

Некоторые топологические парадоксы СТО (ЭПР)

Парадокс Эйнштейна-Подольского-Розена¹⁾

В.А. Касимов (E-mail: quadrica-m@mail.ru)

По следам статьи А. Аспека "ТЕОРЕМА БЕЛЛА: наивный взгляд экспериментатора".

Поскольку в формуле (23) была обнаружена ошибка (или описка), я взял на себя труд проверить выкладки с 1 по 5 разделов статьи. Приведены некоторые уточняющие моменты, важные для понимания сути.

Приведён элементарный вывод формул (3), который опущен в статье.

Ограниченная применимость точечного описания в применении к реальным пространственно-временным отношениям стала очевидной ещё с момента формулировки принципа неопределённости в 1927 году Гейзенбергом. Стало ясно, что точечная топология не очень хорошо работает в квантовой механике, а с осознанием того факта, что физическая метричность пространственно-временных отношений теряется в релятивистской физике эти подозрения превратились в проблему сегодняшнего дня. Собственно это подтверждают и эксперименты А. Аспека. Как известно, скорость является основным топологическим параметром сопряжения непрерывных пространства и времени. Поэтому при интерпретации результатов экспериментов А. Аспека и возникают проблемы, связанные со скоростями распространения сигналов и причинных возмущений.

Тема связи локальных теорий с дополнительными параметрами и с неравенствами Белла - тема дня в физике. Подробно история вопроса освещена в работах^[1, 2, 3, 4]. Результаты А. Аспека и Дж. Белла относятся к физике микроуровневого описания.

Так что же главное в работе Аспека?

1. Обнаруженные теоретически корреляции в поведении "спутанных" (*смешанных*) состояний двух фотонов могли бы быть объяснены вводом *дополнительных* параметров, "усреднение" по которым позволило бы теоретически согласовать наблюдаемые эффекты.

2. Локальные квантовые теории (читай - построенные на основе *ТМК-топологии*) с дополнительными параметрами приводят к неравенствам Белла.

3. Некоторые предсказания квантовой механики нарушают неравенства Белла. Отсюда следует вывод о том, что квантовая механика несовместима с локальными теориями с дополнительными параметрами.

4. Фундаментальным допущением при решении этого конфликта является допущение о локальности.

5. Показано, что условие локальности может рассматриваться как *следствие причинности по Эйнштейну*, предусматривающей сверхсветовые взаимодействия.

Относительно *n.4* и *n.5* необходимо сказать следующее:

n.4. Само понятие локальности пространственно-временных отношений в квантовой механике потеряло непосредственный смысл после появления соотношений неопределённости Гейзенберга, сохранив его косвенный смысл только в связи с классическими макроинтерпретациями квантовомеханических измерений. Понятие непрерывной траектории, обеспечивающей установление генетического родства положений точек одного и того же точечного тела в динамической, как причинной последовательности событий, также исчезло;

n.5. Причинность по Эйнштейну подразумевает необходимость включения понятия скорости, как "топологической связки" между непрерывным временным 1-многообразием и непрерывным 3-пространственным многообразием в *ТМК-топологии*. Именно скорость и обеспечивает возможность установления генетической связи между положениями точек траектории движущегося тела, которые находятся или могут находиться в динамической причинной последовательности событий. Однако такие понятия, как скорость, траектория, генетическое родство, сохраняемое при движении, отсутствуют в квантовой механике. Поэтому говорить о нарушении причинности большого смысла нет. Нарушение же принципа относительности по Эйнштейну для нелокализованных объектов можно видеть и при макроописании физической реальности^[7].

Положительным результатом экспериментов А. Аспека является вывод о том, что *ТМК-топология* в КМ перестаёт работать должным образом.

Локальность классической физики, СТО и ОТО является, скорее всего, следствием и результатом их асимптотических приближений, когда макрорасстояния и промежутки времени заведомо превышают микромасштабы.

Само же возникновение локальности есть вопрос "конденсации" гильбертова описания (произвольной размерности, счётной для сепарабельных пространств) в (3+1)мерное псевдоевклидово (риманово) многообразие.

¹⁾ Чтобы не нарушать связность изложения, авторские слова статьи А. Аспека, будут выделены цветом и воспроизведены в исходном переводе^[1].

В физике сегодня с помощью "спутанных" (*смешанных*) микросостояний предпринимаются попытки воссоздать макрореальности, описание которых не может быть сведено к описанию в *ТМК-топологии*. Для них чуждо понятие скорости и генетического сродства через скорость. К ним не могут быть применены и *точечные* преобразования Лоренца.

1. Схема эксперимента

Рассмотрим оптический вариант мысленного ЭПР-опыта, предложенный Бомом^[5] (рис.1). Источник *S* испускает пару фотонов с различными частотами ν_1 и ν_2 , распространяющихся в противоположных направлениях вдоль оси *Oz*. Предположим, что поляризационная часть вектора состояния пары равна:

$$|\Psi(\nu_1, \nu_2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|x, x\rangle + |y, y\rangle\} \quad (1)$$

где $|x\rangle$ и $|y\rangle$ - линейно поляризованные состояния. Это состояние примечательно: оно не может быть преобразовано в произведение двух состояний, ассоциированных с состоянием каждого из фотонов, так что мы не можем приписать каждому из них хорошо определенное состояние. В частности, мы не можем приписать каждому из них определенную поляризацию. Такое состояние, описывающее систему некоторых объектов, мыслимую только глобально, представляет собой *запутанное состояние* (*entangled state*).

Мы осуществляем измерение линейной поляризации двух фотонов с помощью анализаторов I и II. За анализатором I с ориентацией **a** расположены два детектора, выдающие результат + или – в соответствии тем, какая линейная поляризация обнаружена: параллельная или перпендикулярная **a**. Анализатор II с поляризацией **b** действует подобным же образом.

Примечание: Имеется взаимно-однозначное соответствие между схемой мысленного ЭПР-эксперимента по Бому и экспериментом с парой частиц со спином 1/2 в синглетном состоянии, подвергаемой анализу с помощью фильтров Штерна-Герлаха с двумя ориентациями.

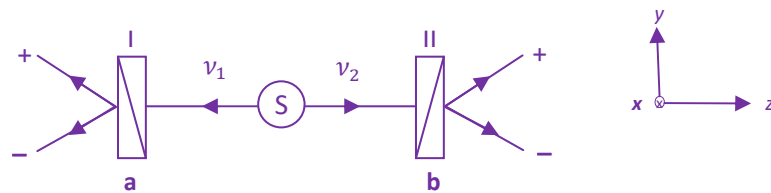


Рисунок 1. Мысленный эксперимент Эйнштейна-Подольского-Розена-Бома с фотонами. Два фотона ν_1 и ν_2 , испущенные в состоянии $|\Psi(\nu_1, \nu_2)\rangle$ уравнения (1), анализируются линейными поляризаторами с ориентациями **a** и **b**. Можно измерять вероятности одиночной или совместной регистрации на выходе каналов поляризаторов

Легко вывести предсказания квантовой механики для этих измерений поляризации, как одиночных, так и совместных. Рассмотрим сначала одиночные вероятности $P_{\pm}(\mathbf{a})$ получения результатов \pm для фотона ν_1 , и, аналогично, одиночные вероятности $P_{\pm}(\mathbf{b})$ получения результатов \pm для фотона ν_2 . Квантовая механика (Q.M.) предсказывает, что:

$$\begin{aligned} P_+(\mathbf{a}) &= P_-(\mathbf{a}) = \frac{1}{2} \\ P_+(\mathbf{b}) &= P_-(\mathbf{b}) = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad \text{Q.M.} \quad (2)$$

Эти результаты согласуются с замечанием о том, что мы не можем сопоставить некоторую поляризацию каждому из фотонов, так что каждое отдельное измерение поляризации дает случайный результат.

Рассмотрим теперь вероятности $P_{\pm\pm}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ совместного обнаружения ν_1 и ν_2 в каналах + или – поляризаторов I или II с направлениями **a** и **b**. Квантовая механика предсказывает²⁾:

$$\begin{aligned} P_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= P_{--}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2} \cos^2(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) \\ P_{+-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= P_{-+}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2} \sin^2(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) \end{aligned} \quad \text{Q.M.} \quad (3)$$

Покажем, что эти квантово-механические предсказания влекут за собой далеко идущие следствия.

²⁾ Вывод формул (3) представлен в приложении 1.

2. Корреляции

Рассмотрим сначала частную ситуацию $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = 0$, когда поляризаторы параллельны. Квантовая механика предсказывает такие вероятности для совместных результатов (уравнения 3):

$$\begin{aligned} P_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = P_{--}(\mathbf{a}, \mathbf{a}) &= \frac{1}{2} \\ P_{+-}(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = P_{-+}(\mathbf{a}, \mathbf{a}) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Согласно этому и с учетом (2) мы заключаем, что если фотон ν_1 обнаружен в канале + поляризатора I, то фотон ν_2 *наверняка* будет обнаружен в канале + поляризатора II (и аналогично для каналов –). Для параллельных каналов имеется *полная корреляция*³⁾ между индивидуальными случайными результатами измерения поляризации двух фотонов ν_1 и ν_2 .

Мерой корреляции между случайными числами является коэффициент корреляции, который для рассмотренной выше ситуации удобно определить соотношением:

$$E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = P_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + P_{--}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P_{+-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P_{-+}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (5)$$

Замечание 1

Убедиться в том, что (5) адекватно отражает степень корреляционной зависимости ориентаций векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} , можно рассмотрев два случая: полной независимости (отсутствие корреляции) и функциональной однозначности между их значениями (полной корреляции).

- 1) При полной независимости векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} и при выполнении (2), имеем:

$$\begin{aligned} P_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = P_+(\mathbf{a}) \cdot P_+(\mathbf{b}) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}; & P_{--}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = P_-(\mathbf{a}) \cdot P_-(\mathbf{b}) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}; \\ P_{+-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = P_+(\mathbf{a}) \cdot P_-(\mathbf{b}) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}; & P_{-+}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = P_-(\mathbf{a}) \cdot P_+(\mathbf{b}) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}; \end{aligned} \quad (a)$$

Тогда из (5) получаем:

$$E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0, \quad (b)$$

что означает полное отсутствие корреляции между принимаемыми значениями \mathbf{a} и \mathbf{b} .

- 2) Пусть теперь каждый из векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} может принимать одно из двух взаимоисключающих значений: "+" или "-". Рассмотрим два варианта функциональной зависимости:

- при положительной проекции (+) вектора \mathbf{a} проекция вектора \mathbf{b} также принимает однозначно положительное значение (+);
- при положительной проекции (+) вектора \mathbf{a} проекция вектора \mathbf{b} принимает однозначно отрицательное значение (-).

Обозначим через $P(B|A)$ - вероятность наступления события B (+ или – проекция вектора \mathbf{b}) при условии, что наступило событие A (+ или – проекция вектора \mathbf{a}). Взяв вектор \mathbf{a} в качестве исходного, получаем:

$$\begin{aligned} P_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = P(\mathbf{a}_+) \cdot P(\mathbf{b}_+|\mathbf{a}_+) & & P_{--}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = P(\mathbf{a}_-) \cdot P(\mathbf{b}_-|\mathbf{a}_-) \\ P_{+-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = P(\mathbf{a}_+) \cdot P(\mathbf{b}_-|\mathbf{a}_+) & & P_{-+}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = P(\mathbf{a}_-) \cdot P(\mathbf{b}_+|\mathbf{a}_-) \end{aligned} \quad (c)$$

Тогда

для случая а):

$$P(\mathbf{b}_+|\mathbf{a}_+) = P(\mathbf{b}_-|\mathbf{a}_-) = 1, \quad P(\mathbf{b}_-|\mathbf{a}_+) = P(\mathbf{b}_+|\mathbf{a}_-) = 0; \quad (d)$$

для случая б):

$$P(\mathbf{b}_+|\mathbf{a}_+) = P(\mathbf{b}_-|\mathbf{a}_-) = 0, \quad P(\mathbf{b}_-|\mathbf{a}_+) = P(\mathbf{b}_+|\mathbf{a}_-) = 1. \quad (e)$$

Подставляя найденные значения (d) и (e) в (c), в обоих случаях с учётом (2), из (5) получаем:

$$|E(\mathbf{a}, \mathbf{b})| = 1, \quad (f)$$

что характеризует полную корреляционную связь между принимаемыми значениями проекций векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} .

Несложно получить аналогичные результаты при рассмотрении в качестве исходного события значение проекции вектора \mathbf{b} .

Используя предсказание (3) квантовой механики, мы находим для коэффициента корреляции E_{QM}

$$E_{QM}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \cos 2 \cdot (\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) \quad (6)$$

В частном случае для параллельных анализаторов ($(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = 0$) мы находим $E_{QM}(0) = 1$, что подтверждает полноту корреляции.

³⁾ Корреляционная зависимость, в отличие от непосредственно функциональной, определяет влияние значения одной величины на распределение другой. Коэффициент корреляции определяет тесноту (силу) этой зависимости.

В заключение укажем: квантово-механические расчеты исходят из предположения, что хотя каждое отдельное измерение дает случайные результаты, но эти случайные результаты коррелированы, как показывает уравнение (6). Для параллельных (или перпендикулярных) ориентаций поляризаторов корреляция является полной ($|E_{QM}| = 1$).

3. Трудности с наглядным представлением, вытекающим из формализма квантовой механики

В качестве наивного физика я хотел бы иметь простой и наглядный образ, позволяющий понять эти жесткие корреляции. Наиболее естественный подход может быть сформирован, исходя из расчетного квантово-механического соотношения (3). В действительности существуют реальные способы отобразить такие вычисления. Совсем прямой способ состоит в том, чтобы спроектировать вектор состояния (1) на базисный вектор, соответствующий достоверному результату. Это немедленно дает совместные вероятности (3). Однако, хотя такой расчет отвечает векторам состояния, в целом описывающих два фотона, я не знаю, как нарисовать эту картинку в нашем обычном пространстве.

Ситуация с экспериментом над парой "спутанных" фотонов (см. **Замечание 1**) похожа на вариант 2 функциональной зависимости состояний проекций векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} при $|E(\mathbf{a}, \mathbf{b})| = 1$, описываемый формулами (c), (d), (e), (f). Действительно, при измерении проекции первого фотона, состояние которой неизвестно, автоматически становится известным значение проекции второго фотона, как бы удаленно он не находился.

Пытаясь решить эту проблему и отдельно идентифицировать два измерения, осуществляемых в разных концах экспериментальной установки, мы можем разбить совместное измерение на два шага. Предположим, например, что измерение для фотона ν_1 выполнено первым и дало результат $+$ в поляризаторе I с ориентацией \mathbf{a} . Результат $+$ (связанный с состоянием поляризации $|\mathbf{a}\rangle$) имеет вероятность $1/2$. Чтобы приступить к вычислению, мы должны теперь использовать постулат редукции вектора состояния, который утверждает, что после этого измерения новый вектор состояния $|\Psi'(\nu_1, \nu_2)\rangle$, описывающий пару, получается проектированием начального вектора состояния $|\Psi(\nu_1, \nu_2)\rangle$ (уравнение 1) на базис, ассоциированный результатом $+$: эти два двумерных базиса образованы векторами $\{|\mathbf{a}, \mathbf{x}\rangle, |\mathbf{a}, \mathbf{y}\rangle\}$. Используя соответствующий проектор, находим после выполнения небольших алгебраических преобразований

$$\Psi'(\nu_1, \nu_2) = |\mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle \quad (7)$$

Это означает, что немедленно после первого измерения фотон ν_1 приобретает поляризацию $|\mathbf{a}\rangle$: это очевидно, поскольку он был измерен поляризатором, ориентированным вдоль \mathbf{a} , и был зарегистрирован результат $+$. Более неожиданно то, что удаленный фотон ν_2 , который еще не успел провзаимодействовать с каким-либо поляризатором, уже оказался спроецированным в состояние $|\mathbf{a}\rangle$ с хорошо определенной поляризацией, параллельной той, которая была зафиксирована для фотона ν_1 . Это неожиданное заключение, однако, приводит к правильному конечному результату (3), поскольку прямое применение закона Малюса⁴⁾ показывает, что более позднее измерение вдоль \mathbf{b} для фотона ν_2 должно приводить

$$P_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2} \cos^2(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) \quad (8)$$

Двухшаговое вычисление, следовательно, дает тот же результат, что и прямой расчет. Но мы получили дополнительную картинку для двухшагового измерения:

i. Фотон ν_1 , у которого не было хорошо определенной поляризации перед измерением, приобрел поляризацию в соответствии с зарегистрированным результатом непосредственно в момент измерения: это не является неожиданностью.

ii. Когда измерение для ν_1 уже выполнено, фотон ν_2 , не имевший хорошо определенной поляризации до момента этого измерения, спроецировался в состояние поляризации, параллельное состоянию поляризации, зарегистрированному для ν_1 . Это весьма неожиданно, потому что такое изменение в описании ν_2 происходит мгновенно, какое бы расстояние ни было в момент первого измерения между ν_1 и ν_2 . Такая картина оказывается противоречащей теории относительности. Согласно Эйнштейну, то, что происходит в данной области пространства времени, не может испытывать влияния со стороны события, происходящего в другой области, отделенной от первой пространственно-подобным интервалом. Следовательно, нет смысла пытаться найти более приемлемую картину для «понимания» ЭПР-корреляций. Эту картину мы теперь и рассмотрим.

⁴⁾ Закон Малюса - физический закон, выражающий зависимость интенсивности линейно-поляризованного света после его прохождения через поляризатор от угла φ между плоскостями поляризации падающего света и поляризатора $I = k_a I_0 \cos^2 \varphi$, где I_0 - интенсивность падающего на поляризатор света, I - интенсивность света, выходящего из поляризатора, k_a - коэффициент пропускания поляризатора.

4. Дополнительные параметры

Корреляции между удаленными измерениями для двух отдельных систем, которые перед этим взаимодействовали, обычны для классического мира. Например, если механический объект с нулевой импульсом (или моментом) разделяется на две части в результате некоторого внутреннего фактора, то импульс (момент) каждой отдельной части остается равным и взаимно противоположным во время их дальнейшей свободной эволюции. В общем случае, когда каждый из фрагментов подвергается некоторому взаимодействию, два импульса (момента) остаются коррелированными, поскольку они в каждый момент времени определены их начальными значениями, которые, в свою очередь, имели точно определенную сумму.

Можно использовать такую классическую картину, чтобы с ее помощью учесть ЭПР-корреляции, базируясь на общих свойствах двух систем. Рассмотрим снова полную корреляцию поляризационных измерений в случае параллельных анализаторов $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$. Когда мы регистрируем $+$ для v_1 , мы уверены, что и для v_2 также зарегистрируем $+$. Мы заключаем отсюда, что существует некоторое свойство (Эйнштейн говорил «элемент физической реальности»), присущее этой конкретной паре и определяющее результат $++$. Для другой пары, когда результат равен $--$, мы можем сходным образом допустить общее свойство, определяющее результат $--$. Тогда достаточно допустить, что половина пар испускается со свойством $++$, а половина со свойством $--$, и мы получаем все результаты измерения, возможные при данной конфигурации. Заметим, однако, что такие свойства, отличающиеся для различных пар, не учитываются квантово-механическим вектором состояния $|\Psi(v_1, v_2)\rangle$, который является одинаковым для всех пар. Вот почему мы можем заключить вместе с Эйнштейном, что *квантовая механика не полна*. И вот почему такие дополнительные свойства именуется «*дополнительными параметрами*», или «*скрытыми переменными*». (На самом деле Эйнштейн говорил не о «скрытых переменных» или «дополнительных параметрах», а, скорее, об «элементах физической реальности». Соответственно, многие авторы чаще используют термин «реалистические теории», нежели «теории со скрытыми переменными» или «теории с дополнительными переменными».)

В заключение скажем, что кажется возможным «понять» ЭПР-корреляции с помощью такого классического образа, используя разные значения дополнительного параметра для различных пар. Можно надеяться, что статистические предсказания квантовой механики просто усредняют результат по значению дополнительного параметра. Кажется, что такой же была и позиция Эйнштейна. Заметим, что на этой стадии рассуждений следование этой позиции не противоречит квантовой механике: не возникает логических проблем, если полностью принять предсказания квантовой механики и привлекать дополнительные параметры, дающие приемлемый образ ЭПР-корреляций. Мы приходим к тому, чтобы рассматривать квантовую механику как описание статистической механики на более глубоком уровне.

Через три десятилетия после выхода статьи ЭПР^[4], Белл выразил в математической форме следствия, вытекающие из предшествующего обсуждения и явно ввел дополнительные параметры^[2]. Детали событий, связанных с последующими утверждениями о невозможности без противоречий с принципами СТО ввести дополнительные параметры в квантовой механике и результаты реальных экспериментов, подтверждающих корреляционные связи типа (5), представлены в цитируемой здесь работе^[1]. Нашей же задачей здесь было ещё раз обратиться к сути пространственно-временных противоречий в трактовке экспериментов типа ЭПР с уточнением дополнительных вычислений.

5. Неравенства Белла

5.1. Формализм

Через три десятилетия после выхода статьи ЭПР, Белл выразил в математической форме следствия, вытекающие из предшествующего обсуждения и явно ввел дополнительные параметры, обозначенные им через λ . Их распределение по ансамблю эмитированных пар он определил функцией $\rho(\lambda)$, так что

$$\rho(\lambda) \geq 0 \tag{9}$$

$$\int d\lambda \rho(\lambda) = 1$$

Для данной пары, характеризуемой данным дополнительным параметром λ , результаты измерения задаются функциями, принимающими только два возможных значения ($+1$ и -1):

$$\begin{aligned} A(\lambda, \mathbf{a}) &= \pm 1 \text{ в анализаторе I (с ориентацией } \mathbf{a}) \\ B(\lambda, \mathbf{b}) &= \pm 1 \text{ в анализаторе II (с ориентацией } \mathbf{b}) \end{aligned} \tag{10}$$

Конкретная теория дополнительного параметра полностью определяется явным видом функций $\rho(\lambda)$, $A(\lambda, \mathbf{a})$ и $B(\lambda, \mathbf{b})$. Теперь легко выразить вероятности различных результатов измерения. В частности,

можно ввести две новые функции, также принимающие только два значения: так, функция $\frac{1}{2}[A(\lambda, \mathbf{a}) + 1]$ принимает значение +1 для результата + и 0 в противоположном случае (и аналогично $\frac{1}{2}[1 - B(\lambda, \mathbf{b})]$ принимает значение +1 для результата - и 0 в противоположном случае); тогда мы можем написать

$$P_+(\mathbf{a}) = \int d\lambda \rho(\lambda) \frac{[A(\lambda, \mathbf{a}) + 1]}{2} \quad (11)$$

$$P_{+-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int d\lambda \rho(\lambda) \frac{[A(\lambda, \mathbf{a}) + 1]}{2} \frac{[1 - B(\lambda, \mathbf{b})]}{2}$$

Аналогичным образом, корреляционная функция определяется простым соотношением

$$E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int d\lambda \rho(\lambda) A(\lambda, \mathbf{a}) B(\lambda, \mathbf{b}) \quad (12)$$

Замечание 2.

О сопоставлении формул для корреляций (5) и (12). Наряду с общими определениями корреляционной зависимости, как несущими информацию о тесноте влияния значения одной случайной величины на распределение другой, определение (5) является наиболее адекватным. Его значение, равное 1, говорит о прямой функциональной зависимости направлений векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} (см. Замечание 1). Для определения же корреляции в общей модели для случайных величин X и Y мы выбрали для них равномерное распределение, не несущее никакой информации о вероятностях их значений, кроме заведомо определённых.

В табл. А приведены данные и результаты для расчёта стандартного коэффициента корреляции $r(X, Y)$ случайных величин X и Y , совпадающего ковариацией $COV(X, Y)$ [7]:

$$COV(X, Y) / (\sigma_x \sigma_y) = (M[XY] - \mu_x \mu_y) / \sigma_x \sigma_y = r(X, Y) \quad (g)$$

Таблица А

x_i	+1	-1
x_i^2	+1	+1
p_i	1/2	1/2
$\mu_x = M[X] = (x_1 + x_2)/2$	0	
$M[X^2] = (x_1^2 + x_2^2)/2$	1	
$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2$	1	
σ_x	1	

Введённый в (12) дополнительный параметр λ обеспечивает общность модели Белла.

5.2. (Наивный) пример теории с дополнительными параметрами

В качестве примера теории с дополнительным параметром рассмотрим модель, в которой каждый фотон, распространяющийся вдоль оси Oz, предполагается имеющим хорошо определенную линейную поляризацию, задаваемую своим углом (λ_I и λ_{II}) с осью \mathbf{x} . Чтобы учесть жесткую корреляцию, мы предположим, что два фотона одной и той же пары испускаются с одной и той же линейной поляризацией, определенной общим углом λ (рис. 2).

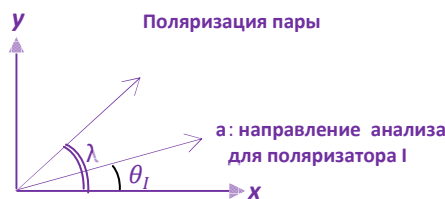


Рисунок 2 – Наивный пример. Каждая пара фотонов имеет «направление поляризации», определяемой углом λ , который является дополнительным параметром модели. Поляризатор I осуществляет измерение поляризации вдоль \mathbf{a} с углом θ_I относительно оси \mathbf{x}

Поляризация различных пар распределена случайным образом, согласно распределению вероятностей $\rho(\lambda)$, не зависящему от угла:

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \quad (13)$$

Для полноты нашей модели мы должны задать явную форму функций $A(\lambda, \mathbf{a})$ и $B(\lambda, \mathbf{b})$. Мы принимаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} A(\lambda, \mathbf{a}) &= \text{sign}\{\cos 2(\theta_I - \lambda)\}, \\ B(\lambda, \mathbf{b}) &= \text{sign}\{\cos 2(\theta_{II} - \lambda)\}, \end{aligned} \quad (14)$$

где углы θ_I и θ_{II} указывают ориентацию поляризаторов. Заметим, что эти выражения весьма оправданны: $A(\lambda, \mathbf{a})$ принимает значение $+1$, когда поляризация фотона ν_1 характеризуется углом меньше $\pi/4$ относительно направления анализа \mathbf{a} , и значение -1 для дополняющего случая (поляризация ближе к перпендикулярно относительно \mathbf{a}).

Для этой понятной модели мы можем, используя уравнения (11), вычислить вероятности различных результатов измерений. Например, для одиночных вероятностей получаем:

$$P_+(\mathbf{a}) = P_-(\mathbf{a}) = P_+(\mathbf{b}) = P_-(\mathbf{b}) = \frac{1}{2} \quad (15)$$

т.е. результаты, идентичные тем, которые дает квантовая механика. Наша модель дает нам также возможность вычислить совместные вероятности и корреляционную функцию, и мы находим, используя (12):

$$E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 1 - 4 \frac{|\theta_I - \theta_{II}|}{\pi} = 1 - 4 \frac{|(\mathbf{a}, \mathbf{b})|}{\pi} = \quad (16)$$

при $-\frac{\pi}{2} \leq \theta_I - \theta_{II} \leq \frac{\pi}{2}$

Замечание 3

Проведём подробнее вывод формул (16).

Для того чтобы было легче ориентироваться в зависимостях между углами, возникающими при рассмотрении примера, представим два анализатора, имеющие одинаковые ориентации $\theta = \pi/4$ относительно оси \mathbf{X} . Вращением первого анализатора против часовой стрелки на угол Δ_1 ориентируем его вдоль направления \mathbf{a} , вектор которого приобретает ориентацию $\theta_I = \theta + \Delta_1$. Вращением второго анализатора по часовой стрелке на угол Δ_2 ориентируем его вдоль направления \mathbf{b} , составляющим угол $\theta_{II} = \theta - \Delta_2$. Вместе с анализаторами вращаются и области положительных значений для коэффициентов $A(\lambda, \mathbf{a})$ и $B(\lambda, \mathbf{b})$ - голубая и зелёная, соответственно

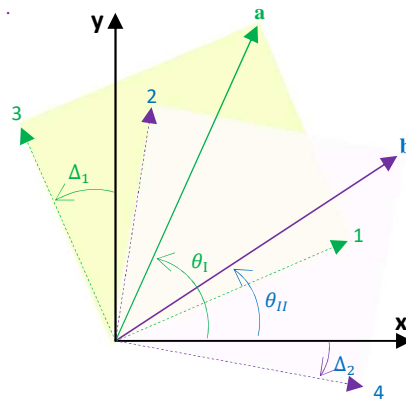


Рис. А. Направления \mathbf{a} и \mathbf{b} со своими "окрестностями" положительных значений $A(\lambda, \mathbf{a})$ и $B(\lambda, \mathbf{b})$. Максимальный "растр" между направлениями поляризации θ_I и θ_{II} составляет $\pi/2$, то есть: $-\pi/2 \leq \theta_I - \theta_{II} \leq \pi/2$.

В результате получаем следующие области с распределением знаков для $A(\lambda, \mathbf{a})$ и $B(\lambda, \mathbf{b})$.

Таблица В

Область	Интервал углов	Абсолютная величина угла	A	B
1.	$\Delta_1 \geq \lambda \geq -\Delta_2$	$\Delta_1 + \Delta_2$	-	+
2.	$(\pi/2) - \Delta_2 \geq \lambda \geq \Delta_1$	$(\pi/2) - (\Delta_1 + \Delta_2)$	+	+
3.	$(\pi/2) + \Delta_1 \geq \lambda \geq (\pi/2) - \Delta_2$	$\Delta_1 + \Delta_2$	+	-
4.	$2\pi - \Delta_2 \geq \lambda \geq (\pi/2) + \Delta_1$	$3\pi/4 - (\Delta_1 + \Delta_2)$	-	-

Связь между θ_i и Δ_i выражается парами формул:

$$\begin{aligned} \theta_I &= \Delta_1 + \pi/4; & \theta_{II} &= -\Delta_2 + \pi/4; \\ \Delta_1 &= \theta_I - \pi/4; & \Delta_2 &= -\theta_{II} + \pi/4; \\ \theta_I - \theta_{II} &= \Delta_1 + \Delta_2. \end{aligned} \quad (h)$$

Интеграл (12) по замкнутому контуру против часовой стрелки, начиная с направления 4 с учётом данных табл. А приводит к результатам (16)

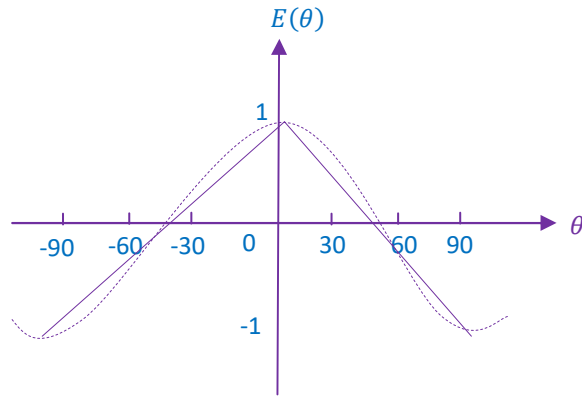


Рисунок 3 – Корреляционный коэффициент поляризации как функция относительной ориентации поляризаторов:

- (i) пунктирная линия – предсказание квантовой механики;
(ii) сплошная линия – наивная модель.

Это замечательный результат. Заметим прежде всего, что $E(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ зависит только от относительного угла (\mathbf{a}, \mathbf{b}) , как и в соотношении (6) квантовой механики. Более того, как показано на рис.3, разница между предсказаниями простой модели с дополнительными параметрами и предсказаниями квантовой механики всюду небольшая, а для углов $0, \pm\pi/4$ и $\pm\pi/2$ предсказания точно совпадают (жесткая корреляция). Такой результат, полученный для крайне простой модели с дополнительными параметрами, весьма вдохновляет и порождает надежду, что более сложная модель способна дать точное совпадение с предсказаниями квантовой механики. *Однако открытие Белла сделало поиск таких моделей безнадежным*, что мы сейчас и покажем.

5.3. Неравенства Белла

Существует много разных форм и представлений неравенств Белла. Здесь мы приведем простую форму, непосредственно приводящую к возможности ее экспериментальной проверки. (Важно отличать неравенства, показывающее математическое противоречие с квантовой механикой, но не дающие возможности экспериментальной проверки в силу (заведомого) несовершенства приборов, от неравенств, допускающих экспериментальную проверку с учетом заданных границ погрешности приборов.)

Рассмотрим величину

$$\begin{aligned} s &= A(\lambda, \mathbf{a})B(\lambda, \mathbf{b}) - A(\lambda, \mathbf{a})B(\lambda, \mathbf{b}') + A(\lambda, \mathbf{a}')B(\lambda, \mathbf{b}) + A(\lambda, \mathbf{a}')B(\lambda, \mathbf{b}') = \\ &= A(\lambda, \mathbf{a})[B(\lambda, \mathbf{b}) - B(\lambda, \mathbf{b}')] + A(\lambda, \mathbf{a}')[B(\lambda, \mathbf{b}) + B(\lambda, \mathbf{b}')] \end{aligned} \quad (17)$$

Учитывая, что четыре числа A и B принимают только значения ± 1 , простой анализ второй строки выражения (17) показывает, что

$$s(\lambda, \mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}') = \pm 2 \quad (18)$$

Усредняя s по λ , находим, что значение этой величины заключено между $+2$ и -2 :

$$-2 \leq \int d\lambda \rho(\lambda) s(\lambda, \mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}') \leq 2 \quad (19)$$

Согласно (12), мы можем переписать эти неравенства в виде

$$-2 \leq S(\lambda, \mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}') \leq 2 \quad (20)$$

где

$$S(\lambda, \mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}') = E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}, \mathbf{b}') + E(\mathbf{a}', \mathbf{b}) + E(\mathbf{a}', \mathbf{b}') \quad (21)$$

Это – так называемые В.С.Н.С.Н. неравенства, т.е. неравенства Белла, обобщенные Clauser, Horne, Shimony, Holt^[8]. Они содержат комбинацию S четырех коэффициентов корреляции для поляризации, связанных с двумя направлениями анализа для каждого поляризатора (\mathbf{a} и \mathbf{a}' для поляризатора I, \mathbf{b} и \mathbf{b}' для поляризатора II). Заметим, что они применимы для теорий с дополнительным параметром весьма общего вида, определяемого в разделе 3.1 (уравнения 9, 10 и 12), всего лишь примером которых является наша наивная модель.

6. Конфликт с квантовой механикой

6.1 Факты

Мы можем воспользоваться предсказаниями (6) квантовой механики для ЭПР-пар, чтобы оценить величину $S(\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}')$, определяемую соотношением (21). Для частного набора ориентаций, показанных на рис. 4а, результат равен

$$S_{QM} = 2.83 > 2 \quad (22)$$

Это квантово-механическое предсказание определенно конфликтует с неравенствами Белла (20), которые верны для произвольной теории с дополнительным параметром общего вида, описанной в § 3.1.

Мы выявили, таким образом, ситуацию, для которой предсказания квантовой механики не могут быть воспроизведены (имитированы) теориями с дополнительными параметрами. Это и есть суть теоремы Белла: невозможно найти теорию с дополнительным параметром, удовлетворяющую общему описанию из § 3.1, которая воспроизводит *все* предсказания квантовой механики. Данное утверждение обобщает то, что показано на рис. 3 для конкретной модели с дополнительным параметром, рассмотренной в § 3.2: эта модель точно воспроизводит предсказания квантовой механики для отдельных углов $(0, \pi/4, \pi/2)$, но дает отличающиеся предсказания при других углах. Важность теоремы Белла состоит в том, что она относится не к конкретным моделям с дополнительными параметрами, а имеет общий характер.

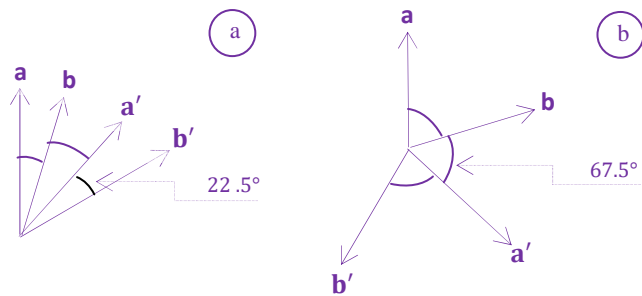


Рисунок 4 – Ориентации, где в наибольшей степени проявляется конфликт между неравенствами Белла и квантовой механикой.

6.2 Максимальный конфликт

Интересно установить наибольшее расхождение между неравенством Белла и предсказаниями квантовой механики. Обозначим величину, предсказываемую квантовой механикой, через S_{QM} :

$$S_{QM}(\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}') = \cos 2 \cdot (\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) - \cos 2 \cdot (\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}'}') + \cos 2 \cdot (\widehat{\mathbf{a}', \mathbf{b}}) + \cos 2 \cdot (\widehat{\mathbf{a}', \mathbf{b}'}) \quad (23)$$

Она⁵⁾ является функцией трех независимых переменных (\mathbf{a}, \mathbf{b}) , $(\mathbf{b}, \mathbf{a}')$ и $(\mathbf{a}', \mathbf{b}')$. Заметим, что

$$(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}'}) = (\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) + (\widehat{\mathbf{b}, \mathbf{a}'}) + (\widehat{\mathbf{a}', \mathbf{b}'})$$

Замечание 4

Ведём обозначения: $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \alpha$, $(\widehat{\mathbf{b}, \mathbf{a}'}) = \beta$, $(\widehat{\mathbf{a}', \mathbf{b}'}) = \gamma$, $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}'}) = \delta$, причём

$$\alpha + \beta + \gamma = \delta. \quad (i)$$

Функция Лагранжа принимает вид: $L(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \cos 2\alpha - \cos 2\delta + \cos 2\beta + \cos 2\gamma + \mu(\alpha + \beta + \gamma - \delta)$, где μ – множитель Лагранжа.

Дифференцируя $L(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ по независимым переменным α, β, γ , с учётом связи между углами $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \partial L / \partial \alpha = 0 \\ \partial L / \partial \beta = 0 \\ \partial L / \partial \gamma = 0, \\ \alpha + \beta + \gamma = \delta, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin 2\alpha = \mu/2 \\ \sin 2\beta = \mu/2 \\ \sin 2\gamma = \mu/2, \\ \alpha + \beta + \gamma = \delta, \end{cases} \quad (j)$$

которая имеет решение

$$\alpha = \beta = \gamma = \theta, \quad (k)$$

а в силу последнего равенства

$$\delta = 3\theta. \quad (l)$$

Уравнение

$$\partial L / \partial \delta = 2\sin 2\delta = \mu \text{ или } \sin 2\delta = \mu/2 = \sin 2\theta \quad (m)$$

перепишем в виде

$$\sin 2\delta - \sin 2\theta = 2 \cos(\delta + \theta) \sin(\delta - \theta) = 2 \cos 4\theta \sin 2\theta = 0 \quad (n)$$

Уравнение (n) имеет решения при: $4\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $2\theta = \pi k$, откуда следует $\theta = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}k$; $\theta = \frac{\pi}{2}k$. При $k = 0$ имеем: $\theta = \frac{\pi}{8}$ и 0; при $k = 1$: $\theta = \frac{3}{8}\pi$ и $\frac{\pi}{2}$.

Для жёсткой конструкции, определяемой равенствами (i) и (k), справедливо соотношение

$$S_{QM}(\theta) = 3 \cos 2\theta - \cos 6\theta \quad (p)$$

⁵⁾ В исходном переводе статьи приведена формула: $S_{QM}(\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}') = \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) - \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}'}) + \cos(\widehat{\mathbf{a}', \mathbf{b}}) + \cos(\widehat{\mathbf{a}', \mathbf{b}'})$

В табл. С приведены значения $S_{QM}(\theta)$ для конфигураций с отклонениями от предсказаний квантовой механики:

θ	$S_{QM}(\theta)$
$0 = 0^\circ$	2
$\pi/8 = 22,5^\circ$	2.83
$3\pi/8 = 67,5^\circ$	-2.83
$\pi/2 = 90^\circ$	2

Эти значения и являются результатами подстановки значений θ в (р). Наборы ориентаций для $\theta = \pi/8$ и $\theta = 3\pi/8$ показаны на рис. В. Они дают наибольшие нарушения неравенств Белла.

Более общее рассмотрение показывает, что имеется большой диапазон ориентаций, влекущих конфликт с неравенствами Белла (см.рис.5); ясно также, однако, что имеется много наборов ориентаций, для которых такой конфликт отсутствует.

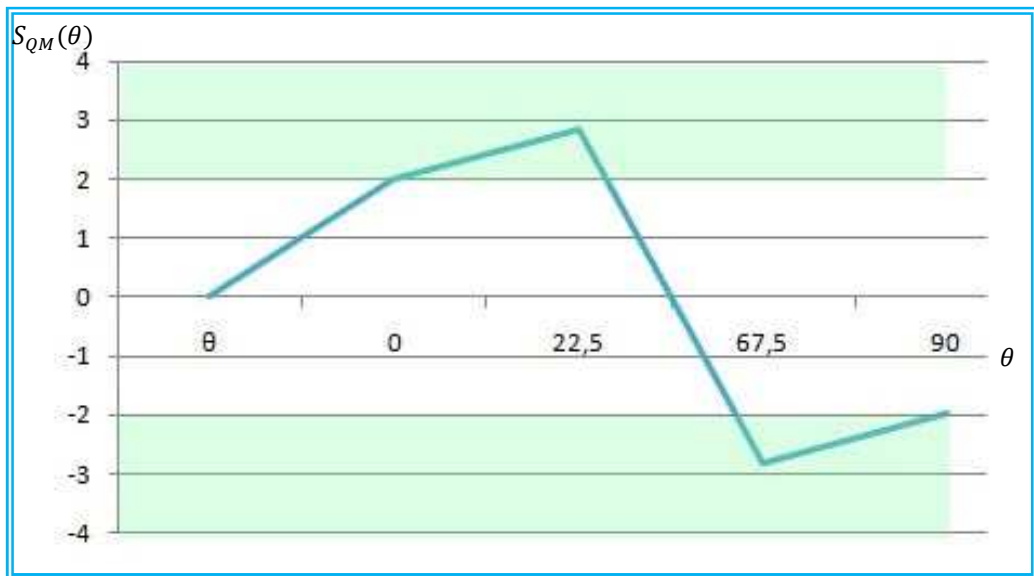


Рисунок В - Линейное приближение зависимости $S_{QM}(\theta)$ от θ



Рисунок 5 - $S_{QM}(\theta)$, предсказываемая квантовой механикой для ЭПР-пар. Конфликт с неравенствами Белла возникают при $|S| > 2$, и он достигает максимума для набора ориентаций, показанных на рис. 4

Приложение. Элементарный вывод исходных формул для пары "спутанных" фотонов

1. Поляризация света

1. Поляризация и спиральность являются примерами физических величин, принимающих только два квантованных значения.

Описание фотона как объекта, обладающего дихотомическими свойствами, возможно с использованием свойства спиральности: спиральность фотона на любое направление может принимать только два значения - положительное и отрицательное. Ситуация аналогична состоянию электрона со спином $1/2$ в синглетном состоянии.

Понятие поляризации, унаследованное от классических свойств света, относится к описанию свойства поперечности электромагнитных волн. Поляризация описывается двумя векторами, ортогональными направлению движения. Именно в этом и проявляется квантовая дихотомия классического параметра поляризации. Эти два вектора также ортогональны друг к другу, причем, если известно направление одного вектора, то ортогональное направление другого вектора может быть представлено двумя направлениями - слева или справа, соответственно этому различают право- или левополяризованные волны.

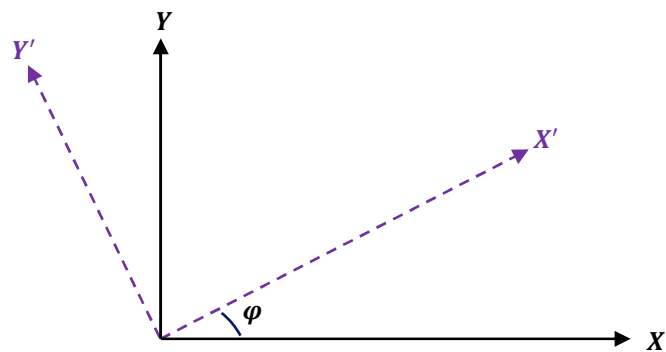


Рис. 1

2. Состояние фотона в отношении его поляризации может быть описано с помощью двух базисных векторов 2-линейного пространства $|x\rangle, |y\rangle$:

$$\begin{aligned} |x\rangle & \text{ — вектор, описывающий поляризацию вдоль оси } X; \\ |y\rangle & \text{ — вектор, описывающий поляризацию вдоль оси } Y. \end{aligned} \quad (1)$$

Вектора $|x\rangle$ и $|y\rangle$ представляют собой полную ортонормированную систему, так что

$$\langle x|x\rangle = \langle y|y\rangle = 1, \langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle^* = 0 \quad (2)$$

Любое состояние фотона $|\Psi\rangle$ может быть представлено, как линейная комбинация этих двух базисных состояний

$$|\Psi\rangle = A|x\rangle + B|y\rangle, \text{ где } A \text{ и } B \text{ в общем случае — комплексные числа} \quad (3)$$

Пусть

$$|x'\rangle = A|x\rangle + B|y\rangle \quad (4)$$

описывает новое состояние поляризации (рис. 1). Из очевидных соотношений $\langle x|x'\rangle = \cos \varphi$, $\langle y|x'\rangle = \sin \varphi$ следует $A = \cos \varphi$, $B = \sin \varphi$, то есть

$$|x'\rangle = \cos \varphi |x\rangle + \sin \varphi |y\rangle \quad (5)$$

а (5) будет представлять фотон, поляризованный вдоль новой оси X' .

Найдём второй базисный вектор $|y'\rangle$. Запишем

$$|y'\rangle = C|x\rangle + D|y\rangle \quad (6)$$

Имеем из условия ортогональности векторов $|x'\rangle$ и $|y'\rangle$:

$$\langle y'|x'\rangle = C^* \cos \varphi + D^* \sin \varphi = 0, \quad (7)$$

а из нормировки вектора $|y'\rangle$:

$$\langle y'|y'\rangle = C^*C + D^*D = 1 \quad (8)$$

Совместное решение (6), (7) и (8) в действительных числах даёт

$$C = \mp \sin \varphi \quad (9)$$

$$D = \pm \cos \varphi \quad (9)$$

Таким образом, для $|y'\rangle$ мы имеем два решения

$$|y'\rangle = -\sin \varphi |x\rangle + \cos \varphi |y\rangle \quad (10)$$

$$|y'\rangle = \sin \varphi |x\rangle - \cos \varphi |y\rangle \quad (11)$$

соответствующие правой и левой поляризациям фотона.

2. Эксперимент

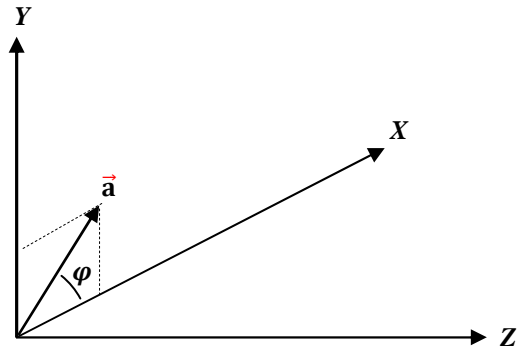


Рис. 2

Рассмотрим двухфотонную систему. Поскольку фотоны не взаимодействуют между собой уравнение состояния для этой системы допускает разделение переменных и представление решения в виде произведения векторов состояний отдельных фотонов (1-го и 2-го):

$$|\Psi\rangle_{1,2} = |\Psi\rangle_1 * |\Psi\rangle_2 \quad (12)$$

Для представления "спутанного" состояния пары фотонов, движущихся в противоположных направлениях, выберем состояния с противоположными поляризациями. Тогда, учитывая (5), (10) и (11) при $\varphi = 0$, выражения для первого $|\Psi\rangle_1$ и второго $|\Psi\rangle_2$ векторов состояний принимают вид:

$$|\Psi\rangle_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |x\rangle_1 + |y\rangle_1 \} \quad (13)$$

$$|\Psi\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |x\rangle_2 - |y\rangle_2 \} \quad (14)$$

Согласно (12), имеем

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_{1,2} &= \frac{1}{2} (|x\rangle_1 + |y\rangle_1) * (|x\rangle_2 - |y\rangle_2) = \\ &= \frac{1}{2} \{ |x\rangle_1 * |x\rangle_2 - |x\rangle_1 * |y\rangle_2 + |y\rangle_1 * |x\rangle_2 - |y\rangle_1 * |y\rangle_2 \} \end{aligned} \quad (15)$$

Для удовлетворения требования принципа тождественности частиц необходимо симметризовать этот вектор состояния. Эта процедура описывает реальное "спутывание" фотонов, после которой невозможно различить первый и второй фотоны. Имеем:

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle^{initial} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\Psi\rangle_{1,2} + |\Psi\rangle_{2,1} \} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \{ |x\rangle_1 * |x\rangle_2 - |x\rangle_1 * |y\rangle_2 + |y\rangle_1 * |x\rangle_2 - |y\rangle_1 * |y\rangle_2 \\ &+ |x\rangle_2 * |x\rangle_1 - |x\rangle_2 * |y\rangle_1 + |y\rangle_2 * |x\rangle_1 - |y\rangle_2 * |y\rangle_1 \} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |x\rangle_1 * |x\rangle_2 - |y\rangle_1 * |y\rangle_2 \} \end{aligned}$$

Окончательно вектор "синглетного" начального состояния пары фотонов примет вид:

$$|\Psi\rangle^{initial} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |x\rangle_1 * |x\rangle_2 - |y\rangle_1 * |y\rangle_2 \} \quad (16)$$

1. Рассмотрим результат измерения пары, когда состояния первого $|\chi\rangle_1$ и второго $|\chi\rangle_2$ фотонов фиксируются с одинаковой поляризацией, описываемой вектором (5): $|x'\rangle = \cos \varphi |x\rangle + \sin \varphi |y\rangle$

$$|\chi\rangle_1 = \{\cos \varphi_1 |x\rangle_1 + \sin \varphi_1 |y\rangle_1\} \quad (17)$$

$$|\chi\rangle_2 = \{\cos \varphi_2 |x\rangle_2 + \sin \varphi_2 |y\rangle_2\} \quad (18)$$

Согласно (16), (17), (18), получаем для конечного состояния

$$\begin{aligned} |\chi\rangle_{1,2}^{final} &= |\chi\rangle_1 * |\chi\rangle_2 = \{\cos \varphi_1 |x\rangle_1 + \sin \varphi_1 |y\rangle_1\} * \{\cos \varphi_2 |x\rangle_2 + \sin \varphi_2 |y\rangle_2\} = \\ &= \{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 |x\rangle_1 |x\rangle_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 |x\rangle_1 |y\rangle_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 |y\rangle_1 |x\rangle_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 |y\rangle_1 |y\rangle_2\} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} {}_{2,1}^{final} \langle \chi | &= \\ &= \{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \langle x|_1 \langle x| + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \langle y|_1 \langle x| + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \langle x|_1 \langle y| + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \langle y|_1 \langle y|\} \end{aligned} \quad (19')$$

Для амплитуды перехода из начального состояния $|\Psi\rangle^{initial}$ в конечное $|\chi\rangle_{1,2}^{final}$ имеем:

$$\begin{aligned} {}_{2,1}^{final} \langle \chi | \Psi \rangle^{initial} &= \\ &= \{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \langle x|_1 \langle x| + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \langle y|_1 \langle x| + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \langle x|_1 \langle y| + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \langle y|_1 \langle y|\} * \\ &* \frac{1}{\sqrt{2}} \{|x\rangle_1 * |x\rangle_2 - |y\rangle_1 * |y\rangle_2\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \end{aligned} \quad (20)$$

2. Теперь рассмотрим результат измерения пары, когда состояния первого $|\chi\rangle_1$ и второго $|\chi\rangle_2$ фотонов фиксируются с одинаковой поляризацией, но описываемой вектором (10): $|y'\rangle = -\sin \varphi |x\rangle + \cos \varphi |y\rangle$

$$|\chi\rangle_1 = \{-\sin \varphi_1 |x\rangle_1 + \cos \varphi_1 |y\rangle_1\} \quad (21)$$

$$|\chi\rangle_2 = \{-\sin \varphi_2 |x\rangle_2 + \cos \varphi_2 |y\rangle_2\} \quad (22)$$

Согласно (16), (21), (22), получаем для конечного состояния

$$\begin{aligned} |\chi\rangle_{1,2}^{final} &= |\chi\rangle_1 * |\chi\rangle_2 = \{-\sin \varphi_1 |x\rangle_1 + \cos \varphi_1 |y\rangle_1\} * \{-\sin \varphi_2 |x\rangle_2 + \cos \varphi_2 |y\rangle_2\} = \\ &= \{\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 |x\rangle_1 |x\rangle_2 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 |x\rangle_1 |y\rangle_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 |y\rangle_1 |x\rangle_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 |y\rangle_1 |y\rangle_2\} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} {}_{2,1}^{final} \langle \chi | &= \\ &= \{\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \langle x|_1 \langle x| - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \langle y|_1 \langle x| - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \langle x|_1 \langle y| + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \langle y|_1 \langle y|\} \end{aligned} \quad (23')$$

Для амплитуды перехода из начального состояния $|\Psi\rangle^{initial}$ в конечное $|\chi\rangle_{1,2}^{final}$ имеем:

$$\begin{aligned} {}_{2,1}^{final} \langle \chi | \Psi \rangle^{initial} &= \\ &= \{\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \langle x|_1 \langle x| - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \langle y|_1 \langle x| - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \langle x|_1 \langle y| + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \langle y|_1 \langle y|\} * \\ &* \frac{1}{\sqrt{2}} \{|x\rangle_1 * |x\rangle_2 - |y\rangle_1 * |y\rangle_2\} = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 - \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \end{aligned} \quad (24)$$

3. Рассмотрим результат измерения пары, когда состояния первого $|\chi\rangle_1$ и второго $|\chi\rangle_2$ фотонов фиксируются с разными поляризациями, описываемыми векторами (5) и (10): $|x'\rangle = \cos \varphi |x\rangle + \sin \varphi |y\rangle$, $|y'\rangle = -\sin \varphi |x\rangle + \cos \varphi |y\rangle$

$$|\chi\rangle_1 = \cos \varphi |x\rangle + \sin \varphi |y\rangle \quad (25)$$

$$|\chi\rangle_2 = \{-\sin \varphi_2 |x\rangle_2 + \cos \varphi_2 |y\rangle_2\} \quad (26)$$

Согласно (16), (25), (26), получаем для конечного состояния

$$\begin{aligned} |\chi\rangle_{1,2}^{final} &= |\chi\rangle_1 * |\chi\rangle_2 = \{\cos \varphi_1 |x\rangle_1 + \sin \varphi_1 |y\rangle_1\} * \{-\sin \varphi_2 |x\rangle_2 + \cos \varphi_2 |y\rangle_2\} = \\ &= \{-\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 |x\rangle_1 |x\rangle_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 |x\rangle_1 |y\rangle_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 |y\rangle_1 |x\rangle_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 |y\rangle_1 |y\rangle_2\} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} {}_{2,1}^{final} \langle \chi | &= \\ &= \{-\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \langle x|_1 \langle x| - \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \langle y|_1 \langle x| - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \langle x|_1 \langle y| + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \langle y|_1 \langle y|\} \end{aligned} \quad (27')$$

Для амплитуды перехода из начального состояния $|\Psi\rangle^{initial}$ в конечное $|\chi\rangle_{1,2}^{final}$ имеем:

$$\begin{aligned} & {}_{2,1}^{final}\langle\chi|\Psi\rangle^{initial} = \\ & = \{-\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 \langle x|_1\langle x| - \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \langle y|_1\langle x| - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \langle x|_1\langle y| + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \langle y|_1\langle y|\} \quad (28) \\ & * \frac{1}{\sqrt{2}}\{|x\rangle_1 * |x\rangle_2 - |y\rangle_1 * |y\rangle_2\} = -\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \end{aligned}$$

В формулах (20), (24), (28) углы φ_1 и φ_2 представлены в разных системах координат - правой и левой. Для приведения их значений к одной системе координат необходимо произвести замену $\varphi_2 \Rightarrow -\varphi_2$. На рис. 3 поясняется необходимость этой замены.

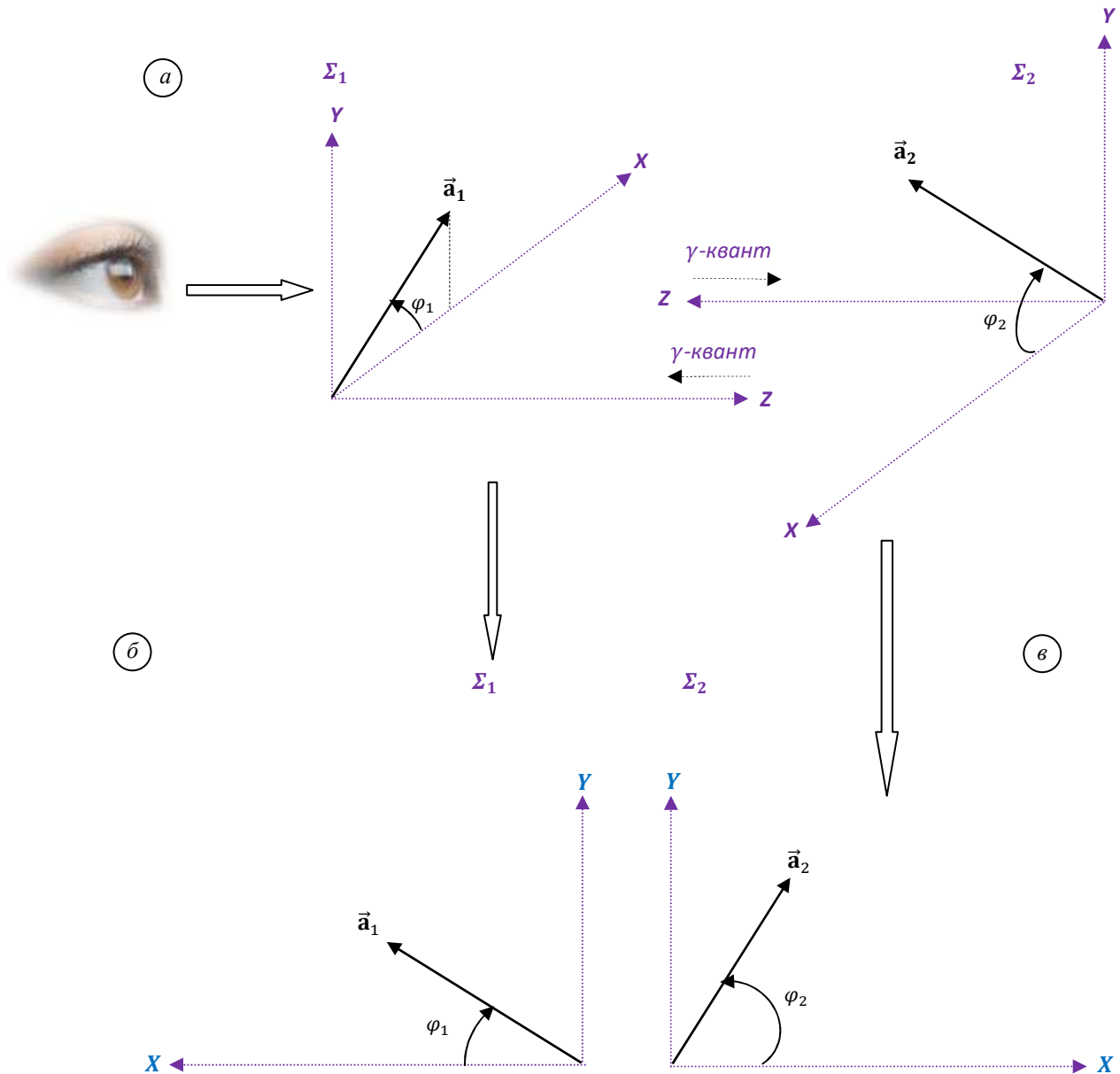


Рис. 3

Произведя замену $\varphi_2 \Rightarrow -\varphi_2$, результаты (20), (24), (28) перепишем в виде:

$$f_{2,1}^{final} \langle \chi | \Psi \rangle^{initial} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (20')$$

$$f_{2,1}^{final} \langle \chi | \Psi \rangle^{initial} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (24')$$

$$f_{2,1}^{final} \langle \chi | \Psi \rangle^{initial} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (28')$$

Введём явным образом разность углов $\varphi_1 - \varphi_2$ как угол между векторами $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$. Тогда вероятность перехода, например, (20') примет вид:

$$|f_{2,1}^{final} \langle \chi | \Psi \rangle_{1,2}^{initial}|^2 = \frac{1}{2} \cos^2(\widehat{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2})$$

Следуя Аспекту^[1], введём обозначения:

$P_{++}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) -$	вероятность обнаружить поляризацию первого фотона вдоль вектора \mathbf{a}_1 , а второго фотона вдоль вектора \mathbf{a}_2
$P_{--}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) -$	вероятность обнаружить поляризацию первого фотона перпендикулярную вектору \mathbf{a}_1 , а второго фотона перпендикулярную вектору \mathbf{a}_2
$P_{+-}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) -$	вероятность обнаружить поляризацию первого фотона вдоль вектора \mathbf{a}_1 , а второго фотона перпендикулярную вектору \mathbf{a}_2
$P_{-+}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) -$	вероятность обнаружить поляризацию первого фотона перпендикулярную вектору \mathbf{a}_1 , а второго фотона вдоль вектора \mathbf{a}_2

Из (20'), (24'), (28') следует:

$$P_{++}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \frac{1}{2} \cos^2(\widehat{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2}) \quad (29)$$

$$P_{--}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \frac{1}{2} \cos^2(\widehat{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2}) \quad (30)$$

$$P_{+-}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = P_{-+}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \frac{1}{2} \sin^2(\widehat{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2}) \quad (31)$$

Литература

1. А. Аспект. *Теорема Белла: наивный взгляд экспериментатора*. http://www.chronos.msu.ru/old/RREPORTS/aspek_teorema_bella.pdf
2. J.S Bell, *On the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox*, Physics Vol. 1, No. 3, pp. 198-200, 1964 Physics Publishing Co. Printed in the United States
3. A. Aspect, *Experimental tests of Bell's inequalities in atomic physics*, in Atomic Physics 8, Proceedings of the Eighth International Conference on Atomic Physics, edited by I. Lindgren, A. Rosen and S Svanberg (1982).
4. A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, *Can Quantum-Mechanical description of physical reality be considered complete?* Phys. Review 47, 777 (1935).
5. D. Bohm, *Quantum Theory*, Prentice-Hall, Englewood's Cliffs(1951). Republished by Dover (1989).
6. В.А. Касимов, *Пространство, время, движение*. Новосибирск, "СИБПРИНТ", 2013. Space-Time-20-03-12-21.pdf <https://www.academia.edu/36065258/>
7. В. В. Феллер. *Введение в теорию вероятностей и её приложения*. М., Мир. 1984 (Стр. 244, ф. (5.4); стр. 250, ф. (8.1))
8. Касимов В.А. , *ТМК-топология*. Новосибирск, 2014 г., ТМК-топология. <https://www.academia.edu/32427344/>
9. В. А. Касимов В.А.. *Некоторые топологические парадоксы СТО (ЭПР) -II. [По следам критических замечаний к статье А. Аспекта]*. Новосибирск, 2016 г. <https://www.academia.edu/32427336/>

Для связи:

quadrica-m@mail.ru

Авторский семинар

<http://my.mail.ru/community/physiks.principis/?ref=cat>

<http://quadrica.ucoz.net/>

<https://independent.academia.edu/KasimovVladimir>

<https://vk.com/public128913510>

<https://www.facebook.com/notes/1557999174417186/>

<http://orcid.org/0000-0002-1435-9220>

В.А. Касимов. *Некоторые топологические парадоксы СТО (ЭПР)***Аннотация**

По следам статьи А. Аспека "ТЕОРЕМА БЕЛЛА: наивный взгляд экспериментатора".

Поскольку в формуле (23) была обнаружена ошибка (или описка), взял на себя труд проверить выкладки с 1 по 5 разделов статьи. Приведены некоторые уточняющие моменты, важные для понимания сути.

Приведён элементарный вывод формул (3), который опущен в статье.

Неравенство Белла, выведенное на основе общей модели для дихотомической переменной, нарушается квантовомеханической моделью для пары "спутанных" фотонов. В статье Белла это чётко (хотя и не совсем подробно) показано.

Никакие "примочки" не способны разрешить это противоречие.

Единственно, что вызывает смущение - это реализация процедуры создания смешанного состояния двух фотонов и суть концептуального представления математики эксперимента. Теоретически эту процедуру можно представить как симметризацию волновой функции пары. Однако как выглядит перенос этой идеи в техническую ипостась эксперимента - непонятно.

V.A. Kasimov. *Some topological paradoxes of relativity (EPR)***Abstract**

In the footsteps of the article by A. Aspect "BELL'S THEOREM: the naive view of an experimentalist".

Because in equation (23) has detected an error (or typo), I took the trouble to verify calculations from 1 to 5 sections of the article. There are some clarifying points that are important for understanding the essence. Given an elementary conclusion of formulas (3) that is omitted in the article.

The Bell's inequality, derived on the basis of the general model for a dichotomous variable, disturbed the quantum mechanical model for a pair of "entangled" photons. In Bell's article it is clearly (though not very detailed) shown.

No "artificial gadgets" is not able to resolve this contradiction. The only thing that causes confusion is the procedure of creating a mixed state of two photons and the essence conceptual view of mathematics experiment.

Theoretically, this procedure can be represented as a symmetrization of the wave function of the pair. However, how does the transfer of this idea to the technical essence of the experiment is unclear.