульса (p^i) - формально совпадают с их трёхмерными классическими определениями, но с заменой в операциях дифференцирования времени t на более общий причинно упорядочивающий фактор - интервал s:

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} \qquad (8)$$

$$p^i = mcu^i = mc\ \frac{dx^i}{ds} \qquad (9)$$

где

$$ds^2 = (cdt)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \qquad (10)$$

При выделении временных и 3-пространственных составляющих 4-векторов с учётом (10), (8) и (9) принимают вид:

$$u^i = \left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad \frac{\vec{\boldsymbol{v}}/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right), \quad \text{где } \vec{\boldsymbol{v}} = \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} \qquad (11)$$

$$p^i = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad \frac{m\vec{\boldsymbol{v}}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right) \qquad (12)$$

Выражение (12) запишем в виде

$$p^i = \left(\frac{E}{c}, \quad \vec{\boldsymbol{p}}\right), \tag{13}$$

который определяет *4-вектор энергии-импульса* для точечной частицы.

Нетрудно убедиться в справедливости соотношения

$$p^i p_i = m^2c^2, \tag{14}$$

которое равносильно следующему

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2c^2 \text{ или} \tag{15}$$

$$E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2} \tag{16}$$

Справедливо, очевидно и следующее соотношение

$$m = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{E^2}{c^2} - p^2} \tag{17}$$

Соотношение (14) позволяет сделать важный методологический вывод СТО: *масса точечной частицы есть норма ("длина") 4-вектора энергии-импульса P^i и, следовательно, она является инвариантом лоренцевых преобразований, то есть не меняется при переходе в другие инерциальные системы отсчёта*. В связи с "исчезновением" определяющего соотношения (1), исчезает и понятие инерциальной массы. При этом формулировка принципа эквивалентности инерциальной и гравитационной масс (4) заменяется на более общую: свободное движение материальной точки в гравитационном поле не зависит от её массы.

Величина инвариантной массы совпадает с *собственной массой*, измеренной в собственной системе отсчёта, то есть в системе отсчёта, в которой частица покоится, а собственная масса точечной частицы определяется как энергия в системе отсчёта, в которой $p = 0$:

$$m = \frac{E}{c^2} \tag{18}$$

В противном случае для определения или измерения массы необходимо будет научится вычитать из полной энергии частицы её "кинетическую" составляющую, которая представляется заведомо нековариантной величиной.

Энергия и импульс представляют собой *аддитивные интегралы движения*, поэтому последнее замечание позволяет определить массу ансамбля точечных частиц, как общую энергию ансамбля в системе отсчёта, в которой суммарный импульс ансамбля равен нулю:

$$M = \frac{1}{c^2}\left\{\sum_i E_i + \sum_i E_{i*}\right\}, \qquad \vec{\boldsymbol{P}} = \sum_i \vec{\boldsymbol{p}}_i = 0 \tag{19}$$

Здесь $E_i -$ энергия i-ой частицы; $E_{i*} -$ энергия взаимодействия i-ой частицы с оставшимся окружением; $\vec{\boldsymbol{p}}_i -$ импульс i-ой частицы; $\vec{\boldsymbol{P}} -$ полный импульс ансамбля частиц.

Эмпирическим подтверждением формул (19) является каждодневная работа АЭС, выдающих "на-гора" валовое производство электроэнергии. Человечество же впервые убедилось в верности этих формул в 1945 году (Хиросима, Нагасаки).

Пространственно распределённые объекты.

В классической физике для описания характеристик распределённой среды вводится скалярная плотность распределения $\rho(\vec{\boldsymbol{r}})$, а масса M вещества, локализованного внутри конечного объёма, определяется как

$$M = \int_V \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\, dV \tag{20}$$

Закон сохранения вещества в неограниченной среде представляется равенством в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{\boldsymbol{j}} = 0, \tag{21}$$

которое можно записать в виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = 0, \tag{22}$$

где $\vec{\boldsymbol{j}} -$ плотность потока вещества. Интегрирование обеих частей (21) по объёму и использование теоремы Гаусса-Остроградского позволяет получить закон сохранения вещества в объёме V, ограниченным поверхностью S:

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \oint\limits_{S} \vec{\boldsymbol{j}}\, d\vec{\boldsymbol{s}} = 0 \qquad (23)$$

Интегрирование в (23) осуществляется по поверхности, ограничивающей объём пространственного интегрирования. Смысл выражения (23) очевиден: причиной изменения массы M вещества внутри объёма V (первый член равенства) является поток $\vec{\boldsymbol{j}}$ через поверхность S , ограничивающую объём V(второй член равенства).

Перейдём теперь к описанию полевой среды. Согласно классической механике, количественные характеристики среды описываются плотностями и потоками, то есть количествами, отнесёнными к единицам объёма и площади, и потоками, изменяющими эти количества. Согласно теории относительности, масса и энергия связываются в единую сущность, описываемую для точечного объекта 4-вектором энергии-импульса. С учётом этих двух обстоятельств импульсно-энергетические характеристики поля будут описываться 4-тензором. Можно показать (см., например,[1,3]), что релятивистский тензор энергии-импульса сплошной среды представляется в виде матрицы T^{ik}:

$$T^{ik} = \begin{Vmatrix} W & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ S_x/c & t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ S_y/c & t_{yx} & t_{yy} & t_{yz} \\ S_z/c & t_{zx} & t_{zy} & t_{zz} \end{Vmatrix} \qquad (24)$$

Трансляционная симметрия пространственно-временных отношений, обусловленная однородностью пространства и времени, связь энергии и массы (18), нелокализованность среды - приводят к дифференциальной форме закона сохранения энергии-импульса в четырёхмерном пространстве-времени Минковского, в форме аналогичной (21):

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = 0 \qquad (25)$$

По дважды повторяющемуся индексу k подразумевается суммирование по его значениям, равным - 0,1,2,3 (правило Эйнштейна).

В общем случае справедлива теорема Гаусса для четырёхмерного пространства:

$$\oint T^{ik} dS_k = \int \frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k}\, d\Omega \qquad (26)$$

В левой части равенства интегрирование производится по произвольной замкнутой гиперповерхности, а в правой части по заключённому в ней 4-объёму.

Согласно (25), получаем

$$\oint T^{ik} dS_k = 0 \qquad (27)$$

Если замкнутую поверхность интегрирования представить в виде параллелепипеда с параллельными 3-гиперплоскостями перпендикулярными оси X^0: $x_1^0 = ct_1$ и $x_2^0 = ct_2$, и бесконечно удалёнными стенками, где исчезает поле, то сам интеграл превратится в разность интегралов по объёму в разные моменты времени, то есть

$$\int T^{i0}(t_2)\, dV - \int T^{i0}(t_1)\, dV = 0 \qquad (28)$$

поскольку $dS_0 = dV$. Запишем (28) в виде:

$$\int T^{i0}(t_2)\, dV = \int T^{i0}(t_1)\, dV \qquad (29)$$

Очевидно, что (29) представляет собой закон сохранения.

Вообще интеграл

$$P^i = \frac{1}{\mathrm{c}} \int T^{ik} dS_k \qquad (30)$$

по любой гиперповерхности, включающей в себя всё трехмерное пространство является 4-вектором и в силу (25) сохраняется. Этот вектор и должен быть отождествлён с 4-импульсом поля (вектором энергии-импульса).

Равенство (25) равносильно следующим четырём, аналогичным (22) :

$$\frac{1}{c}\frac{\partial T^{i0}}{\partial t} + \frac{\partial T^{i1}}{\partial x^1} + \frac{\partial T^{i2}}{\partial x^2} + \frac{\partial T^{i3}}{\partial x^3} = 0 \qquad (31)$$

Здесь $ct = x^0$, а координатам x^1, x^2, x^3 соответствуют декартовые - x, y, z. Таким образом, равенство (31) представляет собой четыре закона сохранения, записанные в дифференциальной форме.

Рассмотрим каждое из этих уравнений. Для того, чтобы уяснить их смысл, разберёмся с компонентами тензора T^{ik} по строчкам в (24).

Первая строка: $W -$ плотность энергии поля; $\vec{\boldsymbol{S}} -$ плотность потока энергии поля. Первое уравнение для $i = 0$ принимает вид

$$\frac{1}{c}\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} + \frac{\partial S_z}{\partial z} = \frac{1}{c}\frac{\partial W}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{\boldsymbol{S}} = 0 \text{ или} \qquad (32)$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial W}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{\boldsymbol{S}} = 0 \qquad (33)$$

Соотношение (33) представляет собой закон сохранения энергии вида (21), который может быть представлен в форме, аналогичной (23).

Оставшиеся строки - однотипны и относятся к закону сохранения импульса. Рассмотрим, например, третью строку.

Третья строка: $\vec{\boldsymbol{S}}$ – плотность импульса поля. В первом столбце оставшихся строк (со второй по четвёртую) представлены компоненты этого вектора. В силу симметрии тензора T^{ik} плотность потока энергии совпадает с плотностью импульса; $t_{\alpha\beta}$ – плотность потока α-компоненты импульса через единицу площадки ортогональной оси β. Здесь под индексами α или β удобнее подразумевать непосредственно координаты x, y, z. Например, t_{yx} – определяет поток y-составляющей импульса через площадку перпендикулярную оси x, а само уравнение принимает вид:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial S_y}{\partial t} + \frac{\partial t_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial z} = \frac{1}{c}\frac{\partial S_y}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{\boldsymbol{t}}_y = 0 \text{ или} \qquad (34)$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial S_y}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{\boldsymbol{t}}_y = 0 \qquad (35)$$

Все возможные компоненты плотности потоков импульса, "пополняющие" y-компоненту импульса, представлены на рис. 1

Диагональные элементы $t_{\alpha\beta}$ представляют силы положительного и отрицательного давления; недиагональные - тангенциальные воздействия. Например, в механике - это силы касательного трения, приводящие тело в движение.

Теперь мы можем дать определение массе поля.

Массой поля естественно назвать "одномоментный" интеграл по конечному объёму

$$M = \int\limits_V W dV \qquad (36)$$

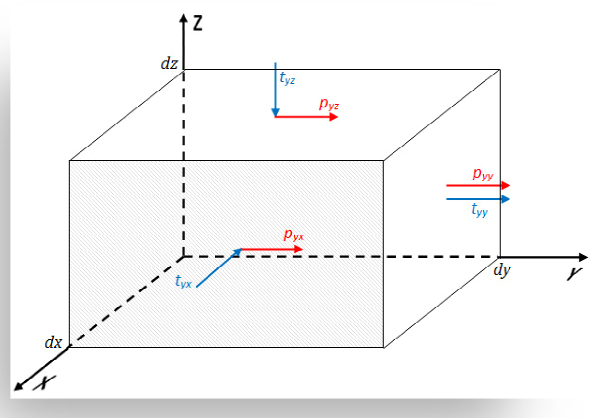

Рис 1. ***Потоки у-составляющей импульса через три координатных направления***

в системе отсчёта, в которой суммарный импульс равен нулю.
Здесь намеренно употреблено слово "*одномоментный*", чтобы подчеркнуть возможность нарушения синхронности интегрирования в другой инерциальной системе отсчёта.

При отсутствии потоков энергии и импульсов через поверхность, ограничивающую объём интегрирования, масса поля сохраняется и поэтому её естественно назвать *собственной массой поля*. В этом случае тензор энергии-импульса должен иметь вид:

$$T^{ik} = \begin{Vmatrix} W & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ 0 & t_{yx} & t_{yy} & t_{yz} \\ 0 & t_{zx} & t_{zy} & t_{zz} \end{Vmatrix} \qquad (37)$$

Таким образом, собственная масса поля определяется при наличии довольно жёстких граничных условий, наложенных на конфигурацию поля, включая условия сходимости интеграла (36).

Не всегда можно определить массу поля. Например, для плоской монохроматической волны, распространяющейся вдоль оси Z, тензор энергии-импульса принимает вид:

$$T^{ik} = \begin{Vmatrix} W & 0 & 0 & W \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ W & 0 & 0 & -W \end{Vmatrix} \qquad (38)$$

Здесь: $\vec{\boldsymbol{E}} = (E, 0, 0)$; $\vec{\boldsymbol{H}} = (0, H, 0)$; $\vec{\boldsymbol{S}} = (0,0,S)$; $E = H$; $W = (E^2 + H^2)/8\pi$. Кроме недиагональной формы тензора (38), для монохроматической волны не выполняются асимптотические граничные условия: монохроматическая волна остаётся монохроматической и на бесконечности: амплитуды её векторов E и H всегда и везде имеет конечную величину.

Релятивистская физика (ОТО)

Принцип эквивалентности избавил нас от необходимости различать инертную и гравитационную массы. СТО установила связь энергии и массы. В этом случае пространственное распределение энергий (масс) будет влиять на гравитационные распределения сил в этом же пространстве. Выбор представления гравитационного потенциала в виде тензора и отождествление метрического тензора g_{ik} с потенциалами гравитационного поля полностью геометризирует теорию тяготения. Поэтому понятие массы, как энергии, сохраняет свою актуальность и в ОТО. Связь материального тензора энергии-импульса T_{ik} с метрическим тензором пространственно-временного континуума g_{ik} выражается уравнением релятивистской теории гравитации Гильберта-Эйнштейна:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R + \Lambda g_{ik} = \varkappa T_{ik} \qquad (39)$$

Здесь: g_{ik} −метрический тензор пространства-времени; R_{ik} − тензор кривизны второго ранга; R − скалярная кривизна, получаемая, как свёртка тензора кривизны; Λ − космологическая постоянная; $\varkappa = 8\pi k$, где k − гравитационная постоянная.

Характерная особенность уравнения (39). Внешние причины, создающие гравитационное поле, задаются материальным тензором T_{ik} правой части уравнения. Однако результат воздействия этих причин - дополнительная гравитационная энергия (в силу нелинейности уравнений), описываемая левой частью уравнения, не входит в исходный тензор энергии-импульса T_{ik}. Поэтому результат вычисление полной энергии поля или соответствующей массы поля с помощью лишь материального тензора будет не полным. Необходимо перенести гравитационную энергетическую составляющую в правую часть равенства. Но здесь возникают вопросы: а не появятся ли отрицательные значения масс и энергий, останутся ли ограниченными их значения? До сих пор массы и соответствующие энергии были положительным, а значит и ограниченными снизу величинами. Отрицательность же и неограниченность энергий означает невозможность стабильного существования материи, и это было бы крахом уравнения (39). Кроме того, вид тензора T_{ik} довольно произволен и он - внешний по отношению к РТГ, а решения, полученные на его основе могут оказаться в противоречии с физической реальностью. Физичности решений, можно добиться наложением дополнительных условий на свойства тензора энергии-импульса T_{ik} . Сегодня это достигается введением так называемых энергетических условий. При выполнении довольно правдоподобных энергетических условий (доминантного) геометрически доказывается теорема о положительной энергии. Эта теорема устанавливает жёсткую геометрическую связь скалярной кривизны с асимптотическими граничными условиями. Суть теоремы: масса асимптотически плоского пространства неотрицательна. Кроме того, масса обращается в нуль только для пространства-времени Минковского. По-существу эта теорема утверждает, что нелокализованное поле, но асимптотически пребывающее в плоском пространстве имеет положительную энергию, а значит и массу. Однако вопрос остаётся открытым по поводу конечной величины этой массы.

Пусть при выполненных энергетических условиях найдено решение уравнений Гильберта-Эйнштейна, то есть компоненты метрического тензора g_{ik}. При приведении "подобных" членов в левой и правой частях уравнения (39), мы получим "скорректированный" тензор энергии-импульса $\tilde{T}^{ik}$. Во исполнение этой программы в [1] вводится псевдотензор энергии-импульса гравитационного поля τ^{ik}, так что (30) принимает вид:

$$P^i = \frac{1}{\mathrm{c}} \int (-g) \tilde{T}^{ik} dS_k \, , \qquad (40)$$

где $\tilde{T}^{ik} = (T^{ik} + \tau^{ik})$; g − определитель метрического тензора.

Интегрирование в (40) может производиться по бесконечной гиперповерхности, включающей в себя всё трехмерное пространство. Если выбрать в качестве неё гиперповерхность $x^0 = \mathrm{const}$, то P^i можно записать в виде трехмерного пространственного интеграла:

$$P^i = \frac{1}{\mathrm{c}} \int (-g)(T^{i0} + \tau^{i0}) dV \, , \qquad (41)$$

Тогда полные энергия и масса поля могут быть вычислены по формулам:

$$E = \int\limits_{x^0=\mathrm{const}} (-g)\, \tilde{T}^{i0} \, dV \qquad (42)$$

$$M = \frac{E}{c^2} \qquad (43)$$

Интегрирование в (42) осуществляется по части гиперповерхности постоянного координатного времени, то есть по области координатного пространства, энергия E которого находится.

Определение массы в ОТО по Ландау - это одно из определений. Существуют и другие определения [3] для разных частных случаев: *AMD-, Bondy-, Komar-...* и т. д. Однако сложность однозначного и единого определения массы и энергии - общая для всех интегральных характеристик в ОТО. Дело в том, что для описания локальных пространственно-временных характеристик "придумана" операция ковариантного дифференцирования, однако для получения интегральных характеристик единой обратной операции не существует.

Литература

[1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.. *Теоретическая физика. Т II (Теория поля).* Наука, М., 1988

[2] Касимов В.А. *Специальная теория относительности (без второго постулата).* "Сибпринт". Новосибирск, 2013 г.
https://www.academia.edu/35877014/

[3] Касимов В.А. *Общая теория относительности (принципы).* Сибпринт. Новосибирск, 2013.
https://www.academia.edu/35877014/

*****

Для связи:
quadrica-m@mail.ru

Авторский семинар
http://my.mail.ru/community/physiks.princips/?ref=cat

http://quadrica.ucoz.net/
https://independent.academia.edu/KasimovVladimir
https://vk.com/public128913510
https://www.facebook.com/quadrica.m
http://orcid.org/0000-0002-1435-9220

*****

В.А. Касимов. Об эволюции понятия массы в физике

Аннотация
Рассматривается релятивистский аспект обобщения, который "снял" различие между свойствами инерциальной гравитационной, инерционной, инертной массами, породив, однако проблему нелокальности энергии (и многовариантные её решения), характерную для интегральных характеристик ОТО.

V.A. Kasimov. About evolution of the concept of mass in physics

Abstract
Examines the relativistic aspects of generalization, which "removed" the distinction between inertial, gravitational, inertia, inert properties of mass, giving rise, however, the problem of non-locality of energy (and its multivariate solution), characteristic of the integral characteristics of the GTR.