Ещё раз о квантовой "спутанности"

В.А. Касимов (E-mail: *quadrica-m@mail.ru*)

Феноменология

В представлении проблемы присутствуют два аспекта − *концептуальный* и *технологический.* Здесь мы не будем касаться технологических аспектов подготовки и воплощения техники исполнения экспериментов (например, эксперимента Аспека), сосредоточив внимание на концептуальных принципах квантовой теории.

В физике изначально топологически отделимые объекты − различимы. В силу этого топологического свойства, мы всегда имеем возможность пересчитать объекты, присвоить им порядковые номера и адресоваться к объектам по присвоенным номерам.

1. Используя это обстоятельство и рассматривая фотоны как изначально различимые частицы (в классическом смысле, *хотя это как мы увидим далее, приведёт нас к существенной корректировке такого взгляда*), будем говорить о двух фотонах, распространяющихся в двух противоположных направлениях. При этом фотону, распространяющийся влево, присвоим номер 1, а фотону, распространяющемуся вправо − номер 2. Отделимость фотонов демонстрируется тем фактом, что один фотон может быть зарегистрирован слева, а второй − справа, иллюстрируя тем самым пространственную различимость и возможность их нумерации. Вместо нумерации фотонов может быть удобнее будет использовать символы стрелок "$\leftarrow$" и "$\rightarrow$", указывающие непосредственно направление движения.

В классическом представлении в качестве рабочей модели будем рассматривать двухфотонную установку Аспека: два фотона рождаются и распространяются в противоположных направлениях. Мы будем рассматривать ещё одну характеристику фотона, кроме нумерации 1 и 2, его поляризацию, которая может принимать два значения − "левая" и "правая", а в спиновой нотации − "$\uparrow$" и "$\downarrow$".

Итак, фотон 1 летит налево ($\leftarrow$), фотон 2 − направо ($\rightarrow$). Символически мы можем рассматривать следующие ситуации:

1) $|\uparrow,\leftarrow\rangle \equiv |\uparrow\rangle_1$ − первый фотон находится в состоянии "спином вверх", без всякой информации о втором фотоне;

2) $|\downarrow,\rightarrow\rangle \equiv |\downarrow\rangle_2$ − второй фотон находится в состоянии "спином вниз", без всякой информации о первом фотоне;

3) $|\uparrow,\leftarrow\rangle \otimes |\downarrow,\rightarrow\rangle \equiv |\uparrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2$ − совместное состояние двух фотонов: первый фотон находится в состоянии "спином вверх", второй фотон находится в состоянии "спином вниз".

4) $|\downarrow,\leftarrow\rangle \otimes |\uparrow,\rightarrow\rangle \equiv |\downarrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2$ − совместное состояние двух фотонов: первый фотон находится в состоянии "спином вниз", второй фотон находится в состоянии "спином вверх".

Случаи **1)** и **2)** представляют собой описания одночастичных систем, их формальные решения (без начальных условий) совпадают, а в индексации частиц необходимость отсутствует. Случаи **3)** и **4)** представляют собой описания двухчастичных систем, а индексы конкретизируют состояния каждой из частиц.

В принципе для всех этих состояний можно привести соответствующие аналоги описания одно- и двухфотонной систем и в классической физике. Однако в квантовой физике существует принципиально новый и важный момент, невоспроизводимый в классической физике. Поясним.

2. Волновое уравнение квантовой механики может описывать двухфотонные состояния как $|\uparrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2$ и $|\downarrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2$, так и суперпозицию $|\uparrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2$. Обратим внимание на цепочку

$$\{|\uparrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2\} \equiv \{|\uparrow,\leftarrow;\ \downarrow,\rightarrow\rangle\} \equiv \{|\uparrow,\downarrow\rangle\} \tag{1}$$

В последнем равенстве $|\uparrow,\leftarrow;\ \downarrow,\rightarrow\rangle \equiv |\uparrow,\downarrow\rangle$ стирается однозначная связь между "спином" и направлением движения или между спином и номером частицы. Эту процедуру можно назвать процедурой симметризации по индексам частиц.

Можно видеть, что результатом следования в переобозначениях по приведённой цепочке является описание безиндексной конструкции $\{|\uparrow,\downarrow\rangle\}$, о которой можно сказать, что она и представляет *путь-спутанную* или *"спин"-спутанную* систему двух фотонов. Эта конструкция представляет собой некую *целостность*, которая описывается одним вектором состояния или волновой функцией, то есть представляет единичный квантовый объект. Топологическая отделимость фотонов между собой исчезает! И, если каким-то образом нам удастся присвоить номера фотонам пары при их рождении, нам не дано будет узнать какой из фотонов (первый или второй) будет зарегистрирован слева или справа. Это то, о чём говорилось в начале статьи. В силу целостности двухфотонного объекта между пространственно-разделёнными точками, находящимися в сфере влияния этого объекта могут наблюдаться корреляции. И действительно, когда в эксперименте Аспека эта целостность наблюдалась из двух пространственно-разнесённых точек, существование корреляционной связи между концами этой целостности было подтверждено.

3. Далее. Состояние квантовой системы может быть выражено в общем виде как $\psi = Ae^{i\varphi}$, что позволяет представить левую часть (1) в виде

$$\{|\uparrow,\downarrow\rangle\} \equiv \psi = A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2} \tag{2}$$

Тогда

$$\psi = A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2} = \{A_1 + A_2 e^{i\delta}\} e^{i\varphi_1} = \{A_1 e^{-i\delta} + A_2\} e^{i\varphi_2}, \tag{3}$$

где A_1 и A_2 — действительные числа, а $\delta = \varphi_2 - \varphi_1$. Обратим внимание на фрагмент соотношения (3)

$$\{A_1 + A_2 e^{i\delta}\} e^{i\varphi_1} = \{A_1 e^{-i\delta} + A_2\} e^{i\varphi_2}, \tag{4}$$

Здесь слева присутствует фаза φ_1 левой части квантового объекта в установке Аспека, справа фаза φ_2 — правой части, а в скобках фаза δ, характеризующая целостную конструкцию квантового объекта. Причём при квантовом описании целостного объекта экспоненциальные множители с фазами φ_1 и φ_2 вне скобок могут быть опущены, поскольку квантовая механика описывает состояния с точностью до произвольного множителя по модулю равным 1, то есть $\{A_1 + A_2 e^{i\delta}\}$ и $\{A_1 e^{-i\delta} + A_2\}$ описывают одно и тоже состояние двухфотонной квантовой системы.

И здесь — самое главное: меняя φ_2 при сохранении δ мы неизбежно, согласно (4), должны получить изменение φ_1. С точки зрения технологии эксперимента Аспека это выглядит так: изменяя с помощью поляризатора фазу φ_2 пары фотонов (постоянство фазы δ) мы должны наблюдать изменение фазы φ_1. Поскольку фазы φ_1, φ_2, δ не содержат зависимостей от координаты z оси Z и времени t, пространственно-временная зависимость φ_1 от φ_2 не будет детерминированной, то есть функциональной, а наблюдения могут показывать только статистическую зависимость $\varphi_1(\varphi_2)$ при неизвестном механизме взаимодействия между частями когерентной целостности [1)]. О состоянии целостного объекта при сохранении δ говорят как о *когерентных* состояниях "частиц"[2)] пары.

Формализм

При концептуальном оформлении результатов эксперимента Аспека необходимо говорить на языке квантовой механики, а не на языке *арго* частных озарений. Предметом одного из таких озарений является понятие "*спутанности*". Между тем, язык квантовой механики позволяет чётко и недвусмысленно наполнить конкретным содержанием возникшие вопросы по этому поводу. Для анализа предлагается элементарная модель, используемая в [1, 2].

Рассматриваем две частицы и помечаем их индексом α, $(\alpha = 1, 2)$. Каждая из них может находиться в одном i из двух состояний $(i = 1,2)$, часто обозначаемых стрелками (в спиновой нотации): $\uparrow$ для $(i = 1)$ и $\downarrow$ для $(i = 2)$.

Введём двухиндексное обозначение x_i^α, где верхний индекс α обозначает частицу, нижний индекс i - её состояние $(\alpha, i = 1, 2)$. Тогда состояние каждой из двух частиц можно представлять

[1)] Установление зависимости $\delta(z)$ может дать возможность описания распространения сигнала через модуляцию этой фазы (например, по типу "волны-пилота" де Бройля-Бома). Это к модели (4) расчётного алгоритма.

[2)] Понимая, что понятие *частицы* в квантовой механике - весьма условно, мы будем использовать этот термин для краткости опуская кавычки. Однако в процессе *декогеренции* (см. ниже) понятие частицы приобретает большую классическую определённость.

вектором $|x_i^\alpha\rangle$ одночастичного пространства. Например, вектор $|x_1^1\rangle$ представляет первую частицу в состоянии ↑ ; $|x_2^2\rangle$ — вторую частицу в состоянии ↓ ... и т. д. Эти вектора получается как решение одночастичного волнового уравнения квантовой механики.

Введём также четырёхиндексное выражение x_{ik}^{12}, которое позволит определить вектор $|x_{ik}^{12}\rangle$ уже двухчастичного пространства через прямое произведение векторов одночастичных пространств $|x_i^1\rangle$ и $|x_k^2\rangle$. Если гамильтониан двухчастичной системы предполагает возможность разделения переменных волнового уравнения то, по-крайней мере, порядок решения волнового уравнения известен и допускает представление решения $|x_{ik}^{12}\rangle$ в виде:

$$|x_{ik}^{12}\rangle = |x_i^1\rangle \otimes |x_k^2\rangle, \tag{5}$$

то есть вектор $|x_{ik}^{12}\rangle$ получаются как композиция решений одночастичных волновых уравнений.

Интегрируя по непрерывным переменным и суммируя по всем квантовым числам одной частицы в (5), разумеется, как свёртку с комплексно сопряжёнными параметрами, мы получаем волновой вектор (функцию) для другой частицы. При этом необходимо заметить, что *возможность осуществления именно операции свёртки позволит нам говорить о частицах, как о неких отделимых сущностях* (в данном случае как о двух частицах).

В случае однотипных[3)] частиц, нас интересуют два возможных решения для пары частиц в соответствии с принципом тождественности частиц: симметричном (для бозонов) и антисимметричном (для фермионов). В соответствии с принципом суперпозиции эти решения можно представить в виде:

$$|\hat{x}_{ik}\rangle = |x_{ik}^{12}\rangle \pm |x_{ik}^{21}\rangle, \tag{6}$$

где верхний знак соответствует случаю бозе-частиц, нижний — ферми-частиц.

Выделим в решениях $|x_{ik}^{12}\rangle$ и $|x_{ik}^{21}\rangle$ фазовые множители φ_1 и φ_2,

$$|x_{ik}^{12}\rangle = ||x_{ik}^{12}|\rangle e^{i\varphi_1}, |x_{ik}^{21}\rangle = ||x_{ik}^{21}|\rangle e^{i\varphi_2}, \tag{7}$$

а (6) перепишем в виде

$$|\hat{x}_{ik}\rangle = ||x_{ik}^{12}|\rangle e^{i\varphi_1} \pm ||x_{ik}^{21}|\rangle e^{i\varphi_2} = \{||x_{ik}^{12}|\rangle \pm ||x_{ik}^{21}|\rangle e^{i\delta}\} e^{i\varphi_1}, \tag{8}$$

где $\delta = \varphi_2 - \varphi_1$.

Отметим произвольность фаз φ_1 и φ_2 — таково свойство решений $|x_i^1\rangle$, $|x_k^2\rangle$ и $|x_{ik}^{12}\rangle$, определяемых с точностью до произвольной фазы. Эти же решения представляют *чистые* квантовомеханические состояния как описываемые векторами состояний: $|x_i^1\rangle$ и $|x_k^2\rangle$ — одночастичного пространства и $|x_{ik}^{12}\rangle$ — двухчастичного пространства

Фиксируя разницу фаз $\delta = \varphi_2 - \varphi_1$ мы превращаем двухчастичную систему $|\hat{x}_{ik}\rangle$ в целостную сущность когерентного сосуществования квантовых объектов $|x_{ik}^{12}\rangle$ $|x_{ik}^{21}\rangle$. Собственно в этом и состоит суть проявления феномена *спутанности состояний двух квантовых объектов*. Освобождая же фазы φ_1 и φ_2 мы предоставляем квантовым объектам возможность свободного и независимого сосуществование для каждого из них. В этом состоит суть проявления феномена разрушения целостности объекта и декогеренции квантовых состояний вновь возникших объектов.

В этой связи *принцип тождественности квантовых частиц* можно рассматривать как статический аспект спутанности, а *корреляции* в результатах экспериментов Аспека как динамический аспект обменного взаимодействия.

[3)] Случай однотипных частиц рассматривается в связи с тем, что в интерпретации экспериментов Аспека используется именно пара фотонов (бозонов) или пара фермионов (в ЭПР версии). При этом выводы предварительных результатов становятся более прозрачными. Преодолеть эту частность можно рассмотрением разделения и симметризации переменных не всех параметров частиц, а группы тождественных свойств. Тогда "спутанность" как аргопонятие, получает свою определённость и для различных частиц микро- и мезо- масштабов, хотя пока нет причин для отказа рассмотрения и макромасштабов

Следует заметить, что процедура проецирования (связанная с редукцией) симметризованного вектора двухчастичного пространства $|\hat{x}_{ik}\rangle$ на одночастичное подпространство уже не будет представляться унитарным преобразованием, что обязательно для описания эволюции согласно уравнению Шредингера, и является важной особенностью феномена *декогеренции*. Эта проекция не будет представлять *чистое* одночастичное состояние, поскольку соответствующая частица уже будет находиться в среде другой. В силу этого её состояние не может быть описано вектором состояния, оно должно будет описываться *матрицей плотности*. Декогеренция же как феномен, позволяет описать переход от квантовой механики к классической (см., например, [4]).

Приложение 1

Одночастичная матрица плотности в 2-пространстве

В базисе одночастичного пространства состояний

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\ |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad (п1.1)$$

состояние $|x_i^\alpha\rangle = \begin{pmatrix}x_1^\alpha\\x_2^\alpha\end{pmatrix}$ можно представить в виде суперпозиции

$$|x_i^\alpha\rangle = x_1^\alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + x_2^\alpha\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = x_1^\alpha|\uparrow\rangle + x_2^\alpha|\downarrow\rangle\rangle, \qquad (п1.2)$$

где x_1^α *и* x_2^α − амплитуды вероятности для состояний $|\uparrow\rangle$ *и* $|\downarrow\rangle$ *первой* $(\alpha = 1)$*или втрой* $(\alpha = 2)$ частиц.

Из условия нормировки вектора (п1.2) следует

$$|x_1^\alpha|^2 + |x_2^\alpha|^2 = 1. \qquad (п1.3)$$

Матричные элементы $\bar{M}_{ik}^\alpha$ матрицы плотности $\bar{M}^\alpha$ принимают вид: [4)]

$$\bar{M}_{ik}^\alpha = |x_i^\alpha\rangle\langle x_k^\alpha| = \begin{pmatrix}|x_1^\alpha|^2 & x_1^\alpha * \tilde{x}_2^\alpha\\ \tilde{x}_1^\alpha * x_2^\alpha & |x_2^\alpha|^2\end{pmatrix}. \qquad (п1.4)$$

Используя (п1.4) с учётом (п1.3), получаем:

$$\sum_n \bar{M}_{in}^\alpha \bar{M}_{nk}^\alpha = \begin{pmatrix}|x_1^\alpha|^2 & x_1^\alpha * \tilde{x}_2^\alpha\\ \tilde{x}_1^\alpha * x_2^\alpha & |x_2^\alpha|^2\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}|x_1^\alpha|^2 & x_1^\alpha * \tilde{x}_2^\alpha\\ \tilde{x}_1^\alpha * x_2^\alpha & |x_2^\alpha|^2\end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix}|x_1^\alpha|^2 * |x_1^\alpha|^2 + x_1^\alpha * \tilde{x}_2^\alpha * \tilde{x}_1^\alpha * x_2^\alpha & |x_1^\alpha|^2 * x_1^\alpha * \tilde{x}_2^\alpha + x_1^\alpha * \tilde{x}_2^\alpha * |x_2^\alpha|^2\\ \tilde{x}_1^\alpha * x_2^\alpha * |x_1^\alpha|^2 + |x_2^\alpha|^2 * \tilde{x}_1^\alpha * x_2^\alpha & \tilde{x}_1^\alpha * x_2^\alpha * x_1^\alpha * \tilde{x}_2^\alpha + |x_2^\alpha|^2 * |x_2^\alpha|^2\end{pmatrix} = \bar{M}_{ik}^\alpha, \qquad (п1.5)$$

Пояснение 1

$$|x_1^\alpha|^2 * |x_1^\alpha|^2 + x_1^\alpha * \tilde{x}_2^\alpha * \tilde{x}_1^\alpha * x_2^\alpha = |x_1^\alpha|^2 * |x_1^\alpha|^2 + |x_1^\alpha|^2 * |x_2^\alpha|^2 = |x_1^\alpha|^2 * (|x_1^\alpha|^2 + |x_2^\alpha|^2) = |\boldsymbol{x}_1^\alpha|^2$$
$$|x_1^\alpha|^2 * x_1^\alpha * \tilde{x}_2^\alpha + x_1^\alpha * \tilde{x}_2^\alpha * |x_2^\alpha|^2 = x_1^\alpha * \tilde{x}_2^\alpha * (|x_1^\alpha|^2 + |x_2^\alpha|^2) = \boldsymbol{x}_1^\alpha * \tilde{\boldsymbol{x}}_2^\alpha$$
$$\tilde{x}_1^\alpha * x_2^\alpha * |x_1^\alpha|^2 + |x_2^\alpha|^2 * \tilde{x}_1^\alpha * x_2^\alpha = \tilde{x}_1^\alpha * x_2^\alpha * (|x_1^\alpha|^2 + |x_2^\alpha|^2) = \tilde{\boldsymbol{x}}_1^\alpha * \boldsymbol{x}_2^\alpha$$
$$\tilde{x}_1^\alpha * x_2^\alpha * x_1^\alpha * \tilde{x}_2^\alpha + |x_2^\alpha|^2 * |x_2^\alpha|^2 = |x_2^\alpha|^2 * (|x_2^\alpha|^2 + |x_2^\alpha|^2) = |\boldsymbol{x}_2^\alpha|^2$$

Таким образом,

$$(\bar{M}^\alpha)^2 = \bar{M}^\alpha, \qquad (п1.6)$$

а матрица плотности $\bar{M}^\alpha$, определяемая (п1.4), описывает *чистое* состояние как и вектор (п1.2)[5)].

[4)] Знаком тильды "~" здесь обозначаются комплексно сопряжённые величины.

[5)] Операторы, обладающие свойством идемпотентности $M^2 = M$, называются проекционными операторами. Таким образом, матрицы плотности чистых состояний представляются проекционными операторами.

Двухчастичная матрица плотности в 4-пространстве

В базисе двухчастичного пространства состояний

$$|\uparrow\uparrow\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix};\quad |\uparrow\downarrow\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix};\quad |\downarrow\uparrow\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix};\quad |\downarrow\downarrow\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad (\text{п}1.7)$$

состояние $|x_{ik}^{\alpha\beta}\rangle = \begin{pmatrix}x_{11}^{12}\\x_{12}^{12}\\x_{21}^{12}\\x_{22}^{12}\end{pmatrix}$ можно представить в виде суперпозиции

$$|x_{ik}^{\alpha\beta}\rangle = x_{11}^{12}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + x_{12}^{12}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + x_{21}^{12}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + x_{22}^{12}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = x_{11}^{12}|\uparrow\uparrow\rangle + x_{12}^{12}|\uparrow\downarrow\rangle + x_{21}^{12}|\downarrow\uparrow\rangle + x_{22}^{12}|\downarrow\downarrow\rangle\ , \qquad (\text{п}1.8)$$

где $x_{11}^{12}, x_{12}^{12}, x_{21}^{12}, x_{22}^{12}$ – амплитуды вероятностей для состояний пары частиц $|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle$ первой и второй, соответственно.

Матричные элементы $\bar{\bar{M}}_{ik}$ матрицы плотности $\bar{\bar{M}}$ принимают вид [6] :

$$\bar{\bar{M}}_{ik} = \left\| \begin{array}{c:c:c:c} |x_{11}^{12}|^2 & x_{11}^{12} * \tilde{x}_{12}^{12} & x_{11}^{12} * \tilde{x}_{21}^{12} & x_{11}^{12} * \tilde{x}_{22}^{12} \\ \hdashline x_{12}^{12} * \tilde{x}_{11}^{12} & |x_{12}^{12}|^2 & x_{12}^{12} * \tilde{x}_{21}^{12} & x_{12}^{12} * \tilde{x}_{22}^{12} \\ \hdashline x_{21}^{12} * \tilde{x}_{11}^{12} & x_{21}^{12}\tilde{x}_{12}^{12} & |x_{21}^{12}|^2 & x_{21}^{12}\tilde{x}_{22}^{12} \\ \hdashline x_{22}^{12} * \tilde{x}_{11}^{12} & x_{22}^{12} * \tilde{x}_{12}^{12} & x_{22}^{12} * \tilde{x}_{21}^{12} & |x_{22}^{12}|^2 \end{array} \right\| \qquad (\text{п}1.9)$$

Используя (п1.9) с учётом нормировки вектора (п1.8), получаем:

$$\sum_n \bar{\bar{M}}_{in}\bar{\bar{M}}_{nk} = \qquad (\text{п}1.10)$$

$$= \left\| \begin{array}{c:c:c:c} |x_{11}^{12}|^2 & x_{11}^{12} * \tilde{x}_{12}^{12} & x_{11}^{12} * \tilde{x}_{21}^{12} & x_{11}^{12} * \tilde{x}_{22}^{12} \\ \hdashline x_{12}^{12} * \tilde{x}_{11}^{12} & |x_{12}^{12}|^2 & x_{12}^{12} * \tilde{x}_{21}^{12} & x_{12}^{12} * \tilde{x}_{22}^{12} \\ \hdashline x_{21}^{12} * \tilde{x}_{11}^{12} & x_{21}^{12}\tilde{x}_{12}^{12} & |x_{21}^{12}|^2 & x_{21}^{12}\tilde{x}_{22}^{12} \\ \hdashline x_{22}^{12} * \tilde{x}_{11}^{12} & x_{22}^{12} * \tilde{x}_{12}^{12} & x_{22}^{12} * \tilde{x}_{21}^{12} & |x_{22}^{12}|^2 \end{array} \right\| * \left\| \begin{array}{c:c:c:c} |x_{11}^{12}|^2 & x_{11}^{12} * \tilde{x}_{12}^{12} & x_{11}^{12} * \tilde{x}_{21}^{12} & x_{11}^{12} * \tilde{x}_{22}^{12} \\ \hdashline x_{12}^{12} * \tilde{x}_{11}^{12} & |x_{12}^{12}|^2 & x_{12}^{12} * \tilde{x}_{21}^{12} & x_{12}^{12} * \tilde{x}_{22}^{12} \\ \hdashline x_{21}^{12} * \tilde{x}_{11}^{12} & x_{21}^{12}\tilde{x}_{12}^{12} & |x_{21}^{12}|^2 & x_{21}^{12}\tilde{x}_{22}^{12} \\ \hdashline x_{22}^{12} * \tilde{x}_{11}^{12} & x_{22}^{12} * \tilde{x}_{12}^{12} & x_{22}^{12} * \tilde{x}_{21}^{12} & |x_{22}^{12}|^2 \end{array} \right\| =$$

$$= \bar{\bar{M}}_{ik}$$

Первая строка результата умножения (п1.10) матрицы плотности на себя представлена в пояснении 2. Аналогичным образом могут быть получены результаты и по следующим строкам. Таким образом, как и в случае одночастичного пространства векторов, в двухчастичном пространстве выполняется соотношение:

$$\bar{\bar{M}}^2 = \bar{\bar{M}}, \qquad (\text{п}1.11)$$

---

[6] см. приложение 2

а матрица плотности $\overline{\overline{M}}$, определяемая (п1.9), описывает чистое состояние как и вектор (п1.8).

Пояснение 2

$$|x_{11}^{12}|^2 * |x_{11}^{12}|^2 + x_{11}^{12} * \tilde{x}_{12}^{12} * x_{12}^{12} * \tilde{x}_{11}^{12} + x_{11}^{12} * \tilde{x}_{21}^{12} * x_{21}^{12} * \tilde{x}_{11}^{12} + x_{11}^{12} * \tilde{x}_{22}^{12} * x_{22}^{12} * \tilde{x}_{11}^{12} =$$
$$|x_{11}^{12}|^2(|x_{11}^{12}|^2 + \tilde{x}_{12}^{12} * x_{12}^{12} + \tilde{x}_{21}^{12} * x_{21}^{12} + \tilde{x}_{22}^{12} * x_{22}^{12}) = |x_{11}^{12}|^2(|x_{11}^{12}|^2 + |x_{12}^{12}|^2 + |x_{21}^{12}|^2 + |x_{22}^{12}|^2) = \left|\boldsymbol{x}_{\mathbf{11}}^{\mathbf{12}}\right|^2$$

$$|x_{11}^{12}|^2 * x_{11}^{12} * \tilde{x}_{12}^{12} + x_{11}^{12} * \tilde{x}_{12}^{12} * |x_{12}^{12}|^2 + x_{11}^{12} * \tilde{x}_{21}^{12} * x_{21}^{12} * \tilde{x}_{12}^{12} + x_{11}^{12} * \tilde{x}_{22}^{12} * x_{22}^{12} * \tilde{x}_{12}^{12} =$$
$$= x_{11}^{12} * \tilde{x}_{12}^{12} * (|x_{11}^{12}|^2 + |x_{12}^{12}|^2 + |x_{21}^{12}| + |x_{22}^{12}|) = \boldsymbol{x}_{\mathbf{11}}^{\mathbf{12}} * \tilde{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{12}}^{\mathbf{12}}$$

$$|x_{11}^{12}|^2 * x_{11}^{12} * \tilde{x}_{21}^{12} + x_{11}^{12} * \tilde{x}_{12}^{12} * x_{12}^{12} * \tilde{x}_{21}^{12} + x_{11}^{12} * \tilde{x}_{21}^{12} * |x_{21}^{12}|^2 + x_{11}^{12} * \tilde{x}_{22}^{12} * x_{22}^{12} * \tilde{x}_{21}^{12} =$$
$$x_{11}^{12} * \tilde{x}_{21}^{12} * (|x_{11}^{12}|^2 + |x_{12}^{12}|^2 + |x_{21}^{12}|^2 + |x_{22}^{12}|^2) = \boldsymbol{x}_{\mathbf{11}}^{\mathbf{12}} * \tilde{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{21}}^{\mathbf{12}}$$

$$|x_{11}^{12}|^2 * x_{11}^{12} * \tilde{x}_{22}^{12} + x_{11}^{12} * \tilde{x}_{12}^{12} * x_{12}^{12} * \tilde{x}_{22}^{12} + x_{11}^{12} * \tilde{x}_{21}^{12} * x_{21}^{12} * \tilde{x}_{22}^{12} + x_{11}^{12} * \tilde{x}_{22}^{12} * |x_{22}^{12}|^2 =$$
$$x_{11}^{12} * \tilde{x}_{22}^{12} * (|x_{11}^{12}|^2 + |x_{12}^{12}|^2 + |x_{21}^{12}|^2 + |x_{22}^{12}|^2) = \boldsymbol{x}_{\mathbf{11}}^{\mathbf{12}} * \tilde{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{22}}^{\mathbf{12}}$$

(важное) **Замечание 1**

Рассмотрение волновых уравнений для двухчастичной системы в 4-пространстве состояний в представлении (п1.7) при соответствующих гамильтонианах допускает цепочки решений типа

$$\begin{cases} \xi_{11}^{12}|\uparrow\uparrow\rangle \Rightarrow ([x_{11}^{12}|\uparrow\uparrow\rangle + x_{12}^{12}|\uparrow\downarrow\rangle + x_{21}^{12}|\downarrow\uparrow\rangle + x_{22}^{12}|\downarrow\downarrow\rangle), \\ (x_{11}^{12}|\uparrow\uparrow\rangle + x_{12}^{12}|\uparrow\downarrow\rangle + x_{21}^{12}|\downarrow\uparrow\rangle + x_{22}^{12}|\downarrow\downarrow\rangle) \Rightarrow \chi_{22}^{12}|\downarrow\downarrow\rangle, \end{cases}$$

что позволит добиться получения эквивалентного эволюционному (с помощью уравнений Шредингера) описанию изменения состояний и "перевод" первой частицы в противоположное состояние):

$$\{\xi_{11}^{12}|\uparrow\uparrow\rangle \Leftrightarrow \chi_{21}^{12}|\downarrow\uparrow\rangle \qquad \text{(п1.12)}$$

Основным свойством этого способа описания эволюции квантовомеханической двухчастичной системы является представление решения в виде чистых состояний *при полном сохранении информации об индивидуальности поведения каждой из частиц* в системе.

Редукция 4 ⇒ 2

Рассматриваем теперь возможность описания частицы двухчастичной системы в одночастичном пространстве.

Первый и самый важный вопрос: *сможем ли мы описать поведение одной частицы в базисе (п1.1)?*

С помощью волновых функций соотношение (5) можно представить в виде:

$$\psi_{ik}(X,Y) = \varphi_i(X)\chi_k(Y), \qquad \text{(п1.13)}$$

где φ и χ – функции, полученные в результате разделения переменных при решении волнового уравнения. В общем случае они представляются функциями разного вида. Будем идентифицировать частицы по параметрам: (i, X) – для первой частицы, (k, Y) – для второй частицы, а предыдущее соотношение представим в виде[7)]:

$$\psi_{ik}^{12}(X,Y) = \varphi_i^1(X)\chi_k^2(Y), \qquad \text{(п1.13')}$$

Свёртывая это соотношение по переменным (X, i) или (Y, k) одной частицы (верхние индексы), мы можем получить волновую функцию другой. Эта операция позволяет избавиться от информации об одной частице, предоставляя "чистую" информацию о другой. Сама же информация о частице содержится в свойствах, описываемых переменными (X, i)или (Y, k).

[7)] Будем предполагать возможность некоторой свободы в установлении соответствий допускаемой процедурой решения волнового уравнения методом разделения переменных: $1 \leftrightarrow (i, X), 2 \leftrightarrow (k, Y)$, что будет использовано в процедуре симметризации.

Учитывая, что при перестановке частиц, каждая частица меняет только свои интерфейс с "внутренним содержимым", но не среду своего пребывания, имеем:

$$\psi_{ik}^{12}(X,Y) \to \psi_{ik}^{21}(X,Y) = \psi_{ki}^{12}(Y,K), \quad (п1.14)$$

а условие симметрии принимает вид:

$$\psi_{ik}(X,Y) = \psi_{ki}(Y,X). \quad (п1.15)$$

Учитывая сказанное, имеем для симметризованной функции $\hat{\psi}_{ik}(X,Y)$:

$$\hat{\psi}_{ik}(X,Y) = \varphi_i(X)\chi_k(Y) \pm \varphi_k(Y)\chi_i(X). \quad (п1.16)$$

Процедура симметризации (п1.16) фиксирует факт тождественности частиц по выбранной группе свойств.

Из (п1.16) следует, что выполнение операции свёртывания по переменным состояния одной частицы, что было возможно, например, в случаях, связанных с (5) и (п1.13), не может быть осуществлено над выражением (п1.16), поскольку здесь в результате операции симметризации произошло запутывание состояний между частицами [8)]. Последнее означает, что в данном случае описание частицы в одночастичном пространстве состояний в среде другой частицы как некой *отделимой* сущности нереализуемо, а представить её состояние как суперпозицию базисных состояний (п1.1) невозможно.

Поскольку нельзя описать частицу двухчастичной системы в векторном 2-пространстве как суперпозицию базисных состояний (п1.1), используется другой способ, известный в квантовой механике как способ описания с помощью матриц плотности.

Стандартным подходом здесь является решение эволюционного уравнения для матрицы плотности квантовой системы, описываемой гамильтонианом [3]. Однако, если при предыдущем подходе при решении уравнения Шредингера с последующей симметризацией, ведущей к спутыванию частиц и их состояний, то здесь первым делом возникает проблема фрагментации системы на составные части и факторизация описания отдельной частицы.

В конечном счёте, возникает второй вопрос: *как описать поведение одной частицы в среде другой с помощью одночастичной матрицы плотности (п1.4)?*

В подобной ситуации при измерении характеристик одной из двух частиц необходимо предусмотреть сначала возможность выбора как первой, так и второй частиц.

В этом случае для описания частицы нам необходимо задать для начала саму возможность рассмотрения её самой в двухчастичной системе, характеризуемой некоторой комбинацией чистых состояний $M^\alpha(\alpha = 1,2)$. Зададим эту возможность соответствующими вероятностями p_α. Тогда выражение для матрицы плотности частицы M примет вид:

$$M = \sum_\alpha p_\alpha \bar{M}^\alpha \,, \quad (п1.17)$$

где $\sum_\alpha p_\alpha = 1$, $p_\alpha \geq 0, \alpha = 1{,}2$. Соотношение (п1.17) будет определять *смесь* чистых состояний двух частиц, каждая из которых описывается в одночастичном пространстве состояний. Сама матрица плотности M также является элементом одночастичного пространства состояний и, следовательно, даёт возможность одночастичного описания частицы, находящейся в среде другой. Именно таким образом появляется возможность описания спутанности как физического феномена.

Нетрудно показать, что для матрицы, связанной представлением (п1.17), в общем случае не выполняется равенство

$$M^2 = M, \quad (п1.18)$$

которое является критерием того, что частица находится в чистом состоянии. Однако выполнение этого равенства становится возможным при выполнении условия равенства единице вероятности p_α для одной частицы и нулю для другой.

---

8) Необходимо отметить, что можно говорить о спутывании не всех свойств частиц, то есть о полном спутывании, а о спутывании только их некоторых общих свойств.

Примечание 3

Рассмотрим систему, состоящую из двух частиц, каждая из которых $\forall\alpha$ $(\alpha = 1,2)$ находясь в чистом состоянии 2-пространства, описывается своей матрицей плотности $\bar{M}_\alpha$, удовлетворяющей условию

$$(\bar{M}_\alpha)^2 = \bar{M}_\alpha$$

Целостная двухчастичная система того же 2-пространства состояний описывается матрицей плотности

$$M = p_1\bar{M}_1 + p_2\bar{M}_2 \qquad (п1.19)$$
$$(0 < p_1 < 1), (0 < p_2 < 1), (p_1 + p_1 = 1).$$

Квадрат этой матрицы

$$M^2 = p_1^2\bar{M}_1^2 + p_2^2 M^{-}{}_2^2 + p_1 p_2(\bar{M}_1\bar{M}_2 + \bar{M}_2\bar{M}_1)$$

в силу тождеств

$$\bar{M}_1\bar{M}_2 + \bar{M}_2\bar{M}_1 = \bar{M}_1^2 + \bar{M}_2^2 - (\bar{M}_1 - \bar{M}_2)^2$$

и

$$p_1^2 + p_1 p_2 = p_1(p_1 + p_2) = p_1, \qquad p_2^2 + p_1 p_2 = p_2$$

может быть записан в виде

$$M^2 = p_1\bar{M}_1^2 + p_2\bar{M}_2^2 - p_1 p_2(\bar{M}_1 - \bar{M}_2)^2$$

Так как матрицы M_1 и M_2 каждая в отдельности удовлетворяет условию $M^2 = M$, находим

$$M - M^2 = p_1 p_2(\bar{M}_1 - \bar{M}_2)^2 \qquad (п1.20)$$

Правая часть представляет собой положительную матрицу; следовательно, M будет равна M^2 только в том случае, если $(\bar{M}_1 - \bar{M}_2)^2 = 0$. Квадрат эрмитовой матрицы обращается в нудь только тогда, когда все элементы равны нулю. Одним из необходимых условий выполнения равенства $M^2 = M$ является равенство $\bar{M}_1 = \bar{M}_2$. Этот же результат достигается при равенстве одного из p_1 и p_2 нулю.

Из соотношения (п20) следует, что двухчастичная система с частицами, находящимися в разных состояниях при $p_1 > 0$ и $p_2 > 0$ ведёт себя как смесь частиц (п19), причём каждая частица в *изолированном* виде описывается своей матрицей плотности $\bar{M}_1$ или $\bar{M}_2$.

При $p_1 = 0$ или $p_2 = 0$ частица α с $p_\alpha = 1$ будет описываться как находящаяся в чистом состоянии. Однако при $p_1 > 0$ и $p_2 > 0$ состояние любой из частиц нельзя считать чистыми, а значит она будут описываться матрицами плотности, для которой не выполняется соотношение $(M)^2 = M$, которое является критерием чистого состояния.

Детерминант матрицы плотности, построенной из вектора чистого состояния как нетрудно убедиться из (п1.2) и (п1.4) всегда равен нулю. Отсюда следует, что смесь состояний (п1.17) в общем случае не может быть описана вектором состояния.

Примечание 4

Используя (п17) в виде

$$M = p_1 * M_1 + p_2 * M_2,$$

для детерминанта матрицы M получаем:

$$\{(p_1 * |x_1|^2 + p_2 * |y_1|^2) * (p_1 * |x_2|^2 + p_2 * |y_2|^2)\} - \{(p_1\tilde{x}_1 * x_2 + p_2\tilde{y}_1 * y_2) * (p_1 * x_1 * \tilde{x}_2 + p_2 * y_1 * \tilde{y}_2)\} =$$
$$\{p_1 * |x_1|^2 * p_1 * |x_2|^2 + p_1 * |x_1|^2 * p_2 * |y_2|^2 + p_2 * |y_1|^2 * p_1 * |x_2|^2 + p_2 * |y_1|^2 * p_2 * |y_2|^2\} -$$
$$-\{p_1\tilde{x}_1 * x_2 * p_1 * x_1 * \tilde{x}_2 + p_1\tilde{x}_1 * x_2 * p_2 * y_1 * \tilde{y}_2 + p_2\tilde{y}_1 * y_2 * p_1 * x_1 * \tilde{x}_2 + p_2\tilde{y}_1 * y_2 * p_2 * y_1 * \tilde{y}_2\} =$$
$$= \{p_1^2 * |x_1|^2 * |x_2|^2 + p_1 * p_2 * |x_1|^2 * |y_2|^2 + p_1 * p_2 * |y_1|^2 * |x_2|^2 + p_2^2 * |y_1|^2 * |y_2|^2\} -$$
$$-\{p_1^2 * |x_1|^2 * |x_2|^2 + p_1 * p_2 * \tilde{x}_1 * x_2 * y_1 * \tilde{y}_2 + p_1 * p_2 * \tilde{y}_1 * y_2 * x_1 * \tilde{x}_2 + p_2^2 * |y_1|^2 * |y_2|^2\} =$$
$$= p_1 * p_2\{|x_1|^2 * |y_2|^2 + |x_2|^2 * |y_1|^2 + x_1 * \tilde{x}_2 \quad \tilde{y}_1 * y_2 + \quad \tilde{x}_1 * x_2 * y_1 * \tilde{y}_2\}$$

Поскольку определитель двухрядной матрицы плотности чистого состояния равен нулю, её ранг равен единице. Это означает, что сама матрица может быть представлена в одномерном линейном подпространстве, то есть с помощью вектора в двумерном пространстве. Этот вектор разложим по векторам базиса (п1.1), то есть может быть представлен суперпозицией, а значит представлять чистое состояние.

В общем же случае, если ранг двухрядной матрицы не равен единице, то сама матрица не может быть "отображена" в одномерном подпространстве, поскольку она представляет собой фактически двумерный объект. То есть сама матрица представима только смесью (п1.17) двух 2-объектов. Эти объекты и будут представлять собой взаимодействующие частицы, то есть одну частицу в среде другой. Требовать же единственности такого представления нет оснований.

(важное) **Замечание 2.**

Процедура редукции $4 \Rightarrow 2$ описывает "растворение" индивидуальности одной частицы в среде другой частицы, сопровождающееся *потерей информации об индивидуальности их поведения*, сохраняя, тем не менее, при этом индивидуальность целостности. Предметом описания процедуры редукции является *теория декогерентности*, целью которой является формализация перехода от квантовой механики к классической. Важная особенность: *эта процедура не описывается унитарными преобразованиями, то есть - решениями уравнений Шредингера*.

Приложение 2

Рассматриваем экспериментальную установку Аспека. Введём максимально прозрачные обозначениям (насколько это возможно) и используем результаты Приложения 1.

Для идентификации отдельных возможных конфигураций будем использовать четырёхидексные обозначения $x_{ik}^{\alpha\beta}$, где нижние индексы относятся к состояниям частиц, а верхние – к концам установки Аспека: левому и правому. Соответствие между наблюдателем и состоянием его частицы устанавливается "по вертикали" в выражении $x_{ik}^{\alpha\beta}$. Здесь наблюдателю α соответствует состояние i, наблюдателю β - состояние k.

Как это часто делают, разместим на левом конце установки Аспека Алису (А), на правой стороне – Боба (Б). Поскольку присутствие их совсем необязательно, будем обозначать левый и правый концы установки верхними индексами: 1 - (А) и 2 - (Б). Поскольку положение наблюдателей зафиксировано нашим условием, обозначение верхних индексов не будет меняться и будет соответствовать представлению "12" или "АБ", то есть всегда $\alpha = 1,\ \beta = 2$.

Для наглядности возможные состояния векторов частиц Алисы и Боба будем также обозначать спиновой символикой – $\uparrow$ и $\downarrow$, а для компактности – нижними индексами. При индексном обозначении состояние $|\uparrow\rangle$ получит значение нижнего индекса 1, а состояние $|\downarrow\rangle$ – значение нижнего индекса 2. В представлении состояний двухчастичной системы со стрелками, на первом месте (слева) будет представлено состоянии частицы левого конца установки (А), на втором месте (справа) – состояние частицы правого конца установки (Б). Тогда, например, состояние $|\uparrow\uparrow\rangle$ будет соответствовать такой конфигурации, при которой частицы у Алисы и Боба находятся в состоянии со спинами "вверх", с этой ситуацией связан параметр x_{11}^{12}; состояние $|\downarrow\uparrow\rangle$ будет соответствовать конфигурации, когда частица Алисы имеет спин "вниз", а Боба - спин "вверх", этой ситуации соответствует параметр x_{21}^{12} и т. д.

Система векторов

$$\vec{\boldsymbol{e}}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix};\ \vec{\boldsymbol{e}}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix};\ \vec{\boldsymbol{e}}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix};\ \vec{\boldsymbol{e}}_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

представляет собой ортонормированный базис в линейном 4-пространстве. Свяжем возможные конфигурации двухчастичной системы с этим базисом следующим образом:

$$|\uparrow\uparrow\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix};\ |\uparrow\downarrow\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix};\ |\downarrow\uparrow\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix};\ |\downarrow\downarrow\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}. \qquad (\text{п}2.1)$$

Тогда произвольный вектор состояния $|x\rangle$ двухчастичной системы 4-пространства состояний можно выразить суперпозицией:

$$|x\rangle = x_{11}^{12}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + x_{12}^{12}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + x_{21}^{12}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + x_{22}^{12}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = x_{11}^{12}|\uparrow\uparrow\rangle + x_{12}^{12}|\uparrow\downarrow\rangle + x_{21}^{12}|\downarrow\uparrow\rangle + x_{22}^{12}|\downarrow\downarrow\rangle, \tag{п2.2}$$

где $x_{ik}^{\alpha\beta}$, будут соответствовать компонентам векторов в представлении двухчастичного состояния в базисе $\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{1}}, \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{2}}, \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{3}}, \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{4}}$, которые являются амплитудами вероятностей нахождения системы в одном из базисных состояний.

Для иллюстрации определения элементов матрицы плотности введём новые обозначения "координат" 4-вектора и представим 4-вектор (п2.2) в виде

$$x_{11}^{12}|\uparrow\uparrow\rangle + x_{12}^{12}|\uparrow\downarrow\rangle + x_{21}^{12}|\downarrow\uparrow\rangle + x_{22}^{12}|\downarrow\downarrow\rangle = \xi_1|\uparrow\uparrow\rangle + \xi_2|\uparrow\downarrow\rangle + \xi_3|\downarrow\uparrow\rangle + \xi_4|\downarrow\downarrow\rangle. \tag{п2.3}$$

Тогда элементы матрицы плотности можно выразить формулой

$$\bar{\bar{M}}_{ik} = \xi_i\tilde{\xi}_k, \tag{п2.4}$$

а сама матрица принимает вид

$$\bar{\bar{M}}_{ik} = \left\| \begin{array}{c|c|c|c} |\xi_1|^2 & \xi_1 * \tilde{\xi}_2 & \xi_1 * \tilde{\xi}_3 & \xi_1 * \tilde{\xi}_4 \\ \hline \xi_2 * \tilde{\xi}_1 & |\xi_2|^2 & \xi_2 * \tilde{\xi}_3 & \xi_2 * \tilde{\xi}_4 \\ \hline \xi_3 * \tilde{\xi}_1 & \xi_3 * \tilde{\xi}_2 & |\xi_3|^2 & \xi_3 * \tilde{\xi}_4 \\ \hline \xi_4 * \tilde{\xi}_1 & \xi_4 * \tilde{\xi}_2 & \xi_4 * \tilde{\xi}_3 & |\xi_4|^2 \end{array} \right\| \tag{п2.5}$$

Возвращаясь к переменным $x_{ik}^{\alpha\beta}$ получаем окончательно:

$$\bar{\bar{M}}_{ik} = \left\| \begin{array}{c|c|c|c} \left|x_{11}^{12}\right|^2 & x_{11}^{12} * \tilde{x}_{12}^{12} & x_{11}^{12} * \tilde{x}_{21}^{12} & x_{11}^{12} * \tilde{x}_{22}^{12} \\ \hline x_{12}^{12} * \tilde{x}_{11}^{12} & \left|x_{12}^{12}\right|^2 & x_{12}^{12} * \tilde{x}_{21}^{12} & x_{12}^{12} * \tilde{x}_{22}^{12} \\ \hline x_{21}^{12} * \tilde{x}_{11}^{12} & x_{21}^{12}\tilde{x}_{12}^{12} & \left|x_{21}^{12}\right|^2 & x_{21}^{12}\tilde{x}_{22}^{12} \\ \hline x_{22}^{12} * \tilde{x}_{11}^{12} & x_{22}^{12} * \tilde{x}_{12}^{12} & x_{22}^{12} * \tilde{x}_{21}^{12} & \left|x_{22}^{12}\right|^2 \end{array} \right\| \tag{п2.6}$$

Из представления (п2.6) можно увидеть полную конфигурацию амплитуд вероятностей пары частиц, испущенной источником, на обоих концах экспериментальной установки. Здесь, как уже отмечалось, верхние индексы относятся к наблюдателям на левом (Алиса) и правом (Боб) концах установки, а нижние индексы - к состояниям частиц. Величины x_{11}^{12}, $x_{12}^{12}, x_{21}^{12}, x_{22}^{12}$ представляют собой амплитуды вероятностей для состояний пары частиц $|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle$ $-$ первой и второй, соответственно. Именно в такой спутанной конфигурации, представленной когерентной суперпозицией состояний (п2.2) или матрицей плотности (п2.6) и предстают частицы для последующих измерений.

Пусть в результате измерения на правом конце установки (Б) зафиксировано состояние частицы со спином вверх, то есть $-\uparrow$. Это означает что система перешла в состояние:

$$x_{11}^{12}|\uparrow\uparrow\rangle + x_{12}^{12}|\uparrow\downarrow\rangle + x_{21}^{12}|\downarrow\uparrow\rangle + x_{22}^{12}|\downarrow\downarrow\rangle = x_{11}^{12}|\uparrow\uparrow\rangle + 0 * |\uparrow\downarrow\rangle + x_{21}^{12}|\downarrow\uparrow\rangle + 0 * |\downarrow\downarrow\rangle, \tag{п2.7}$$

с амплитудами $x_{12}^{12} = 0$ $x_{22}^{12} = 0$, а матрица плотности приняла вид:

$$\left\| \begin{array}{c|c|c|c} \left|x_{11}^{12}\right|^2 & 0 & x_{11}^{12} * \tilde{x}_{21}^{12} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline x_{21}^{12} * \tilde{x}_{11}^{12} & 0 & \left|x_{21}^{12}\right|^2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \tag{п2.8}$$

Далее. Существует корреляционная связь между частицами – связь, установленная Аспеком. Поэтом вполне резонно ожидать изменения состояния частицы и на левом конце установки, после изменения состояния частицы на правом её конце. Связь между состояниями частиц не функциональная, а корреляционная, что означает возможность влияния параметров одной частицы только на параметры распределения вероятностей для другой частицы. При единичном измерении эта связь может и не "сработать". В этом случае судить о скорости распространения влияния одной частицы на другую здесь не приходится. Об этой скорости можно судить только статистически и в среднем, с учётом возникающего шума, подавляющего реальную величину скорости влияния.

Дальнейшее развитие событий после измерения частицы на правом конце установки необходимо рассматривать как процесс эволюционной релаксации системы с реальным гамильтонианом, описываемый волновым уравнением для матрицы плотности (п2.8). Поскольку на сегодняшний день этот механизм релаксации неизвестен, квантовомеханическое предсказание (вероятностное) матричных элементов (п2.8) не представляется возможным. Тем не менее, А. Аспек своими экспериментальными результатами доказал реальность существования такого механизма.

Резюме

1. Известны два способа описания квантовых объектов – с помощью векторов состояний и матриц плотности. Оба способа дают эквивалентные описания невзаимодействующих с внешним окружением, то есть замкнутых, квантовых систем. Состояния, описываемые в этих случаях, называются *чистыми*.

2. Квантовомеханическое описание замкнутой двухчастичной системы требует рассмотрения решения в 4-пространстве квантовых состояний. Оно может быть реализовано как с помощью 4-векторов, так и 4-матрицы плотности.

3. При описании пары частиц одна частица всегда находится в среде другой. Хотя каждая изолированная частица пары может быть описана чистым состоянием, однако при двухчастичном описании всегда одна из них будет находиться в среде другой, а система после симметризации решения будет представлять собой *смесь* состояний двух частиц. При этом отдельно каждая из них может быть описана своей матрицей плотности, через которые и определяется смесь состояний. Смесь состояний превращается в чистое состояние при "исчезновении" одной частицы, то есть при $p_1 = 0$ или $p_2 = 0$. Этот обстоятельство находится в полном соответствии с тем фактом, что квантовые системы, находящиеся во внешней среде, не могут быть описаны с помощью векторов состояний, поскольку не могут находиться в чистых состояниях.

4. Процедура редукции: $4 \Rightarrow 2$, позволяет перейти от двухчастичного 4- пространственного описания к одночастичному 2-пространсвенному описанию, как бы склеивая историю эволюции из двух частей: унитарную и "пост"унитарную. Результат неунитарной редукции и является границей этих историй.

5. Именно процедура симметризации при описании квантовомеханических систем обуславливает возникновение феномена спутанности состояний частиц (см. раздел 1).

6. Понятие спутанности может возникнуть только при рассмотрении нескольких квантовых объектов (частиц). В этом случае можно говорить о спутанности состояний частиц. Спутанность же состояний одного квантового объекта есть ни что иное, как суперпозиция состояний единого объекта. При спутывании же характеристик нескольких объектов может возникнуть новая целостность, то есть новый квантовый объект.

Смесь состояний разных объектов не может привести к возникновению нового объекта, поскольку смешивание как операция не тождественна суперпозиции состояний. Однако смесь состояний допускает факторизацию описания и моделирование фрагментации системы на две взаимодействующие подсистемы. Необходимо подчеркнуть, что рассматриваемая модель состояний (п1.17), которая представляется смесью состояний, становится фиктивной, если из эксперимента в принципе нельзя получить оптимальной информации о подсистемах (частицах) всего объекта.

Приложение 3

По результатам предыдущих on-line диалогов на авторском семинаре возник ряд вопросов, ответы на которые требуют разъяснений

Описание феномена спутанности для тождественных частиц с помощью операции симметризации вобщем-то убеждает. Здесь же возникает и понятие когерентности состояний. Более или менее и это понятно. А как представить себе механизм декогеренции не строго, но понятно?

Когерентность - строго формализуемое понятие в рамках фазовых зависимостей волновых функций. С информацией по этим вопросам на примере двухчастичной квантовой системы можно ознакомиться в представленной статье [см. (2,3,4)].

Нарушение фазовых зависимостей между элементами целого - есть декогеренция. Декогерентность, как феномен, описывается на базе использования матриц плотности.

Возникновение многих когерентностей объекта с окружением, то есть "растворение" собственной фазы по элементам окружения - это тоже можно рассматривать как декогеренцию, но уже заведомо иную... и это уже общая проблема, решаемая "Теорией декогеренции" как дисциплиной.

Что касается экспериментальных и технологических механизмов воплощения когеренции и декогеренции в настоящее время - они в стадии экспериментальных работ с разными результатами."

Хотелось бы коротко о "Процессе 1" Неймана и его неунитарности.

Общее.
Для построения квантовой механики существует две возможности: использование аппарата *векторов состояний* (шредингеровские волновые функции) и аппарата *матриц плотности* (эрмитовские операторы), [Ландау, 1927].

Представления с помощью векторов состояний и матриц плотности формально эквивалентны при рассмотрении *замкнутых* квантовых систем. Эти системы исчерпывающим образом описываются так называемыми *чистыми* состояниями.

Эволюция замкнутых квантовых систем или их временная динамика для обоих описаний представляется *унитарными* преобразованиями с гамильтонианом в роли генератора бесконечно малых сдвигов во времени (решениями уравнения типа Шредингера с начальными данными). Матрицы плотности таких решений, как и любые операторы наблюдаемых, представляются эрмитовскими операторами. Эрмитовские матрицы, в свою очередь, могут быть приведены к диагональному виду унитарными преобразованиями выбором соответствующего базиса представления. *Унитарные преобразования оставляют неизменным информационный статус квантовой системы*. Именно нахождение унитарных преобразований (решения уравнений Шредингера) в обоих случаях и составляют суть решений традиционных задач квантовой механики.

Однако квантовые подсистемы, погружённых во внешнюю среду, не могут считаться замкнутыми. Подобные системы представляются так называемыми *смесями* состояний. Дело в том, что смеси состояний не могут быть описаны векторами чистых состояний и их *суперпозициями*. Из двух возможностей описание смеси состояний может быть реализовано только с помощью матриц плотности. Это обстоятельство использовал фон Нейман для уточнения боровской интерпретации квантовой механики в части интерпретации процедур измерения, то есть в части взаимодействия измеряемой системы с измерительным прибором или, вообще говоря, со внешней средой. Рассмотрение преобразований *нарушающих унитарную эволюцию квантовых систем* приводит к необходимости рассмотрения вопросов, связанных с изменением информационного статуса результирующих состояний. Этот же подход используется при описании перехода от квантовых систем к классическим системам в *теории декогеренции*, поскольку переход от квантового описания к классическому связан с неизбежной потерей фазовой информации о квантовых состояниях.

В частности.
1. Рассмотрим конкретный пример двухчастичной квантовой системы, например, в эксперименте Аспека. Эта система должна описываться в гильбертовом 4-пространстве. Описание же одной из частиц возможно и в одночастичном 2-пространстве. Однако именно в этом случае - в случае, когда одна частица находится в среде другой и представляется невозможным описание с помощью аппарата чистых состояний. Именно здесь и возникает необходимость рассмотрения преобразования, связанного с переходом из гильбертова 4-пространста в 2-пространство. Такая *редукция* не может быть осуществлена с помощью унитарного (эволюционного) преобразования, поскольку она связана с потерей информации о состоянии системы, в то время как все унитарные преобразования оставляют систему в чистых состояниях с энтропией равной нулю, то есть с

максимальном информационным статусом. Потеря информации и возрастание энтропии при этом переходе очевидна. Это первый аспект неунитарной *редукции*.

2. Второй аспект редукции связан с потерей информации о фазовой когерентности, отсутствующей в классических проявлениях.

Суть дела в следующем. Информация о фазовых зависимостях, а значит и о квантовых корреляциях содержится в недиагональных элементах матрицы плотности. Как уже упоминалось, с помощью унитарных преобразований можно привести матрицу плотности к диагональному виду, что позволило бы дать вероятностную интерпретацию диагональным элементам без фазовых корреляций Однако при этих преобразованиях информационный статус квантовой системы не изменится. Это означает, что информация о корреляциях не исчезнет, а значит она обязана будет так или иначе проявиться, что противоречит всему опыту макроэкспериментов. Таким образом, унитарные преобразования не могут реализовать перехода от квантового описания к классическому. Неунитарная операция диагонализации матрицы плотности (редукция) и является тем процессом, который ввёл фон Нейман как необходимый элемент для согласования квантовой механики (с квантовыми корреляциями) с классической (без квантовых корреляций).

Потеря информации и возрастание энтропии при редукции в обоих рассмотренных случаях вполне очевидна, а процессы эти не могут быть описаны в рамках унитарной эволюции.

Фон Нейман ввёл *Процесс 1* для обеспечения целостности рассмотрения вопросов перехода от замкнутых квантовых систем к системам, взаимодействующим с окружением.

Первый аспект подробно представлен в настоящей работе; второй - в статье:
https://www.dropbox.com/s/x3dtk8w4vv9kv3n/ZurekEn.pdf?dl=0 (*оригинал*),
https://www.dropbox.com/s/w6ewl825x8m01nh/Zurek.pdf?dl=0 (*перевод*).

Означает ли сказанное, что коллапс волновых функций должен описываться неунитарными преобразованиями, то есть вне рамок традиционной квантовой механики (решения уравнений Шредингера)?

Именно так! Более того, существует радикальное мнение о том, что в этой области (знаменитая "*FWT- теорема*" Конвея и Коэна, которую иногда неудачно называют *"Теоремой о свободе води"*) не работают причинно-следственные связи и это подтверждено экспериментально. Элементарной демонстрацией отсутствия функциональной связи между возмущением и откликом в спиновой системе является парадокс Коэна-Спекера, изложенный в работе этих же авторов. Этот парадокс взбудоражил физический мир!

Зурек в отличие от фон Неймана диагонализовал матрицу плотности с помощью унитарного преобразования и "замкнул" динамику рассматриваемой системы на её гамильтониан. Вы же не обошлись без неунитарного преобразования (редукции) в статье о спутанности!

Зурек.
Из квантовой механики известно, что любая "квантовая история" развивается благодаря двум типам независимых процессов - свободной эволюции и процедурам измерения, задающим новую ветвь эволюции. Оба процесса несводимы один к другому. Бор предложил такую интерпретацию целостности "квантовой истории" (копенгагенская интерпретация): рассматривать эволюции квантовых систем с помощью уравнений Шредингера, а измерения над квантовыми системами с помощью классических приборов. Несмотря на поразительную эффективность такой конструкции, возникает естественный вопрос сводимости одного (квантового) языка описания с другим (классическим) и вопрос этот, прежде всего, касается когерентности состояний на квантовом уровне и декогерентности, то есть потери этой когерентности на макроуровне. Именно решению этой проблемы и посвящена статья Зурека.

В статье Зурека рассматривается взаимодействие 1/2-спиновой подсистемы $\mathcal{S}$ с детектором $\mathcal{D}$. Детектор может реагировать только на состояния: $\uparrow$ и $\downarrow$. В качестве замкнутой, эта составная система описывается *чистым* состоянием, которое может быть представлено как вектором, так и матрицей плотности в гильбертовом 4-пространстве. Собственно, Зурек и использует матрицу плотности, но в противовес фон Нейману, рассматривая *унитарное* преобразование, приводящее матрицу к диагональному виду, *но в выделенном базисе*.

В нашей статье, посвящённой квантовой спутанности, рассматривается описание целостной двухчастичной системы в 4-пространстве - целостности, обязанной когерентности состояний составляющих. Переход же от двухчастичного описания в 4-пространстве к одночастичному описанию в 2-пространстве, то есть *разрушение* целостности системы при наблюдении - предмет нашей статьи.

Общее одно - обсуждение неунитарности преобразования, называемого одним словом *редукция*. Зуреку удалось связать целостность составной системы без неунитарного преобразования фон Неймана. В нашем случае - это невозможно. Просто рассматриваемые нами задачи – разные.

Из квантовой механики известно, что любая "квантовая история" развивается благодаря двум типам независимых процессов - свободной эволюции и процедурам измерения, задающим новую ветвь эволюции. Оба процесса несводимы один к другому. Бор предложил такую интерпретацию целостности "квантовой истории" (копенгагенская интерпретация): рассматривать эволюции квантовых систем с помощью уравнений Шредингера, а измерения над квантовыми системами с помощью классических приборов. Несмотря на поразительную эффективность такой конструкции, возникает естественный вопрос сводимости одного (квантового) языка описания с другим (классическим) и вопрос этот, прежде всего, касается когерентности состояний на квантовом уровне и декогерентности, то есть потери этой когерентности на макроуровне. Именно решению этой проблемы и посвящена статья Зурека.

Подробнее о соображениях Зурека по "рассеянию когерентности" в среде окружения.

Матрица плотности в общем виде содержит недиагональные элементы, ответственные за корреляционные взаимодействия между подсистемами, составляющими целостность исходной системы. Такая форма матрицы явно не вписывалась в картину классических измерений. Для приведения её к безкорреляционной форме, требуемой для классической интерпретации процедуры измерения, фон Нейман предложил ввести неунитарную процедуру диагонализации матрицы (то есть с выходом за пределы квантовой механики), диагональные элементы которой могли бы быть тогда интерпретированы как классические вероятности (без квантовых корреляций). Почему неунитарное?

Лишь только потому, что "*унитарная эволюция обрекает каждую замкнутую систему на 'чистоту'* " состояния (стр. 8 [9])) с сохранением квантовых корреляций, которые невыводимы классическим образом. Кроме того, унитарные преобразования эквивалентны с точки зрения эволюции системы в отношении когерентности фазовых соотношений согласно уравнениям Шредингера. Именно это и обуславливало необходимость введения неунитарного преобразования! Свою идею фон Нейман оформил переходом от (6) к (7) и назвал эту процедуру *редукцией* матрицы плотности с особым ударением на её неунитарный характер, отвечающей переходу к классической процедуре измерения.

Зурек, в противовес фон Нейману, ввёл в рассмотрение внешнее окружение $\mathcal{E}$ в качестве третьей незамкнутой составляющей общей системы, позволяющее реализовать полное описание процедуры измерения, оставаясь при этом в рамках квантовой механики. "*Финальное состояние комбинированной "цепочки фон Неймана"* $\mathcal{SDE}$ *коррелированных систем расширяет корреляцию за пределы пары* $\mathcal{SD}$" (стр. 8 [9])). Тем самым он представляет элемент механизма рассеяния когеренции в среде окружения.

Если состояния окружения, соответствующие состояниям детектора, ортогональны, то матрица плотности свёрнутая по неконтролируемым и неизвестным степеням свободы, приобретает вид (14), который и предложил фон Нейман. При этом, если наблюдаемая Λ подсистемы $\mathcal{S}$ коммутирует с гамильтонианом взаимодействия H_{int} детектор-окружение, её динамика инвариантно замыкается на диагонали редуцированной матрицы плотности, то есть, когда система находится в собственном состоянии Λ, взаимодействие с окружением оставит её невозмущённой, а наблюдаемая Λ будет интегралом движения.

Последнее замечание позволяет разделить параметры системы на контролируемые, сохраняющие когерентность (спутанность), и неконтролируемые (неизвестные, разрушающие спутанность). Это обстоятельство даёт возможность "поднять" спутанность по малой группе контролируемых параметров до мезо- и макро- уровней и, в то же время, объяснить исчезновение когерентности по большой группе неконтролируемых параметров.

Литература

1. Касимов В.А. *Некоторые топологические парадоксы СТО*. Новосибирск. 2014 г.
https://www.academia.edu/32427340/
2. Касимов В.А. *О парадоксе ЭПР. Особенности разрешения.* Новосибирск. 2015 г.
https://www.academia.edu/32427334/
3. Касимов ВА. *Квантовая механика (принципы).*Новосибирск. "Сибпринт", 2013 г.
https://www.academia.edu/32434510/
4. E. Joos, C. Kiefer, J. ... *Декогеренция и возникновение классического мира в квантовой теории.*
Springer. DecoherenceBook.djvu

[9]) см. https://www.dropbox.com/s/w6ewl825x8m01nh/Zurek.pdf?dl=0

*****

Для связи:
quadrica-m@mail.ru

Авторский семинар
http://my.mail.ru/community/physiks.princips/?ref=cat

http://quadrica.ucoz.net/
https://independent.academia.edu/KasimovVladimir
https://vk.com/public128913510
https://www.facebook.com/quadrica.m
http://orcid.org/0000-0002-1435-9220

*****

В.А. Касимов. Ещё раз о квантовой "спутанности"

Аннотация
При концептуальном оформлении результатов эксперимента Аспека необходимо говорить на языке квантовой механики, а не на языке *арго* частных озарений. Одним из таких озарений является понятие "*спутанности*" (*частиц*, или *состояний* – непонятно!) Язык же квантовой механики позволяет чётко и недвусмысленно наполнить конкретным содержанием возникшие вопросы по этому поводу. Для анализа предлагается элементарная модель, используемая в [1, 2].

V.A.Kasimov. Once more about quantum "entanglement"

Abstract
During the conceptual design of the experimental results of Aspect one must speak the language of quantum mechanics, not the language of the Argo private insights. One of these insights is the concept of "*entanglement*" (of particles or states is unclear!) The same language of quantum mechanics allows for a clear and unambiguous manner to give concrete content to the questions on this occasion. For the analysis of the proposed elementary model used in [1, 2].