Zbigniew Osiak

Ogólna

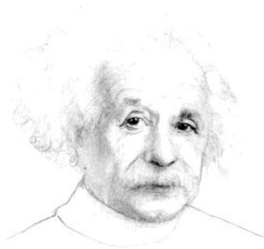
Teoria Względności

Linki do moich publikacji naukowych i popularnonaukowych, e-booków oraz audycji telewizyjnych i radiowych są dostępne w bazie ORCID pod adresem internetowym: http://orcid.org/0000-0002-5007-306X

Zbigniew Osiak

OGÓLNA TEORIA WZGLĘDNOŚCI

ZE SZCZEGÓLNYM UWZGLĘDNIENIEM RACHUNKU TENSOROWEGO



Matematyka powinna być służącą, a nie królową.

Arielowi,
mojemu synowi poświęcam

Portret (rysunek) Alberta Einsteina zamieszczony na stronie tytułowej
Małgorzata Osiak

Portret autora zamieszczony na okładkach przedniej i tylnej
Rafał Pudło

Wydawnictwo: Self Publishing

ISBN: 978-83-272-3515-2

e-mail: zbigniew.osiak@gmail.com

Linki do moich publikacji naukowych i popularnonaukowych, e-booków oraz audycji telewizyjnych i radiowych są dostępne w bazie ORCID pod adresem internetowym:
http://orcid.org/0000-0002-5007-306X

WSTĘP

Fizycy to poeci nauki tworzący jej awangardę.

Ogólna Teoria Względności przeznaczona jest dla studentów wszystkich uczelni, na których wykładana jest fizyka. Może być przydatna dla nauczycieli fizyki w szkołach średnich. Mam nadzieję, że zostanie wykorzystana również przez zawodowych relatywistów.

Ogólna Teoria Względności jest drugą częścią tryptyku, pozostałe dwie to:
• Szczególna Teoria Względności
• Twórcy Teorii Względności

Szczegółowe informacje bibliograficzne, biograficzne oraz ikonograficzne znajdują się w trzeciej części tryptyku.

Należę do pokolenia fizyków, dla których idolami byli Albert Einstein, Lew Dawidowicz Landau i Richard P. Feynman. Einstein zniewolił mnie potęgą swej intuicji. Landaua podziwiam za rzetelność, precyzję, elegancję i prostotę wywodów, oraz instynktowne wyczuwanie istoty zagadnienia. Feynman urzekł mnie lekkością narracji i subtelnym poczuciem humoru.

Praca nad tryptykiem zajęła mi sześć lat.

Zbigniew Osiak

Wrocław, wrzesień 2004

SPIS TREŚCI

POLE GRAWITACYJNE TEORIA NEWTONA

1 RÓWNANIA POLA GRAWITACYJNEGO

- **Wektor natężenia pola grawitacyjnego**

Pole grawitacyjne to przestrzeń, w której na spoczywające i poruszające się ciała działają siły proporcjonalne do mas tych ciał.

Natężeniem pola grawitacyjnego E w danym punkcie nazywamy stosunek siły **F**, działającej ze strony pola na umieszczone w tym punkcie odpowiednio małe ciało, do masy m tego ciała.

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{\mathrm{m}}}$$

Natężenie pola grawitacyjnego jest wektorem. Jednostką natężenia jest niuton na kilogram.

$$[\mathrm{E}] = \frac{1\mathrm{N}}{1\mathrm{kg}}.$$

Znajomość wektorów natężenia w każdym punkcie pola grawitacyjnego pozwala na obliczenie siły działającej na znajdujące się w polu ciało o masie m.

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathrm{m}\,\mathbf{E}}$$

Stacjonarnym (stałym) polem grawitacyjnym nazywamy takie pole grawitacyjne, którego wektory natężeń są stałe w czasie. **Jednorodnym** polem grawitacyjnym nazywamy takie pole grawitacyjne, którego wektory natężeń są stałe co do wartości, kierunku i zwrotu w każdym punkcie pola.

- **Prawo Gaussa w postaci całkowej (globalnej)**

Strumień wektora natężenia pola grawitacyjnego przez powierzchnię zamkniętą jest proporcjonalny do sumy mas ciał otoczonych przez tę powierzchnię.

$$\boxed{\Phi_E = \oint\!\!\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = -4\pi G \iiint_V \rho\, dV = -4\pi G \sum_i m_i = -4\pi G M}$$

$$\Phi_E = \oint\!\!\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}$$

Φ_E = strumień wektora natężenia pola grawitacyjnego przez powierzchnię zamkniętą S

Strumień wektora przez dany element powierzchni zamkniętej jest ujemny, gdy wektor ma różną od zera składową, skierowaną do wnętrza powierzchni Gaussa, prostopadłą do danego elementu powierzchni.

$G = 6{,}672\cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2kg^{-2}}$ = stała grawitacyjna

ρ = gęstość objętościowa masy

M = całkowita masa ciał znajdujących się w obszarze V

- **Prawo Gaussa w postaci różniczkowej (lokalnej)**

Prawo Gaussa

$$\oint\!\!\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = -4\pi G \iiint_V \rho\, dV$$

Twierdzenie Gaussa

$$\oint\!\!\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \mathrm{div}\mathbf{E}\, dV$$

$$\iiint_V \mathrm{div}\mathbf{E}\, dV = -4\pi G \iiint_V \rho\, dV$$

$$\boxed{\mathrm{div}\mathbf{E} = -4\pi G\rho}$$

- **Potencjalność stacjonarnego (stałego) pola wektora E**

Stacjonarne pole wektora natężenia **E** jest polem bezwirowym lub potencjalnym, czyli polem w którym praca, wykonywana przez siły pola przy przesuwaniu cząstki o masie m wzdłuż krzywej zamkniętej, jest równa zeru. Tak więc praca wykonywana przez siły pola przy przesuwaniu cząstki z jednego punktu do drugiego zależy tylko od położenia tych punktów, a nie zależy od toru po którym przesuwana była cząstka. Stacjonarne pole wektora natężenia można opisać skalarem zwanym potencjałem grawitacyjnym.

Różnica potencjałów grawitacyjnych między punktami A i B jest równa stosunkowi pracy $W_{A\to B}$, którą wykonują siły pola grawitacyjnego przy przemieszczaniu cząstki z punktu A do punktu B, do masy m tej cząstki.

$$\boxed{\varphi_A - \varphi_B = \frac{W_{A\to B}}{m}} \qquad [\varphi] = \frac{1\mathrm{J}}{1\mathrm{kg}}$$

Potencjałem grawitacyjnym φ_A w danym punkcie A pola grawitacyjnego nazywamy stosunek pracy, jaką muszą wykonać siły pola przy przemieszczaniu cząstki z danego punktu A do punktu B w którym z założenia potencjał jest równy zeru, do masy m tej cząstki.

$$\boxed{\varphi_A - \cancel{\varphi_B} = \frac{W_{A\to B}}{m}, \qquad \varphi_B = 0}$$

UWAGA

Najczęściej przyjmuje się $\varphi = 0$ w nieskończoności. Fizyczny sens ma jedynie różnica potencjałów.

$$W_{A\to B} = m(\varphi_A - \varphi_B)$$

$$W_{A\to B} = \int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l}$$

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{E}$$

Twierdzenie Stokesa

$$\oint_l \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathrm{rot}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}$$

$$\oint_l \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$\boxed{\oint_l \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = 0 \qquad \mathrm{rot}\mathbf{E} = 0}$$

Dla stacjonarnego pola grawitacyjnego cyrkulacja wektora **E** wzdłuż dowolnej drogi zamkniętej oraz rotacja wektora **E** w każdym punkcie są równe zeru.

- **Związek między natężeniem a potencjałem**

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0, \qquad \mathrm{rot}\mathbf{E} = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\varphi = 0$$

$$\boxed{\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi}$$

- **Równanie Poissona i Laplace'a**

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$$
$$\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi$$
$$\mathrm{div}\mathbf{E} = -4\pi G\rho$$
$$\mathrm{div}\alpha\mathbf{A} = \alpha\mathrm{div}\mathbf{A} + \mathbf{A}\mathrm{grad}\,\alpha$$
$$\mathrm{div\,grad}\,\varphi = \nabla^2\varphi = \Delta\varphi$$
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Δ = operator Laplace'a, laplasjan

$$\boxed{\Delta\varphi = 4\pi G\rho}$$ Równanie Poissona

W pustej przestrzeni poza obszarem źródłowej masy prawa strona równania Poissona jest równa zeru.

$$\boxed{\Delta\varphi = 0}$$ Równanie Laplace'a

- **Prawo Newtona**

Dla powierzchni Gaussa będącej sferą o promieniu r, w środku której znajduje się punktowa masa M, mamy:

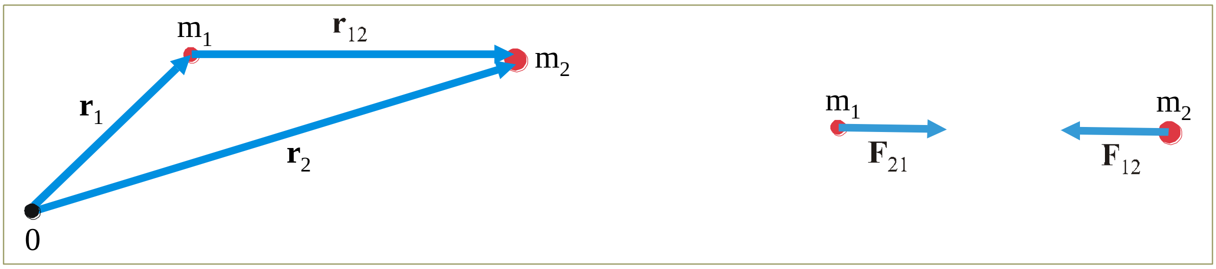
$$S = 4\pi r^2$$
$$\oint\!\!\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = -E4\pi r^2$$
$$\oint\!\!\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = -4\pi GM$$
$$F = mE$$
$$E = |\mathbf{E}|, \quad F = |\mathbf{F}|$$

$$E = \frac{GM}{r^2}$$

$$\boxed{F = \frac{GMm}{r^2}}$$

Każde dwa punktowe ciała o masach M i m znajdujące się w odległości r od siebie przyciągają się wzajemnie siłą o wartości F wprost proporcjonalnej do iloczynu ich mas oraz odwrotnie proporcjonalnej do kwadratu odległości między nimi.

- **Zapis prawa Newtona w postaci wektorowej**



$$\boxed{\mathbf{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2}\cdot\frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}}$$

m_1, m_2 = masy przyciągających się punktowych ciał

$\mathbf{r}_{12}$ = promień wodzący poprowadzony z punktu 1 do punktu 2

r_{12} = odległość między punktami 1 i 2

$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{r}_{12} = -\mathbf{r}_{21}$

$\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ = promienie wodzące poprowadzone z początku układu współrzędnych odpowiednio do punku 1 i 2

$\mathbf{F}_{12}$ = siła z jaką ciało o masie m_1 przyciąga ciało o masie m_2

$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$

2 RÓWNANIA RUCHU PUNKTU MATERIALNEGO W ZEWNĘTRZNYM POLU GRAWITACYJNYM

$$\mathbf{F} = m_{iner}\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \quad F_\mu = m_{iner}\frac{d^2 x_\mu}{dt^2}$$
$$\mathbf{F} = m_{grav}\,\mathbf{E}, \quad F_\mu = m_{grav}E_\mu$$
$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0: \quad \mathbf{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi, \quad E_\mu = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}$$
$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z$$
$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$$
$$m_{iner} = m_{grav}$$

W dowolnym polu grawitacyjnym:
$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} - \mathbf{E} = 0, \quad \frac{d^2 x_\mu}{dt^2} - E_\mu = 0$$

W stacjonarnym polu grawitacyjnym:
$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \mathrm{grad}\,\varphi = 0, \quad \frac{d^2 x_\mu}{dt^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu} = 0$$

3 POLE GRAWITACYJNE PUNKTOWEJ MASY

- **Natężenie pola grawitacyjnego w odległości r od punktowego źródła o masie M**

$$E = \frac{F}{m}, \quad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{m}$$
$$F = \frac{GMm}{r^2}, \quad \mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

M = masa punktowego źródła

$$E = \frac{GM}{r^2}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{GM}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

$\mathbf{r}$ = promień wodzący zaczepiony w źródle

- **Praca sił pola grawitacyjnego przy przemieszczaniu cząstki o masie m w polu punktowego źródła o masie M z punktu A do punktu B wzdłuż linii sił**

$$W_{A\to B} = \int_{r_A}^{r_B} \mathbf{F}\,d\mathbf{r}$$
$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\frac{GMm}{r^2}dr$$
$$\int r^{-2}dr = -r^{-1}$$

$$W_{A\to B} = GMm\cdot\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

r_A = odległość punktu A od źródłowej masy M
r_B = odległość punktu B od źródłowej masy M

- **Potencjał pola grawitacyjnego w odległości r od punktowego źródła o masie M**

$$\varphi_A - \varphi_B = \frac{W_{A\to B}}{m}$$
$$r_B = \infty, \quad \varphi_B = 0$$
$$W_{A\to B} = GMm\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

$$\varphi_A = -\frac{GM}{r_A}$$

Potencjał pola grawitacyjnego dla dowolnego rozkładu mas:

$$\varphi = -G\iiint_V \frac{\rho}{r}\,dV$$

4 POLE GRAWITACYJNE UKŁADU PUNKTÓW MATERIALNYCH, ZASADA SUPERPOZYCJI

- **Zasada superpozycji natężeń**

Wektor natężenia **E** pola grawitacyjnego, wytworzonego przez układ punktów materialnych o masach M_i, równy jest sumie wektorów natężeń $\mathbf{E}_i$ pochodzących od poszczególnych punktów.

$$\boxed{\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{E}_i = -G\sum_{i=1}^{N} \frac{M_i}{r_i^2}\cdot\frac{\mathbf{r}_i}{r_i}}$$

$\mathbf{r}_i$ = promień wodzący zaczepiony w i-tym punkcie materialnym o masie M_i

- **Zasada superpozycji potencjałów**

Potencjał φ pola grawitacyjnego, wytworzonego przez układ punktów materialnych o masach M_i, równy jest sumie potencjałów φ_i pochodzących od poszczególnych punktów.

$$\boxed{\varphi = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i = -G\sum_{i=1}^{N} \frac{M_i}{r_i}}$$

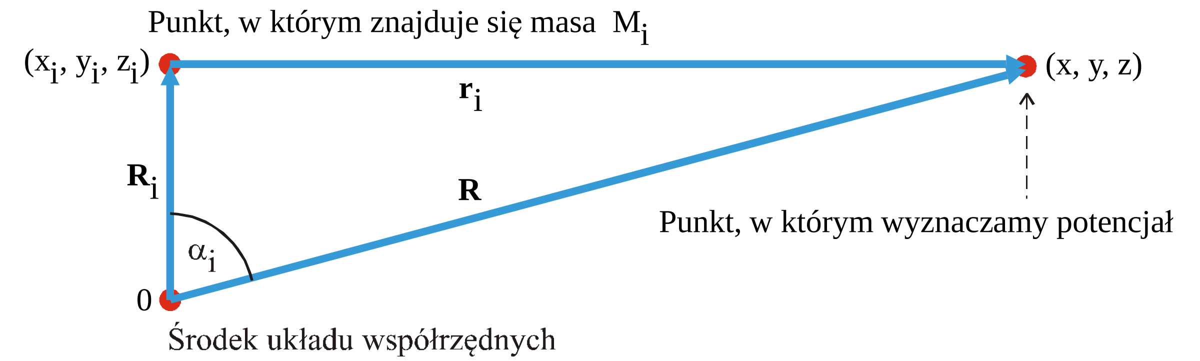
5 ROZWINIĘCIE MULTIPOLOWE POTENCJAŁU POLA GRAWITACYJNEGO UKŁADU PUNKTÓW MATERIALNYCH

- **Rozwinięcie multipolowe potencjału**

Potencjał układu punktów materialnych w dużej odległości od tych punktów można przedstawić w postaci szeregu

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots = -\frac{GK_0}{R^1} - \frac{GK_1}{R^2} - \frac{GK_2}{R^3} - \frac{GK_3}{R^4} + \ldots$$

zwanym rozwinięciem multipolowym.



$$\varphi = -G\sum_i \frac{M_i}{r_i}$$

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{R^{n+1}}\sum_{n=0}^{\infty} R_i^n P_n(\cos\alpha_i)$$

$P_n(\cos\alpha_i)$ = wielomian Legendre'a stopnia n

$$P_0(\cos\alpha) = 1,\quad P_1(\cos\alpha) = \cos\alpha,\quad P_2(\cos\alpha) = \tfrac{1}{2}\left(3\cos^2\alpha - 1\right)$$

$$\boxed{\varphi = -\frac{G}{R^{n+1}}\sum_i M_i \sum_{n=0}^{\infty} R_i^n P_n(\cos\alpha_i)}$$

$$\boxed{\varphi = -\frac{G}{R}\sum_i M_i - \frac{G}{R^2}\sum_i M_i R_i \cos\alpha_i - \frac{G}{R^3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sum_i M_i R_i^2\left(3\cos^2\alpha_i - 1\right) - \ldots}$$

$\varphi_0 = -\frac{G}{R}\sum_i M_i$ = człon monopolowy

$\varphi_1 = -\frac{G}{R^2}\sum_i M_i R_i \cos\alpha_i$ = człon dipolowy

$\varphi_2 = -\frac{G}{R^3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sum_i M_i R_i^2\left(3\cos^2\alpha_i - 1\right)$ = człon kwadrupolowy

$K_0 = \sum_i M_i$ = całkowita masa układu

$$K_1 = \sum_i M_i R_i \cos\alpha_i,\quad K_2 = \frac{1}{2}\cdot\sum_i M_i R_i^2\left(3\cos^2\alpha_i - 1\right)$$

- **Człon dipolowy w rozwinięciu potencjału**

$$\varphi_1 = -\frac{G\sum_i M_i \mathbf{R}_i \cos\alpha_i}{R^2}$$

$$\cos\alpha_i = \frac{\mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}}{R_i R}$$

$$\boxed{\varphi_1 = -\frac{G}{R^3}\left(\sum_i M_i \mathbf{R}_i\right)\cdot\mathbf{R}}$$

Środkiem masy układu punktów materialnych nazywamy punkt, którego promień wodzący $\mathbf{R}_S$ dany jest równaniem

$$\mathbf{R}_S \overset{df}{=} \frac{\sum_i M_i \mathbf{R}_i}{\sum_i M_i}.$$

Jeżeli początek układu współrzędnych umieścić w środku masy układu punktów materialnych będących źródłem pola grawitacyjnego, to człon dipolowy w rozwinięciu potencjału staje się równy zeru, ponieważ wtedy suma momentów mas jest równa zeru $\sum_i M_i \mathbf{R}_i = 0$.

- **Człon kwadrupolowy w rozwinięciu potencjału**

$$\varphi_2 = -\frac{G}{R^3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sum_i M_i R_i^2\left(3\cos^2\alpha_i - 1\right)$$

$$\left.\begin{aligned} R_i^2 &= x_\mu^i x_\nu^i \delta_{\mu\nu} \\ \cos^2\alpha_i &= \frac{x_\mu^i x_\nu^i x_\mu x_\nu}{R_i^2 R^2} R_i^2 \end{aligned}\right\} \quad \left(3\cos^2\alpha_i - 1\right) = x_\mu^i x_\nu^i\left(\frac{3x_\mu x_\nu}{R^2} - \delta_{\mu\nu}\right), \quad \delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow \mu = \nu \\ 0 \Leftrightarrow \mu \neq \nu \end{cases}$$

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z$$

$$x_1^i = x_i, \quad x_2^i = y_i, \quad x_3^i = z_i$$

$$\varphi_2 = -\frac{G}{R^3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sum_\mu\sum_\nu\sum_i M_i x_\mu^i x_\nu^i\left(\frac{3x_\mu x_\nu}{R^2} - \delta_{\mu\nu}\right)$$

$$d_{\mu\nu} = \sum_i M_i x_\mu^i x_\nu^i$$ = tensor momentu kwadrupolowego układu punktów materialnych

$$\boxed{\varphi_2 = -\frac{G}{R^3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sum_\mu\sum_\nu d_{\mu\nu}\left(\frac{3x_\mu x_\nu}{R^2} - \delta_{\mu\nu}\right)}$$

$$x_\mu^i x_\nu^i\left(\frac{3x_\mu x_\nu}{R^2} - \delta_{\mu\nu}\right) = \frac{1}{3}\left(3x_\mu^i x_\nu^i - R_i^2\delta_{\mu\nu}\right)\left(\frac{3x_\mu x_\nu}{R^2} - \delta_{\mu\nu}\right)$$

$$\varphi_2 = -\frac{G}{R^3}\cdot\frac{1}{6}\cdot\sum_\mu\sum_\nu\sum_i M_i\left(3x_\mu^i x_\nu^i - R_i^2\delta_{\mu\nu}\right)\left(\frac{3x_\mu x_\nu}{R^2} - \delta_{\mu\nu}\right)$$

$$D_{\mu\nu} = \sum_i M_i\left(3x_\mu^i x_\nu^i - R_i^2\delta_{\mu\nu}\right)$$ = tensor momentu kwadrupolowego

$$\boxed{\varphi_2 = -\frac{G}{R^3}\cdot\frac{1}{6}\cdot\sum_\mu\sum_\nu D_{\mu\nu}\left(\frac{3x_\mu x_\nu}{R^2} - \delta_{\mu\nu}\right)}$$

- **Tensor momentu kwadrupolowego**
  Symetryczny tensor drugiego rzędu

$$\boxed{d_{\mu\nu} = \sum_i M_i x_\mu^i x_\nu^i}$$

jest jedną z dwu postaci tensora momentu kwadrupolowego układu punktów materialnych będących źródłem pola grawitacyjnego, tworzy go dziewięć składowych w tym sześć niezależnych.

$$d_{xx} = \sum_i M_i x_i^2, \quad d_{yy} = \sum_i M_i y_i^2, \quad d_{zz} = \sum_i M_i z_i^2$$

$$d_{xy} = d_{yx} = \sum_i M_i x_i y_i, \quad d_{xz} = d_{zx} = \sum_i M_i x_i z_i, \quad d_{yz} = d_{zy} = \sum_i M_i y_i z_i$$

$$\varphi_2 = -\frac{G}{R^3}\cdot\frac{1}{6}\cdot\sum_\mu\sum_\nu D_{\mu\nu}\left(\frac{3x_\mu x_\nu}{R^2}-\delta_{\mu\nu}\right)$$

$$D_{\mu\nu} = \sum_i M_i\left(3x^i_\mu x^i_\nu - R_i^2\delta_{\mu\nu}\right)$$

$D_{\mu\nu}$ jest inną postacią tensora momentu kwadrupolowego układu punktów materialnych będących źródłem pola grawitacyjnego. A oto jego składowe:

$$D_{xx} = \sum_i M_i\left(3x_i^2 - R_i^2\right) = \sum_i M_i\left(2x_i^2 - y_i^2 - z_i^2\right)$$

$$D_{yy} = \sum_i M_i\left(3y_i^2 - R_i^2\right) = \sum_i M_i\left(2y_i^2 - x_i^2 - z_i^2\right)$$

$$D_{zz} = \sum_i M_i\left(3z_i^2 - R_i^2\right) = \sum_i M_i\left(2z_i^2 - x_i^2 - y_i^2\right)$$

$$D_{xy} = D_{yx} = \sum_i 3M_i x_i y_i$$

$$D_{xz} = D_{zx} = \sum_i 3M_i x_i z_i$$

$$D_{yz} = D_{zy} = \sum_i 3M_i y_i z_i$$

$$R_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$$

Tensor $D_{\mu\nu}$ ma 5 niezależnych składowych ponieważ jest tensorem symetrycznym

$$D_{\mu\nu} = D_{\nu\mu}$$

a suma jego składowych diagonalnych jest równa zeru

$$D_{xx} + D_{yy} + D_{zz} = 0.$$

- **Związek tensora momentu kwadrupolowego z tensorem momentu bezwładności**

  Tensor momentu bezwładności układu punktów materialnych względem początku układu współrzędnych z definicji dany jest przez

$$I_{\mu\nu} \overset{df}{=} \sum_i M_i\left(R_i^2\delta_{\mu\nu} - x^i_\mu x^i_\nu\right), \quad R_i^2 = \sum_{\lambda=1}^{3}\left(x^i_\lambda\right)^2$$

$$I_{11} = \sum_i M_i\left[\left(x^i_2\right)^2 + \left(x^i_3\right)^2\right], \quad I_{22} = \sum_i M_i\left[\left(x^i_1\right)^2 + \left(x^i_3\right)^2\right], \quad I_{33} = \sum_i M_i\left[\left(x^i_1\right)^2 + \left(x^i_2\right)^2\right],$$

$$I_{12} = I_{21} = -\sum_i M_i x^i_1 x^i_2, \quad I_{13} = I_{31} = -\sum_i M_i x^i_1 x^i_3, \quad I_{23} = I_{32} = -\sum_i M_i x^i_2 x^i_3,$$

lub

$$I_{xx} = \sum_i M_i\left(y_i^2 + z_i^2\right), \quad I_{yy} = \sum_i M_i\left(x_i^2 + z_i^2\right), \quad I_{zz} = \sum_i M_i\left(x_i^2 + y_i^2\right),$$

$$I_{xy} = I_{yx} = -\sum_i M_i x_i y_i, \quad I_{xz} = I_{zx} = -\sum_i M_i x_i z_i, \quad I_{yz} = I_{zy} = -\sum_i M_i y_i z_i.$$

Mamy też $I_{11} + I_{22} + I_{33} = 2M_i\left[\left(x^i_1\right)^2 + \left(x^i_2\right)^2 + \left(x^i_3\right)^2\right] = 2\sum_i M_i R_i^2$, co ułatwia znalezienie poszukiwanej relacji.

$$D_{\mu\nu} = -3I_{\mu\nu} + \left(I_{11} + I_{22} + I_{33}\right)\delta_{\mu\nu}$$

$$d_{\mu\nu} = -I_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}\left(I_{11} + I_{22} + I_{33}\right)\delta_{\mu\nu}$$

6 ENERGIA POTENCJALNA UKŁADU PUNKTÓW MATERIALNYCH W ZEWNĘTRZNYM POLU GRAWITACYJNYM

- **Energia potencjalna punktowej masy w zewnętrznym polu grawitacyjnym**

Energią potencjalną W_p wzajemnego oddziaływania punktowej masy M z zewnętrznymi nieruchomymi masami wytwarzającymi pole grawitacyjne w danym punkcie tego pola nazywamy pracę, jaką wykonują siły pola przy przemieszczaniu masy M z danego punktu do nieskończoności (lub do punktu, w którym z założenia energia potencjalna jest równa zeru).

$$
\begin{aligned}
W_p &= W_{A\to\infty} \\
W_{A\to\infty} &= M\left(\varphi_A - \varphi_\infty\right) \\
\varphi_A &= \varphi \\
\varphi_\infty &= 0
\end{aligned}
$$

$$\boxed{W_p = M\varphi}$$

φ = potencjał pola zewnętrznego w punkcie zajętym przez masę M

Siłę działającą ze strony pola na masę M można wyrazić przez jej energię potencjalną.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F} &= M\mathbf{E} \\
\mathbf{E} &= -\operatorname{grad}\varphi \\
W_p &= M\varphi
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\mathbf{F} = -\operatorname{grad} W_p}$$

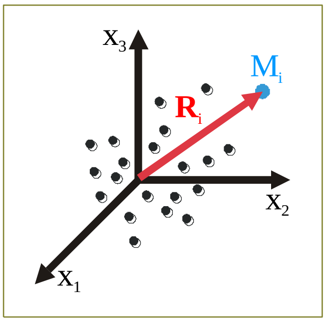
- **Energia potencjalna układu punktów materialnych w zewnętrznym polu grawitacyjnym**

$$\boxed{W_p = \sum_i M_i\,\varphi\left(\mathbf{R}_i\right)}$$

$\varphi\left(\mathbf{R}_i\right)$ = potencjał zewnętrznego pola grawitacyjnego w punkcie zajmowanym przez masę M_i

$\mathbf{R}_i = \left(x_1^i, x_2^i, x_3^i\right)$ = promień wodzący i-tego punktu materialnego

Jeżeli w obszarze, w którym znajduje się układ punktów materialnych pole zewnętrzne niewiele się zmienia, to energię potencjalną tego układu można rozwinąć w szereg Taylora.



$$W_p = \sum_i M_i \varphi\left(x_1^i, x_2^i, x_3^i\right)$$

$$\varphi\left(x_1^i, x_2^i, x_3^i\right) = \varphi(0,0,0) + \sum_\lambda x_\lambda^i \left[\frac{\partial\varphi\left(x_1, x_2, x_3\right)}{\partial x_\lambda}\right]_o + $$

$$+\frac{1}{2}\sum_\kappa\sum_\lambda x_\kappa^i x_\lambda^i \left[\frac{\partial^2\varphi\left(x_1, x_2, x_3\right)}{\partial x_\kappa \partial x_\lambda}\right]_o + \cdots$$

$$W_p = \varphi(0,0,0)\sum_{i=1}^{n} M_i + \sum_{\lambda=1}^{3}\left[\frac{\partial\varphi\left(x_1, x_2, x_3\right)}{\partial x_\lambda}\right]_0 \sum_{i=1}^{n} M_i x_\lambda^i + \frac{1}{2}\sum_{\kappa=1}^{3}\sum_{\lambda=1}^{3}\sum_{i=1}^{n} M_i x_\kappa^i x_\lambda^i \left[\frac{\partial^2\varphi\left(x_1, x_2, x_3\right)}{\partial x_\kappa \partial x_\lambda}\right]_0 + \ldots$$

$$W_p = \varphi(0,0,0)\sum_{i=1}^{n} M_i + \sum_{\lambda=1}^{3}\left[\frac{\partial\varphi(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_\lambda}\right]_0 \sum_{i=1}^{n} M_i x_\lambda^i +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\kappa=1}^{3}\sum_{\lambda=1}^{3}\sum_{i=1}^{n} M_i x_\kappa^i x_\lambda^i\left[\frac{\partial^2\varphi(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_\kappa \partial x_\lambda}\right]_0 + \ldots$$

$$\left[\frac{\partial\varphi(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_\lambda}\right]_0 = -E_\lambda(0,0,0)$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_i x_\lambda^i = \mu_\lambda$$

$$\sum_{\lambda=1}^{3}\left[\frac{\partial\varphi(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_\lambda}\right]_0 \sum_{i=1}^{n} M_i x_\lambda^i = -\sum_{\lambda=1}^{3} E_\lambda(0,0,0)\cdot\mu_\lambda = -E(0,0,0)\cdot\boldsymbol{\mu}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_i x_\kappa^i x_\lambda^i = d_{\kappa\lambda}$$

$$\boxed{W_p = \varphi(0,0,0)\sum_{i=1}^{n} M_i - \mathbf{E}(0,0,0)\cdot\boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2}\sum_{\kappa=1}^{3}\sum_{\lambda=1}^{3} d_{\kappa\lambda}\left[\frac{\partial^2\varphi(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_\kappa \partial x_\lambda}\right]_0 + \ldots}$$

$\varphi(0,0,0) =$ wartość potencjału zewnętrznego pola grawitacyjnego w początku układu współrzędnych

$\mathbf{E}(0,0,0) =$ wektor natężenia zewnętrznego pola grawitacyjnego w początku układu współrzędnych

$E_\lambda =$ składowe wektora natężenia pola grawitacyjnego w początku układu współrzędnych

$E_\lambda :\ E_1 = E_x,\ E_2 = E_y,\ E_3 = E_z$

$$\boldsymbol{\mu} = \sum_{i=1}^{n} M_i R^i = \sum_{\lambda=1}^{3}\sum_{i=1}^{n} M_i x_\lambda^i \mathbf{e}_\lambda$$

$\boldsymbol{\mu}$ = wektor momentu masy (momentu statycznego)

μ_λ = składowe wektora momentu masy

$\mu_\lambda :\ \mu_1 = \mu_x,\ \mu_2 = \mu_y,\ \mu_3 = \mu_z$

$d_{\kappa\lambda}$ = tensor momentu kwadrupolowego

$\left[\frac{\partial\varphi(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_\lambda}\right]_o$ = wartości pierwszych pochodnych potencjału zewnętrznego pola grawitacyjnego w początku układu współrzędnych

$\left[\frac{\partial^2\varphi(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_\kappa \partial x_\lambda}\right]_o$ = wartości drugich pochodnych potencjału zewnętrznego pola grawitacyjnego w początku układu współrzędnych

UWAGA

Jeżeli początek układu współrzędnych umieścić w środku masy układu punktów materialnych, to w wyrażeniu na energię potencjalną zniknie człon dipolowy $-\mathbf{E}(0,0,0)\cdot\boldsymbol{\mu} = 0$, ponieważ wtedy moment masy jest równy zeru $\boldsymbol{\mu} = 0$.

Przedstawimy w innej postaci człon kwadrupolowy w równaniu na energię potencjalną oddziaływania układu punktów materialnych z zewnętrznym polem grawitacyjnym.

$$\frac{1}{2}\sum_{\kappa}\sum_{\lambda}\sum_{i} M_i x_\kappa^i x_\lambda^i \left[\frac{\partial^2 \varphi(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_\kappa \partial x_\lambda}\right]_0 =$$

$$R_i^2 \delta_{\kappa\lambda}\left[\frac{\partial^2 \varphi(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_\kappa \partial x_\lambda}\right]_0 = 0$$

$$\sum_i M_i \left(3x_\kappa^i x_\lambda^i - R_i^2 \delta_{\kappa\lambda}\right) = D_{\kappa\lambda}$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{\kappa}\sum_{\lambda}\sum_{i} M_i \left\{3x_\kappa^i x_\lambda^i \left[\frac{\partial^2 \varphi(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_\kappa \partial x_\lambda}\right]_0 - R_i^2 \delta_{\kappa\lambda}\left[\frac{\partial^2 \varphi(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_\kappa \partial x_\lambda}\right]_0\right\} =$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{\kappa}\sum_{\lambda}\sum_{i} M_i \left(3x_\kappa^i x_\lambda^i - R_i^2 \delta_{\kappa\lambda}\right)\left[\frac{\partial^2 \varphi(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_\kappa \partial x_\lambda}\right]_0 = \frac{1}{6}\sum_{\kappa}\sum_{\lambda} D_{\kappa\lambda}\left[\frac{\partial^2 \varphi(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_\kappa \partial x_\lambda}\right]_0$$

Zbierzmy uzyskane wyniki.

$$\boxed{W_p = \varphi(0,0,0)\sum_{i=1}^{n} M_i - E(0,0,0)\cdot \boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2}\sum_{\kappa=1}^{3}\sum_{\lambda=1}^{3} d_{\kappa\lambda}\left[\frac{\partial^2 \varphi(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_\kappa \partial x_\lambda}\right]_0 + \ldots}$$

$$\boxed{W_p = \varphi(0,0,0)\sum_{i=1}^{n} M_i - E(0,0,0)\cdot \boldsymbol{\mu} + \frac{1}{6}\sum_{\kappa=1}^{3}\sum_{\lambda=1}^{3} D_{\kappa\lambda}\left[\frac{\partial^2 \varphi(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_\kappa \partial x_\lambda}\right]_0 + \ldots}$$

7 ENERGIA POTENCJALNA WZAJEMNYCH ODDZIAŁYWAŃ MIĘDZY PUNKTAMI MATERIALNYMI

- **Energia potencjalna wzajemnego oddziaływania dwóch punktów materialnych**

Energia potencjalna W_p wzajemnego oddziaływania układu dwóch punktów materialnych m_1 i m_2 znajdujących się w odległości r_{12} od siebie jest równa pracy, jaką wykonują siły grawitacyjne przy rozsuwaniu tych mas na odległość nieskończenie wielką.

$$W_p = W_{A\to B}$$
$$W_{A\to B} = m_2(\varphi_A - \varphi_B)$$
$$\varphi_A = -\frac{Gm_1}{r_{12}}$$
$$\varphi_B = 0$$

$$\boxed{W_p = -\frac{Gm_1 m_2}{r_{12}}}$$

- Energię potencjalną W_p wzajemnego oddziaływania układu dwóch punktowych mas m_1 i m_2 przedstawimy w innej postaci.

$$W_p = -\frac{Gm_1 m_2}{r_{12}}$$
$$\varphi_1 = -\frac{Gm_2}{r_{12}}$$
$$\varphi_2 = -\frac{Gm_1}{r_{21}}$$
$$r_{12} = r_{21}$$

$$\boxed{W_p = \frac{1}{2}\left(m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2\right)}$$

Ogólnie:

$$\boxed{W_p = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k\varphi_k}$$

φ_1 = potencjał pola pochodzący od masy m_2 w punkcie zajmowanym przez masę m_1
φ_2 = potencjał pola pochodzący od masy m_1 w punkcie zajmowanym przez masę m_2
φ_k = potencjał pola pochodzący od wszystkich mas prócz masy m_k w punkcie zajmowanym przez masę m_k

- **Energia potencjalna wzajemnego oddziaływania dowolnego układu punktów materialnych**

$$W_p = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k\varphi_k$$
$$\varphi_k = -G\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{r_{ki}}\left(1-\delta_{ik}\right)$$
$$r_{ki} = r_{ik}$$

$$\boxed{W_p = -\frac{1}{2}G\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{m_k m_i}{r_{ki}}\left(1-\delta_{ik}\right)}$$

PRZYKŁAD

Energia potencjalna wzajemnego oddziaływania trzech punktowych mas m_1, m_2, m_3.

$$W_p = -\frac{1}{2}G\left(\frac{m_1m_2}{r_{12}} + \frac{m_1m_3}{r_{13}} + \frac{m_2m_1}{r_{21}} + \frac{m_2m_3}{r_{23}} + \frac{m_3m_1}{r_{31}} + \frac{m_3m_2}{r_{32}}\right)$$

$$\boxed{W_p = -G\left(\frac{m_1m_2}{r_{12}} + \frac{m_1m_3}{r_{13}} + \frac{m_2m_3}{r_{23}}\right)}$$

- **Energia potencjalna ciągłego rozkładu mas**

Wzór $W_p = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \varphi_k$ dostosujemy do przypadku ciągłego rozkładu masy w danej objętości z gęstością objętościową $\rho = \frac{dm}{dV}$.

$$m = \iiint_V \rho \, dV$$

$$\boxed{W_p = \frac{1}{2}\iiint_V \rho\varphi \, dV}$$

φ = potencjał pola grawitacyjnego wszystkich mas w elemencie objętości dV

8 ENERGIA POLA GRAWITACYJNEGO

- Wzór $W_p = \frac{1}{2}\iiint_V \rho\varphi \, dV$ sprowadzimy do postaci $W_p = -\frac{1}{8\pi G}\iiint_V \mathbf{E}^2 \, dV$, która posiada ciekawą interpretację fizyczną.

$$W_p = \frac{1}{2}\iiint_V \rho\varphi \, dV$$

Twierdzenie Greena

$$\iiint_V \left[\varphi\nabla^2\varphi + (\nabla\varphi)^2\right] dV = \oiint_S \varphi\nabla\varphi \cdot d\mathbf{S}$$

$$\nabla\varphi = \operatorname{grad}\varphi = -\mathbf{E}$$

$$\nabla^2\varphi = 4\pi G\rho$$

$$\oiint_S \varphi\nabla\varphi \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \text{bo} \quad \varphi(\infty) = 0$$

$$\iiint_V \left[4\pi G\rho\varphi + \mathbf{E}^2\right] dV = 0$$

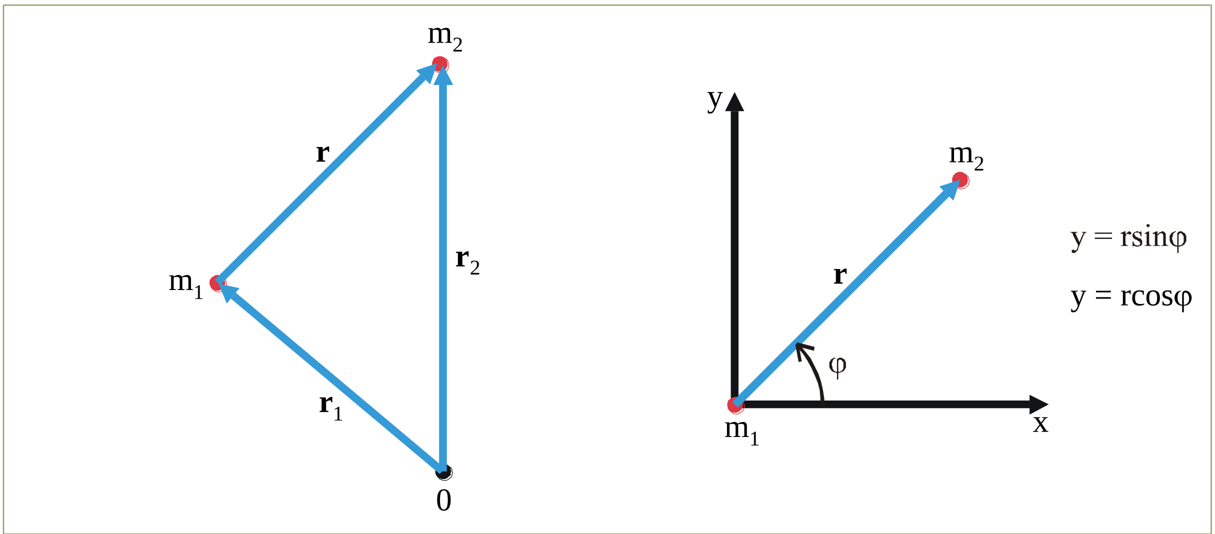
$$4\pi G\iiint_V \rho\varphi \, dV = -\iiint_V \mathbf{E}^2 dV$$

$$\boxed{W_p = \frac{1}{2}\iiint_V \rho\varphi \, dV = -\frac{1}{8\pi G}\iiint_V \mathbf{E}^2 \, dV}$$

Energia $W = W_p = -\frac{1}{8\pi G}\iiint_V \mathbf{E}^2 \, dV$ jest energią pola grawitacyjnego zlokalizowaną w przestrzeni z gęstością objętościową $w \overset{df}{=} \frac{dW}{dV} = -\frac{1}{8\pi G}\mathbf{E}^2$.

9 RÓWNANIE TORU W CENTRALNYM POLU GRAWITACYJNYM

Równanie toru w centralnym polu grawitacyjnym znajdziemy metodą redukcji zagadnienia dwóch ciał do zagadnienia jednego ciała, wykorzystując zasady zachowania momentu pędu i energii mechanicznej.



$$m_1\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2}=\frac{Gm_1m_2}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$
$$m_2\frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2}=-\frac{Gm_1m_2}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$
$$\mathbf{r}\overset{df}{=}\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$$
$$\mu\overset{df}{=}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2}-\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2}=-\frac{Gm_1m_2}{r^2m_2}\frac{\mathbf{r}}{r}-\frac{Gm_1m_2}{r^2m_1}\frac{\mathbf{r}}{r}$$
$$\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\frac{d^2(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)}{dt^2}=-\frac{Gm_1m_2}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$\boxed{\mu\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=-\frac{Gm_1m_2}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}}$$

Równanie opisujące ruch punktu drugiego względem punktu pierwszego.

μ = masa zredukowana układu dwóch punktów
$\mathbf{r}$ = promień wodzący o początku w punkcie pierwszym i o końcu w punkcie drugim

$$\mu\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=-\frac{Gm_1m_2}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$
$$\mathbf{r}\times\mathbf{r}=0$$
$$\dot{\mathbf{r}}\times\mu\dot{\mathbf{r}}=0$$

$$\mathbf{r}\times\mu\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=-\frac{Gm_1m_2}{r^2}\frac{\mathbf{r}\times\mathbf{r}}{r}=0$$
$$\mathbf{r}\times\mu\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\frac{d(\mathbf{r}\times\mu\dot{\mathbf{r}})}{dt}-\dot{\mathbf{r}}\times\mu\dot{\mathbf{r}}=\frac{d(\mathbf{r}\times\mu\dot{\mathbf{r}})}{dt}=0$$
$$\mathbf{r}\times\mu\dot{\mathbf{r}}\overset{df}{=}\mathbf{L}=\mathbf{const}$$

Ze względu na stałość wektora momentu pędu **L**, który jest prostopadły do płaszczyzny orbity, ruch ciała drugiego względem ciała pierwszego (jako ruch płaski) wygodnie będzie opisywać w biegunowym układzie współrzędnych **r**, φ o początku w środku ciała pierwszego.

$$v_\perp=v\sin\angle(\mathbf{r},\mathbf{v})$$
$$v_\perp=v_\varphi$$
$$v_\varphi=r\dot{\varphi}$$

$$L=|\mathbf{r}\times\mu\dot{\mathbf{r}}|=|\mathbf{r}\times\mu\mathbf{v}|=r\mu v\sin\angle(\mathbf{r},\mathbf{v})=r\mu v_\perp=r\mu v_\varphi=\mu r^2\dot{\varphi}=\mathrm{const}$$

$$\boxed{L=\mu r^2\dot{\varphi}=\mathrm{const}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\mu\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=-\frac{Gm_1m_2}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}\\&\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}\\&\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\dot{\mathbf{r}}\\&\mathbf{v}\cdot\mu\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu v^2}{2}\right)\\&-\dot{\mathbf{r}}\cdot\frac{Gm_1m_2}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}=\frac{d}{dt}\left(\frac{Gm_1m_2}{r}\right)\end{aligned}}$$

$$\mu\frac{d\mathbf{v}}{dt}=-\frac{Gm_1m_2}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$\mathbf{v}\cdot\mu\frac{d\mathbf{v}}{dt}=-\dot{\mathbf{r}}\cdot\frac{Gm_1m_2}{r}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu v^2}{2}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{Gm_1m_2}{r}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu v^2}{2}-\frac{Gm_1m_2}{r}\right)=0$$

$$\boxed{\frac{\mu v^2}{2}-\frac{Gm_1m_2}{r}\stackrel{df}{=}W=\text{const}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&W=\frac{\mu v^2}{2}-\frac{Gm_1m_2}{r}=\text{const}\\&L=\mu r^2\dot{\varphi}=\text{const}\\&v^2=v_r^2+v_\varphi^2\\&v_r=\frac{dr}{dt}=\dot{r}\\&v_\varphi=r\frac{d\varphi}{dt}=r\dot{\varphi}\\&\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2=\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2\\&\sigma\stackrel{df}{=}\frac{1}{r}\\&\frac{1}{p}=\frac{Gm_1m_2\mu}{L^2}\end{aligned}}$$

$$W=\frac{\mu}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]-\frac{Gm_1m_2}{r}$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=\frac{2W}{\mu}+\frac{2Gm_1m_2}{\mu r}$$

Ostatnie równanie dzielimy stronami przez

$$r^4\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=\left(\frac{L}{\mu}\right)^2$$

i dostajemy

$$\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+\frac{1}{r^2}=\frac{2W\mu}{L^2}+\frac{2Gm_1m_2\mu}{L^2 r},$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\varphi}\right)^2=\frac{2W\mu}{L^2}+\frac{2Gm_1m_2\mu}{L^2}\sigma-\sigma^2.$$

Równanie to różniczkujemy obustronnie względem φ

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{d\sigma}{d\varphi}\right)^2=\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{2W\mu}{L^2}+\frac{2Gm_1m_2\mu}{L^2}\sigma-\sigma^2\right),$$

$$2\frac{d\sigma}{d\varphi}\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2}=\frac{2Gm_1m_2\mu}{L^2}\frac{d\sigma}{d\varphi}-2\sigma\frac{d\sigma}{d\varphi}$$

a następnie dzielimy obustronnie przez

$$2\frac{d\sigma}{d\varphi},$$

otrzymując

$$\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2}=\frac{Gm_1m_2\mu}{L^2}-\sigma$$

lub

$$\boxed{\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2}=\frac{1}{p}-\sigma}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\sigma=\frac{1}{p}+\frac{e}{p}\cos\varphi}$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2W\mu}{L^2} + \frac{2Gm_1m_2\mu}{L^2}\sigma - \sigma^2$$

$$\sigma = \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e}{p}\cos\varphi = \frac{1+e\cos\varphi}{p}$$

$$p = \frac{L^2}{Gm_1m_2\mu}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2WL^2}{G^2m_1^2m_2^2\mu}}$$

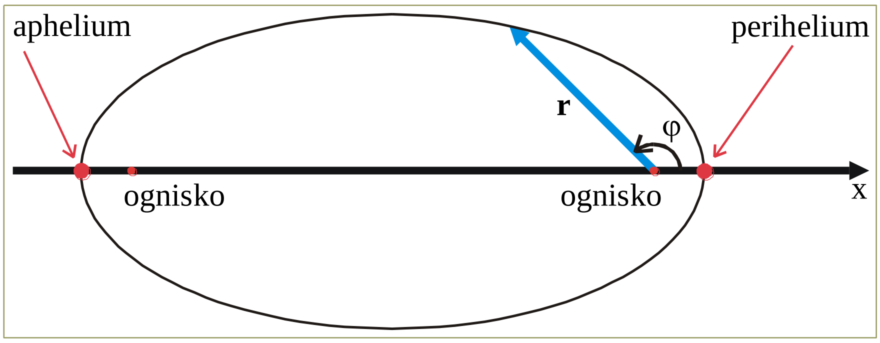
Równanie toru ostatecznie przyjmuje postać

$$r = \frac{p}{1+e\cos\varphi}$$

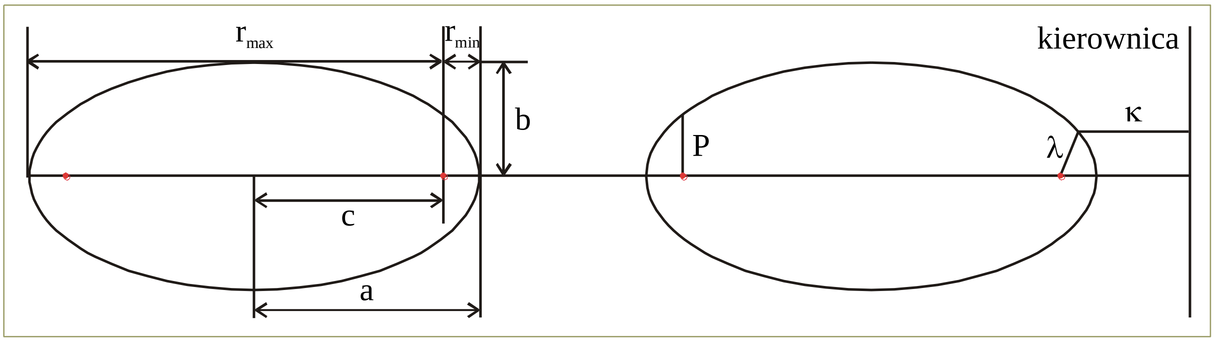
$$p = \frac{L^2}{Gm_1m_2\mu}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2WL^2}{G^2m_1^2m_2^2\mu}}$$

$$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$$



Ciało o masie m_2 porusza się po stożkowej, w której ognisku znajduje się ciało o masie m_1. Początek układu współrzędnych umieściliśmy w środku ciała o masie m_1.



Równanie biegunowe stożkowej

$$r = \frac{p}{1+e\cos\varphi}$$

Dla elipsy:

$$a = \tfrac{1}{2}(r_{max} + r_{min})$$

$$b = a\sqrt{1-e^2}$$

$$c = \tfrac{1}{2}(r_{max} - r_{min})$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{r_{max} - r_{min}}{r_{max} + r_{min}} = \frac{\lambda}{\kappa}$$

$$p = \frac{b^2}{a} = (1+e)r_{min} = (1-e)r_{max} = a(1-e^2)$$

$$\varphi = 0 \quad\Rightarrow\quad r = r_{min} = \frac{p}{1+e} = a(1-e)$$

$$\varphi = \pi \quad\Rightarrow\quad r = r_{max} = \frac{p}{1-e} = a(1+e)$$

$$a = \frac{p}{1-e^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}, \quad p = \frac{2r_{min}r_{max}}{r_{min}+r_{max}}$$

a = wielka półoś
b = mała półoś
c = połowa odległości między ogniskami
e = mimośród
p = półparametr
r_{min} = minimalny promień
r_{max} = maksymalny promień

$e = 0$ koło
$e < 1$ elipsa
$e = 1$ parabola
$e > 1$ hiperbola

10 PRAWA KEPLERA

- **Pierwsze prawo Keplera**

Punkt materialny o masie m_2 porusza się po stożkowej, w której ognisku znajduje się punkt materialny o masie m_1.

UWAGA
W oryginalnym sformułowaniu prawa Keplera dotyczą ruchu planet dookoła Słońca po orbitach eliptycznych, m_2 oznacza wtedy masę planety, a m_1 masę Słońca.

- **Drugie prawo Keplera**

Prędkość polowa punktu materialnego o masie m_2 w ruchu względem punktu materialnego o masie m_1 jest stała.

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mu \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{const}$$
$$L = \mu r^2 \dot{\varphi} = \text{const}$$
$$\mu = \text{const}$$
$$\tfrac{1}{2}\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \text{prędkość polowa}$$

$$\boxed{\tfrac{1}{2}\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{L}}{2\mu} = \mathbf{const}}$$
$$\boxed{\tfrac{1}{2}\mu r^2 \dot{\varphi} = \frac{L}{2\mu} = \text{const}}$$

- **Trzecie prawo Keplera**

Kwadrat okresu obiegu orbity eliptycznej jest proporcjonalny do sześcianu wielkiej półosi.

$$\boxed{T^2 \sim a^3}$$

$$\text{pole elipsy} = \pi ab$$
$$\text{pole elipsy} = \frac{L}{2\mu} \cdot T$$
$$a = \frac{p}{1-e^2}$$
$$b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$$
$$p = \frac{L^2}{Gm_1m_2\mu}$$
$$e = \sqrt{1 + \frac{2WL^2}{G^2m_1^2m_2^2\mu}}$$
$$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$$

$$T = 2\pi ab\frac{\mu}{L}$$

$$\left.\begin{aligned} ab &= \frac{p^2}{(1-e)^{\frac{3}{2}}} \\ W &= -\frac{Gm_1m_2}{2a} \end{aligned}\right\} \quad ab = \sqrt{\frac{\mu a^3}{Gm_1m_2}}\frac{L}{\mu}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu a^3}{Gm_1m_2}}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{G(m_1+m_2)}}} \qquad T^2 \sim a^3$$

11 PRĘDKOŚCI KOSMICZNE

- **Pierwsza prędkość kosmiczna w przypadku orbity kołowej**

Pierwszą prędkością kosmiczną $\mathbf{v}_I$ nazywamy prędkość, jaką należy nadać cząstce o masie m, aby poruszała się ruchem jednostajnym po okręgu o promieniu $r \geq R$ w polu punktowego źródła lub jednorodnej kuli o masie M i promieniu R. Pierwsza prędkość kosmiczna jest prostopadła do promienia wodzącego cząstki zaczepionego w centrum źródła.

$$F_{graw} = \frac{GMm}{r^2}$$

$$F_{dośr} = \frac{mv_I^2}{r}$$

$$F_{graw} = F_{dośr}$$

$$\boxed{v_I = \sqrt{\frac{GM}{r}}}$$

- **Druga prędkość kosmiczna (prędkość ucieczki) w przypadku orbity liniowej**

Drugą prędkością kosmiczną $\mathbf{v}_{II}$ nazywamy prędkość, jaką należy nadać cząstce o masie m, aby z odległości $r \geq R$ od punktowego źródła lub jednorodnej kuli o masie M i promieniu R przemieściła się do nieskończoności. Druga prędkość kosmiczna jest równoległa do promienia wodzącego cząstki zaczepionego w centrum źródła.

$$W_{r\to\infty} = \frac{GMm}{r}$$

$$W_k = \frac{mv_{II}^2}{2}$$

$$W_{r\to\infty} = W_k$$

$$\boxed{v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}}$$

- **Prędkości na dowolnych orbitach**

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$$

$$p = \frac{L^2}{GMm\mu}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2WL^2}{G^2M^2m^2\mu}}$$

$$L = r\mu v \sin\sphericalangle(\mathbf{r}, \mathbf{v})$$

$$W = \frac{\mu v^2}{2} - \frac{GMm}{r}$$

$$E_k = \frac{\mu v^2}{2}$$

$$E_p = -\frac{GMm}{r}$$

$$\mu = \frac{Mm}{M+m}$$

$$e = \sqrt{1 + 4\frac{E_k}{-E_p}\sin^2\sphericalangle(\mathbf{r}, \mathbf{v})\left(\frac{E_k}{-E_p} - 1\right)}$$

$$v\sin\sphericalangle(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \sqrt{\frac{GM}{r}\left(1 + \frac{m}{M}\right)(1 + e\cos\varphi)}$$

Orbita kołowa: $e = 0$

$$\frac{E_k}{-E_p} = \frac{1}{2}, \quad \sin\sphericalangle(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = 1, \quad v = \sqrt{\frac{GM}{r}\left(1 + \frac{m}{M}\right)}$$

Orbita eliptyczna: $e < 1$

$$\frac{E_k}{-E_p} < 1, \quad v\sin\sphericalangle(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \sqrt{\frac{GM}{r}\left(1 + \frac{m}{M}\right)(1 + e\cos\varphi)}$$

Orbita paraboliczna: $e = 1$

$$\frac{E_k}{-E_p} = 1, \quad v\sin\sphericalangle(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \sqrt{\frac{GM}{r}\left(1 + \frac{m}{M}\right)(1 + \cos\varphi)}$$

- **Pierwsza prędkość kosmiczna dla orbity kołowej w przypadku wirującej planety**

W przypadku wirującej planety siła dośrodkowa, utrzymująca satelitę krążącego po orbicie kołowej w płaszczyźnie równikowej, jest sumą siły grawitacyjnej oraz sił bezwładności – odśrodkowej i Coriolisa.

$$\mathbf{F}_D = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_O + \mathbf{F}_C$$

$F_D = -\dfrac{mv^2}{r}$ = siła dośrodkowa

$F_G = -\dfrac{GMm}{r^2}$ = siła grawitacyjna

$F_O = m\omega^2 r$ = odśrodkowa siła bezwładności

$F_C = \pm 2m|v|\omega$ = siła Coriolisa

$\mathbf{F}_C = 2m(\mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega})$

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{1}{r}|v|^2 + 2\omega|v| + \omega^2 r - \dfrac{GM}{r^2} = 0, \qquad v = +|v| > 0 \\[2ex] \dfrac{1}{r}|v|^2 - 2\omega|v| + \omega^2 r - \dfrac{GM}{r^2} = 0, \qquad v = -|v| < 0 \end{array}}$$

Wśród czterech rozwiązań powyższych równań będących trójmianami kwadratowymi względem |v|, tylko dwa rozwiązania są fizyczne.

$$|v_1| = -\omega r + \sqrt{\frac{GM}{r}}, \qquad v_1 = +|v_1| > 0$$

$$|v_2| = +\omega r + \sqrt{\frac{GM}{r}}, \qquad v_2 = -|v_2| < 0$$

PRZYKŁAD

Przykładowe obliczenia wykonamy dla satelity krążącego tuż nad powierzchnią Ziemi.

$$\boxed{\begin{array}{l} \omega = 2\pi\dfrac{\text{rad}}{\text{doba}} = 7{,}3\cdot 10^{-5}\dfrac{\text{rad}}{\text{s}} \\ r = 6{,}4\cdot 10^6\,\text{m} \\ M = 6\cdot 10^{24}\,\text{kg} \\ G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\dfrac{\text{m}^3}{\text{kg}\cdot\text{s}^2} \end{array}}$$

$$\omega r = 467{,}2\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 0{,}5\cdot 10^3\frac{\text{m}}{\text{s}}, \qquad \sqrt{\frac{GM}{r}} = 7{,}9\cdot 10^3\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_1 = +7{,}4\cdot 10^3\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_2 = -8{,}4\cdot 10^3\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Prędkość $\mathbf{v}_1$ należy nadać rakiecie wystrzelonej w kierunku wschodnim, siła Coriolisa skierowana jest wtedy radialnie od centrum źródła pola. Prędkość $\mathbf{v}_2$ należy nadać rakiecie wystrzelonej w kierunku zachodnim, siła Coriolisa skierowana jest wtedy radialnie ku centrum źródła pola.

12 SWOBODNY SPADEK I GRAWITACYJNE ZAPADANIE

- **Cząstka swobodnie spadająca ze skończonej odległości na powierzchnię znajdującą się w odległości r od centrum źródła pola grawitacyjnego**

Źródłem pola grawitacyjnego jest jednorodna kula o masie M i promieniu R. Ruch cząstki o masie m swobodnie spadającej ze skończonej odległości r_0 na powierzchnię znajdującą się w odległości r, $r_0 \geq r \geq R$, od centrum źródła pola opisuje równanie

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2}$$

z następującymi warunkami początkowymi

$$t = 0, \quad r(0) = r_0, \quad \frac{dr}{dt}(0) = 0, \quad \frac{d^2r}{dt^2}(0) = -\frac{GM}{r_0^2}.$$

Rozwiązanie tego równania jest takie samo jak rozwiązanie równania

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = GMm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) \quad \text{lub} \quad \frac{dr}{dt} = -\sqrt{2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}, \quad t = 0, \quad r = r_0, \quad \frac{dr}{dt} = 0.$$

$$-\int_{r_0}^{r}\sqrt{\frac{r}{r_0 - r}}\,dr = \int_0^t \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}\,dt$$

$$\int_{r_0}^{r}\sqrt{\frac{r}{r_0 - r}}\,dr = -\sqrt{r(r_0 - r)} - r_0 \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{r_0}{r} - 1}$$

$$\int_0^t \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}\,dt = t\sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$$

$$\boxed{t = \frac{\sqrt{r(r_0 - r)} + r_0 \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{r_0}{r} - 1}}{\sqrt{\frac{2GM}{r_0}}}}$$

- **Grawitacyjne zapadanie**

Grawitacyjnym zapadaniem nazywamy zjawisko ciągłego (nieustającego) kurczenia się ciała, o odpowiedniej masie i w odpowiednich warunkach, pod wpływem sił grawitacyjnych. Jako przykład rozpatrzmy sferycznie symetryczną jednorodną kulę pyłu bezciśnieniowego składającego się z identycznych cząstek, każda o masie m, poruszających się radialnie. Jeżeli pominąć procesy inne niż oddziaływania grawitacyjne, to można przyjąć w ostatnim równaniu, że r jest promieniem wodzącym cząstki znajdującej się na powierzchni kuli utworzonej z zapadającego się pyłu. Promień ten osiągnie graniczną wartość równą zeru po czasie

$$\boxed{t = \tfrac{1}{2}\pi r_0 \sqrt{\frac{r_0}{2GM}}}$$

r_0 = początkowy promień kuli pyłu

13 SIŁY PŁYWOWE

- **Siły pływowe**

Siły pływowe powstają w wyniku niejednorodności pola grawitacyjnego. Najbardziej spektakularnym przykładem zjawisk wywołanych przez nie są przypływy i odpływy, stanowiące makroskopowe przemieszczenia dużych mas wody głównie pod wpływem wypadkowej sił grawitacyjnych Ziemi i Księżyca oraz siły odśrodkowej wynikającej z ruchu wirowego Ziemi.

- **Siły pływowe rozciągające**

Dwie punktowe cząstki każda o masie m spadają swobodnie wzdłuż promienia wodzącego zaczepionego w środku Ziemi o masie M i promieniu R. W chwili początkowej pierwsza cząstka znajdowała się w odległości r a druga $r+dr$ od centrum. Obliczymy różnicę sił grawitacyjnych działających na te cząstki ze strony Ziemi.

$$\Delta F = F_1 - F_2$$

$$F_1 = \frac{GMm}{r^2}, \quad F_2 = \frac{GMm}{(r+dr)^2}$$

$$\Delta F = \frac{GMm}{r^2} - \frac{GMm}{(r+dr)^2} = \frac{2drGMm}{r^3\left(1+\frac{2dr}{r}+\frac{dr^2}{r^2}\right)} - \frac{dr^2GMm}{r^4\left(1+\frac{2dr}{r}+\frac{dr^2}{r^2}\right)}$$

$$dr << r$$

$$\boxed{\Delta F \approx \frac{2GMm}{r^3}}$$

$$\boxed{\frac{F_1 - F_2}{F_1} = \frac{2dr}{r}}$$

- **Siły pływowe ściskające**

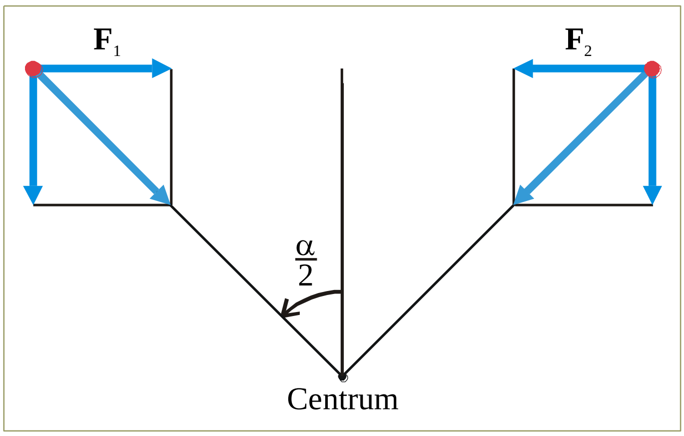
Dwie punktowe cząstki każda o masie m spadają swobodnie wzdłuż różnych promieni wodzących zaczepionych w środku Ziemi o masie M. Niech α będzie kątem zawartym między tymi promieniami. W chwili początkowej obie cząstki znajdowały się w odległości r od centrum. Obliczymy różnicę rzutów na prostą łączącą obie cząstki sił grawitacyjnych działających na te cząstki ze strony Ziemi.

$$\Delta F = F_1 - F_2$$

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2, \quad F_1 = \frac{GMm}{r^2}\sin\tfrac{1}{2}\alpha$$

$$\boxed{\Delta F = \frac{2GMm}{r^2}\sin\tfrac{1}{2}\alpha}$$

$$\boxed{\frac{F_1 - F_2}{F_1} = 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha}$$



OGÓLNA ZASADA WZGLĘDNOŚCI

1 PODSTAWOWE POSTULATY OGÓLNEJ TEORII WZGLĘDNOŚCI

- **Podstawowe postulaty szczególnej teorii względności**

Szczególna Teoria Względności (STW) faworyzowała układy inercjalne, ignorowała istnienie pola grawitacyjnego, przyjmując *a priori*, że czasoprzestrzeń jest płaska. STW została zbudowana na bazie dwóch postulatów.

POSTULAT I (Zasada niezmienniczości wartości prędkości światła w próżni)
Wartość prędkości światła w próżni jest taka sama we wszystkich inercjalnych układach odniesienia.

POSTULAT II (Szczególna zasada względności)
Ogólne postacie praw fizyki powinny być niezależne od wyboru inercjalnego układu odniesienia.

- **Podstawowe postulaty ogólnej teorii względności**

Ogólna Teoria Względności (OTW), jako uogólnienie STW, może być sformułowana w oparciu o następujące podstawowe założenia.

POSTULAT I (Zasada niezmienniczości maksymalnej wartości prędkości)
Maksymalna wartość prędkości rozchodzenia się sygnałów jest taka sama we wszystkich układach odniesienia.

POSTULAT II (Ogólna zasada względności)
Ogólne postacie praw fizyki powinny być niezależne od wyboru układu odniesienia.

POSTULAT III (Równania metryki)
Czasoprzestrzeń jest czterowymiarową zdeformowaną przestrzenią z metryką zależną od rozkładu gęstości energii wszelakiej postaci (w tym energii równoważnej masie) oraz ciśnienia.

POSTULAT IV (Zasada równoważności)
Natężenie jednorodnego pola grawitacyjnego jest równoważne stałemu przyspieszeniu (ze znakiem minus) odpowiedniego układu odniesienia.

Zasada równoważności wynika z równości masy grawitacyjnej i inercyjnej, wielokrotnie potwierdzonej doświadczalnie. O prawdziwości trzech pozostałych postulatów można wnosić na razie jedynie na podstawie weryfikacji wniosków wysnutych z OTW.

Maksymalna wartość prędkości rozchodzenia się sygnałów jest równa wartości prędkości światła w próżni w układach inercjalnych.

Zasada niezmienniczości maksymalnej wartości prędkości rozchodzenia się sygnałów narzuca ograniczenia na składowe tensora metrycznego czasoprzestrzeni oraz grupę transformacji współrzędnych. Kwadratowa forma różniczkowa czasoprzestrzeni $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, dla $ds^2 = 0$, stanowi definicję wartości prędkości rozchodzenia się światła w próżni.

Zasada równoważności daje możliwość skonstruowania układu lokalnie inercjalnego. Układem takim może być małe laboratorium swobodnie spadające w polu grawitacyjnym.

Ogólna zasada względności stwierdza, że definicje wielkości fizycznych oraz prawa (równania) fizyki można tak sformułować, aby ich ogólne postacie były niezależne od wyboru układu odniesienia. Każde równanie zapisane pierwotnie w postaci tensorowej w inercjalnym układzie ortonormalnym w płaskiej czterowymiarowej czasoprzestrzeni (po kosmetycznych przeróbkach) obowiązuje również:
1. w dowolnym układzie nieinercjalnym w płaskiej czasoprzestrzeni,
2. w dowolnym układzie w zakrzywionej czasoprzestrzeni.

Z ogólnej zasady względności wynikają między innymi równania ruchu cząstki próbnej o masie m

$$\frac{\tilde{F}^\alpha}{m} = \left(\operatorname{sgn} ds^2\right)c^2\left(\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\right),$$

gdzie $\tilde{F}^\alpha$ oznacza składowe siły wypadkowej, z pominięciem sił „grawitacyjnych” i „bezwładnościowych”.

Składowe tensora metrycznego czasoprzestrzeni są rozwiązaniami równań pola (równań metryki) Einsteina

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}.$$

Deformacja czasoprzestrzeni przejawia się w ruchu cząstek i fotonów. Poruszają się one tak, jak gdyby różniczki współrzędnych dx^1, dx^2, dx^3, dx^4 miały przeskalowane wartości $\sqrt{g_{11}}dx^1$, $\sqrt{g_{22}}dx^2$, $\sqrt{g_{33}}dx^3$, $\sqrt{g_{44}}dx^4$,
a przeskalowane cosinusy kątów między nimi wynosiły

$$\cos\theta_{\mu\nu} = \frac{g_{\mu\nu}}{\sqrt{g_{\mu\mu}g_{\nu\nu}}}.$$

Porównywanie między sobą w różnych punktach zdeformowanej czasoprzestrzeni nieprzeskalowanych wartości różniczek współrzędnych i cosinusów kątów nie ma fizycznego sensu.

- **Struktura tensora metrycznego**

Ignorując wpływ rozkładu gęstości energii na metrykę czasoprzestrzeni, mogliśmy w ramach Szczególnej Teorii Względności posługiwać się układem ortonormalnym z metryką diagonalną typu $(1,1,1,1)$. O układzie odniesienia zakładaliśmy dodatkowo, że jest inercjalny, czyli jednostajny ruch cząstki lub jej spoczynek względem tego układu był skutkiem braku działania na nią niezrównoważonej siły. Aby wyjaśnić stałość wartości prędkości światła względem dowolnego układu inercjalnego, zmuszeni byliśmy przyjąć transformacje Lorentza jako jedyne dopuszczalne transformacje między układami inercjalnymi.

Uwzględnienie wpływu rozkładu gęstości energii na metrykę czasoprzestrzeni powoduje, że tensor metryczny jest sumą dwóch składników.

$$g_{\mu\nu} = g^0_{\mu\nu} + g^G_{\mu\nu} = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu$$

$g^0_{\mu\nu} = \mathbf{e}^0_\mu \cdot \mathbf{e}^0_\nu$ = składnik opisujący płaską czasoprzestrzeń w układzie wyjściowym

$g^G_{\mu\nu}$ = składnik opisujący deformacje czasoprzestrzeni w układzie wyjściowym

Współrzędne układu wyjściowego poddamy kolejno dwóm transformacjom. Pierwsza transformacja będzie związana ze statyczną zmianą wyjściowego układu, a druga z ruchem tego nowego układu.

$$ds^2 = \left(g^0_{\mu\nu} + g^G_{\mu\nu}\right)dx^\mu dx^\nu$$

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}dx'^\alpha$$

$$dx^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}dx'^\beta$$

$$ds^2 = \left(g^0_{\mu\nu} + g^G_{\mu\nu}\right)\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}dx'^\alpha dx'^\beta = g'_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$$

$$dx'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x''^\kappa}dx''^\kappa$$

$$dx'^\beta = \frac{\partial x'^\beta}{\partial x''^\lambda}dx''^\lambda$$

$$\boxed{ds^2 = \left(g^0_{\mu\nu} + g^G_{\mu\nu}\right)\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x''^\kappa}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x''^\lambda}dx''^\kappa dx''^\lambda = g''_{\kappa\lambda}dx''^\kappa dx''^\lambda}$$

$g'_{\alpha\beta} = \left(g^0_{\mu\nu} + g^G_{\mu\nu}\right)\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}$ = tensor metryczny czasoprzestrzeni względem układu primowanego

$g''_{\kappa\lambda} = \left(g^0_{\mu\nu} + g^G_{\mu\nu}\right)\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x''^\kappa}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x''^\lambda}$ = tensor metryczny czasoprzestrzeni względem układu podwójnie primowanego

$\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}$ = czynnik matematyczny związany ze statyczną zmianą układu wyjściowego

$\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x''^\kappa}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x''^\lambda}$ = czynnik kinematyczny związany z ruchem układu primowanego

2 CZASOPRZESTRZEŃ

- **Płaska czasoprzestrzeń Minkowskiego**, **układy inercjalne**

Pojęcie układu inercjalnego jest ściśle związane z płaską czasoprzestrzenią. Z definicji, w układzie inercjalnym cząstka pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym wtedy i tylko wtedy, gdy suma działających na nią sił zewnętrznych jest równa zeru. Wszechobecność pola grawitacyjnego sprawia, że jedynym sensownym modelem układu lokalnie inercjalnego, w którym można przetestować zasadę bezwładności jest układ swobodnie spadający w jednorodnym polu grawitacyjnym. Swobodnie spadającym układem mogłaby być kabina statku kosmicznego krążącego po orbicie wokół Ziemi.

Wyjściowym układem współrzędnych niech będzie inercjalny układ ortonormalny: $\{0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$. Położenie zdarzenia $\left(x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z,\ x^4 = ict\right)$ wyznacza koniec promienia wodzącego $\tilde{\mathbf{R}}$, zaczepionego w początku układu współrzędnych. Kwadrat różniczki odległości czasoprzestrzennej dwóch zdarzeń, zwany też kwadratem przedziału czasoprzestrzennego, kwadratem elementu liniowego, podstawową formą metryczną, a także różniczkową formą kwadratową czasoprzestrzeni, zadamy w postaci

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad g_{\mu\nu} \overset{\mathrm{df}}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu},$$

gdzie $g_{\mu\nu}$ jest tensorem metrycznym. Iloczyny skalarne wektorów bazowych wyjściowego układu współrzędnych są składowymi tensora metrycznego $\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu \overset{\mathrm{df}}{=} g_{\mu\nu}$.

Czterowymiarowa przestrzeń zdarzeń nazywana jest czasoprzestrzenią Minkowskiego.

Szereg kolejnych pojęć zwiążemy z różniczką promienia wodzącego

$$d\tilde{\mathbf{R}} = dx^\alpha \mathbf{e}_\alpha .$$

Kwadrat różniczki promienia wodzącego

$$\left(d\tilde{\mathbf{R}}\right)^2 = d\tilde{\mathbf{R}} \cdot d\tilde{\mathbf{R}} = \left(dx^\mu \mathbf{e}_\mu\right) \cdot \left(dx^\nu \mathbf{e}_\nu\right) = \left(\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu\right) dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = ds^2$$

określa kwadrat różniczki odległości czasoprzestrzennej dwóch zdarzeń.

Pierwsza i druga różniczka promienia wodzącego

$$d\tilde{\mathbf{R}} = dx^\alpha \mathbf{e}_\alpha, \quad d^2\tilde{\mathbf{R}} = d^2 x^\alpha \mathbf{e}_\alpha$$

są podstawą do zdefiniowania pojęć odpowiednio prędkości i przyspieszenia cząstki:

$$\boxed{\tilde{\mathbf{v}} \overset{\mathrm{df}}{=} \sqrt{\operatorname{sgn} ds^2}\, c \frac{d\tilde{\mathbf{R}}}{ds}}$$

$$\boxed{\tilde{\mathbf{a}} \overset{\mathrm{df}}{=} \left(\operatorname{sgn} ds^2\right) c^2 \frac{d^2\tilde{\mathbf{R}}}{ds^2}}$$

Ruch jednostajny prostoliniowy układu względem ortonormalnego układu inercjalnego nie zmienia metryki (wartości składowych tensora metrycznego). Transformacje Lorentza nie zmieniają metryki czasoprzestrzeni.

- **Płaska czasoprzestrzeń Minkowskiego, układy nieinercjalne**

Przejście do nieinercjalnego układu odniesienia opisywane jest nieosobliwymi transformacjami współrzędnych

$$x'^{\mu} = x'^{\mu}\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right), \qquad x^{\mu} = x^{\mu}\left(x'^1, x'^2, x'^3, x'^4\right).$$

W nowym układzie współrzędnych $\left\{0', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3, \mathbf{e}'_4\right\}$ wyznaczymy kwadrat różniczki odległości czasoprzestrzennej.

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} dx'^{\alpha} dx'^{\beta} = ds'^2$$

$$g'_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} \quad = \text{ tensor metryczny w nieinercjalnym układzie odniesienia}$$

$$ds'^2 = g'_{\alpha\beta}\, dx'^{\alpha} dx'^{\beta}$$

Składowe tensora metrycznego $g'_{\alpha\beta}$ zależą od współrzędnych x'^1, x'^2, x'^3, x'^4.

Ruch przyspieszony układu względem inercjalnego układu ortonormalnego zmienia metrykę czasoprzestrzeni. Z matematycznego punktu widzenia układ nieinercjalny wprowadza współrzędne krzywoliniowe i układy lokalne.

Różniczki współrzędnych krzywoliniowych dx'^{μ}, dx'^{ν}, w przybliżeniu równe różniczkom współrzędnych prostoliniowych w układzie lokalnym $\left\{P, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3, \mathbf{e}'_4\right\}$, wykorzystamy do określenia różniczki promienia wodzącego

$$d\tilde{\mathbf{R}}' = dx'^{\mu}\, \mathbf{e}'_{\mu}$$

i jej kwadratu

$$ds'^2 \overset{df}{=} \left(d\tilde{\mathbf{R}}'\right)^2 = d\tilde{\mathbf{R}}' \cdot d\tilde{\mathbf{R}}' = dx'^{\mu}\mathbf{e}'_{\mu} \cdot dx'^{\nu}\mathbf{e}'_{\nu} = \left(\mathbf{e}'_{\mu} \cdot \mathbf{e}'_{\nu}\right) dx'^{\mu} dx'^{\nu} = g'_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu}.$$

Z postaci tensora metrycznego

$$g'_{\alpha\beta} = \mathbf{e}'_{\mu} \cdot \mathbf{e}'_{\nu} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}}$$

wynika, że związane z układem nieinercjalnym układy lokalne nie są w ogólności układami ortonormalnymi. Oznacza to pojawienie się różnych od zera symboli Christoffela pierwszego i drugiego rodzaju.

W oparciu o różniczkę promienia wodzącego podamy definicję prędkości cząstki.

$$\boxed{\tilde{\mathbf{v}}' \overset{df}{=} \sqrt{\operatorname{sgn} ds^2}\; c \frac{d\tilde{\mathbf{R}}'}{ds'} = \sqrt{\operatorname{sgn} ds'^2}\; c \frac{dx'^{\mu}}{ds'} \mathbf{e}'_{\mu}}$$

Z drugą różniczką promienia wodzącego

$$d^2\tilde{\mathbf{R}}' = d\left(d\tilde{\mathbf{R}}'\right) = d^2 x'^{\mu}\, \mathbf{e}'_{\mu} + \frac{\partial \mathbf{e}'_{\mu}}{\partial x'^{\nu}} dx'^{\mu} dx'^{\nu} = \left(d^2 x'^{\alpha} + \Gamma'^{\alpha}_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu}\right) \mathbf{e}'_{\alpha}$$

zwiążemy definicję przyspieszenia swobodnej cząstki spowodowanego działaniem siły wypadkowej.

$$\boxed{\tilde{\mathbf{a}}'_{force} \overset{df}{=} \left(\operatorname{sgn} ds'^2\right) c^2 \frac{d^2\tilde{\mathbf{R}}'}{ds'^2} = \left(\operatorname{sgn} ds'^2\right) c^2 \left(\frac{d^2 x'^{\alpha}}{ds'^2} + \Gamma'^{\alpha}_{\mu\nu} \frac{dx'^{\mu}}{ds'} \frac{dx'^{\nu}}{ds'}\right) \mathbf{e}'_{\alpha}}$$

Fizyczna interpretacja przyspieszenia $\tilde{\mathbf{a}}'_{force}$ zostanie przedstawiona w paragrafie „Równania ruchu cząstki w ogólnej teorii względności”.

- **Zakrzywiona czasoprzestrzeń Riemanna, układy lokalne**

Przestrzenią Riemanna nazywamy przestrzeń n-wymiarową taką, że w każdym jej punkcie jest zadany kowariantny tensor metryczny będący symetrycznym tensorem drugiego rzędu. Przy pomocy tensora metrycznego określany jest kwadrat różniczki odległości dwóch sąsiednich punktów

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu .$$

Tensor metryczny określa w każdym punkcie przestrzeni Riemanna lokalny układ współrzędnych. Każdy układ lokalny można zortogonalizować. Czyli tensor metryczny w każdym punkcie można sprowadzić do postaci diagonalnej.

Jeżeli czterowymiarowa przestrzeń Riemanna jest zakrzywiona, to nie istnieje transformacja przeprowadzająca tensory metryczne we wszystkich punktach w tensor

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Czasoprzestrzeń jest czterowymiarową w ogólności zakrzywioną przestrzenią Riemanna z urojoną współrzędną czasową $x_4 = ict$.

$$\begin{aligned} ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = {} & g_{11} dx^1 dx^1 + g_{22} dx^2 dx^2 + g_{33} dx^3 dx^3 + g_{44} dx^4 dx^4 + \\ & + 2g_{12} dx^1 dx^2 + 2g_{13} dx^1 dx^3 + 2g_{23} dx^2 dx^3 + \\ & + 2g_{14} dx^1 dx^4 + 2g_{24} dx^2 dx^4 + 2g_{34} dx^3 dx^4 \end{aligned}$$

$$g_{14} = ig_{14}^{real}, \quad g_{24} = ig_{24}^{real}, \quad g_{34} = ig_{34}^{real}, \quad x^4 = ict = ix_{real}^4, \quad x_{real}^4 = ct$$

$$\begin{aligned} ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = {} & g_{11} dx^1 dx^1 + g_{22} dx^2 dx^2 + g_{33} dx^3 dx^3 + g_{44} dx^4 dx^4 + \\ & + 2g_{12} dx^1 dx^2 + 2g_{13} dx^1 dx^3 + 2g_{23} dx^2 dx^3 + \\ & + 2ig_{14}^{real} dx^1 dx^4 + 2ig_{24}^{real} dx^2 dx^4 + 2ig_{34}^{real} dx^3 dx^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = {} & g_{11} dx^1 dx^1 + g_{22} dx^2 dx^2 + g_{33} dx^3 dx^3 + \\ & + 2g_{12} dx^1 dx^2 + 2g_{13} dx^1 dx^3 + 2g_{23} dx^2 dx^3 + \\ & - 2g_{14}^{real} dx^1 dx_{real}^4 - 2g_{24}^{real} dx^2 dx_{real}^4 - 2g_{34}^{real} dx^3 dx_{real}^4 - g_{44} dx_{real}^4 dx_{real}^4 \end{aligned}$$

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \sum_{\alpha=1}^{3} \sum_{\beta=1}^{3} g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta - 2\sum_{\alpha=1}^{3} g_{\alpha 4}^{real} dx^\alpha dx_{real}^4 - g_{44} dx_{real}^4 dx_{real}^4$$

- **Czas własny w ogólnej teorii względności**

Czasem własnym (fizycznym, prawdziwym) nazywamy przeskalowaną różniczkę czasu, upływającego między dwoma zdarzeniami zachodzącymi w tym samym miejscu o ustalonych współrzędnych przestrzennych w danym układzie, zmierzonego zegarem znajdującym się w tym miejscu.

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

$$dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$$

$$ds^2 = g_{44}dx^4dx^4$$

$$x^4 = ict$$

$$ds^2 = -g_{44}c^2dt^2$$

$$g_{44} = |g_{44}| \operatorname{sgn} g_{44}$$

$$d\tau \overset{df}{=} \sqrt{|g_{44}|}\, dt \ = \ \text{czas własny}$$

$$\boxed{ds^2 = -(\operatorname{sgn} g_{44})c^2|g_{44}|dt^2 = -(\operatorname{sgn} g_{44})c^2d\tau^2} \qquad \boxed{ds = \sqrt{-\operatorname{sgn} g_{44}}\, c\, d\tau}$$

- **Odległość przestrzenna w ogólnej teorii względności**

Wyznaczymy różniczkę odległości przestrzennej między dwoma punktami w pewnym szczególnym przypadku. Z punktu pierwszego zostało wysłane światło, po odbiciu się od zwierciadła w punkcie drugim powróciło do punktu pierwszego.

$$ds^2 = \sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3} g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta + \sum_{\alpha=1}^{3} g_{\alpha4}dx^\alpha dx^4 + g_{44}dx^4dx^4$$

$$ds^2 = 0$$

$$\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3} g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta + \left(\sum_{\alpha=1}^{3} g_{\alpha4}dx^\alpha\right)dx^4 + g_{44}\left(dx^4\right)^2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\left(g_{\alpha4}g_{\beta4} - g_{\alpha\beta}g_{44}\right)dx^\alpha dx^\beta$$

$dx^4_{1\to2}$ = różniczka współrzędnej czasowej związana z przelotem światła z 1 do 2

$$dx^4_{1\to2} = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1}{g_{44}}\left[-\sum_{\alpha=1}^{3} g_{\alpha4}dx^\alpha + \sqrt{\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\left(g_{\alpha4}g_{\beta4} - g_{\alpha\beta}g_{44}\right)dx^\alpha dx^\beta}\right]$$

$$dx^4_{1\to2} \xrightarrow[dx^\beta \to -dx^\beta]{dx^\alpha \to -dx^\alpha} dx^4_{2\to1}$$

$dx^4_{2\to1}$ = różniczka współrzędnej czasowej związana z przelotem światła z 2 do 1

$$dx^4_{2\to1} = \frac{1}{g_{44}}\left[\sum_{\alpha=1}^{3} g_{\alpha4}dx^\alpha + \sqrt{\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\left(g_{\alpha4}g_{\beta4} - g_{\alpha\beta}g_{44}\right)dx^\alpha dx^\beta}\right]$$

$$dx^4 = dx^4_{1\to2} + dx^4_{2\to1} = \frac{2}{g_{44}}\sqrt{\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\left(g_{\alpha4}g_{\beta4} - g_{\alpha\beta}g_{44}\right)dx^\alpha dx^\beta}$$

$$dx^4 = dx^4_{1\to2} + dx^4_{2\to1} = \frac{2\sqrt{-1}\sqrt{g_{44}}}{g_{44}}\sqrt{\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\left(g_{\alpha\beta} - \frac{g_{\alpha4}g_{\beta4}}{g_{44}}\right)dx^{\alpha}dx^{\beta}}$$

$$dx^4 = dx^4_{1\to2} + dx^4_{2\to1} = \frac{2\sqrt{-1}}{\sqrt{|g_{44}|}\sqrt{\operatorname{sgn} g_{44}}}\sqrt{\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\left(g_{\alpha\beta} - \frac{g_{\alpha4}g_{\beta4}}{g_{44}}\right)dx^{\alpha}dx^{\beta}}$$

$$\frac{\sqrt{|g_{44}|}\,dx^4}{2\sqrt{-1}} = \frac{c\sqrt{|g_{44}|}\,dt}{2} = dl$$

dl = różniczka odległości przestrzennej między punktami 1 i 2

$$\boxed{dl = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sgn} g_{44}}}\sqrt{\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\left(g_{\alpha\beta} - \frac{g_{\alpha4}g_{\beta4}}{g_{44}}\right)dx^{\alpha}dx^{\beta}}}$$

$$dl^2 = \frac{1}{\operatorname{sgn} g_{44}}\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\left(g_{\alpha\beta} - \frac{g_{\alpha4}g_{\beta4}}{g_{44}}\right)dx^{\alpha}dx^{\beta}$$

$$\boxed{dl^2 = \sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\gamma_{\alpha\beta}\,dx^{\alpha}dx^{\beta}, \qquad \gamma_{\alpha\beta} \overset{df}{=} \frac{1}{\operatorname{sgn} g_{44}}\left(g_{\alpha\beta} - \frac{g_{\alpha4}g_{\beta4}}{g_{44}}\right) = \frac{1}{\operatorname{sgn} g_{44}}\left(g_{\alpha\beta} + \frac{g^{real}_{\alpha4}\,g^{real}_{\beta4}}{g_{44}}\right)}$$

- **Jakie warunki musi spełniać tensor metryczny aby mógł określać metrykę realnej (fizycznej) czasoprzestrzeni?**

$$g_{\mu\nu}\left(\operatorname{sgn} ds^2\right) \le 0, \qquad (\mu, \nu = 1,2,3,4)$$

$$\gamma_{11} > 0$$

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{22} & \gamma_{21} \end{vmatrix} > 0$$

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{vmatrix} > 0$$

3 ZAPISYWANIE RÓWNAŃ W POSTACI OGÓLNIE KOWARIANTNEJ

- **Zasady zapisywania równań w postaci ogólnie kowariantnej**

Jednym z celów jakie stawia OTW jest uwolnienie równań fizyki od zależności ich postaci od wyboru układu współrzędnych. Do zrealizowania postawionego zadania idealnie nadaje się rachunek tensorowy. OTW udziela odpowiedzi na pytanie jak dostosować równania zapisane pierwotnie w postaci tensorowej w inercjalnym układzie ortonormalnym w płaskiej czterowymiarowej czasoprzestrzeni Minkowskiego do dowolnego układu w zakrzywionej czasoprzestrzeni Riemanna lub do dowolnego nieinercjalnego układu w płaskiej czasoprzestrzeni Minkowskiego.

Zapisując równania w postaci ogólnie kowariantnej, będziemy wykorzystywali odwzorowania:

$$\delta^{\mu\nu} \longleftrightarrow g^{\mu\nu} = \mathbf{e}^\mu \cdot \mathbf{e}^\nu$$

$$\delta_{\mu\nu} \longleftrightarrow g_{\mu\nu} = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu$$

$$\delta^\mu_\nu \longleftrightarrow g^\mu_\nu = \mathbf{e}^\mu \cdot \mathbf{e}_\nu$$

$$\frac{dA^\mu}{ds} \longleftrightarrow \frac{\delta A^\mu}{\delta s} = \frac{dA^\mu}{ds} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} A^\alpha \frac{dx^\beta}{ds}$$

$$\frac{dA_\mu}{ds} \longleftrightarrow \frac{\delta A_\mu}{\delta s} = \frac{dA_\mu}{ds} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta} A_\alpha \frac{dx^\beta}{ds}$$

$$\frac{d^2A^\mu}{ds^2} \longleftrightarrow \frac{\delta^2 A^\mu}{\delta s^2} = \frac{\delta}{\delta s}\frac{\delta A^\mu}{\delta s}$$

$$\frac{d^2A_\mu}{ds^2} \longleftrightarrow \frac{\delta^2 A_\mu}{\delta s^2} = \frac{\delta}{\delta s}\frac{\delta A_\mu}{\delta s}$$

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\lambda} = A^\mu_{,\lambda} \longleftrightarrow \frac{\delta A^\mu}{\delta x^\lambda} = \nabla_\lambda A^\mu = A^\mu_{;\lambda} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\mu_{\kappa\lambda} A^\kappa$$

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\lambda} = A_{\mu,\lambda} \longleftrightarrow \frac{\delta A_\mu}{\delta x^\lambda} = \nabla_\lambda A_\mu = A_{\mu;\lambda} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} A_\kappa$$

$$\frac{\partial^2 A^\mu}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} \longleftrightarrow \frac{\delta^2 A^\mu}{\delta x^\kappa \delta x^\lambda} = \frac{\delta}{\delta x^\kappa}\frac{\delta A^\mu}{\delta x^\lambda} = \nabla_\kappa \nabla_\lambda A^\mu = A^\mu_{;\kappa;\lambda}$$

$$\frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} \longleftrightarrow \frac{\delta^2 A_\mu}{\delta x^\kappa \delta x^\lambda} = \frac{\delta}{\delta x^\kappa}\frac{\delta A_\mu}{\delta x^\lambda} = \nabla_\kappa \nabla_\lambda A_\mu = A_{\mu;\kappa;\lambda}$$

$$\mathrm{div}T^{\bullet\bullet} = \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = T^{\alpha\beta}_{,\beta} \longleftrightarrow \mathrm{div}T^{\bullet\bullet} = T^{\alpha\beta}_{;\beta}$$

$$\mathrm{div}T^{\bullet\bullet} = \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = T^{\alpha\beta}_{,\beta} \xleftrightarrow{T^{\alpha\beta}=-T^{\beta\alpha}} \mathrm{div}T^{\bullet\bullet} = T^{\alpha\beta}_{;\beta} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\left(\sqrt{g}T^{\alpha\beta}\right)}{\partial x^\beta}$$

$$\mathrm{div}T_{\bullet\bullet} = \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = T_{\alpha\beta,\beta} \longleftrightarrow \mathrm{div}T_{\bullet\bullet} = T_{\alpha\beta;\beta}$$

$$\mathrm{div}T^{\bullet}_{\bullet} = \frac{\partial T^\alpha_\beta}{\partial x^\beta} = T^\alpha_{\beta,\beta} \longleftrightarrow \mathrm{div}T^{\bullet}_{\bullet} = T^\alpha_{\beta;\beta}$$

- **Podstawowa forma metryczna**

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Podstawowa forma metryczna w zakrzywionej czasoprzestrzeni Riemanna lub w płaskiej czasoprzestrzeni Minkowskiego w układzie nieinercjalnym

$$\Big\downarrow \; g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$$

$$ds^2 = \delta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2$$

Podstawowa forma metryczna w płaskiej czasoprzestrzeni Minkowskiego w inercjalnym układzie ortonormalnym

$$x^4 = ict$$
$$i^2 = -1$$
$$\sum_{\alpha=1}^{3} \left(\frac{dx^\alpha}{dt} \right)^2 = v^2$$
$$i = \sqrt{-1}$$
$$v^4 = ic$$
$$dx^4 = icdt$$
$$\gamma^{-1} = \sqrt{1 - v^2 c^{-2}}$$
$$d\tau = \gamma^{-1} dt$$

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - c^2 dt^2$$
$$ds^2 = dt^2 \left[\left(\frac{dx^1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx^3}{dt} \right)^2 - c^2 \right]$$
$$ds^2 = dt^2 (v^2 - c^2) = -c^2 dt^2 (1 - v^2 c^{-2})$$
$$ds = \sqrt{-1} cdt \sqrt{1 - v^2 c^{-2}} = icdt \sqrt{1 - v^2 c^{-2}}$$

$$ds = \gamma^{-1} dx^4 = v^4 \gamma^{-1} dt = v^4 d\tau$$

$$dx^4 = \gamma\, ds$$
$$dt = \gamma\, v^{-4} ds$$
$$d\tau = v^{-4} ds$$

- **Iloczyn skalarny dwóch wektorów**

$$\mathbf{A} = A^\mu \mathbf{e}_\mu = A_\mu \mathbf{e}^\mu$$
$$\mathbf{B} = B^\nu \mathbf{e}_\nu = B_\nu \mathbf{e}^\nu$$
$$g_{\mu\nu} = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu$$
$$g^{\mu\nu} = \mathbf{e}^\mu \cdot \mathbf{e}^\nu$$

Iloczyn skalarny dwóch wektorów w zakrzywionej czasoprzestrzeni Riemanna lub w płaskiej czasoprzestrzeni Minkowskiego w układzie nieinercjalnym

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = g^{\mu\nu} A_\mu B_\nu$$

$$\Big\downarrow \; g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \delta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = \delta^{\mu\nu} A_\mu B_\nu$$
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^\alpha B^\alpha = A_\alpha B_\alpha$$

Iloczyn skalarny dwóch wektorów w płaskiej czasoprzestrzeni Minkowskiego w inercjalnym układzie ortonormalnym

- **Długość wektora**

$$|\mathbf{A}| = A = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} = \sqrt{g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu} = \sqrt{g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu}$$

Długość wektora w zakrzywionej czasoprzestrzeni Riemanna lub w płaskiej czasoprzestrzeni Minkowskiego w układzie nieinercjalnym

$$\Big\downarrow \; g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu}$$

$$|\mathbf{A}| = A = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} = \sqrt{A^\alpha A^\alpha} = \sqrt{A_\alpha A_\alpha}$$

Długość wektora w płaskiej czasoprzestrzeni Minkowskiego w inercjalnym układzie ortonormalnym

- **Czteroprędkość**

$$\tilde{v}^{\mu} \overset{df}{=} \sqrt{\operatorname{sgn} ds^2}\, c \frac{dx^{\mu}}{ds}$$

Relatywistyczne czterowymiarowe równanie definicyjne prędkości w zakrzywionej czasoprzestrzeni Riemanna lub w płaskiej czasoprzestrzeni Minkowskiego w układzie nieinercjalnym

$$\sqrt{\operatorname{sgn} ds^2} = \sqrt{-1} = i\,, \quad v^4 = ic$$

$$\tilde{v}^{\mu} = v^4 \frac{dx^{\mu}}{ds}$$

Relatywistyczne czterowymiarowe równanie definicyjne prędkości w inercjalnym układzie ortonormalnym w płaskiej czasoprzestrzeni Minkowskiego

$$ds = v^4 d\tau$$

$$\tilde{v}^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \xrightarrow{d\tau = \gamma^{-1}dt} \tilde{v}^{\mu} = \gamma \frac{dx^{\mu}}{dt} \xrightarrow{v^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{dt}} \tilde{v}^{\mu} = \gamma v^{\mu}$$

- **Czteroprzyspieszenie**

$$\tilde{a}^{\mu}_{force} \overset{df}{=} \sqrt{\operatorname{sgn} ds^2}\, c \frac{\delta \tilde{v}^{\mu}}{\delta s}$$

$$\tilde{a}^{\mu}_{force} = \sqrt{\operatorname{sgn} ds^2}\, c \left(\frac{d\tilde{v}^{\mu}}{ds} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \tilde{v}^{\alpha} \frac{dx^{\beta}}{ds} \right)$$

Relatywistyczne czterowymiarowe równanie definicyjne przyspieszenia w zakrzywionej czasoprzestrzeni Riemanna lub w płaskiej czasoprzestrzeni Minkowskiego w układzie nieinercjalnym

$$\frac{d\tilde{v}^{\mu}}{ds} = \sqrt{\operatorname{sgn} ds^2}\, c \frac{d^2 x^{\mu}}{ds^2}\,, \quad \tilde{v}^{\alpha} = \sqrt{\operatorname{sgn} ds^2}\, c \frac{dx^{\alpha}}{ds}$$

$$\tilde{a}^{\mu}_{force} = \left(\operatorname{sgn} ds^2\right) c^2 \left(\frac{d^2 x^{\mu}}{ds^2} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \frac{dx^{\alpha}}{ds} \frac{dx^{\beta}}{ds} \right)$$

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = 0\,, \quad \sqrt{\operatorname{sgn} ds^2} = \sqrt{-1} = i\,, \quad v^4 = ic\,, \quad \tilde{a}^{\mu}_{force} = \tilde{a}^{\mu}_{total} = \tilde{a}^{\mu}$$

$$\tilde{a}^{\mu} = \left(v^4\right)^2 \frac{d^2 x^{\mu}}{ds^2}$$

$$\tilde{a}^{\mu} = v^4 \frac{d}{ds}\left(v^4 \frac{dx^{\mu}}{ds} \right) = v^4 \frac{d\tilde{v}^{\mu}}{ds}$$

Relatywistyczne czterowymiarowe równanie definicyjne przyspieszenia w inercjalnym układzie ortonormalnym w płaskiej czasoprzestrzeni Minkowskiego

$$ds = v^4 d\tau$$

$$\tilde{a}^{\mu} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{dx^{\mu}}{d\tau} \right) = \frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} = \frac{d\tilde{v}^{\mu}}{d\tau} \xrightarrow{d\tau = \gamma^{-1}dt} \tilde{a}^{\mu} = \gamma \frac{d}{dt}\left(\gamma \frac{dx^{\mu}}{dt} \right) = \gamma^2 \frac{d^2 x^{\mu}}{dt^2} + \gamma \frac{dx^{\mu}}{dt} \frac{d\gamma}{dt}$$

- **Równanie bilansu wielkości skalarnej**

$$\nabla_\kappa\left(a\tilde{v}^\kappa\right)=\tilde{\sigma}$$

$$\left(a\tilde{v}^\kappa\right)_{;\kappa}=\tilde{\sigma}$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^\kappa}\left(\sqrt{g}a\tilde{v}^\kappa\right)=\tilde{\sigma}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\kappa}\left(\sqrt{g}a\tilde{v}^\kappa\right)=\sqrt{g}\,\tilde{\sigma}$$

Relatywistyczne czterowymiarowe równanie bilansu wielkości skalarnej w zakrzywionej czasoprzestrzeni Riemanna lub w płaskiej czasoprzestrzeni Minkowskiego w układzie nieinercjalnym

a = spoczynkowa gęstość objętościowa bilansowanej wielkości skalarnej
$\tilde{\sigma}$ = człon źródłowy
$\tilde{v}^\mu=\sqrt{\operatorname{sgn} ds^2}\,c\,\frac{dx^\mu}{ds}$

$$g=1,\quad \Gamma^\mu_{\alpha\beta}=0,\quad \tilde{v}^\mu=\gamma\frac{dx^\mu}{dt}=\gamma v^\mu,\quad v^\mu=\frac{dx^\mu}{dt},\quad \gamma=\left[1-v^2c^{-2}\right]^{-\frac{1}{2}},\quad \tilde{\sigma}=\gamma\frac{d_i a}{dt}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\kappa}\left(a\tilde{v}^\kappa\right)=\tilde{\sigma}$$

$$\left(a\tilde{v}^\kappa\right)_{,\kappa}=\tilde{\sigma}$$

Relatywistyczne czterowymiarowe równanie bilansu wielkości skalarnej w inercjalnym układzie ortonormalnym w płaskiej czasoprzestrzeni Minkowskiego

$$\gamma=1,\quad \tilde{v}^\mu=v^\mu=\frac{dx^\mu}{dt},\quad \tilde{\sigma}=\sigma=\frac{d_i a}{dt}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\kappa}\left(av^\kappa\right)=\sigma$$

$$\left(av^\kappa\right)_{,\kappa}=\sigma$$

$$\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(av^\alpha\right)+\frac{\partial}{\partial x^4}\left(av^4\right)=\sigma$$

Nierelatywistyczne czterowymiarowe równanie bilansu wielkości skalarnej w inercjalnym układzie ortonormalnym w płaskiej czasoprzestrzeni Minkowskiego

$$x^4=ict,\quad v^4=ic,\quad J^\alpha=av^\alpha,\quad (\alpha=1,2,3)$$

$$\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial J^\alpha}{\partial x^\alpha}+\frac{\partial a}{\partial t}=\sigma$$

Nierelatywistyczne trójwymiarowe równanie bilansu wielkości skalarnej w inercjalnym układzie ortonormalnym

$$\operatorname{div}\mathbf{J}=\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial J^\alpha}{\partial x^\alpha},\quad \mathbf{J}=\sum_{\alpha=1}^{3}J^\alpha\mathbf{e}_\alpha$$

$$\frac{\partial a}{\partial t}=\sigma-\operatorname{div}\mathbf{J}$$

4 RÓWNANIA RUCHU CZĄSTKI W OGÓLNEJ TEORII WZGLĘDNOŚCI

Niech $x^\mu = x^\mu(s)$ będzie parametrycznym równaniem opisującym ruch cząstki w czterowymiarowej fizycznej czasoprzestrzeni Riemanna. Poniżej przypomnimy definicje prędkości i przyspieszenia cząstki.

- **Czterowymiarowa prędkość**

$$\tilde{v}^\alpha \stackrel{df}{=} \sqrt{\operatorname{sgn} ds^2}\, c\frac{dx^\alpha}{ds} = ic\frac{dx^\alpha}{ds}, \quad ds^2 < 0, \quad g_{\mu\nu} \ge 0, \quad (\alpha = 1,2,3,4)$$

- **Czterowymiarowe przyspieszenie**

$$\tilde{a}^\alpha_{force} = (\operatorname{sgn} ds^2)c^2\left(\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\right) = -c^2\left(\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\right), \quad ds^2 < 0, \quad g_{\mu\nu} \ge 0$$

TWIERDZENIE
Swobodna cząstka porusza się po geodezyjnej wtedy i tylko wtedy, gdy czterowektor jej przyspieszenia $\tilde{a}^\alpha_{force}$ jest równy zeru.

DOWÓD
Zauważmy, że równanie geodetyki ma postać $\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0$.

- **Czterowymiarowe równania ruchu cząstki próbnej**

Składowe przyspieszenia cząstki próbnej o masie m w danym punkcie
1. zakrzywionej czasoprzestrzeni Riemanna lub
2. płaskiej czasoprzestrzeni Minkowskiego względem układu nieinercjalnego

opisywane są równaniami

$$\frac{\tilde{F}^\alpha}{m} = \tilde{a}^\alpha_{force} \stackrel{df}{=} (\operatorname{sgn} ds^2)c^2\left(\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\right), \quad ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu < 0, \quad g_{\mu\nu} \ge 0$$

$\tilde{F}^\alpha$ = składowe siły wypadkowej, z pominięciem sił „grawitacyjnych” i „bezwładnościowych”

$g_{\mu\nu}$ = tensor metryczny zakrzywionej czasoprzestrzeni (składowe tego tensora są rozwiązaniami równań pola) lub tensor metryczny nieinercjalnego układu odniesienia w płaskiej przestrzeni Minkowskiego

Postulowane równania ruchu cząstki próbnej o masie m

$$\frac{\tilde{F}^{\alpha}}{m}=\left(\operatorname{sgn} ds^2\right)c^2\left(\frac{d^2x^{\alpha}}{ds^2}+\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{ds}\frac{dx^{\nu}}{ds}\right)$$

posiadają interpretację podaną poniżej.

$$\tilde{a}^{\alpha}_{\text{grav\&iner}}=-\left(\operatorname{sgn} ds^2\right)c^2\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{ds}\frac{dx^{\nu}}{ds}$$

Suma składowych (odpowiadających wskaźnikowi α) przyspieszeń grawitacyjnego i bezwładnościowego cząstki

$$\tilde{a}^{\alpha}_{\text{total}}=\tilde{a}^{\alpha}=\left(\operatorname{sgn} ds^2\right)c^2\frac{d^2x^{\alpha}}{ds^2}$$

Składowa (odpowiadająca wskaźnikowi α) całkowitego przyspieszenia cząstki

$$\tilde{a}^{\alpha}_{\text{force}}=\left(\operatorname{sgn} ds^2\right)c^2\left(\frac{d^2x^{\alpha}}{ds^2}+\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{ds}\frac{dx^{\nu}}{ds}\right)$$

$$\tilde{a}^{\alpha}_{\text{force}}=\tilde{a}^{\alpha}_{\text{total}}-\tilde{a}^{\alpha}_{\text{grav\&iner}}$$

Składowa (odpowiadająca wskaźnikowi α) przyspieszenia związanego z działaniem siły wypadkowej na cząstkę

W przypadku metryki stacjonarnej o zerowych składowych przestrzenno-czasowych, czyli metryki typu

$$ds^2=g_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta}+g_{44}dx^4dx^4,\quad(\alpha,\beta=1,2,3),$$

równania ruchu można zapisać również w postaciach:

$$\frac{\tilde{F}^{\kappa}}{m}=\gamma_G\frac{\sqrt{\operatorname{sgn} ds^2}}{\sqrt{-g_{44}}}\frac{d\tilde{v}^{\kappa}}{dt}+\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu}\tilde{v}^{\mu}\tilde{v}^{\nu},\quad(\kappa,\mu,\nu=1,2,3,4)$$

$$\frac{\tilde{F}^{\kappa}}{m}=\gamma_G^2\frac{\sqrt{\operatorname{sgn} ds^2}}{\sqrt{-g_{44}}}\frac{dv^{\kappa}}{dt}+\gamma_G v^{\kappa}\frac{\sqrt{\operatorname{sgn} ds^2}}{\sqrt{-g_{44}}}\frac{d\gamma_G}{dt}+\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu}\gamma_G^2v^{\mu}v^{\nu},\quad(\kappa,\mu,\nu=1,2,3,4)$$

$$\frac{\tilde{F}^{\kappa}}{m}=\gamma_G^2\,a^{\kappa}+\gamma_G v^{\kappa}\frac{\sqrt{\operatorname{sgn} ds^2}}{\sqrt{-g_{44}}}\frac{d\gamma_G}{dt}+\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu}\gamma_G^2v^{\mu}v^{\nu},\quad(\kappa,\mu,\nu=1,2,3,4)$$

Przy czym, wykorzystaliśmy następujące relacje:

$$\tilde{v}^{\lambda}=\sqrt{\operatorname{sgn} ds^2}\,c\frac{dx^{\lambda}}{ds},\quad(\lambda=1,2,3,4)$$

$$ds=c\sqrt{-g_{44}}\sqrt{1-\frac{g_{\alpha\beta}}{g_{44}}\frac{dx^{\alpha}}{dt}\frac{dx^{\beta}}{dt}\frac{1}{c^2}}\,dt,\quad(\alpha,\beta=1,2,3)$$

$$\tilde{v}^{\lambda}=\gamma_G v^{\lambda},\quad v^{\lambda}=\frac{\sqrt{\operatorname{sgn} ds^2}}{\sqrt{-g_{44}}}\frac{dx^{\lambda}}{dt},\quad(\lambda=1,2,3,4),\quad v^4=\frac{\sqrt{\operatorname{sgn} ds^2}}{\sqrt{-g_{44}}}ic$$

$$\gamma_G=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{g_{\alpha\beta}}{g_{44}}\frac{dx^{\alpha}}{dt}\frac{dx^{\beta}}{dt}\frac{1}{c^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\quad v^2=\frac{g_{\alpha\beta}}{g_{44}}\frac{dx^{\alpha}}{dt}\frac{dx^{\beta}}{dt},\quad(\alpha,\beta=1,2,3)$$

$$\tilde{a}^{\lambda}=\sqrt{\operatorname{sgn} ds^2}\,c\frac{d\tilde{v}^{\lambda}}{ds}=\gamma_G\frac{\sqrt{\operatorname{sgn} ds^2}}{\sqrt{-g_{44}}}\frac{d\tilde{v}^{\lambda}}{dt},\quad a^{\lambda}=\frac{\sqrt{\operatorname{sgn} ds^2}}{\sqrt{-g_{44}}}\frac{dv^{\lambda}}{dt},\quad(\lambda=1,2,3,4)$$

- **Czterowymiarowe równania ruchu cząstki próbnej** [ciąg dalszy]

$$\tilde{F}^{\mu} = \left(\operatorname{sgn} ds^2\right) mc^2 \left(\frac{d^2x^{\mu}}{ds^2} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \frac{dx^{\alpha}}{ds} \frac{dx^{\beta}}{ds} \right)$$

Relatywistyczne czterowymiarowe równania ruchu w zakrzywionej czasoprzestrzeni Riemanna lub w płaskiej czasoprzestrzeni Minkowskiego w układzie nieinercjalnym

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = 0$$

$$\operatorname{sgn} ds^2 = -1$$

$$\tilde{F}^{\mu} = m\left(v^4\right)^2 \frac{d^2x^{\mu}}{ds^2}$$

Relatywistyczne czterowymiarowe równania ruchu w inercjalnym układzie ortonormalnym w płaskiej czasoprzestrzeni Minkowskiego

$$\left(v^4\right)^2 \frac{d^2x^{\mu}}{ds^2} = \tilde{a}^{\mu} = v^4 \frac{d\tilde{v}^{\mu}}{ds}, \quad \tilde{p}^{\mu} = m\tilde{v}^{\mu}, \quad \tilde{v}^{\mu} = \gamma\, v^{\mu}, \quad v^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{dt}, \quad v^4 = ic$$

$$\tilde{F}^{\mu} = m\tilde{a}^{\mu}$$

$$\tilde{F}^{\mu} = mv^4 \frac{d\tilde{v}^{\mu}}{ds} = v^4 \frac{d\left(m\tilde{v}^{\mu}\right)}{ds} = v^4 \frac{d\tilde{p}^{\mu}}{ds}$$

$$ds = v^4 d\tau$$

$$\tilde{F}^{\mu} = m\frac{d\tilde{v}^{\mu}}{d\tau} = \frac{d\left(m\tilde{v}^{\mu}\right)}{d\tau} = \frac{d\tilde{p}^{\mu}}{d\tau}$$

$$d\tau = \gamma^{-1} dt$$

$$\tilde{F}^{\mu} = m\gamma \frac{d\tilde{v}^{\mu}}{dt} = \gamma \frac{d\left(m\tilde{v}^{\mu}\right)}{dt} = \gamma \frac{d\tilde{p}^{\mu}}{dt} = \gamma \frac{d\left(m\gamma v^{\mu}\right)}{dt} = m\gamma \frac{d\left(\gamma v^{\mu}\right)}{dt}$$

- **Swobodny ruch cząstki próbnej**

W przypadku, gdy $\tilde{F}^{\mu} = 0$ (tzn. gdy na cząstkę działają jedynie siły „grawitacyjne” i „bezwładnościowe”), równania ruchu redukują się do

$$\frac{d^2x^{\mu}}{ds^2} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \frac{dx^{\alpha}}{ds} \frac{dx^{\beta}}{ds} = 0 .$$

Wynika z nich, że w zakrzywionej czasoprzestrzeni swobodna cząstka o masie m porusza się po linii geodezyjnej.

Jeżeli ponadto wszystkie $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = 0$, to

$$\tilde{a}^{\mu} = \left(v^4\right)^2 \frac{d^2x^{\mu}}{ds^2} = 0 \quad \text{lub} \quad \tilde{v}^{\mu} = \gamma \frac{dx^{\mu}}{dt} = \text{const} .$$

Oznacza to, że przy braku sił „grawitacyjnych” i „bezwładnościowych” (inercjalny układ w płaskiej czasoprzestrzeni) lub w przypadku, gdy siły te się równoważą (swobodnie spadający układ w polu grawitacyjnym) swobodna cząstka o masie m porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym lub pozostaje w spoczynku.

5 NIEINERCJALNE UKŁADY ODNIESIENIA

- **Tensor metryczny w nieinercjalnym układzie odniesienia**

Szczególna teoria względności bazowała na niezmienniczości kwadratu przedziału czasoprzestrzennego $\Delta s^2 = g_{\mu\nu}\Delta x^\mu \Delta x^\nu$ względem transformacji Lorentza, przy czym $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ był tensorem metrycznym w ortonormalnym inercjalnym układzie odniesienia w płaskiej czterowymiarowej czasoprzestrzeni Minkowskiego.

Przejście do nieinercjalnego układu odniesienia opisywane jest nieosobliwymi transformacjami współrzędnych

$$x'^\mu = x'^\mu\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right), \quad x^\mu = x^\mu\left(x'^1, x'^2, x'^3, x'^4\right),$$

dlatego też

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} dx'^\alpha, \quad dx^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} dx'^\beta .$$

W nowym układzie współrzędnych

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} dx'^\alpha dx'^\beta = ds'^2$$

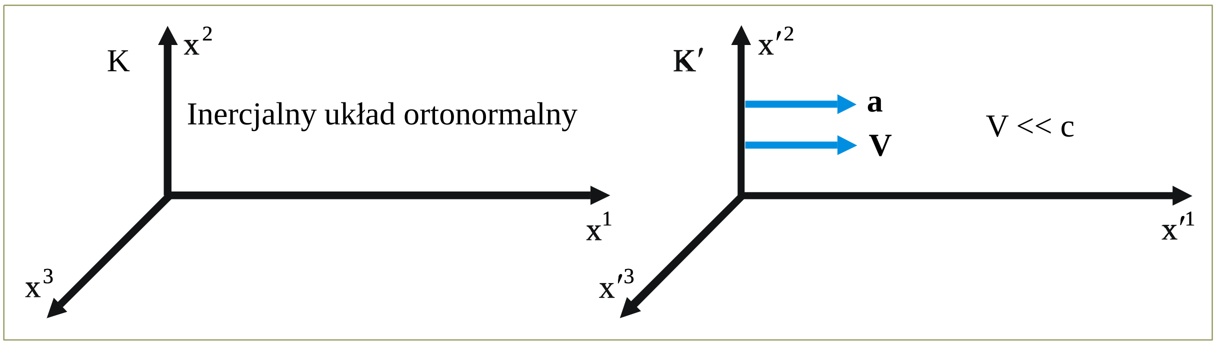
$$g'_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \quad = \text{ tensor metryczny w nieinercjalnym układzie odniesienia}$$

$$ds'^2 = g'_{\alpha\beta}\, dx'^\alpha dx'^\beta .$$

Składowe tensora metrycznego $g'_{\alpha\beta}$ zależą od współrzędnych x'^1, x'^2, x'^3, x'^4. Wszystkie składowe tensora krzywizny $R^{\bullet}_{\bullet\bullet\bullet}$, odpowiadającego tej metryce, są równe zeru.

W obecności realnego pola grawitacyjnego składowe symetrycznego tensora metrycznego zależą od rozkładu gęstości energii. Co najmniej jedna składowa tensora krzywizny $R^{\bullet}_{\bullet\bullet\bullet}$ jest wtedy różna od zera. W takim przypadku tensora metrycznego nie można sprowadzić w całej czasoprzestrzeni do postaci $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$.

- **Układ ze stałym przyspieszeniem**



W chwili początkowej osie obu układów pokrywały się, układ K’ rozpoczął ruch postępowy jednostajnie przyspieszony bez prędkości początkowej z przyspieszeniem **a** równoległym do osi $0X^1$. Założymy, że prędkość względna układów K’ i K jest dużo mniejsza niż prędkość światła w próżni.

Wiadomo, że w przypadku nierelatywistycznym swobodna cząstka posiada w płaskiej czasoprzestrzeni względem układu nieinercjalnego przyspieszenie skierowane przeciwnie do przyspieszenia tego układu.

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2$$

$$x^1 = x'^1 + \tfrac{1}{2}at'^2 = \qquad dx^1 = dx'^1 + at'dt' =$$

$$= x'^1 + \tfrac{1}{2}ai^{-2}c^{-2}(x'^4)^2 \qquad = dx'^1 + ax'^4 i^{-2}c^{-2}dx'^4$$

$$x^2 = x'^2 \qquad dx^2 = dx'^2$$

$$x^3 = x'^3 \qquad dx^3 = dx'^3$$

$$x^4 = x'^4 \qquad dx^4 = dx'^4$$

$$V << c, \quad x^4 = ict, \quad x'^4 = ict', \quad V = at'$$

$$ds^2 = (dx'^1)^2 + 2ax'^4 i^{-2}c^{-2}dx'^1 dx'^4 + (dx'^2)^2 + (dx'^3)^2 + \left[1 + a^2 i^{-4}c^{-4}(x'^4)^2\right](dx'^4)^2 = ds'^2$$

$$ds^2 = ds'^2 \approx -c^2 dt^2 \approx -c^2 dt'^2$$

$$g'_{11} = g'_{22} = g'_{33} = 1$$

$$g'_{14} = g'_{41} = ax'^4 i^{-2}c^{-2} = -iVc^{-1}$$

$$g'_{44} = 1 + a^2 i^{-4}c^{-4}(x'^4)^2 = 1 - V^2 c^{-2}$$

Pozostałe składowe tensora metrycznego $g'_{\mu\nu}$ są równe zeru.

$$g' = g'_{11}g'_{22}g'_{33}g'_{44} - g'_{14}g'_{14}g'_{22}g'_{33} = 1$$

$$g'^{11} = (g')^{-1}g'_{22}g'_{33}g'_{44} = 1 - V^2c^{-2}, \quad g'^{22} = (g')^{-1}g'_{11}g'_{33}g'_{44} = 1 - V^2c^{-2}$$

$$g'^{33} = (g')^{-1}g'_{11}g'_{22}g'_{44} = 1 - V^2c^{-2}, \quad g'^{44} = (g')^{-1}g'_{11}g'_{22}g'_{33} = 1$$

$$g'^{14} = -(g')^{-1}g'_{14}g'_{22}g'_{33} = iVc^{-1}$$

$$\left[{44 \atop 1}\right]' = \frac{\partial g'_{41}}{\partial x'^4} = ai^{-2}c^{-2} = -ac^{-2}$$

$$\left[{44 \atop 4}\right]' = \frac{1}{2}\frac{\partial g'_{44}}{\partial x'^4} = a^2 x'^4 i^{-4}c^{-4} = ia^2c^{-3}t'$$

$$\Gamma'^1_{44} = g'^{11}\left[{44 \atop 1}\right]' + g'^{14}\left[{44 \atop 4}\right]' = ai^{-2}c^{-2} = -ac^{-2}$$

$$\Gamma'^4_{44} = g'^{41}\left[{44 \atop 1}\right]' + g'^{44}\left[{44 \atop 4}\right]' = 0$$

Wszystkie składowe tensora krzywizny $R'^{\alpha}_{\beta\mu\nu}$ odpowiadające metryce $g'_{\mu\nu}$ są równe zeru.

Wykorzystując przedstawione powyżej relacje, można otrzymać równania ruchu w rozpatrywanym układzie nieinercjalnym.

$$\tilde{F}'^1 = -mc^2\left(\frac{d^2x'^1}{ds'^2} + \Gamma'^1_{44}\frac{dx'^4}{ds'}\frac{dx'^4}{ds'}\right)$$

$$\tilde{F}'^2 = -mc^2\frac{d^2x'^2}{ds'^2}$$

$$\tilde{F}'^3 = -mc^2\frac{d^2x'^3}{ds'^2}$$

$$\tilde{F}'^4 = -mc^2\frac{d^2x'^4}{ds'^2}$$

$$\frac{dx'^4}{ds'}\frac{dx'^4}{ds'} \approx 1$$

$$\frac{d^2x'^4}{ds'^2} \approx 0$$

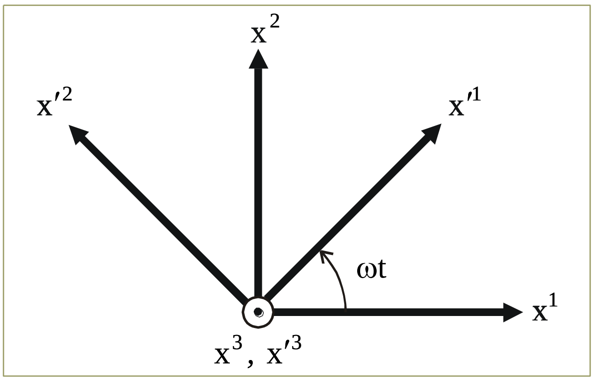
$$\tilde{F}'^1 \approx m\left(\frac{d^2x'^1}{dt'^2} + a\right)$$

$$\tilde{F}'^2 \approx m\frac{d^2x'^2}{dt'^2}$$

$$\tilde{F}'^3 \approx m\frac{d^2x'^3}{dt'^2}$$

$$\tilde{F}'^4 \approx 0$$

- **Układ obracający się**



Układ K' porusza się względem układu K jednostajnym ruchem obrotowym z prędkością kątową $\boldsymbol{\omega}$ skierowaną wzdłuż osi $0X^3$. W chwili początkowej analogiczne osie obu układów pokrywały się.

$$x'^1 = x^1\cos\omega t + x^2\sin\omega t$$
$$x'^2 = -x^1\sin\omega t + x^2\cos\omega t$$
$$x'^3 = x^3$$
$$t' = t$$

$$ds^2 = \left(dx^1\right)^2 + \left(dx^2\right)^2 + \left(dx^3\right)^2 + \left(dx^4\right)^2$$

$$x^1 = x'^1\cos\omega t' - x'^2\sin\omega t' = x'^1\cos\left(i^{-1}c^{-1}\omega x'^4\right) - x'^2\sin\left(i^{-1}c^{-1}\omega x'^4\right)$$
$$x^2 = x'^1\sin\omega t' + x'^2\cos\omega t' = x'^1\sin\left(i^{-1}c^{-1}\omega x'^4\right) + x'^2\cos\left(i^{-1}c^{-1}\omega x'^4\right)$$
$$x^3 = x'^3$$
$$x^4 = x'^4$$

$$dx^1 = \frac{\partial x^1}{\partial x'^1}dx'^1 + \frac{\partial x^1}{\partial x'^2}dx'^2 + 0 + \frac{\partial x^1}{\partial x'^4}dx'^4$$
$$dx^2 = \frac{\partial x^2}{\partial x'^1}dx'^1 + \frac{\partial x^2}{\partial x'^2}dx'^2 + 0 + \frac{\partial x^2}{\partial x'^4}dx'^4$$
$$dx^3 = dx'^3$$
$$dx^4 = dx'^4$$

$$\frac{\partial x^1}{\partial x'^1} = \cos\left(i^{-1}c^{-1}\omega x'^4\right), \qquad \frac{\partial x^1}{\partial x'^2} = -\sin\left(i^{-1}c^{-1}\omega x'^4\right)$$
$$\frac{\partial x^1}{\partial x'^4} = -i^{-1}c^{-1}\omega x'^1\sin\left(i^{-1}c^{-1}\omega x'^4\right) - i^{-1}c^{-1}\omega x'^2\cos\left(i^{-1}c^{-1}\omega x'^4\right)$$
$$\frac{\partial x^2}{\partial x'^1} = \sin\left(i^{-1}c^{-1}\omega x'^4\right), \qquad \frac{\partial x^2}{\partial x'^2} = \cos\left(i^{-1}c^{-1}\omega x'^4\right)$$
$$\frac{\partial x^2}{\partial x'^4} = i^{-1}c^{-1}\omega x'^1\cos\left(i^{-1}c^{-1}\omega x'^4\right) - i^{-1}c^{-1}\omega x'^2\sin\left(i^{-1}c^{-1}\omega x'^4\right)$$

$$ds^2 = \left(dx'^1\right)^2 - i^{-1}c^{-1}\omega x'^2dx'^1dx'^4 + \left(dx'^2\right)^2 + i^{-1}c^{-1}\omega x'^1dx'^2dx'^4 + \left(dx'^3\right)^2 - i^{-1}c^{-1}\omega x'^2dx'^4dx'^1 +$$
$$+ i^{-1}c^{-1}\omega x'^1dx'^4dx'^2 + \left[1 + \left(i^{-1}c^{-1}\omega x'^1\right)^2 + \left(i^{-1}c^{-1}\omega x'^2\right)^2\right]\left(dx'^4\right)^2 = \left(ds'\right)^2$$

A oto niezerowe składowe kowariantne tensora metrycznego i jego wyznacznik.

$$g'_{11} = g'_{22} = g'_{33} = 1$$
$$g'_{14} = g'_{41} = -i^{-1}c^{-1}\omega x'^2$$
$$g'_{24} = g'_{42} = i^{-1}c^{-1}\omega x'^1$$
$$g'_{44} = 1 - \omega^2c^{-2}\left[\left(x'^1\right)^2 + \left(x'^2\right)^2\right]$$
$$g' = g'_{11}g'_{22}g'_{33}g'_{44} - g'_{11}g'_{24}g'_{24}g'_{33} - g'_{14}g'_{14}g'_{22}g'_{33} = 1$$

W dalszych rachunkach potrzebne będą nam następujące kontrawariantne składowe tensora metrycznego oraz symbole Christoffela pierwszego i drugiego rodzaju.

$$g'^{11} = g'^{-1}\left(g'_{22}g'_{33}g'_{44} - g'_{24}g'_{24}g'_{33}\right) = 1 - c^{-2}\omega^2\left(x'^2\right)^2$$

$$g'^{22} = g'^{-1}\left(g'_{11}g'_{33}g'_{44} - g'_{14}g'_{14}g'_{33}\right) = 1 - c^{-2}\omega^2\left(x'^1\right)^2$$

$$g'^{44} = g'^{-1}g'_{11}g'_{22}g'_{33} = 1$$

$$g'^{14} = g'^{41} = -g'^{-1}g'_{14}g'_{22}g'_{33} = i^{-1}c^{-1}\omega x'^2$$

$$g'^{24} = g'^{42} = -g'^{-1}g'_{11}g'_{24}g'_{33} = -i^{-1}c^{-1}\omega x'^1$$

$$\begin{bmatrix}44\\1\end{bmatrix}' = c^{-2}\omega^2 x'^1, \quad \begin{bmatrix}44\\2\end{bmatrix}' = c^{-2}\omega^2 x'^2, \quad \begin{bmatrix}12\\4\end{bmatrix}' = 0, \quad \begin{bmatrix}14\\2\end{bmatrix}' = i^{-1}c^{-1}\omega, \quad \begin{bmatrix}14\\4\end{bmatrix}' = -c^{-2}\omega^2 x'^1$$

$$\begin{bmatrix}24\\1\end{bmatrix}' = -i^{-1}c^{-1}\omega, \quad \begin{bmatrix}24\\4\end{bmatrix}' = -c^{-2}\omega^2 x'^2, \quad \begin{bmatrix}44\\4\end{bmatrix}' = 0$$

$$\Gamma'^1_{12} = 0, \quad \Gamma'^1_{14} = -i^{-1}c^{-3}\omega^3 x'^1 x'^2, \quad \Gamma'^1_{24} = -i^{-1}c^{-1}\omega, \quad \Gamma'^1_{44} = c^{-2}\omega^2 x'^1 - c^{-4}\omega^4 x'^1\left(x'^2\right)^2$$

$$\Gamma'^2_{12} = 0, \quad \Gamma'^2_{14} = i^{-1}c^{-1}\omega, \quad \Gamma'^2_{24} = i^{-1}c^{-3}\omega^3 x'^1 x'^2, \quad \Gamma'^2_{44} = c^{-2}\omega^2 x'^2 - c^{-4}\omega^4\left(x'^1\right)^2 x'^2$$

I już jesteśmy gotowi by zaproponować równania ruchu w obracającym się układzie.

$$\tilde{F}'^1 = mi^2c^2\left(\frac{d^2x'^1}{ds'^2} + 2\Gamma'^1_{14}\frac{dx'^1}{ds'}\frac{dx'^4}{ds'} + 2\Gamma'^1_{24}\frac{dx'^2}{ds'}\frac{dx'^4}{ds'} + \Gamma'^1_{44}\frac{dx'^4}{ds'}\frac{dx'^4}{ds'}\right)$$

$$\tilde{F}'^2 = mi^2c^2\left(\frac{d^2x'^2}{ds'^2} + 2\Gamma'^2_{14}\frac{dx'^1}{ds'}\frac{dx'^4}{ds'} + 2\Gamma'^2_{24}\frac{dx'^2}{ds'}\frac{dx'^4}{ds'} + \Gamma'^2_{44}\frac{dx'^4}{ds'}\frac{dx'^4}{ds'}\right)$$

$$\tilde{F}'^3 = mi^2c^2\frac{d^2x'^3}{ds'^2}$$

$$\tilde{F}'^4 = mi^2c^2\frac{d^2x'^4}{ds'^2}$$

$$x'^4 = ict'$$

$$ds'^2 \approx i^2c^2dt'^2 = -c^2dt'^2$$

$$\frac{d^2x'^4}{ds'^2} = \frac{ic}{i^2c^2}\frac{d^2t'}{dt'^2} = 0, \quad \text{bo} \quad \frac{d^2t'}{dt'^2} = 0$$

$$\tilde{F}'^1 = m\left(\frac{d^2x'^1}{dt'^2} - 2c^{-2}\omega^3 x'^1 x'^2\frac{dx'^1}{dt'} + c^{-2}\omega^4 x'^1\left(x'^2\right)^2 - 2\omega\frac{dx'^2}{dt'} - \omega^2 x'^1\right)$$

$$\tilde{F}'^2 = m\left(\frac{d^2x'^2}{dt'^2} + 2c^{-2}\omega^3 x'^1 x'^2\frac{dx'^2}{dt'} + c^{-2}\omega^4\left(x'^1\right)^2 x'^2 + 2\omega\frac{dx'^1}{dt'} - \omega^2 x'^2\right)$$

$$\tilde{F}'^3 = m\frac{d^2x'^3}{dt'^2}$$

$$\tilde{F}'^4 \approx 0$$

$$\boxed{-\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\times\boldsymbol{\omega} = -\frac{dx'^2}{dt}\omega^3\mathbf{e}_1 + \frac{dx'^1}{dt}\omega^3\mathbf{e}_2}$$

$$\boxed{\mathbf{F}' \approx m\left(\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt'^2} - 2\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\times\boldsymbol{\omega} - \omega^2\mathbf{r}'\right)}$$

Równanie ruchu w postaci trójwymiarowej w układzie obracającym się ze stałą prędkością kątową $\boldsymbol{\omega}$. Zaniedbane zostały człony małe w stosunku do c^2.

- **Układ drgający**
  Układ K' porusza się względem układu K ruchem drgającym harmonicznym prostym.

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2$$

$$\begin{aligned} x^1 &= x'^1 + A\sin\omega t' = & dx^1 &= dx'^1 + A\omega\cos\omega t' \cdot dt' = \\ &= x'^1 + A\sin\left(i^{-1}c^{-1}\omega x'^4\right) & &= dx'^1 + i^{-1}c^{-1}A\omega\cos\left(i^{-1}c^{-1}\omega x'^4\right)\cdot dx'^4 \\ x^2 &= x'^2 & dx^2 &= dx'^2 \\ x^3 &= x'^3 & dx^3 &= dx'^3 \\ x^4 &= x'^4 & dx^4 &= dx'^4 \end{aligned}$$

$$V << c,\quad x^4 = ict,\quad x'^4 = ict',\quad V = at = at'$$

$$ds^2 = (dx'^1)^2 + 2i^{-1}c^{-1}A\omega\cos\left(i^{-1}c^{-1}\omega x'^4\right)\cdot dx'^1 dx'^4 + (dx'^2)^2 + \\ + (dx'^3)^2 + \left[1 - c^{-2}A^2\omega^2\cos^2\left(i^{-1}c^{-1}\omega x'^4\right)\right]\cdot (dx'^4)^2 = ds'^2$$

A oto niezerowe składowe kowariantne tensora metrycznego i jego wyznacznik.

$$\boxed{\begin{aligned} & g'_{11} = g'_{22} = g'_{33} = 1 \\ & g'_{14} = g'_{41} = i^{-1}c^{-1}A\omega\cos\left(i^{-1}c^{-1}\omega x'^4\right) \\ & g'_{44} = 1 - c^{-2}A^2\omega^2\cos^2\left(i^{-1}c^{-1}\omega x'^4\right) \\ & g' = g'_{11}g'_{22}g'_{33}g'_{44} - g'_{14}g'_{14}g'_{22}g'_{33} = 1 \end{aligned}}$$

W dalszych rachunkach potrzebne będą nam następujące kontrawariantne składowe tensora metrycznego oraz symbole Christoffela pierwszego i drugiego rodzaju.

$$g'^{11} = g'^{-1}g'_{22}g'_{33}g'_{44} = g'_{44} = 1 - c^{-2}A^2\omega^2\cos^2\left(i^{-1}c^{-1}\omega x'^4\right)$$

$$g'^{22} = g'^{-1}\left(g'_{11}g'_{33}g'_{44} - g'_{14}g'_{14}g'_{33}\right) = g'_{44} - g'_{14}g'_{14} = 1$$

$$g'^{33} = g'^{-1}\left(g'_{11}g'_{22}g'_{44} - g'_{14}g'_{14}g'_{22}\right) = g'_{44} - g'_{14}g'_{14} = 1$$

$$g'^{44} = g'^{-1}g'_{11}g'_{22}g'_{33} = 1$$

$$g'^{14} = g'^{41} = -g'^{-1}g'_{14}g'_{22}g'_{33} = -g'_{14} = -i^{-1}c^{-1}A\omega\cos\left(i^{-1}c^{-1}\omega x'^4\right)$$

$$\left[{4\,4 \atop 1}\right]' = \frac{\partial g'_{14}}{\partial x'^4} = c^{-2}A\omega^2\sin\left(i^{-1}c^{-1}\omega x'^4\right)$$

$$\left[{4\,4 \atop 4}\right]' = \frac{1}{2}\frac{\partial g'_{44}}{\partial x'^4} = i^{-1}c^{-3}A^2\omega^3\sin\left(i^{-1}c^{-1}\omega x'^4\right)\cos\left(i^{-1}c^{-1}\omega x'^4\right)$$

$$\Gamma'^1_{44} = g'^{11}\left[{4\,4 \atop 1}\right]' + g'^{14}\left[{4\,4 \atop 4}\right]' = c^{-2}A\omega^2\sin\left(i^{-1}c^{-1}\omega x'^4\right)$$

$$\Gamma'^4_{44} = g'^{41}\left[{4\,4 \atop 1}\right]' + g'^{44}\left[{4\,4 \atop 4}\right]' = 0$$

I już jesteśmy gotowi by zaproponować równania ruchu w drgającym układzie.

$$\tilde{F}'^1 = mi^2c^2\left(\frac{d^2x'^1}{ds'^2} + \Gamma'^1_{44}\frac{dx'^4}{ds'}\frac{dx'^4}{ds'}\right)$$

$$\tilde{F}'^2 = mi^2c^2\frac{d^2x'^2}{ds'^2}$$

$$\tilde{F}'^3 = mi^2c^2\frac{d^2x'^3}{ds'^2}$$

$$\tilde{F}'^4 = mi^2c^2\frac{d^2x'^4}{ds'^2}$$

$$x'^4 = ict'$$

$$ds'^2 \approx i^2c^2dt'^2 = -c^2dt'^2$$

$$\frac{dx'^4}{ds'}\frac{dx'^4}{ds'} \approx 1$$

$$\frac{d^2x'^4}{ds'^2} = \frac{ic}{i^2c^2}\frac{d^2t'}{dt'^2} = 0, \quad \text{bo} \quad \frac{d^2t'}{dt'^2} = 0$$

$a = -A\omega^2\sin(\omega t')$ = przyspieszenie, jakie posiada układ K' względem układu K

$$\tilde{F}'^1 = m\left[\frac{d^2x'^1}{dt'^2} - A\omega^2\sin(\omega t')\right] = m\left[\frac{d^2x'^1}{dt'^2} + a\right]$$

$$\tilde{F}'^2 = m\frac{d^2x'^2}{dt'^2}$$

$$\tilde{F}'^3 = m\frac{d^2x'^3}{dt'^2}$$

$$\tilde{F}'^4 \approx 0$$

6 TENSOR PĘDU-ENERGII CIECZY NIELEPKIEJ

- **Relatywistyczne równanie bilansu masy hydrodynamicznej w inercjalnym układzie ortonormalnym w płaskiej czasoprzestrzeni Minkowskiego**

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \sigma - \mathrm{div}\mathbf{J} \quad \text{lub} \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} = \sigma - \sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial J^\beta}{\partial x^\beta}$$ Nierelatywistyczne równanie bilansu masy

ρ = gęstość objętościowa masy

$\sigma = \dfrac{d_i\rho}{dt}$ = źródło masy

$\mathbf{J}$ = trójwymiarowy strumień masy

$$\mathbf{J} = \sum_{\beta=1}^{3} J^\beta \mathbf{e}_\beta = \sum_{\beta=1}^{3} \rho v^\beta \mathbf{e}_\beta = \rho\mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = \sum_{\beta=1}^{3} v^\beta \mathbf{e}_\beta, \quad v^\beta = \frac{dx^\beta}{dt}, \quad J^\beta = \rho v^\beta, \quad (\beta = 1, 2, 3)$$

$$\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial\rho v^\beta}{\partial x^\beta} + \frac{\partial\rho}{\partial t} - \sigma = 0$$

$$\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial\rho v^\beta}{\partial x^\beta} + \frac{\partial(ic\rho)}{\partial(ict)} - \sigma = 0$$

$v^4 = ic, \quad x^4 = ict$

$J^\alpha = \rho v^\alpha, \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$

$$\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial\rho v^\beta}{\partial x^\beta} + \frac{\partial\rho v^4}{\partial x^4} - \sigma = 0$$

$$\sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial\rho v^\alpha}{\partial x^\alpha} - \sigma = 0 \quad \text{lub} \quad \sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial J^\alpha}{\partial x^\alpha} - \sigma = 0$$

$\rho \to \rho^* = (pc^{-2} + \rho)$ = spoczynkowa gęstość objętościowa masy hydrodynamicznej

p = ciśnienie

$\sigma = \dfrac{d_i\rho}{dt} \to \tilde{\sigma} = \gamma\dfrac{d_i\rho^*}{dt}$

$v^\alpha \to \tilde{v}^\alpha = \gamma v^\alpha, \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$

$J^\alpha \to \tilde{J}^\alpha = \rho^*\gamma v^\alpha = \rho^*\tilde{v}^\alpha, \quad \tilde{v}^\alpha = \gamma v^\alpha, \quad v^\alpha = \dfrac{dx^\alpha}{dt}, \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$

$\tilde{J}^\alpha$ = składowe czterowektora strumienia masy hydrodynamicznej

$\gamma = \left[1 - v^2c^{-2}\right]^{-\frac{1}{2}}$

$$\boxed{\sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial\rho^*\gamma v^\alpha}{\partial x^\alpha} = \tilde{\sigma} \quad \text{lub} \quad \sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial\tilde{J}^\alpha}{\partial x^\alpha} = \tilde{\sigma}}$$

- **Równania bilansu gęstości objętościowej pędu-energii cieczy nielepkiej w inercjalnym układzie ortonormalnym w płaskiej czasoprzestrzeni Minkowskiego**

$$\boxed{\tilde{\mathbf{f}} = \rho^* \frac{d\tilde{\mathbf{v}}}{d\tau} = \rho^* \gamma \frac{d\tilde{\mathbf{v}}}{dt}}$$

Relatywistyczne czterowymiarowe równania ruchu

$\rho^* = pc^{-2} + \rho$ = spoczynkowa gęstość objętościowa masy hydrodynamicznej

ρ = spoczynkowa gęstość objętościowa masy

p = ciśnienie

$d\tau = \gamma^{-1}dt, \quad \gamma = \left[1 - v^2c^{-2}\right]^{-\frac{1}{2}}$

$\tilde{\mathbf{v}} = \left(\tilde{v}^1, \tilde{v}^2, \tilde{v}^3, \tilde{v}^4\right) = \left(\gamma v^1, \gamma v^2, \gamma v^3, \gamma v^4\right) = \sum_{\lambda=1}^{4} \tilde{v}^\lambda \mathbf{e}_\lambda = \sum_{\lambda=1}^{4} \gamma v^\lambda \mathbf{e}_\lambda$ = czterowektor prędkości

$\tilde{v}_4 = \gamma ic, \quad v_4 = ic$

$\tilde{\mathbf{f}} = \left(\tilde{f}^1, \tilde{f}^2, \tilde{f}^3, \tilde{f}^4\right) = \sum_{\lambda=1}^{4} \tilde{f}^\lambda \mathbf{e}_\lambda$ = czterowektor gęstości objętościowej siły

$$\tilde{f}^\alpha = \rho^* \gamma \frac{d\gamma v^\alpha}{dt}, \quad v^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt}, \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

$$\frac{d\gamma v^\alpha}{dt} = \sum_{\kappa=1}^{4} v^\kappa \frac{\partial \gamma v^\alpha}{\partial x^\kappa}$$

$$\tilde{f}^\alpha = \sum_{\kappa=1}^{4} \rho^* \gamma v^\kappa \frac{\partial \gamma v^\alpha}{\partial x^\kappa}$$

$$\sum_{\kappa=1}^{4} \frac{\partial \rho^* \gamma^2 v^\alpha v^\kappa}{\partial x^\kappa} = \gamma v^\alpha \sum_{\kappa=1}^{4} \frac{\partial \rho^* \gamma v^\kappa}{\partial x^\kappa} + \tilde{f}^\alpha$$

$$\sum_{\kappa=1}^{4} \frac{\partial \rho^* \gamma v^\kappa}{\partial x^\kappa} = 0$$

Równanie bilansu masy

$M^{\alpha\kappa} = \rho^* \gamma^2 v^\alpha v^\kappa$ = tensor gęstości objętościowej pędu-energii

$$\sum_{\kappa=1}^{4} \frac{\partial\, \rho^* \gamma^2 v^\alpha v^\kappa}{\partial x^\kappa} = \tilde{f}^\alpha$$

$$\boxed{\sum_{\kappa=1}^{4} \frac{\partial M^{\alpha\kappa}}{\partial x^\kappa} = \tilde{f}^\alpha}$$

Gęstość objętościowa siły jest dywergencją tensora gęstości objętościowej pędu-energii.

$$\tilde{f}^\alpha = -\frac{\partial \delta^{\alpha\kappa} p}{\partial x^\kappa}, \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

$T^{\alpha\kappa} = \rho^* \gamma^2 v^\alpha v^\kappa + \delta^{\alpha\kappa} p$ = tensor pędu-energii

$$\boxed{\sum_{\kappa=1}^{4} \frac{\partial T^{\alpha\kappa}}{\partial x^\kappa} = 0, \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4)}$$

Równania bilansu gęstości objętościowej pędu-energii cieczy nielepkiej

Trzy pierwsze równania bilansują gęstość pędu, a czwarte – gęstość energii całkowitej.

Dalej wykażemy, że poniższe równania

$$\sum_{\kappa=1}^{4}\frac{\partial T^{\alpha\kappa}}{\partial x^{\kappa}}=0\,,\quad T^{\alpha\kappa}=\rho^{*}\gamma^{2}v^{\alpha}v^{\kappa}+\delta^{\alpha\kappa}p\quad \text{lub}\quad \sum_{\kappa=1}^{4}\frac{\partial\left(\rho^{*}\gamma^{2}v^{\alpha}v^{\kappa}\right)}{\partial x^{\kappa}}+\sum_{\kappa=1}^{4}\frac{\partial\delta^{\alpha\kappa}p}{\partial x^{\kappa}}=0\,,\quad (\alpha=1,2,3,4)$$

są równaniami bilansu gęstości objętościowej pędu i całkowitej energii cieczy nielepkiej.
Trzy pierwsze równania bilansują składowe przestrzenne gęstości objętościowej pędu.

$$\sum_{\kappa=1}^{4}\frac{\partial\left(\rho^{*}\gamma^{2}v^{\mu}v^{\kappa}\right)}{\partial x^{\kappa}}=-\frac{\partial p}{\partial x^{\mu}}\,,\quad (\mu=1,2,3)$$

$$x^{4}=ict\,,\quad v^{4}=ic\,,\quad \frac{\partial p}{\partial x^{4}}=0$$

$$\frac{\partial\left(\rho^{*}\gamma^{2}v^{\mu}\right)}{\partial t}=-\sum_{\lambda=1}^{3}\frac{\partial\left(\rho^{*}\gamma^{2}v^{\mu}v^{\lambda}\right)}{\partial x^{\kappa}}-\frac{\partial p}{\partial x^{\mu}}\,,\quad (\mu=1,2,3)$$

$$\boxed{\gamma\frac{\partial\left(\rho^{*}\gamma v^{\mu}\right)}{\partial t}=\rho^{*}\gamma v^{\mu}\frac{\partial\gamma}{\partial t}-\sum_{\lambda=1}^{3}\frac{\partial\left(\rho^{*}\gamma^{2}v^{\mu}v^{\lambda}\right)}{\partial x^{\kappa}}-\frac{\partial p}{\partial x^{\mu}}}$$

Równania bilansu składowych przestrzennych gęstości objętościowej pędu $\rho^{*}\gamma v^{\mu}$

Czwarte równanie bilansuje gęstość objętościową energii.

$$\sum_{\kappa=1}^{4}\frac{\partial\left(\rho^{*}\gamma^{2}v^{4}v^{\kappa}\right)}{\partial x^{\kappa}}=0$$

$$x^{4}=ict\,,\quad v^{4}=ic$$

$$\frac{\partial\left(\rho^{*}\gamma^{2}ic\right)}{\partial t}=-\sum_{\lambda=1}^{3}\frac{\partial\left(\rho^{*}\gamma^{2}icv^{\lambda}\right)}{\partial x^{\lambda}}$$

$$\boxed{\gamma\frac{\partial\left(\rho^{*}\gamma ic\right)}{\partial t}=\rho^{*}\gamma ic\frac{\partial\gamma}{\partial t}-\sum_{\lambda=1}^{3}\frac{\partial\left(\rho^{*}\gamma^{2}icv^{\lambda}\right)}{\partial x^{\lambda}}}$$

Równanie bilansu czwartej składowej gęstości objętościowej pędu $\rho^{*}\gamma ic$

Kwadrat czwartej składowej gęstości objętościowej pędu opatrzony znakiem minus i podzielony przez podwojoną gęstość jest równy gęstości objętościowej energii całkowitej.

$$\boxed{-\frac{\left(\rho^{*}\gamma ic\right)^{2}}{2\rho^{*}}=\frac{1}{2}\rho^{*}\gamma^{2}c^{2}=\varepsilon}$$

Dlatego też równanie bilansu czwartej składowej gęstości objętościowej pędu $\rho^{*}\gamma ic$ może być utożsamiane z równaniem bilansu gęstości objętościowej energii całkowitej ε.

UWAGA

W tomie poświęconym Szczególnej Teorii Względności wykazaliśmy, że energia spoczynkowa, kinetyczna i całkowita cząstki powinny być inaczej zdefiniowane.
Odpowiednie wyrażenia dla gęstości objętościowych tych wielkości ε_0, ε_k, ε podane są poniżej.

$$\boxed{\varepsilon_{0}=\frac{1}{2}\rho^{*}c^{2}}\quad \boxed{\varepsilon_{k}=\frac{1}{2}\rho^{*}\gamma^{2}v^{2}}\quad \boxed{\varepsilon=\frac{1}{2}\rho^{*}\gamma^{2}c^{2}}$$

- **Tensor pędu-energii cieczy nielepkiej w dowolnym układzie współrzędnych**

Czterowymiarowy tensor pędu-energii określony w inercjalnym układzie ortonormalnym w czterowymiarowej płaskiej czasoprzestrzeni Minkowskiego

$$\boxed{T^{\mu\nu}=\gamma^2\left(pc^{-2}+\rho\right)v^\mu v^\nu+\delta^{\mu\nu}p=\left(pc^{-2}+\rho\right)\tilde{v}^\mu\tilde{v}^\nu+\delta^{\mu\nu}p}$$

przedstawimy w zakrzywionej czasoprzestrzeni Riemanna lub w płaskiej czasoprzestrzeni Minkowskiego w układzie nieinercjalnym, czyli w postaci niezależnej od wyboru układu odniesienia.

Postać kontrawariantna tensora pędu-energii

$$\boxed{T^{\mu\nu}=\left(pc^{-2}+\rho\right)\tilde{v}^\mu\tilde{v}^\nu+g^{\mu\nu}p}$$

Postać kowariantna tensora pędu-energii

$$g_{\mu\alpha}g_{\beta\nu}T^{\mu\nu}=\left(pc^{-2}+\rho\right)g_{\mu\alpha}g_{\beta\nu}\tilde{v}^\mu\tilde{v}^\nu+g_{\mu\alpha}g_{\beta\nu}g^{\mu\nu}p$$

$$g_{\mu\alpha}g_{\beta\nu}T^{\mu\nu}=T_{\alpha\beta}$$

$$g_{\mu\alpha}\tilde{v}^\mu=\tilde{v}_\alpha$$

$$g_{\beta\nu}\tilde{v}^\nu=\tilde{v}_\beta$$

$$g_{\mu\alpha}g_{\beta\nu}g^{\mu\nu}=g_{\alpha\beta}$$

$$\boxed{T_{\alpha\beta}=\left(pc^{-2}+\rho\right)\tilde{v}_\alpha\tilde{v}_\beta+g_{\alpha\beta}p}$$

Postać mieszana tensora pędu-energii

$$g_{\sigma\nu}T^{\mu\nu}=\left(pc^{-2}+\rho\right)g_{\sigma\nu}\tilde{v}^\mu\tilde{v}^\nu+g_{\sigma\nu}g^{\mu\nu}p$$

$$g_{\sigma\nu}T^{\mu\nu}=T^\mu_\sigma$$

$$g_{\sigma\nu}\tilde{v}^\nu=\tilde{v}_\sigma$$

$$g_{\sigma\nu}g^{\mu\nu}=g^\mu_\sigma$$

$$\boxed{T^\mu_\sigma=\left(pc^{-2}+\rho\right)\tilde{v}^\mu\tilde{v}_\sigma+g^\mu_\sigma p}$$

Wykorzystanie czterowymiarowego tensora pędu-energii w czterowymiarowej teorii grawitacji jest możliwe w przypadku cieczy nielepkiej, gdy

$$\sum_{\kappa=1}^{4}\frac{\partial\left(pc^{-2}+\rho\right)\tilde{v}^\kappa}{\partial x^\kappa}=0,\quad \tilde{f}^\alpha=-\frac{\partial g^{\alpha\kappa}p}{\partial x^\kappa},\quad (\alpha=1,2,3,4),$$

gdyż tylko wtedy

$$\sum_{\nu=1}^{4}T^{\mu\nu}_{;\nu}=0,\quad \sum_{\beta=1}^{4}T_{\alpha\beta;\beta}=0,\quad \sum_{\mu=1}^{4}T^{\mu}_{\sigma;\mu}=0,\quad (\mu=1,2,3,4).$$

7 TENSOR PĘDU-ENERGII PYŁU BEZCIŚNIENIOWEGO

- **Pył bezciśnieniowy**

Pyłem bezciśnieniowym nazywamy zbiór nie oddziałujących wzajemnie cząstek spoczywających względem siebie. Dla prostoty będziemy rozpatrywali tylko pyły składające się z cząstek o identycznych masach.

- **Równanie bilansu masy pyłu bezciśnieniowego w inercjalnym układzie ortonormalnym w płaskiej czasoprzestrzeni Minkowskiego**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sigma - \mathrm{div}\mathbf{J} \quad \text{lub} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \sigma - \sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial J^\beta}{\partial x^\beta}$$ Nierelatywistyczne równanie bilansu masy

ρ = spoczynkowa gęstość objętościowa masy

σ = źródło masy = człon źródłowy

$\mathbf{J}$ = trójwymiarowy strumień masy

$$\mathbf{J} = \sum_{\beta=1}^{3} J^\beta \mathbf{e}_\beta = \sum_{\beta=1}^{3} \rho v^\beta \mathbf{e}_\beta = \rho \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = \sum_{\beta=1}^{3} v^\beta \mathbf{e}_\beta, \quad v^\beta = \frac{dx^\beta}{dt}, \quad J^\beta = \rho v^\beta$$

$$\sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial(\rho v^\beta)}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \rho}{\partial t} - \sigma = 0$$

$$\sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial(\rho v^\beta)}{\partial x^\beta} + \frac{\partial (ic\,\rho)}{\partial (ict)} - \sigma = 0$$

$$v^4 = ic, \quad x^4 = ict, \quad J^\alpha = \rho v^\alpha, \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

$$\sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial(\rho v^\beta)}{\partial x^\beta} + \frac{\partial(\rho v^4)}{\partial x^4} - \sigma = 0$$

$$\sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\partial(\rho v^\alpha)}{\partial x^\alpha} - \sigma = 0 \quad \text{lub} \quad \sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\partial J^\alpha}{\partial x^\alpha} - \sigma = 0$$

Nierelatywistyczne czterowymiarowe równanie bilansu masy

ρ = spoczynkowa gęstość objętościowa masy pyłu

$$\gamma = \left[1 - v^2 c^{-2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\sigma = 0$$

$$J^\alpha \to \tilde{J}^\alpha = \gamma \rho v^\alpha = \rho \tilde{v}^\alpha, \quad \tilde{v}^\alpha = \gamma v^\alpha, \quad v^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt}, \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

$\tilde{J}^\alpha$ = składowe czterowektora strumienia masy

$$\boxed{\sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\gamma \rho v^\alpha\right) = 0 \quad \text{lub} \quad \sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\partial \tilde{J}^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0}$$ Relatywistyczne równanie bilansu masy

- **Równania bilansu gęstości objętościowej pędu-energii pyłu bezciśnieniowego w inercjalnym układzie ortonormalnym w płaskiej czasoprzestrzeni Minkowskiego**

$$\boxed{\tilde{\mathbf{f}} = \rho\frac{d\tilde{\mathbf{v}}}{d\tau} = \rho\gamma\frac{d\tilde{\mathbf{v}}}{dt}}$$

Relatywistyczne czterowymiarowe równania ruchu

ρ = spoczynkowa gęstość objętościowa masy pyłu

$d\tau = \gamma^{-1}dt$

$\gamma = \left[1 - v^2c^{-2}\right]^{-\frac{1}{2}}$

$\tilde{\mathbf{v}} = \left(\tilde{v}^1, \tilde{v}^2, \tilde{v}^3, \tilde{v}^4\right) = \left(\gamma v^1, \gamma v^2, \gamma v^3, \gamma v^4\right) = \sum_{\lambda=1}^{4}\tilde{v}^\lambda \mathbf{e}_\lambda = \sum_{\lambda=1}^{4}\gamma v^\lambda \mathbf{e}_\lambda$

$\tilde{\mathbf{v}}$ = czterowektor prędkości cząstki pyłu

$\tilde{v}^4 = \gamma ic$, $\quad v^4 = ic$, $\quad x^4 = ict$

$v^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt}$, $\quad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$

$\tilde{\mathbf{f}} = \left(\tilde{f}^1, \tilde{f}^2, \tilde{f}^3, \tilde{f}^4\right) = \sum_{\lambda=1}^{4}\tilde{f}^\lambda \mathbf{e}_\lambda$

$\tilde{\mathbf{f}}$ = czterowektor gęstości objętościowej siły

$$\tilde{f}^\alpha = \rho\gamma\frac{d\gamma v^\alpha}{dt}, \quad v^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt}, \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

$$\frac{d\gamma v^\alpha}{dt} = \sum_{\kappa=1}^{4} v^\kappa \frac{\partial \gamma v^\alpha}{\partial x^\kappa}$$

$$\tilde{f}^\alpha = \sum_{\kappa=1}^{4}\rho\gamma v^\kappa \frac{\partial \gamma v^\alpha}{\partial x^\kappa}$$

$$\sum_{\kappa=1}^{4}\frac{\partial \rho\gamma^2 v^\alpha v^\kappa}{\partial x^\kappa} = \gamma v^\alpha \sum_{\kappa=1}^{4}\frac{\partial \rho\gamma v^\kappa}{\partial x^\kappa} + \tilde{f}^\alpha$$

$$\sum_{\kappa=1}^{4}\frac{\partial \rho\gamma v^\kappa}{\partial x^\kappa} = 0$$

Równanie bilansu masy

$$T^{\alpha\kappa} \overset{df}{=} \gamma^2\rho v^\alpha v^\kappa = \rho\tilde{v}^\alpha\tilde{v}^\kappa$$

= tensor gęstości objętościowej pędu-energii

$$\boxed{\sum_{\kappa=1}^{4}\frac{\partial\, \rho\gamma^2 v^\alpha v^\kappa}{\partial x^\kappa} = \tilde{f}^\alpha}$$

Gęstość objętościowa siły jest dywergencją tensora gęstości objętościowej pędu-energii.

$$\tilde{f}^\alpha = 0$$

$$\boxed{\sum_{\kappa=1}^{4}\frac{\partial T^{\alpha\kappa}}{\partial x^\kappa} = 0, \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4)}$$

Równania bilansu gęstości objętościowej pędu-energii

Trzy pierwsze równania bilansują gęstość pędu, a czwarte – gęstość energii.

- **Tensor pędu-energii pyłu bezciśnieniowego w dowolnym układzie współrzędnych**

Czterowymiarowy tensor pędu-energii pyłu bezciśnieniowego określony w inercjalnym układzie ortonormalnym w czterowymiarowej płaskiej czasoprzestrzeni Minkowskiego posiada identyczną postać w zakrzywionej czasoprzestrzeni Riemanna lub płaskiej czasoprzestrzeni Minkowskiego w układzie nieinercjalnym, jeżeli

$$\tilde{v}^{\mu} \overset{\mathrm{df}}{=} \sqrt{\operatorname{sgn} ds^2}\; c \frac{dx^{\mu}}{ds} \;.$$

Postać kontrawariantna tensora pędu-energii pyłu bezciśnieniowego

$$\boxed{T^{\mu\nu} = \rho \tilde{v}^{\mu} \tilde{v}^{\nu}}$$

Postać kowariantna tensora pędu-energii pyłu bezciśnieniowego

$$g_{\mu\alpha} g_{\beta\nu} T^{\mu\nu} = \rho g_{\mu\alpha} g_{\beta\nu} \tilde{v}^{\mu} \tilde{v}^{\nu}$$

$$g_{\mu\alpha} g_{\beta\nu} T^{\mu\nu} = T_{\alpha\beta}$$

$$g_{\mu\alpha} \tilde{v}^{\mu} = \tilde{v}_{\alpha}$$

$$g_{\beta\nu} \tilde{v}^{\nu} = \tilde{v}_{\beta}$$

$$\boxed{T_{\alpha\beta} = \rho \tilde{v}_{\alpha} \tilde{v}_{\beta}}$$

Postać mieszana tensora pędu-energii pyłu bezciśnieniowego

$$g_{\sigma\nu} T^{\mu\nu} = \rho g_{\sigma\nu} \tilde{v}^{\mu} \tilde{v}^{\nu}$$

$$g_{\sigma\nu} T^{\mu\nu} = T^{\mu}_{\sigma}$$

$$g_{\sigma\nu} \tilde{v}^{\nu} = \tilde{v}_{\sigma}$$

$$\boxed{T^{\mu}_{\sigma} = \rho \tilde{v}^{\mu} \tilde{v}_{\sigma}}$$

Ślad tensora $T^{\bullet}_{\bullet}$

$$T^{\mu}_{\mu} = \rho \tilde{v}^{\mu} \tilde{v}_{\mu}$$

$$\tilde{v}^{\mu} \tilde{v}_{\mu} = ic \frac{dx^{\mu}}{ds} ic \frac{dx_{\mu}}{ds} = -ic^2 \frac{dx^{\mu}}{ds} \frac{dx_{\mu}}{ds} = -ic^2 g^{\mu}_{\nu} \frac{dx^{\mu}}{ds} \frac{dx_{\nu}}{ds} = -c^2$$

$$\boxed{T^{\mu}_{\mu} = -\rho c^2}$$

Wykorzystanie czterowymiarowego tensora pędu-energii w czterowymiarowej teorii grawitacji jest możliwe w przypadku pyłu bezciśnieniowego, gdy

$$\sum_{\kappa=1}^{4} \frac{\partial \rho \tilde{v}^{\kappa}}{\partial x^{\kappa}} = 0\,, \quad \tilde{f}^{\alpha} = 0\,, \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4), \quad \text{gdyż tylko wtedy}$$

$$\sum_{\nu=1}^{4} T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0\,, \quad \sum_{\beta=1}^{4} T_{\alpha\beta;\beta} = 0\,, \quad \sum_{\mu=1}^{4} T^{\mu}_{\sigma;\mu} = 0\,, \quad (\mu = 1, 2, 3, 4).$$

8 RÓWNANIA MAXWELLA W OGÓLNEJ TEORII WZGLĘDNOŚCI

- **Czterowektor gęstości prądu**

$$\boxed{\tilde{J}^{\mu} \overset{df}{=} \rho\tilde{v}^{\mu}} \qquad ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta} < 0$$

Relatywistyczne czterowymiarowe równanie definicyjne gęstości prądu w zakrzywionej czasoprzestrzeni Riemanna lub płaskiej czasoprzestrzeni Minkowskiego w układzie nieinercjalnym

$$\tilde{v}^{\mu} \overset{df}{=} \sqrt{\operatorname{sgn} ds^2}\, c\frac{dx^{\mu}}{ds}$$

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = 0, \quad g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$$

$$ds^2 = \delta_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta} < 0$$

$$ds = icd\tau = ic\gamma^{-1}dt$$

ρ = spoczynkowa gęstość objętościowa ładunku

$$\boxed{\tilde{J}^{\mu} = \rho\tilde{v}^{\mu} = \rho\frac{dx^{\mu}}{d\tau} = \rho\gamma\frac{dx^{\mu}}{dt}}$$

Relatywistyczne czterowymiarowe równanie definicyjne gęstości prądu w inercjalnym układzie ortonormalnym w płaskiej czasoprzestrzeni Minkowskiego

- **Tensory pola elektromagnetycznego**

$$\boxed{F_{\mu\nu} \overset{df}{=} c\left(\Phi_{\nu;\mu} - \Phi_{\mu;\nu}\right)}$$

Relatywistyczne czterowymiarowe równanie definicyjne tensora pola elektromagnetycznego w zakrzywionej czasoprzestrzeni Riemanna lub płaskiej czasoprzestrzeni Minkowskiego w układzie nieinercjalnym

$$\Phi_{\nu;\mu} = \frac{\partial\Phi_{\nu}}{\partial x^{\mu}} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}\Phi_{\alpha}$$

$$\Phi_{\mu;\nu} = \frac{\partial\Phi_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Phi_{\alpha}$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$$

$$\boxed{F_{\mu\nu} = c\left(\frac{\partial\Phi_{\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial\Phi_{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right) = c\left(\Phi_{\nu,\mu} - \Phi_{\mu,\nu}\right)}$$

Relatywistyczne czterowymiarowe równanie definicyjne tensora pola elektromagnetycznego w inercjalnym układzie ortonormalnym w płaskiej czasoprzestrzeni Minkowskiego

Ze składowych tensora $F_{\mu\nu}$ można skonstruować tensor $E_{\alpha\beta}$, wykorzystując odwzorowanie

$$\boxed{\begin{aligned}
F_{12} = -F_{21} &\longrightarrow E_{34} = -E_{43} \\
F_{13} = -F_{31} &\longrightarrow -E_{24} = E_{42} \\
F_{14} = -F_{41} &\longrightarrow E_{23} = -E_{32} \\
F_{23} = -F_{32} &\longrightarrow E_{14} = -E_{41} \\
F_{24} = -F_{42} &\longrightarrow -E_{13} = E_{31} \\
F_{34} = -F_{43} &\longrightarrow E_{12} = -E_{21}
\end{aligned}}$$

lub relację $\boxed{E_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}e^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\mu\nu}}$

- **Jednorodne równania Maxwella**

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\\ &\mathrm{div}\mathbf{B} = 0\end{aligned}}$$

Jednorodne równania Maxwella w postaci trójwymiarowej w inercjalnym układzie ortonormalnym

$$\mathbf{E} = \sum_{\alpha=1}^{3} E^{\alpha}\mathbf{e}_{\alpha}, \quad \mathbf{B} = \sum_{\alpha=1}^{3} B^{\alpha}\mathbf{e}_{\alpha}$$

$$\boxed{\sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial E^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = 0 \quad \text{lub} \quad E^{\mu\nu}_{,\nu} = 0}$$

Jednorodne równania Maxwella w postaci tensorowej w inercjalnym układzie ortonormalnym w płaskiej czasoprzestrzeni Minkowskiego

$$E^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & iE^3 & iE^2 & -cB^1 \\ -iE^3 & 0 & -iE^1 & -cB^2 \\ iE^2 & iE^1 & 0 & -cB^3 \\ cB^1 & cB^2 & cB^3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad E^{\mu\nu} = -E^{\nu\mu}$$

$$\boxed{E^{\mu\nu}_{;\nu} = 0}$$

Jednorodne równania Maxwella w zakrzywionej czasoprzestrzeni Riemanna lub płaskiej czasoprzestrzeni Minkowskiego w układzie nieinercjalnym

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial\left(\sqrt{g}E^{\mu\nu}\right)}{\partial x^{\nu}} = 0$$

$$\frac{\partial\left(\sqrt{g}E^{\mu\nu}\right)}{\partial x^{\nu}} = 0$$

$$\downarrow \quad \overline{E}^{\mu\nu} \overset{\mathrm{df}}{=} \sqrt{g}E^{\mu\nu}$$

$$\boxed{\frac{\partial \overline{E}^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = 0 \quad \text{lub} \quad \overline{E}^{\mu\nu}_{,\nu} = 0}$$

Ze składowych tensora $E^{\mu\nu}$ można skonstruować tensor $F^{\alpha\beta}$, wykorzystując odwzorowanie

$$\boxed{\begin{aligned} E^{12} = -E^{21} &\longrightarrow -F^{34} = F^{43} \\ E^{13} = -E^{31} &\longrightarrow -F^{24} = F^{42} \\ E^{14} = -E^{41} &\longrightarrow -F^{23} = F^{32} \end{aligned}} \quad \boxed{\begin{aligned} E^{23} = -E^{32} &\longrightarrow F^{14} = -F^{41} \\ E^{24} = -E^{42} &\longrightarrow F^{13} = -F^{31} \\ E^{34} = -E^{43} &\longrightarrow -F^{12} = F^{21} \end{aligned}}$$

lub relację

$$F^{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2} e_{\alpha\beta\mu\nu} E^{\mu\nu},$$

$$F^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & cB^3 & -cB^2 & -iE^1 \\ -cB^3 & 0 & cB^1 & -iE^2 \\ cB^2 & -cB^1 & 0 & -iE^3 \\ iE^1 & iE^2 & iE^3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F^{\alpha\beta} = -F^{\beta\alpha}.$$

- **Niejednorodne równania Maxwella**

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\\ &\mathrm{div}\mathbf{D} = \rho\end{aligned}}$$

Niejednorodne równania Maxwella w postaci trójwymiarowej w inercjalnym układzie ortonormalnym

$$\mathbf{H} = \sum_{\alpha=1}^{3} H^{\alpha}\mathbf{e}_{\alpha}, \quad \mathbf{D} = \sum_{\alpha=1}^{3} D^{\alpha}\mathbf{e}_{\alpha}, \quad \mathbf{j} = \sum_{\alpha=1}^{3} j^{\alpha}\mathbf{e}_{\alpha}$$

$$\boxed{\sum_{\nu=1}^{4}\frac{\partial H^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = J^{\mu} \quad \text{lub} \quad H^{\mu\nu}_{\ ,\nu} = J^{\mu}}$$

Niejednorodne równania Maxwella w postaci tensorowej w inercjalnym układzie ortonormalnym w płaskiej czasoprzestrzeni Minkowskiego

$$J^1 = j^1, \quad J^2 = j^2, \quad J^3 = j^3, \quad J^4 = ic\rho$$

$$H^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & H^3 & -H^2 & -icD^1 \\ -H^3 & 0 & H^1 & -icD^2 \\ H^2 & -H^1 & 0 & -icD^3 \\ icD^1 & icD^2 & icD^3 & 0 \end{bmatrix}, \quad H^{\mu\nu} = -H^{\nu\mu}$$

$$\boxed{H^{\mu\nu}_{\ ;\nu} = J^{\mu}}$$

Niejednorodne równania Maxwella w zakrzywionej czasoprzestrzeni Riemanna lub płaskiej czasoprzestrzeni Minkowskiego w układzie nieinercjalnym

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial\left(\sqrt{g}H^{\mu\nu}\right)}{\partial x^{\nu}} = J^{\mu}$$

$$\frac{\partial\left(\sqrt{g}H^{\mu\nu}\right)}{\partial x^{\nu}} = \sqrt{g}J^{\mu}$$

$$\Downarrow \quad \overline{H}^{\mu\nu} \overset{\mathrm{df}}{=} \sqrt{g}H^{\mu\nu}, \quad \overline{J}^{\mu} \overset{\mathrm{df}}{=} \sqrt{g}J^{\mu}$$

$$\boxed{\frac{\partial \overline{H}^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = \overline{J}^{\mu} \quad \text{lub} \quad \overline{H}^{\mu\nu}_{\ ,\nu} = \overline{J}^{\mu}}$$

Z tensora $H^{\mu\nu}$ można skonstruować tensor $D^{\alpha\beta}$, wykorzystując relację $D^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}e_{\alpha\beta\mu\nu}H^{\mu\nu}$.

$$\boxed{\begin{aligned}&H^{12} = -H^{21} \longrightarrow D^{34} = -D^{43},\ H^{13} = -H^{31} \longrightarrow -D^{24} = D^{42},\ H^{14} = -H^{41} \longrightarrow D^{23} = -D^{32}\\ &H^{23} = -H^{32} \longrightarrow D^{14} = -D^{41},\ H^{24} = -H^{42} \longrightarrow -D^{13} = D^{31},\ H^{34} = -H^{43} \longrightarrow D^{12} = -D^{21}\end{aligned}}$$

$$D^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & icD^3 & -icD^2 & -H^1 \\ -icD^3 & 0 & icD^1 & -H^2 \\ icD^2 & -icD^1 & 0 & -H^3 \\ H^1 & H^2 & H^3 & 0 \end{bmatrix}, \quad D^{\alpha\beta} = -D^{\beta\alpha}$$

- **Zmodyfikowane równania Maxwella w postaci trójwymiarowej**

Aby przyjrzeć się, jakie treści fizyczne zawierają zmodyfikowane równania Maxwella, zapiszemy je w postaci trójwymiarowej.

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathrm{rot}\left(\sqrt{g}\,\mathbf{E}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{g}\,\mathbf{B}\right)\\&\mathrm{div}\left(\sqrt{g}\,\mathbf{B}\right)=0\end{aligned}}\qquad\boxed{\begin{aligned}&\mathrm{rot}\left(\sqrt{g}\,\mathbf{H}\right)=\sqrt{g}\,\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{g}\,\mathbf{D}\right)\\&\mathrm{div}\left(\sqrt{g}\,\mathbf{D}\right)=\sqrt{g}\,\rho\end{aligned}}$$

$$\mathrm{rot}(\varphi\mathbf{a})=\varphi\,\mathrm{rot}\,\mathbf{a}+(\mathrm{grad}\,\varphi)\times\mathbf{a}$$

$$\mathrm{div}(\varphi\mathbf{a})=\varphi\,\mathrm{div}\,\mathbf{a}+\mathbf{a}\cdot\mathrm{grad}\,\varphi$$

$$\mathrm{grad}\sqrt{g}=\frac{1}{2\sqrt{g}}\,\mathrm{grad}\,g$$

$$\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial t}=\frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial g}{\partial t}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathrm{rot}\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}-\frac{\mathbf{B}}{2g}\frac{\partial g}{\partial t}-\frac{1}{2g}(\mathrm{grad}\,g)\times\mathbf{E}\\&\mathrm{div}\mathbf{B}=-\frac{1}{2g}\mathbf{B}\cdot(\mathrm{grad}\,g)\end{aligned}}\qquad\boxed{\begin{aligned}&\mathrm{rot}\mathbf{H}=\mathbf{j}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\frac{\mathbf{D}}{2g}\frac{\partial g}{\partial t}-\frac{1}{2g}(\mathrm{grad}\,g)\times\mathbf{H}\\&\mathrm{div}\mathbf{D}=\rho-\frac{1}{2g}\mathbf{D}\cdot\mathrm{grad}\,g\end{aligned}}$$

Przypominamy: g jest wyznacznikiem tensora metrycznego.

Ze zmodyfikowanych równań Maxwella wynika, że możliwa jest bardzo prosta metoda detekcji pól grawitacyjnych o zmieniającej się wartości wyznacznika tensora metrycznego [1)].

[1)] Zbigniew Osiak: *Teoria Względności – Fale Grawitacyjne*. Self Publishig (2014), ISBN: 978-83-272-4269-3

9 TENSOR PĘDU-ENERGII POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO W PRÓŻNI

- **Tensor pędu-energii pola elektromagnetycznego w próżni w inercjalnym układzie ortonormalnym w płaskiej czasoprzestrzeni Minkowskiego**

W próżni w inercjalnym układzie ortonormalnym w płaskiej czasoprzestrzeni Minkowskiego czterowektor gęstości siły $\tilde{\mathbf{f}}$ jest czterowymiarową dywergencją tensora pędu-energii $\mathrm{T}_{\bullet\bullet}$:

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathrm{div}\mathrm{T}_{\bullet\bullet} \quad \text{lub} \quad \tilde{\mathrm{f}}_{\mu} = \frac{\partial \mathrm{T}_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}}, \quad (\mu = 1,2,3,4),$$

$$\mathrm{T}_{\mu\nu} = \varepsilon_o \mathrm{F}_{\mu\gamma}\mathrm{F}_{\gamma\nu} + \tfrac{1}{4}\varepsilon_o g_{\mu\nu}\mathrm{F}_{\kappa\lambda}\mathrm{F}_{\kappa\lambda}, \quad \mathrm{T}_{\mu\nu} = \mathrm{T}_{\nu\mu}, \quad \sum_{\alpha=1}^{4}\mathrm{T}_{\alpha\alpha} = 0,$$

$$\tilde{\mathbf{f}} = \left(\tilde{\mathrm{f}}_1, \tilde{\mathrm{f}}_2, \tilde{\mathrm{f}}_3, \tilde{\mathrm{f}}_4\right) = \left(\mathbf{f}, \tilde{\mathrm{f}}_4\right), \quad \mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{j}\times\mathbf{B}, \quad \tilde{\mathrm{f}}_4 = ic^{-1}\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}.$$

W przypadku pola elektromagnetycznego w próżni bez ładunków i prądów

$$\tilde{\mathrm{f}}_{\mu} = 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial \mathrm{T}_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} = 0, \quad (\mu = 1,2,3,4).$$

- **Tensor pędu-energii pola elektromagnetycznego w próżni w dowolnym układzie współrzędnych**

$$\boxed{\mathrm{T}_{\mu\nu} = \varepsilon_o \mathrm{F}_{\mu\gamma}\mathrm{F}^{\gamma}_{\nu} + \tfrac{1}{4}\varepsilon_o g_{\mu\nu}\mathrm{F}_{\kappa\lambda}\mathrm{F}^{\kappa\lambda}}$$

Kowariantna postać tensora pędu-energii pola elektromagnetycznego w próżni

$$g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\mathrm{T}_{\mu\nu} = \mathrm{T}^{\alpha\beta}$$
$$g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\mathrm{F}_{\mu\gamma}\mathrm{F}^{\gamma}_{\nu} = \mathrm{F}^{\alpha}_{\gamma}\mathrm{F}^{\gamma\beta}$$
$$g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta}$$

$$\boxed{\mathrm{T}^{\alpha\beta} = \varepsilon_o \mathrm{F}^{\alpha}_{\gamma}\mathrm{F}^{\gamma\beta} + \tfrac{1}{4}\varepsilon_o g^{\alpha\beta}\mathrm{F}_{\kappa\lambda}\mathrm{F}^{\kappa\lambda}}$$

Kontrawariantna postać tensora pędu-energii pola elektromagnetycznego w próżni

$$g_{\nu\alpha}\mathrm{T}^{\alpha\beta} = \mathrm{T}^{\beta}_{\nu}$$
$$g_{\nu\alpha}\mathrm{F}^{\alpha}_{\gamma}\mathrm{F}^{\gamma\beta} = \mathrm{F}_{\nu\gamma}\mathrm{F}^{\gamma\beta}$$
$$g_{\nu\alpha}g^{\alpha\beta} = g^{\beta}_{\nu} = \delta^{\beta}_{\nu}$$

$$\boxed{\mathrm{T}^{\beta}_{\nu} = \varepsilon_o \mathrm{F}_{\nu\gamma}\mathrm{F}^{\gamma\beta} + \tfrac{1}{4}\varepsilon_o \delta^{\beta}_{\nu}\mathrm{F}_{\kappa\lambda}\mathrm{F}^{\kappa\lambda}}$$

Mieszana postać tensora pędu-energii pola elektromagnetycznego w próżni

Wykorzystanie czterowymiarowego tensora pędu-energii w czterowymiarowej teorii grawitacji jest możliwe tylko w przypadku pola elektromagnetycznego w próżni bez ładunków i prądów, gdyż tylko wtedy

$$\sum_{\nu=1}^{4}\mathrm{T}_{\mu\nu;\nu} = 0, \quad \sum_{\beta=1}^{4}\mathrm{T}^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0, \quad \sum_{\beta=1}^{4}\mathrm{T}^{\beta}_{\nu;\beta} = 0 \quad \mu = 1,2,3,4.$$

- **Ślad tensora pędu-energii pola elektromagnetycznego w próżni**

$$\sum_{\beta=1}^{4}\mathrm{T}^{\beta}_{\beta} = -\varepsilon_o \sum_{\beta=1}^{4}\sum_{\gamma=1}^{4}\mathrm{F}_{\gamma\beta}\mathrm{F}^{\gamma\beta} + \varepsilon_o \sum_{\kappa=1}^{4}\sum_{\lambda=1}^{4}\mathrm{F}_{\kappa\lambda}\mathrm{F}^{\kappa\lambda} = 0$$

POLE GRAWITACYJNE TEORIA EINSTEINA

1 RÓWNANIA OGÓLNEJ TEORII WZGLĘDNOŚCI

- **Podstawowe (główne) idee i postulaty**

OTW w sformułowaniu jakościowym bywa wywodzona z czterech zasad. Postuluje się, by każde prawo fizyki miało jednakową postać we wszystkich układach odniesienia. Postulat ten nazywany jest ogólną zasadą względności. W oparciu o równość masy bezwładnej i grawitacyjnej formułuje się zasadę równoważności, stwierdzającą, że natężenie jednorodnego pola grawitacyjnego jest równoważne stałemu przyspieszeniu (ze znakiem minus) odpowiedniego układu odniesienia. Zakłada się stałość maksymalnej wartości prędkości rozchodzenia się sygnałów względem dowolnego układu odniesienia. Przyjmuje się, że masa i energia powodują deformacje czasoprzestrzeni.

Prezentowane dalej sformułowanie OTW oprzemy o dwa następujące postulaty.

POSTULAT I (Równania pola, równania metryki)
Czasoprzestrzeń jest czterowymiarową przestrzenią zdarzeń z metryką

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

zależną od rozkładu gęstości energii. Składowe tensora metrycznego czasoprzestrzeni są rozwiązaniami równań pola Einsteina

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} .$$

POSTULAT II (Równania ruchu)
Równania ruchu cząstki próbnej o masie m mają postać

$$\frac{\tilde{F}^\alpha}{m} = \left(\operatorname{sgn} ds^2\right) c^2 \left(\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right),$$

gdzie $\tilde{F}^\alpha$ oznacza składowe siły wypadkowej z pominięciem sił „grawitacyjnych" i „bezwładnościowych".

OTW zajmuje się badaniem zjawisk przebiegających w czterowymiarowej czasoprzestrzeni z tensorem metrycznym zależnym od rozkładu gęstości energii. OTW jest więc przede wszystkim teorią tłumaczącą grawitację jako wynik zakrzywienia czasoprzestrzeni. Swobodne cząstki próbne poruszają się po torach, którym odpowiadają w czasoprzestrzeni linie geodezyjne. OTW zmusza do rewizji między innymi takich pojęć jak siły grawitacyjne i układy inercjalne.

UWAGA
Płaska czasoprzestrzeń w wyniku ruchu układu odniesienia nie stanie się zakrzywiona. Dowolnie skomplikowanej metryce wskutek ruchu układu w czasoprzestrzeni bez pola grawitacyjnego zawsze odpowiada tensor krzywizny $R^{\bullet}_{\bullet\bullet\bullet}$ ze wszystkimi składowymi równymi zeru.

- **Tensor pędu-energii**

Tensor pędu-energii zawiera informacje o źródłach pola grawitacyjnego, opisuje rozkład gęstości energii wszelakiej postaci (w tym ciśnienia).

- **Tensor pędu-energii cieczy nielepkiej**

$$T^{\mu\nu} = \left(pc^{-2} + \rho\right)\tilde{v}^{\mu}\tilde{v}^{\nu} + g^{\mu\nu}p$$
$$T_{\alpha\beta} = \left(pc^{-2} + \rho\right)\tilde{v}_{\alpha}\tilde{v}_{\beta} + g_{\alpha\beta}p$$
$$T^{\mu}_{\sigma} = \left(pc^{-2} + \rho\right)\tilde{v}^{\mu}\tilde{v}_{\sigma} + g^{\mu}_{\sigma}p$$

- **Tensor pędu-energii pyłu bezciśnieniowego**

$$T^{\mu\nu} = \rho\,\tilde{v}^{\mu}\tilde{v}^{\nu}$$
$$T_{\alpha\beta} = \rho\,\tilde{v}_{\alpha}\tilde{v}_{\beta}$$
$$T^{\mu}_{\sigma} = \rho\,\tilde{v}^{\mu}\tilde{v}_{\sigma}$$

- **Tensor pędu-energii pola elektromagnetycznego w próżni**

$$T_{\mu\nu} = \varepsilon_o F_{\mu\gamma}F^{\gamma}_{\nu} + \tfrac{1}{4}\varepsilon_o g_{\mu\nu}F_{\kappa\lambda}F^{\kappa\lambda}$$
$$T^{\alpha\beta} = \varepsilon_o F^{\alpha}_{\gamma}F^{\gamma\beta} + \tfrac{1}{4}\varepsilon_o g^{\alpha\beta}F_{\kappa\lambda}F^{\kappa\lambda}$$
$$T^{\beta}_{\nu} = \varepsilon_o F_{\nu\gamma}F^{\gamma\beta} + \tfrac{1}{4}\varepsilon_o \delta^{\beta}_{\nu}F_{\kappa\lambda}F^{\kappa\lambda}$$

- **Tensor krzywizny Einsteina**

Tensor krzywizny Einsteina zdefiniowany jako

$$G^{\mu}_{\omega} \overset{df}{=} R^{\mu}_{\omega} - \tfrac{1}{2}\delta^{\mu}_{\omega}R\,, \quad G^{\lambda\mu} \overset{df}{=} R^{\lambda\mu} - \tfrac{1}{2}g^{\lambda\mu}R\,, \quad G_{\lambda\omega} \overset{df}{=} R_{\lambda\omega} - \tfrac{1}{2}g_{\lambda\omega}R\,,$$

został skonstruowany z tensora krzywizny Ricciego

$$R_{\beta\mu} \overset{df}{=} R^{\nu}_{\beta\mu\nu} \quad \text{lub} \quad R_{\beta\mu} = g^{\alpha\nu}R_{\alpha\beta\mu\nu},$$

który powstał przez kontrakcję tensora Grossmanna

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} \overset{df}{=} \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\nu}\,.$$

Drugim składnikiem tensora Einsteina jest skalar krzywizny

$$R \overset{df}{=} g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}\,.$$

Tensor Einsteina został tak zbudowany, by znikała jego dywergencja

$$G^{\mu}_{\omega;\mu} = 0\,, \quad G^{\lambda\mu}_{;\mu} = 0\,, \quad G_{\lambda\omega;\omega} = 0\,.$$

Tensor Einsteina jest tensorem symetrycznym.

$$G^{\mu}_{\omega} = G^{\omega}_{\mu}\,, \quad G^{\lambda\mu} = G^{\mu\lambda}, \quad G_{\lambda\omega} = G_{\omega\lambda}.$$

Posiada w przestrzeni czterowymiarowej dziesięć niezależnych składowych.

KOMENTARZ

Ze względu na wymiar składowych tensora pędu-energi, powinien nazywać się on tensorem gęstości energii.

- **Równania pola grawitacyjnego (Równania metryki czasoprzestrzeni)**

Równania pola grawitacyjnego, postulowane przez Einsteina, przedstawimy w trzech postaciach: kowariantnej, kontrawariantnej i mieszanej.

Równania pola w postaci kowariantnej

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\kappa T_{\mu\nu}} \qquad \kappa = \frac{8\pi G}{c^4} = 2{,}073 \cdot 10^{-43} \frac{s^2}{kg \cdot m}$$

Równania pola w postaci kontrawariantnej

$$g^{\mu\alpha} g^{\beta\nu} \left(R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = -\kappa g^{\mu\alpha} g^{\beta\nu} T_{\mu\nu}$$

$$g^{\mu\alpha} g^{\beta\nu} R_{\mu\nu} = R^{\alpha\beta}$$

$$g^{\mu\alpha} g^{\beta\nu} g_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta}$$

$$g^{\mu\alpha} g^{\beta\nu} T_{\mu\nu} = T^{\alpha\beta}$$

$$\boxed{R^{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2} g^{\alpha\beta} R = -\kappa T^{\alpha\beta}}$$

Równania pola w postaci mieszanej

$$g^{\sigma\nu} \left(R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = -\kappa g^{\sigma\nu} T_{\mu\nu}$$

$$g^{\sigma\nu} R_{\mu\nu} = R^{\sigma}_{\mu}$$

$$g^{\sigma\nu} g_{\mu\nu} = \delta^{\sigma}_{\mu}$$

$$g^{\sigma\nu} T_{\mu\nu} = T^{\sigma}_{\mu}$$

$$\boxed{R^{\sigma}_{\mu} - \tfrac{1}{2} \delta^{\sigma}_{\mu} R = -\kappa T^{\sigma}_{\mu}}$$

W dalszym ciągu podamy inną postać równań pola grawitacyjnego bez skalara krzywizny w jawnej postaci.

$$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\kappa T_{\mu\nu}$$

$$R \overset{df}{=} \sum_{\alpha=1}^{4} \sum_{\beta=1}^{4} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{4} \sum_{\beta=1}^{4} g_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} = 4$$

$$R - \tfrac{1}{2} 4R = -R$$

$$T \overset{df}{=} \sum_{\alpha=1}^{4} \sum_{\beta=1}^{4} g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}$$

$$T^{*}_{\mu\nu} \overset{df}{=} T_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} T$$

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{4} \sum_{\beta=1}^{4} g^{\alpha\beta} \left(R_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2} g_{\alpha\beta} R \right) = -\kappa \sum_{\alpha=1}^{4} \sum_{\beta=1}^{4} g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{4} \sum_{\beta=1}^{4} \left(g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2} g_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} R \right) = -\kappa \sum_{\alpha=1}^{4} \sum_{\beta=1}^{4} g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{4} \sum_{\beta=1}^{4} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2} R \sum_{\alpha=1}^{4} \sum_{\beta=1}^{4} g_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} = -\kappa \sum_{\alpha=1}^{4} \sum_{\beta=1}^{4} g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}$$

$$\boxed{R = \kappa \sum_{\alpha=1}^{4} \sum_{\beta=1}^{4} g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}, \qquad R = \kappa T}$$

$$R_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\kappa T_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} \kappa T = -\kappa \left(T_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right)$$

$$\boxed{R_{\mu\nu} = -\kappa \left(T_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right)} \quad \text{lub} \quad \boxed{R_{\mu\nu} = -\kappa T^{*}_{\mu\nu}}$$

Składowe tensora $T^{*}_{\mu\nu}$ mają wymiar gęstości objętościowej energii Jm^{-3} (wymiar ciśnienia).

- **Skalar krzywizny**

$$R \overset{df}{=} \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4} g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} =$$
$$= g^{11}R_{11} + g^{12}R_{12} + g^{13}R_{13} + g^{14}R_{14} +$$
$$+ g^{21}R_{21} + g^{22}R_{22} + g^{23}R_{23} + g^{24}R_{24} +$$
$$+ g^{31}R_{31} + g^{32}R_{32} + g^{33}R_{33} + g^{34}R_{34} +$$
$$+ g^{41}R_{41} + g^{42}R_{42} + g^{43}R_{43} + g^{44}R_{44} =$$
$$g^{\alpha\beta} = g^{\beta\alpha}$$
$$R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}$$

$$R = g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33} + g^{44}R_{44} +$$
$$+ 2g^{12}R_{12} + 2g^{13}R_{13} + 2g^{14}R_{14} +$$
$$+ 2g^{23}R_{23} + 2g^{24}R_{24} + 2g^{34}R_{34}$$

$$R \overset{df}{=} g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$$
$$R_{\alpha\beta} = g_{\alpha\sigma}R^{\sigma}_{\beta}$$
$$g^{\alpha\beta}g_{\alpha\sigma} = \delta^{\beta}_{\sigma}$$

$$R \overset{df}{=} g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}g_{\alpha\sigma}R^{\sigma}_{\beta} = \delta^{\beta}_{\sigma}R^{\sigma}_{\beta} = R^{\beta}_{\beta}$$

$$\boxed{R = \sum_{\beta=1}^{4} R^{\beta}_{\beta}}$$

$$T \overset{df}{=} g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}$$
$$T_{\alpha\beta} = g_{\alpha\sigma}T^{\sigma}_{\beta}$$
$$g^{\alpha\beta}g_{\alpha\sigma} = \delta^{\beta}_{\sigma}$$

$$T \overset{df}{=} g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}g_{\alpha\sigma}T^{\sigma}_{\beta} = \delta^{\beta}_{\sigma}T^{\sigma}_{\beta} = T^{\beta}_{\beta}$$

$$\boxed{T = \sum_{\beta=1}^{4} T^{\beta}_{\beta}}$$

W przypadku, gdy źródłem pola grawitacyjnego jest ciecz doskonała:

$$R = \kappa T$$
$$T = \sum_{\beta=1}^{4} T^{\beta}_{\beta}$$
$$\sum_{\beta=1}^{4} T^{\beta}_{\beta} = 3p - \rho c^2$$

$$\boxed{T = 3p - \rho c^2}$$

$$\boxed{R = \kappa\left(3p - \rho c^2\right)}$$

$$\boxed{R = \kappa\sum_{\beta=1}^{4} T^{\beta}_{\beta}}$$

W przypadku, gdy źródłem pola grawitacyjnego jest pył bezciśnieniowy:

$$\boxed{T = -\rho c^2, \quad R = -\kappa\rho c^2}$$

W przypadku, gdy źródłem pola grawitacyjnego jest pole elektromagnetyczne w próżni bez ładunków i prądów:

$$R = \kappa T$$
$$T = \sum_{\beta=1}^{4} T^{\beta}_{\beta}$$
$$\sum_{\beta=1}^{4} T^{\beta}_{\beta} = 0$$

$$\boxed{T = 0}$$

$$\boxed{R = 0}$$

- **Zasada zachowania pędu i energii w postaci mieszanej**

Tensor T^{μ}_{ω} nie uwzględnia pędu i energii pola grawitacyjnego, i dlatego lokalne prawo zachowania tych wielkości przyjmuje postać

$$\boxed{T^{\mu}_{\omega;\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\left(\sqrt{g}T^{\mu}_{\omega}\right)}{\partial x^{\mu}} - \Gamma^{\lambda}_{\omega\mu}T^{\mu}_{\lambda} = 0} \qquad g = \det g_{\bullet\bullet} \neq 0$$

$$\sqrt{g}T^{\mu}_{\omega;\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\left(\sqrt{g}T^{\mu}_{\omega}\right)}{\partial x^{\mu}} - \Gamma^{\lambda}_{\omega\mu}\sqrt{g}T^{\mu}_{\lambda} = 0$$

$$\left(\sqrt{g}T^{\mu}_{\omega}\right)_{;\mu} = T^{\mu}_{\omega}\left(\sqrt{g}\right)_{;\mu} + \sqrt{g}T^{\mu}_{\omega;\mu} = \sqrt{g}T^{\mu}_{\omega;\mu}$$

$$\left(\sqrt{g}T^{\mu}_{\omega}\right)_{;\mu} = \frac{\partial\left(\sqrt{g}T^{\mu}_{\omega}\right)}{\partial x^{\mu}} - \Gamma^{\lambda}_{\omega\mu}\left(\sqrt{g}T^{\mu}_{\lambda}\right) = 0$$

$\sqrt{g}T^{\mu}_{\omega} \overset{df}{=} \tilde{T}^{\mu}_{\omega}$ = gęstość mieszanego tensora pędu energii

$$\boxed{\tilde{T}^{\mu}_{\omega;\mu} = \frac{\partial\tilde{T}^{\mu}_{\omega}}{\partial x^{\mu}} - \Gamma^{\lambda}_{\omega\mu}\tilde{T}^{\mu}_{\lambda} = 0}$$

Ostatnie równanie można przedstawić w innej formie.

$$\boxed{\left(\tilde{T}^{\mu}_{\omega} + \tilde{t}^{\mu}_{\omega}\right)_{,\mu} = 0}$$

$\tilde{t}^{\mu}_{\omega} = \sqrt{g}\, t^{\mu}_{\omega}$ = gęstość pseudotensora pędu energii pola grawitacyjnego, opisującego rozkład pędu i energii pola grawitacyjnego

$\tilde{T}^{\mu}_{\omega} = \sqrt{g}\, T^{\mu}_{\omega}$ = gęstość tensora pędu energii źródeł pola grawitacyjnego

- **Zasada zachowania pędu i energii w postaci kontrawariantnej**

Zasadę zachowania pędu i energii przedstawimy teraz w postaci kontrawariantnej.

$$T^{\mu}_{\omega;\mu} = 0$$

$$T^{\mu}_{\omega} = g_{\omega\lambda}T^{\lambda\mu}$$

$$\left(g_{\omega\lambda}T^{\lambda\mu}\right)_{;\mu} = 0$$

$$T^{\lambda\mu}g_{\omega\lambda;\mu} + g_{\omega\lambda}T^{\lambda\mu}_{;\mu} = 0$$

$$g_{\omega\lambda;\mu} = 0$$

$$g_{\omega\lambda}T^{\lambda\mu}_{;\mu} = 0$$

$$g = \det g_{\bullet\bullet} \neq 0$$

$T^{\lambda\mu}_{;\mu} = 0$ Dywergencja kontrawariantnego tensora pędu energii jest równa zeru.

$$\boxed{T^{\lambda\mu}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\left(\sqrt{g}T^{\lambda\mu}\right)}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\lambda}_{\kappa\mu}T^{\kappa\mu} = 0}$$

$$T^{\lambda\mu}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\left(\sqrt{g}T^{\lambda\mu}\right)}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\lambda}_{\kappa\mu}T^{\kappa\mu} = 0\,, \qquad g = \det g_{\bullet\bullet}$$

$$\sqrt{g}T^{\lambda\mu}_{;\mu} = \frac{\partial\left(\sqrt{g}T^{\lambda\mu}\right)}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\lambda}_{\kappa\mu}\sqrt{g}T^{\kappa\mu} = 0$$

$$\left(\sqrt{g}T^{\lambda\mu}\right)_{;\mu} = T^{\lambda\mu}\left(\sqrt{g}\right)_{;\mu} + \sqrt{g}T^{\lambda\mu}_{;\mu} = \sqrt{g}T^{\lambda\mu}_{;\mu}$$

$$\left(\sqrt{g}T^{\lambda\mu}\right)_{;\mu} = \frac{\partial\left(\sqrt{g}T^{\lambda\mu}\right)}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\lambda}_{\kappa\mu}\left(\sqrt{g}T^{\kappa\mu}\right) = 0$$

$\sqrt{g}T^{\lambda\mu} \overset{\mathrm{df}}{=} \tilde{T}^{\lambda\mu}$ = gęstość kontrawariantnego tensora pędu energii

$$\boxed{\tilde{T}^{\lambda\mu}_{;\mu} = \frac{\partial\tilde{T}^{\lambda\mu}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\lambda}_{\kappa\mu}\tilde{T}^{\kappa\mu} = 0}$$

Powyższe równania też są zapisywane inaczej.

$$\boxed{\left(\tilde{T}^{\lambda\mu} + \tilde{t}^{\lambda\mu}\right)_{,\mu} = 0}$$

$\tilde{t}^{\lambda\mu} \overset{\mathrm{df}}{=} \sqrt{g}t^{\lambda\mu}$ = gęstość pseudotensora pędu energii pola grawitacyjnego

$\tilde{T}^{\lambda\mu} \overset{\mathrm{df}}{=} \sqrt{g}T^{\lambda\mu}$ = gęstość tensora pędu energii źródeł pola grawitacyjnego

- **Zasada zachowania pędu i energii w postaci kowariantnej**
  Prawa zachowania pędu i energii wyrazimy również w postaci kowariantnej.

$$T^{\mu}_{\omega;\mu} = T^{\omega}_{\mu;\mu} = 0$$

$$T^{\omega}_{\mu} = g^{\omega\lambda}T_{\lambda\mu}$$

$$\left(g^{\omega\lambda}T_{\lambda\mu}\right)_{;\mu} = 0$$

$$T_{\lambda\mu}g^{\omega\lambda}_{;\mu} + g^{\omega\lambda}T_{\lambda\mu;\mu} = 0$$

$$g^{\omega\lambda}_{;\mu} = 0$$

$$g^{\omega\lambda}T_{\lambda\mu;\mu} = 0$$

$$\det g^{\bullet\bullet} \neq 0$$

$$\boxed{T_{\lambda\mu;\mu} = 0}$$ Dywergencja kowariantnego tensora pędu energii jest równa zeru.

Uwzględniając definicję dywergencji kowariantnego tensora, mamy też

$$\boxed{T_{\lambda\mu;\mu} \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial T_{\lambda\mu}}{\partial x^{\mu}} - \Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}T_{\alpha\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\mu}T_{\lambda\alpha} = 0}$$

- **Równania pola grawitacyjnego a zasady zachowania pędu i energii**

Rozpatrzmy kontrawariantny tensor pędu-energii materii w postaci stosowanej w hydrodynamice relatywistycznej dla cieczy nielepkiej

$$T^{\mu\nu} = \left(pc^{-2} + \rho\right)\tilde{v}^{\mu}\tilde{v}^{\nu} + pg^{\mu\nu}.$$

Z równań pola grawitacyjnego

$$G^{\mu\nu} = -\kappa T^{\mu\nu}$$

wynika, że znikanie dywergencji tensora krzywizny Einsteina

$$\sum_{\nu=1}^{4} G^{\mu\nu}_{;\nu} = 0, \quad (\mu = 1,2,3,4)$$

implikuje znikanie dywergencji tensora pędu-energii materii

$$\sum_{\nu=1}^{4} T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0, \quad (\mu = 1,2,3,4).$$

Jest to, jak pokażemy, równoważne ze spełnieniem zasad zachowania pędu i energii materii.

Zasada zachowania pędu reprezentowana jest przez trzy pierwsze równania

$$\sum_{\beta=1}^{4} T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0, \quad (\alpha = 1,2,3),$$

a zasada zachowania energii przez jedno równanie

$$\sum_{\sigma=1}^{4} T^{4\sigma}_{;\sigma} = 0.$$

Poniżej zajmiemy się równaniem bilansu gęstości objętościowej pędu.

$$T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0, \quad (\alpha = 1, 2, 3), \quad (\beta = 1, 2, 3, 4)$$

$$T^{\alpha\beta} = \left(pc^{-2} + \rho\right)\tilde{v}^{\alpha}\tilde{v}^{\beta} + pg^{\alpha\beta}$$

$$\left[\left(pc^{-2} + \rho\right)\tilde{v}^{\alpha}\tilde{v}^{\beta} + pg^{\alpha\beta}\right]_{;\beta} = 0$$

$$g^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta}$$

$$[\ ]_{;\beta} \to [\ ]_{,\beta} = \frac{\partial}{\partial x^{\beta}}[\ ]$$

$$\sum_{\beta=1}^{4} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left[\left(pc^{-2} + \rho\right)\tilde{v}^{\alpha}\tilde{v}^{\beta} + p\delta^{\alpha\beta}\right] = 0$$

$$x^4 = ict$$

$$\tilde{v}^{\mu} = \gamma\frac{dx^{\mu}}{dt} = \gamma v^{\mu}, \quad (\mu = 1, 2, 3, 4)$$

$\left(pc^{-2} + \rho\right)\tilde{v}^{\alpha}$ = przestrzenne składowe gęstości objętościowej pędu

$$\rho^{*} = pc^{-2} + \rho$$

$$\boxed{\sum_{\kappa=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}}\left(\rho^{*}\gamma^{2}v^{\alpha}v^{\kappa}\right) + \frac{\partial p}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho^{*}\gamma^{2}v^{\alpha}\right) = 0}$$

Równania bilansu gęstości objętościowej pędu cieczy nielepkiej
$(\alpha = 1, 2, 3)$

$$\boxed{\sum_{\kappa=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^\kappa}\left(\rho^*\gamma^2 v^\alpha v^\kappa\right)+\frac{\partial p}{\partial x^\alpha}+\gamma\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho^*\gamma v^\alpha\right)+\rho^*\gamma v^\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial t}=0}$$

Równania bilansu składowych przestrzennych czterowektora gęstości objętościowej pędu $(\alpha=1,2,3)$

$$\gamma\to 1$$
$$\rho^*=\left(pc^{-2}+\rho\right)\to\rho$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho v^\alpha\right)=-\sum_{\kappa=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^\kappa}\left(\rho v^\alpha v^\kappa\right)-\frac{\partial p}{\partial x^\alpha}$$

$\Pi^{\alpha\kappa}\overset{\mathrm{df}}{=}\rho v^\alpha v^\kappa+\delta^{\alpha\kappa}p$ = nierelatywistyczny tensor pędu

ρv^α = składowe wektora gęstości objętościowej pędu nierelatywistycznego

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho v^\alpha\right)=-\sum_{\kappa=1}^{3}\frac{\partial\Pi^{\alpha\kappa}}{\partial x^\kappa}}$$

Nierelatywistyczne równanie bilansu gęstości objętościowej pędu

Zajmiemy się teraz równaniem bilansu gęstości objętościowej energii.

$$T^{4\sigma}_{;\sigma}=0,\quad(\sigma=1,2,3,4)$$

$$T^{4\sigma}=\rho^*\tilde{v}^4\tilde{v}^\sigma+g^{4\sigma}p$$

$$\left[\rho^*\tilde{v}^4\tilde{v}^\sigma+g^{4\sigma}p\right]_{;\sigma}=0$$

$$g^{4\sigma}\to\delta^{4\sigma}$$
$$[\ ]_{;\sigma}\to[\ ]_{,\sigma}=\frac{\partial}{\partial x^\sigma}[\ ],\quad\frac{\partial p}{\partial t}=0$$
$$\tilde{v}^\mu=\gamma\frac{dx^\mu}{dt}=\gamma v^\mu,\quad(\mu=1,2,3,4),\quad x^4=ict,\quad v^4=ic$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho^*\gamma^2 ic\right)=-\sum_{\lambda=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\rho^*\gamma^2 icv^\lambda\right)$$

$$\boxed{\gamma\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho^*\gamma ic\right)=-\rho^*\gamma ic\frac{\partial\gamma}{\partial t}-\sum_{\lambda=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\rho^*\gamma^2 icv^\lambda\right)}$$

Równanie bilansu składowej czasowej czterowektora gęstości pędu jest utożsamiane z równaniem bilansu gęstości objętościowej energii całkowitej [zobacz uwagi na stronie 59].

$$\gamma\to 1$$
$$\rho^*=\left(pc^{-2}+\rho\right)\to\rho$$

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\rho v^\beta\right)}$$

Nierelatywistyczne równanie bilansu masy (gęstości)

- **Równania ruchu w płaskiej czasoprzestrzeni**

Wskutek przyspieszonego ruchu badanego układu względem inercjalnego układu odniesienia w płaskiej czasoprzestrzeni Minkowskiego bez pola grawitacyjnego zmienia się jej metryka. Po wyznaczeniu tensora metrycznego w układzie nieinercjalnym możemy zapisać równania ruchu

$$\frac{\tilde{F}^{\alpha}}{m} = \tilde{a}^{\alpha} \stackrel{df}{=} \left(\operatorname{sgn} ds^2\right)c^2\left(\frac{d^2x^{\alpha}}{ds^2} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{ds}\frac{dx^{\nu}}{ds}\right), \quad ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}.$$

$\tilde{F}^{\alpha}$ = składowe siły wypadkowej, z pominięciem sił bezwładnościowych

$g_{\mu\nu} = g^{iner}_{\alpha\beta}\dfrac{\partial x^{\alpha}_{iner}}{\partial x^{\mu}}\dfrac{\partial x^{\beta}_{iner}}{\partial x^{\nu}}$ = tensor metryczny w nieinercjalnym układzie odniesienia

x^{α}_{iner} = współrzędne cząstki względem inercjalnego układu odniesienia

$g^{iner}_{\alpha\beta}$ = tensor metryczny w inercjalnym układzie odniesienia

Oznacza to, że swobodny ruch punktu materialnego w układzie nieinercjalnym w płaskiej czasoprzestrzeni Minkowskiego bez pola grawitacyjnego, na który działają tylko siły bezwładności, jest opisywany równaniami

$$\frac{d^2x^{\alpha}}{ds^2} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{ds}\frac{dx^{\nu}}{ds} = 0, \quad ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}.$$

UWAGA

Płaska czasoprzestrzeń w wyniku ruchu układu odniesienia nie stanie się zakrzywiona. Dowolnie skomplikowanej metryce wskutek ruchu układu w czasoprzestrzeni bez pola grawitacyjnego zawsze odpowiada tensor krzywizny $R^{\bullet}_{\bullet\bullet}$ ze wszystkimi składowymi równymi zeru.

- **Równania ruchu w zakrzywionej czasoprzestrzeni**

Przyspieszenie relatywistyczne cząstki w danym punkcie zakrzywionej czasoprzestrzeni również opisywane jest równaniami

$$\frac{\tilde{F}^{\alpha}}{m} = \tilde{a}^{\alpha} \stackrel{df}{=} \left(\operatorname{sgn} ds^2\right)c^2\left(\frac{d^2x^{\alpha}}{ds^2} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{ds}\frac{dx^{\nu}}{ds}\right), \quad ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}.$$

$\tilde{F}^{\alpha}$ = składowe siły wypadkowej, z pominięciem sił „grawitacyjnych” i „bezwładnościowych”

$g_{\mu\nu}$ = tensor metryczny zakrzywionej czasoprzestrzeni, składowe tego tensora są rozwiązaniami równań pola

Oznacza to, że swobodny ruch cząstki w zakrzywionej czasoprzestrzeni, na którą działają tylko siły „bezwładności” i „grawitacyjne”, jest opisywany równaniami

$$\frac{d^2x^{\alpha}}{ds^2} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{ds}\frac{dx^{\nu}}{ds} = 0, \quad ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}.$$

Są to równania różniczkowe linii geodezyjnej (geodetyki). Swobodne cząstki poruszają się po torach, którym w zakrzywionej czasoprzestrzeni odpowiadają linie geodezyjne.

UWAGA

Co najmniej jedna składowa tensora krzywizny $R^{\bullet}_{\bullet\bullet}$, odpowiadającego tensorowi metrycznemu $g_{\mu\nu}$ zakrzywionej czasoprzestrzeni, jest różna od zera.

2 PRZYBLIŻONE ROZWIĄZANIE DE SITTERA-EINSTEINA

- **Tensor krzywizny słabego pola grawitacyjnego**

$$(ds)^2 = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\sigma=1}^{4} g_{\alpha\sigma}dx^\alpha dx^\sigma$$

$$\left[{\mu\nu \atop \sigma}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\right)$$

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \sum_{\sigma=1}^{4} g^{\alpha\sigma}\left[{\mu\nu \atop \sigma}\right]$$

$$R_{\mu\nu} = \sum_{\alpha=1}^{4}\left(\frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right) + $$

$$+\sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}\left(\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\mu\beta}\right)$$

$$\Box = \sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\alpha}$$

$$\Delta = \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\alpha}$$

$$g_{\alpha\sigma} = \delta_{\alpha\sigma} + \gamma_{\alpha\sigma}, \qquad \gamma_{\alpha\sigma} = \gamma_{\alpha\sigma}(x^1, x^2, x^3, x^4)$$

$$g_{\alpha\sigma} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{14} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \gamma_{24} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & \gamma_{34} \\ \gamma_{41} & \gamma_{42} & \gamma_{43} & \gamma_{44} \end{bmatrix}$$

Założenia upraszczające:

$$|\gamma_{\alpha\sigma}| << 1, \qquad \left|\frac{\partial \gamma_{\alpha\sigma}}{\partial x^\nu}\right| << 1, \qquad \left|\frac{\partial^2 \gamma_{\alpha\sigma}}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\right| << 1$$

$$\left[{\mu\nu \atop \sigma}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \gamma_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \gamma_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\right)$$

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} \approx \sum_{\sigma=1}^{4}\delta_{\alpha\sigma}\left[{\mu\nu \atop \sigma}\right] = \left[{\mu\nu \atop \sigma}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \gamma_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \gamma_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\right)$$

$$R_{\mu\nu} = \sum_{\alpha=1}^{4}\left(\frac{\partial \left[{\mu\alpha \atop \alpha}\right]}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \left[{\mu\nu \atop \alpha}\right]}{\partial x^\alpha}\right)$$

$$\left[{\mu\alpha \atop \alpha}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \gamma_{\mu\alpha}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \gamma_{\alpha\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \gamma_{\mu\alpha}}{\partial x^\alpha}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{\alpha\alpha}}{\partial x^\mu}$$

$$\left[{\mu\nu \atop \alpha}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \gamma_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \gamma_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right)$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\alpha} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{4}\left(\frac{\partial^2 \gamma_{\alpha\alpha}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu \partial x^\alpha} - \frac{\partial^2 \gamma_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu \partial x^\alpha}\right)$$

$$\sum_{\nu=1}^{4}\frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0 \quad \text{i} \quad \sum_{\sigma=1}^{4}\gamma_{\sigma\sigma} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{\alpha=1}^{4}\left(\frac{\partial^2 \gamma_{\alpha\alpha}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu \partial x^\alpha} - \frac{\partial^2 \gamma_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu \partial x^\alpha}\right) = 0$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\alpha} = \tfrac{1}{2}\Box\gamma_{\mu\nu}$$

Stacjonarna metryka: $\gamma_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu}(x^1, x^2, x^3)$, $\dfrac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x^4} = 0$

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\alpha} = \tfrac{1}{2}\Delta\gamma_{\mu\nu}$$

- **Równania stacjonarnego słabego pola grawitacyjnego**

$$R_{\mu\nu} = -\kappa T^*_{\mu\nu}$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial^2\gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\alpha}$$

$$T^*_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} T$$

$$T_{\mu\nu} = \gamma^2 \rho v_\mu v_\nu$$

$$T = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4} g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}$$

$$v_4 = ic$$

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}$$

$$g^{44} = \delta^{44} + \gamma^{44}$$

$$g_{\mu\nu} g^{44} \approx \delta_{\mu\nu}\delta^{44} = \delta_{\mu\nu}$$

$$g_{44} g^{44} \approx \delta_{44}\delta^{44} = 1$$

$$\delta_{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu}$$

$$\Delta\gamma_{\mu\nu} = \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial^2\gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\alpha}$$

Składowe tensora $T^*_{\mu\nu}$ mają wymiar gęstości objętościowej energii Jm^{-3} (wymiar ciśnienia).

$g_{\mu\nu}, \gamma_{\mu\nu}, \delta_{\mu\nu}$ są liczbami bez miana.

Założenia upraszczające

Słabe pole:

$$|\gamma_{\alpha\sigma}| << 1, \quad \left|\frac{\partial\gamma_{\alpha\sigma}}{\partial x^\nu}\right| << 1, \quad \left|\frac{\partial^2\gamma_{\alpha\sigma}}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\right| << 1$$

Stacjonarna metryka:

$$\gamma_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu}\left(x^1, x^2, x^3\right), \quad \frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x^4} = 0$$

Stacjonarny rozkład masy (gęstości):

$$\rho = \rho\left(x^1, x^2, x^3\right), \quad \frac{\partial\rho}{\partial x^4} = 0$$

$$\gamma = \left(1 - v^2 c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1$$

$$v_1 = v_2 = v_3 = 0, \; v_4 = ic$$

$T_{44} = -c^2\rho$, pozostałe składowe są równe zeru

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial^2\gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\alpha} = \tfrac{1}{2}\Delta\gamma_{\mu\nu}$$

$$T = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4} g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} = g^{44} T_{44}$$

$$T^*_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} T =$$
$$= T_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{44} T_{44} \approx T_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\delta_{\mu\nu} T_{44} = T_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2} c^2 \rho \delta_{\mu\nu}$$

$$T^*_{44} = T_{44} - \tfrac{1}{2} g_{44} T = T_{44} - \tfrac{1}{2} g_{44} g^{44} T_{44} \approx \tfrac{1}{2} T_{44} = -\tfrac{1}{2} c^2 \rho$$

$$T^*_{\mu\nu} = \frac{1}{2} c^2 \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\Delta\gamma_{\mu\nu} = -2\kappa T^*_{\mu\nu}}$$

Rozwiązaniami tych równań są

$$\gamma_{44} = -\frac{\kappa c^2}{4\pi}\int\frac{\rho dV}{r}, \quad \gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33} = -\gamma_{44} = \frac{\kappa c^2}{4\pi}\int\frac{\rho dV}{r},$$

pozostałe $\gamma_{\mu\nu}$ są równe zeru. W odległości $r \geq r_0$ poza obszaren źródłowej masy $M = \int \rho dV$

$$\gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33} = -\gamma_{44} = \frac{\kappa c^2}{4\pi}\frac{M}{r}.$$

Tylko jedno z tych równań

$\Delta\gamma_{44} = \kappa c^2 \rho$

ma postać równania Poissona

$\Delta\varphi = 4\pi G \rho$.

$$\left.\begin{aligned} &\varphi = -G\int \frac{\rho dV}{r} \\ &\gamma_{44} = -\frac{\kappa c^2}{4\pi}\int\frac{\rho dV}{r}, \quad \kappa = \frac{8\pi G}{c^4} \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} &\varphi = \tfrac{1}{2}c^2\gamma_{44} \\ &\gamma_{44} = \frac{2\varphi}{c^2} = -\frac{2G}{c^2}\int\frac{\rho dV}{r} \end{aligned}$$

Stacjonarne słabe pole grawitacyjne jest skutkiem wpływu stacjonarnego rozkładu masy na metrykę czasoprzestrzeni.

$$(ds)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}$$

$$\gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33} = -\gamma_{44}$$

$$\gamma_{44} = -\frac{2G}{c^2}\int\frac{\rho dV}{r}$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1-\gamma_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\gamma_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\gamma_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\gamma_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2c^{-2}\varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2c^{-2}\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-2c^{-2}\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+2c^{-2}\varphi \end{bmatrix}$$

$$(ds)^2 = (1-\gamma_{44})\left[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2\right] + (1+\gamma_{44})(dx^4)^2$$

$$(ds)^2 = \left(1+\frac{\kappa c^2}{4\pi}\int\frac{\rho dV}{r}\right)\left[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2\right] + \left(1-\frac{\kappa c^2}{4\pi}\int\frac{\rho dV}{r}\right)(dx^4)^2$$

$$(ds)^2 = \left(1+\frac{2G}{c^2}\int\frac{\rho dV}{r}\right)\left[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2\right] + \left(1-\frac{2G}{c^2}\int\frac{\rho dV}{r}\right)(dx^4)^2$$

$$(ds)^2 = (1+2c^{-2}\varphi)\left[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2\right] + (1-2c^{-2}\varphi)(dx^4)^2$$

Potencjał grawitacyjny jest tensorem o niezerowych składowych diagonalnych.

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_{11} \overset{df}{=} \tfrac{1}{2}c^2\gamma_{11} = -\tfrac{1}{2}c^2\gamma_{44} = \tfrac{1}{2}c^2(g_{11}-1) = -\varphi \\ &\varphi_{22} \overset{df}{=} \tfrac{1}{2}c^2\gamma_{22} = -\tfrac{1}{2}c^2\gamma_{44} = \tfrac{1}{2}c^2(g_{22}-1) = -\varphi \\ &\varphi_{33} \overset{df}{=} \tfrac{1}{2}c^2\gamma_{33} = -\tfrac{1}{2}c^2\gamma_{44} = \tfrac{1}{2}c^2(g_{33}-1) = -\varphi \\ &\varphi_{44} \overset{df}{=} \tfrac{1}{2}c^2\gamma_{44} = +\tfrac{1}{2}c^2\gamma_{44} = \tfrac{1}{2}c^2(g_{11}-1) = +\varphi \end{aligned}\right\} \qquad \varphi_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}c^2\gamma_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}c^2(g_{\mu\nu} - \delta_{\mu\nu})$$

$$\varphi_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varphi \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2}c^2 \begin{bmatrix} \gamma_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_{44} \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2}c^2 \begin{bmatrix} g_{11}-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{22}-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{33}-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{44}-1 \end{bmatrix}$$

W teorii grawitacji Newtona wykorzystuje się tylko składową $\varphi_{44} = \tfrac{1}{2}c^2\gamma_{44} = \tfrac{1}{2}c^2(g_{44}-1)$.

- **Równania ruchu w przypadku słabego stacjonarnego pola grawitacyjnego**

Założymy za Einsteinem, że ruch swobodnego punktu materialnego jest opisywany równaniami

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2}+\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}=0\,,$$
$$ds^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu\,.$$

Są to równania różniczkowe linii geodezyjnej (geodetyki).

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2}+\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}=0$$
$$ds^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$
$$g_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}+\gamma_{\mu\nu}$$
$$|\gamma_{\mu\nu}|<<1$$
$$x^4=ict$$
$$\sum_{\mu=1}^{4}dx^{(\mu)2}=dx^{(4)2}\left(1-v^2c^{-2}\right)$$
$$v<<c$$
$$\left|\frac{dx^1}{dx^4}\right|<<\frac{dx^4}{dx^4}=1$$
$$\left|\frac{dx^2}{dx^4}\right|<<\frac{dx^4}{dx^4}=1$$
$$\left|\frac{dx^3}{dx^4}\right|<<\frac{dx^4}{dx^4}=1$$
$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta}=g^{\mu\sigma}\left[{\alpha\beta \atop \sigma}\right]$$
$$\left[{\alpha\beta \atop \mu}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma_{\beta\mu}}{\partial x^\alpha}+\frac{\partial\gamma_{\alpha\mu}}{\partial x^\beta}-\frac{\partial\gamma_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}\right)$$
$$\frac{\partial\gamma_{4\mu}}{\partial x^4}\approx 0$$
$$\kappa=\frac{8\pi G}{c^4}=2{,}073\cdot 10^{-43}\,\frac{s^2}{kg\cdot m}$$

W teorii Newtona:

$$\varphi=\varphi_{44}=\tfrac{1}{2}c^2\gamma_{44}$$
$$\frac{d^2x^\mu}{dt^2}=-\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}$$

$$ds^2=\left(\delta_{\mu\nu}+\gamma_{\mu\nu}\right)dx^\mu dx^\nu\approx dx^{(\mu)2}=$$
$$=dx^{(4)2}\left(1-v^2c^{-2}\right)\approx dx^{(4)2}$$
$$ds^2\approx dx^{(4)2}$$
$$ds\approx dx^4$$
$$\frac{d^2x^\mu}{dx^{(4)2}}+\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{dx^4}\frac{dx^\beta}{dx^4}=0$$
$$\frac{d^2x^\mu}{dx^{(4)2}}+\Gamma^\mu_{44}\frac{dx^4}{dx^4}\frac{dx^4}{dx^4}=0$$
$$\frac{d^2x^\mu}{dx^{(4)2}}+\Gamma^\mu_{44}=0$$
$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\approx\delta_{\mu\sigma}\left[{\alpha\beta \atop \sigma}\right]=\left[{\alpha\beta \atop \mu}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma_{\beta\mu}}{\partial x^\alpha}+\frac{\partial\gamma_{\alpha\mu}}{\partial x^\beta}-\frac{\partial\gamma_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}\right)$$
$$\Gamma^\mu_{44}\approx\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma_{4\mu}}{\partial x^4}+\frac{\partial\gamma_{4\mu}}{\partial x^4}-\frac{\partial\gamma_{44}}{\partial x^\mu}\right)$$
$$\frac{\partial\gamma_{4\mu}}{\partial x^4}\approx 0$$
$$\Gamma^\mu_{44}\approx-\frac{1}{2}\frac{\partial\gamma_{44}}{\partial x^\mu}$$
$$\frac{d^2x^\mu}{dx^{(4)2}}\approx\frac{\partial\left(\frac{1}{2}\gamma_{44}\right)}{\partial x^\mu}\quad\text{lub}\quad\boxed{\frac{d^2x^\mu}{dt^2}\approx-\frac{\partial\left(\frac{1}{2}c^2\gamma_{44}\right)}{\partial x^\mu}}$$

$\dfrac{d^2x^\mu}{dt^2}=-\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}=-\dfrac{\partial\varphi_{44}}{\partial x^\mu}=c^2\Gamma^\mu_{44}$ = natężenie pola grawitacyjnego, przyspieszenie grawitacyjne

$\varphi=\varphi_{44}=\frac{1}{2}c^2\gamma_{44}=\frac{1}{2}c^2\left(g_{44}-1\right)$ = potencjał pola grawitacyjnego

$$\Gamma^\mu_{44}=\frac{1}{c^2}\frac{d^2x^\mu}{dt^2}$$
$$g_{44}=2c^{-2}\varphi+1$$
$$\gamma_{44}=2c^{-2}\varphi$$

- **Wpływ potencjału grawitacyjnego na odległość przestrzenną dwóch zdarzeń**
  W układzie współrzędnych kartezjańskich w obszarze bez pola grawitacyjnego:

$$(ds_0)^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2,$$

w obecności pola grawitacyjnego:

$$(ds)^2 = \left(1+\frac{2GM}{c^2 r}\right)\left[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2\right] + \left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)(dx^4)^2, \quad \varphi = -\frac{GM}{r}.$$

Porównując przyrosty współrzędnych przestrzennych bez pola i w polu, otrzymamy

$$(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 < \left(1+\frac{2GM}{c^2 r}\right)\left[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2\right]$$

$$\sqrt{1+a} \cong 1+\tfrac{1}{2}a, \text{ bo } \left(1+\tfrac{1}{2}a\right)^2 = 1+a+\tfrac{1}{4}a^2 \cong 1+a, \quad a = \frac{2GM}{c^2 r}$$

$$\sqrt{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2} < \left(1+\frac{GM}{c^2 r}\right)\sqrt{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2}$$

Oznaczmy przez dL_o i dL fizyczne (prawdziwe) odległości przestrzenne dwóch zdarzeń odpowiednio bez pola i w polu:

$$dL_o = \sqrt{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2}$$

$$dL = \sqrt{1+\frac{2GM}{c^2 r}}\sqrt{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2} = \sqrt{1-\frac{2\varphi}{c^2}}\, dL_0 = \sqrt{1+\frac{2|\varphi|}{c^2}}\, dL_0 \cong \left(1+\frac{|\varphi|}{c^2}\right) dL_0$$

$$\boxed{dL_o < dL}$$

Potencjał grawitacyjny φ ma wpływ na fizyczną odległość przestrzenną dwóch zdarzeń zachodzących w polu grawitacyjnym. W silniejszym polu grawitacyjnym fizyczna odległość przestrzenna staje się większa.

- **Wpływ potencjału grawitacyjnego na odstęp czasu między dwoma zdarzeniami**
  Porównując przyrosty współrzędnych czasowych bez pola i w polu, otrzymamy

$$(dx^4)^2 = -c^2 dt^2 < \left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)(dx^4)^2 = -\left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)c^2 dt^2, \quad \varphi = -\frac{GM}{r}$$

$$dt^2 > \left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)dt^2$$

$$\sqrt{1-a} \cong 1-\tfrac{1}{2}a \text{ bo } \left(1-\tfrac{1}{2}a\right)^2 = 1-a+\tfrac{1}{4}a^2 \cong 1-a, \quad a = \frac{2GM}{c^2 r}$$

$$dt > \sqrt{1-\frac{2GM}{c^2 r}}\,dt \cong \left(1-\frac{GM}{c^2 r}\right)dt$$

Oznaczmy przez $d\tau_0$ i $d\tau$ fizyczne (prawdziwe) odstępy czasu między dwoma zdarzeniami odpowiednio bez pola i w polu:

$$d\tau_0 = dt, \quad d\tau = \sqrt{1-\frac{2GM}{c^2 r}}\, dt \cong \left(1-\frac{GM}{c^2 r}\right)dt, \quad d\tau = \sqrt{1+\frac{2\varphi}{c^2}}\, dt = \sqrt{1-\frac{2|\varphi|}{c^2}}\, dt$$

$$\boxed{d\tau_o > d\tau}$$

Potencjał grawitacyjny φ ma wpływ na fizyczny odstęp czasu między dwoma zdarzeniami zachodzącymi w polu grawitacyjnym. W silniejszym polu grawitacyjnym fizyczny odstęp czasu między dwoma zdarzeniami staje się mniejszy.

- **Przesunięcie linii spektralnych w polu grawitacyjnym**

Zbadamy wpływ potencjału pola grawitacyjnego na częstotliwość światła. Niech punkty emisji i obserwacji światła (fotonu) będą różnymi punktami w czasoprzestrzeni.

$$\frac{\nu_{em}}{\nu_{ob}} = \frac{d\tau_{ob}}{d\tau_{em}}$$

$$d\tau_{ob} = \sqrt{1+\frac{2\varphi_{ob}}{c^2}}\,dt = \sqrt{1-\frac{2\left|\varphi_{ob}\right|}{c^2}}\,dt$$

$$d\tau_{em} = \sqrt{1+\frac{2\varphi_{em}}{c^2}}\,dt = \sqrt{1-\frac{2\left|\varphi_{em}\right|}{c^2}}\,dt$$

$$\frac{\nu_{em}}{\nu_{ob}} = \sqrt{\frac{1-\frac{2\left|\varphi_{ob}\right|}{c^2}}{1-\frac{2\left|\varphi_{em}\right|}{c^2}}} \approx \frac{1-\frac{\left|\varphi_{ob}\right|}{c^2}}{1-\frac{\left|\varphi_{em}\right|}{c^2}} \approx \left(1-\frac{\left|\varphi_{ob}\right|}{c^2}\right)\left(1+\frac{\left|\varphi_{em}\right|}{c^2}\right) \approx 1+\frac{1}{c^2}\left(\left|\varphi_{em}\right|-\left|\varphi_{ob}\right|\right)$$

$d\tau_{em}$, $d\tau_{ob}$ = różniczka czasu fizycznego (prawdziwego) odpowiednio w punkcie emisji i w punkcie obserwacji
dt = nie przeskalowana różniczka czasu
ν_{em}, ν_{ob} = częstotliwość światła odpowiednio w punkcie emisji i w punkcie obserwacji
φ_{em}, φ_{ob} = potencjał pola grawitacyjnego odpowiednio w punkcie emisji i w punkcie obserwacji światła (fotonu)
$\varphi = -\frac{GM}{r}$

Częstotliwość światła wędrującego w czasoprzetrzeni jest tym większa, im większa jest bezwzględna wartość potencjału grawitacyjnego. Światło oddalające się od emitera, wchodząc w obszar słabszego pola zmniejsza swoją częstotliwość, a wchodząc w obszar silniejszego pola zwiększa swoją częstotliwość.

Miarą przesunięcia grawitacyjnego linii spektralnych jest wielkość

$$z_G \overset{df}{=} \frac{\nu_{em}-\nu_{ob}}{\nu_{ob}} = \frac{\nu_{em}}{\nu_{ob}}-1 \approx \frac{1}{c^2}\left(\left|\varphi_{em}\right|-\left|\varphi_{ob}\right|\right) = \frac{1}{c^2}\left(\varphi_{ob}-\varphi_{em}\right) = \pm\frac{1}{c^2}\left(\frac{GM}{r}-\frac{GM}{r\pm L}\right),$$

$$z_G = \pm\frac{gL}{c^2}\frac{1}{1\pm\frac{L}{r}}\text{; gdy } L \ll r\text{, to} \qquad \boxed{z_G = \pm\frac{gL}{c^2}}$$

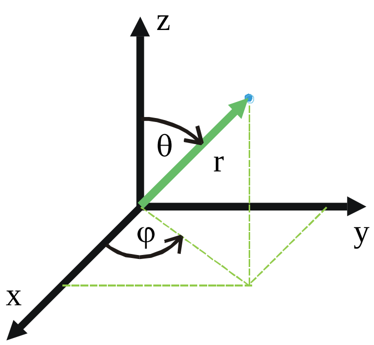
L = odległość między punktami emisji i obserwacji
g = przyspieszenie grawitacyjne w odległości r od centrum
± plus, gdy punkt emisji był bliżej centrum niż punkt obserwacji
minus, gdy punkt emisji był dalej od centrum niż punkt obserwacji

Ostatnią relację potwierdzili doświadczalnie Pound i Rebka w 1960, wykorzystując zjawiska Mössbauera i Dopplera. Emiterem promieniowania gamma ($h\nu = 14{,}4\,\mathrm{keV}$) był ^{57}Co, a absorberem ^{57}Fe. Emiter i absorber były umieszczane na przemian, raz pierwszy na dole, a drugi na górze i odwrotnie. Grawitacyjne przesunięcie było niwelowane przesunięciem dopplerowskim.

3 DOKŁADNE ROZWIĄZANIE SCHWARZSCHILDA

- **Próżniowe (zewnętrzne) rozwiązanie Schwarzschilda**

Do opisu płaskiej przestrzeni Minkowskiego używa się między innymi ortogonalnego układu współrzędnych sferycznych.



Czwartej osi nie zaznaczono

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \\ ict &= ict \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x^1 &= r \\ x^2 &= \theta \\ x^3 &= \varphi \\ x^4 &= ict \end{aligned}}$$

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d(ict)^2$$

$$ds^2 = d(x^1)^2 + (x^1)^2(dx^2)^2 + (x^1)^2\sin^2 x^2 (dx^3)^2 + (dx^4)^2$$

Stacjonarne sferycznie symetryczne pole grawitacyjne, którego źródłem jest masa rozmieszczona wokół środka układu współrzędnych z zachowaniem sferycznej symetrii, jest skutkiem zmiany metryki czasoprzestrzeni. Postulujemy, że w odpowiednio dużej odległości od źródła metryka pustej czasoprzestrzeni będzie miała postać:

$$ds^2 = e^{\lambda} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2 + e^{\nu} d(ict)^2$$

$$ds^2 = e^{\lambda}(dx^1)^2 + (x^1)^2(dx^2)^2 + (x^1)^2\sin^2 x^2 (dx^3)^2 + e^{\nu}(dx^4)^2$$

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}$$

$$g_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} e^{\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\nu} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} g_{11} &= e^{\lambda} \\ g_{22} &= (x^1)^2 = r^2 \\ g_{33} &= (x^1)^2\sin^2 x^2 = r^2\sin^2\theta \\ g_{44} &= e^{\nu} \end{aligned}$$

Pozostałe $g_{\alpha\beta}$ są równe zeru.

$$\left.\begin{aligned} g^{\alpha\beta} &= \frac{(-1)^{\alpha+\beta}\Delta^{\alpha\beta}}{g} \\ (-1)^{\alpha+\alpha} &= 1 \\ \Delta^{\alpha\alpha} &= g\left(g^{\alpha\alpha}\right)^{-1} \\ g &= g_{11}g_{22}g_{33}g_{44} \end{aligned}\right\} \Rightarrow g^{\alpha\alpha} = \left(g_{\alpha\alpha}\right)^{-1}$$

$$\begin{aligned} g^{11} &= e^{-\lambda} \\ g^{22} &= (x^1)^{-2} = r^{-2} \\ g^{33} &= (x^1)^{-2}\sin^{-2} x^2 = r^{-2}\sin^{-2}\theta \\ g^{44} &= e^{-\nu} \end{aligned}$$

Pozostałe $g^{\alpha\beta}$ są równe zeru.

Założenie stacjonarności i sferycznej symetrii implikuje odpowiednio

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^4} = 0, \quad g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x^1, x^2, x^3), \quad \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^4} = 0, \quad g^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}(x^1, x^2, x^3) \quad \text{oraz}$$

$$\lambda = \lambda(x^1) = \lambda(r), \quad \nu = \nu(x^1) = \nu(r).$$

$$\Gamma^1_{11} = g^{11}\left[{11 \atop 1}\right] = \frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} = \frac{1}{2}\frac{\partial \lambda}{\partial x^1}$$

$$\Gamma^1_{22} = g^{11}\left[{22 \atop 1}\right] = g^{11}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right) = -\frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = -e^{-\lambda} x^1$$

$$\Gamma^1_{33} = g^{11}\left[{33 \atop 1}\right] = g^{11}\left(\frac{\partial g_{31}}{\partial x^3} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} \right) = -\frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} = -e^{-\lambda} x^1 \sin^2 x^2$$

$$\Gamma^1_{44} = g^{11}\left[{44 \atop 1}\right] = g^{11}\left(\frac{\partial g_{41}}{\partial x^4} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^1} \right) = -\frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{44}}{\partial x^1} = -\frac{1}{2} e^{\nu-\lambda} \frac{\partial \nu}{\partial x^1}$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = g^{22}\left[{12 \atop 2}\right] = \frac{1}{2} g^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = \left(x^1\right)^{-1}$$

$$\Gamma^2_{33} = g^{22}\left[{33 \atop 2}\right] = g^{22}\left(\frac{\partial g_{32}}{\partial x^3} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} \right) = -\frac{1}{2} g^{22} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} = -\sin x^2 \cos x^2$$

$$\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = g^{33}\left[{13 \atop 3}\right] = \frac{1}{2} g^{33} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} = \left(x^1\right)^{-1}$$

$$\Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = g^{33}\left[{23 \atop 3}\right] = \frac{1}{2} g^{33} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} = \operatorname{ctg} x^2$$

$$\Gamma^4_{14} = \Gamma^4_{41} = g^{44}\left[{14 \atop 4}\right] = \frac{1}{2} g^{44} \frac{\partial g_{44}}{\partial x^1} = \frac{1}{2}\frac{\partial \nu}{\partial x^1}$$

Pozostałe $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ są równe zeru.

$$R_{11} = \frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma^3_{13}}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma^4_{14}}{\partial x^1} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{13}\Gamma^3_{13} + \Gamma^4_{14}\Gamma^4_{14} - \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11}\Gamma^3_{13} - \Gamma^1_{11}\Gamma^4_{14}$$

$$R_{11} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^1 \partial x^1} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \nu}{\partial x^1}\right)^2 - \frac{1}{4}\frac{\partial \lambda}{\partial x^1}\cdot\frac{\partial \nu}{\partial x^1} - \frac{1}{x^1}\frac{\partial \lambda}{\partial x^1}$$

$$R_{22} = \frac{\partial \Gamma^3_{23}}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma^1_{22}}{\partial x^1} + \Gamma^3_{23}\Gamma^3_{23} + \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{22}\Gamma^1_{11} - \Gamma^1_{22}\Gamma^3_{13} - \Gamma^1_{22}\Gamma^4_{14}$$

$$R_{22} = -1 + e^{-\lambda}\left(1 - \frac{1}{2} x^1 \frac{\partial \lambda}{\partial x^1} + \frac{1}{2} x^1 \frac{\partial \nu}{\partial x^1}\right)$$

$$R_{33} = -\frac{\partial \Gamma^1_{33}}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma^2_{33}}{\partial x^2} + \Gamma^1_{33}\Gamma^3_{13} + \Gamma^2_{33}\Gamma^3_{23} - \Gamma^1_{33}\Gamma^1_{11} - \Gamma^1_{33}\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{33}\Gamma^4_{14}$$

$$R_{33} = \sin^2 x^2\left[-1 + e^{-\lambda}\left(1 - \frac{1}{2} x^1 \frac{\partial \lambda}{\partial x^1} + \frac{1}{2} x^1 \frac{\partial \nu}{\partial x^1}\right)\right] = R_{22}\sin^2 x^2$$

$$R_{44} = -\frac{\partial \Gamma^1_{44}}{\partial x^1} + \Gamma^1_{44}\Gamma^4_{14} - \Gamma^1_{44}\Gamma^1_{11} - \Gamma^1_{44}\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{44}\Gamma^3_{13}$$

$$R_{44} = e^{\nu-\lambda}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^1 \partial x^1} - \frac{1}{4}\frac{\partial \lambda}{\partial x^1}\frac{\partial \nu}{\partial x^1} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \nu}{\partial x^1}\right)^2 + \frac{1}{x^1}\frac{\partial \nu}{\partial x^1}\right]$$

Pozostałe składowe tensora $R_{\alpha\beta}$ są równe zeru.

Równania pola grawitacyjnego w pustej przestrzeni po za obszarem źródłowej masy, ze względu na $T_{\mu\nu}=0$, redukują się do $R_{\mu\nu}=0$.

$$R_{11}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}\frac{\partial^2\nu}{\partial x^1\partial x^1}+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\nu}{\partial x^1}\right)^2-\frac{1}{4}\frac{\partial\lambda}{\partial x^1}\cdot\frac{\partial\nu}{\partial x^1}-\frac{1}{x^1}\frac{\partial\lambda}{\partial x^1}=0$$

$$\left.\begin{matrix}R_{22}=0\\ R_{33}=0\end{matrix}\right\} \quad\Leftrightarrow\quad -1+e^{-\lambda}\left(1-\frac{1}{2}x^1\frac{\partial\lambda}{\partial x^1}+\frac{1}{2}x^1\frac{\partial\nu}{\partial x^1}\right)=0$$

$$R_{44}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}\frac{\partial^2\nu}{\partial x^1\partial x^1}-\frac{1}{4}\frac{\partial\lambda}{\partial x^1}\frac{\partial\nu}{\partial x^1}+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\nu}{\partial x^1}\right)^2+\frac{1}{x^1}\frac{\partial\nu}{\partial x^1}=0$$

Odejmując stronami od trzeciego równania pierwsze równanie, otrzymujemy

$$\frac{1}{x^1}\frac{\partial\nu}{\partial x^1}+\frac{1}{x^1}\frac{\partial\lambda}{\partial x^1}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial\nu}{\partial x^1}+\frac{\partial\lambda}{\partial x^1}=0 \quad\Rightarrow\quad \nu=-\lambda+b, \quad b=\mathrm{const}\,.$$

Podstawiając ten wynik do drugiego równania, mamy

$$-1+e^{-\lambda}\left(1-x^1\frac{\partial\lambda}{\partial x^1}\right)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\partial x^1 e^{-\lambda}}{\partial x^1}=1 \quad\Rightarrow\quad e^{-\lambda}=1+\frac{a}{x^1}, \quad e^{\lambda}=\frac{1}{1+\frac{a}{x^1}}, \quad a=\mathrm{const}\,,$$

$$e^{\nu}=e^{-\lambda+b}=e^b e^{-\lambda}=e^b\left(1+\frac{a}{x^1}\right),$$

$$b\overset{\text{zał}}{=}0 \quad\Rightarrow\quad e^{\nu}=e^{-\lambda}=1+\frac{a}{x^1}.$$

Po uwzględnieniu powyższej relacji, kwadrat elementu liniowego przyjmuje postać

$$ds^2=\left(1+\frac{a}{x^1}\right)^{-1}\left(dx^1\right)^2+\left(x^1\right)^2\left(dx^2\right)^2+\left(x^1\right)^2\sin^2 x^2\left(dx^3\right)^2+\left(1+\frac{a}{x^1}\right)\left(dx^4\right)^2.$$

$$\left.\begin{matrix} g_{44}=1+\frac{a}{x^1}\\ g_{44}=1+\gamma_{44}\\ \varphi=\tfrac{1}{2}c^2\gamma_{44}\\ \varphi=-\frac{GM}{r}\\ x^1=r>>r_0\end{matrix}\right\} \quad\Rightarrow\quad a=-\frac{2GM}{c^2}$$

φ = potencjał grawitacyjny
M = masa rozmieszczona symetrycznie wokół środka układu współrzędnych wewnątrz sfery o promieniu r_0

Ostatecznie podstawowa różniczkowa forma kwadratowa pustej (swobodnej) czasoprzestrzeni Schwarzschilda dana jest przez

$$\boxed{ds^2=\left(1-\frac{2GM}{c^2x^1}\right)^{-1}\left(dx^1\right)^2+\left(x^1\right)^2\left(dx^2\right)^2+\left(x^1\right)^2\sin^2 x^2\left(dx^3\right)^2+\left(1-\frac{2GM}{c^2x^1}\right)\left(dx^4\right)^2}$$

- **Równanie orbity**

Poszukamy geodetyki leżącej w hiperpłaszczyźnie $x^2 = \theta = \frac{1}{2}\pi$ $(dx^2 = 0,\ (dx^2)^2 = 0)$ z metryką

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 x^1}\right)^{-1} (dx^1)^2 + (x^1)^2 (dx^3)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 x^1}\right)(dx^4)^2 .$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 = \frac{1}{2}\pi \\ \sin^2 x^2 = 1 \\ \nu = -\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma^1_{11} = -\Gamma^4_{14} = -\Gamma^4_{41} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\lambda}{\partial x^1} \\ \Gamma^1_{22} = \Gamma^1_{33} = -e^{-\lambda} x^1 \\ \Gamma^1_{44} = \dfrac{1}{2} e^{-2\lambda} \dfrac{\partial\lambda}{\partial x^1} \\ \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \dfrac{1}{x^1} \\ \text{Pozostałe } \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = 0. \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\dfrac{dx^\alpha}{ds}\dfrac{dx^\beta}{ds} = 0 \\ x^2 = 0 \\ \dfrac{dx^2}{ds} = 0 \\ \dfrac{d^2x^2}{ds^2} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d^2x^1}{ds^2} + \Gamma^1_{11}\left(\dfrac{dx^1}{ds}\right)^2 + \Gamma^1_{33}\left(\dfrac{dx^3}{ds}\right)^2 + \Gamma^1_{44}\left(\dfrac{dx^4}{ds}\right)^2 = 0 \\ 0 = 0 \\ \dfrac{d^2x^3}{ds^2} + 2\Gamma^3_{13}\dfrac{dx^1}{ds}\dfrac{dx^3}{ds} = 0 \\ \dfrac{d^2x^4}{ds^2} + 2\Gamma^4_{14}\dfrac{dx^1}{ds}\dfrac{dx^4}{ds} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{d^2x^1}{ds^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial\lambda}{\partial x^1}\left(\frac{dx^1}{ds}\right)^2 - e^{-\lambda}x^1\left(\frac{dx^3}{ds}\right)^2 + \frac{1}{2}e^{-2\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x^1}\left(\frac{dx^4}{ds}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2x^3}{ds^2} + \frac{2}{x^1}\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^3}{ds} = 0 \quad \Rightarrow \quad (x^1)^2\frac{d^2x^3}{ds^2} + 2x^1\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^3}{ds} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{ds}\left[(x^1)^2\frac{dx^3}{ds}\right] = 0$$

$$\frac{d^2x^4}{ds^2} - \frac{\partial\lambda}{\partial x^1}\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^4}{ds} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{-\lambda}\frac{d^2x^4}{ds^2} - e^{-\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x^1}\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^4}{ds} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{ds}\left(e^{-\lambda}\frac{dx^4}{ds}\right) = 0$$

$$\frac{d}{ds}\left[(x^1)^2\frac{dx^3}{ds}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad (x^1)^2\frac{dx^3}{ds} = A$$

$$\frac{d}{ds}\left(e^{-\lambda}\frac{dx^4}{ds}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{-\lambda}\frac{dx^4}{ds} = B$$

A, B = stałe związane z daną geodetyką

$\lambda = \lambda(x^1)$, dlatego $\dfrac{d\lambda}{ds} = \dfrac{\partial\lambda}{\partial x^1}\dfrac{dx^1}{ds}$ oraz $\dfrac{de^{-\lambda}}{ds} = -e^{-\lambda}\dfrac{\partial\lambda}{\partial x^1}\dfrac{dx^1}{ds}$

Obliczymy kwadrat skalarny wektora $\frac{dx^\mu}{ds}$ stycznego do geodetyki.

$$e^\nu = e^{-\lambda} = 1 - \frac{2GM}{c^2 x^1}$$
$$x^2 = \tfrac{1}{2}\pi$$
$$\sin^2 x^2 = 1$$
$$\frac{dx^2}{ds} = 0$$
$$\frac{dx^3}{ds} = \frac{B}{(x^1)^2}$$
$$\frac{dx^4}{ds} = Ae^\lambda$$
$$x^1 = r$$
$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}$$
$$\sigma \overset{df}{=} \frac{1}{r}$$
$$x^3 = \varphi$$
$$\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2$$
$$\frac{1}{p} = -\frac{GM}{c^2}\frac{D}{B^2}$$
$$\alpha = \frac{3GM}{c^2}$$

Dla Słońca

$$\alpha \approx 4{,}44 \cdot 10^3 \mathrm{m}$$

$$g_{11} = e^\lambda$$
$$g_{22} = (x^1)^2$$
$$g_{33} = (x^1)^2 \sin^2 x^2 = (x^1)^2$$
$$g_{44} = e^\nu = e^{-\lambda}$$
$$g_{\mu\mu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\mu}{ds} = e^\lambda\left(\frac{dx^1}{ds}\right)^2 + (x^1)^2\left(\frac{dx^3}{ds}\right)^2 + e^{-\lambda}\left(\frac{dx^4}{ds}\right)^2 = \mathrm{const} = D$$
$$\left(\frac{dx^1}{ds}\right)^2 = -A^2 + De^{-\lambda} - \frac{B^2}{(x^1)^2}e^{-\lambda}$$

Ostatnie równanie dzielimy stronami przez

$(x^1)^4\left(\frac{dx^3}{ds}\right)^2 = B^2$, otrzymując

$$\frac{1}{(x^1)^4}\left(\frac{dx^1}{dx^3}\right)^2 = -\frac{A^2}{B^2} + \frac{D}{B^2}e^{-\lambda} - \frac{1}{(x^1)^2}e^{-\lambda}$$
$$\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2 = -\frac{A^2}{B^2} + \frac{D}{B^2} - \frac{2GMD}{c^2B^2}\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} + \frac{2GM}{c^2}\frac{1}{r^3}$$
$$\left(\frac{d\sigma}{d\varphi}\right)^2 = -\frac{A^2}{B^2} + \frac{D}{B^2} - \frac{2GMD}{c^2B^2}\sigma - \sigma^2 + \frac{2GM}{c^2}\sigma^3$$

Równanie to różniczkujemy obustronnie względem φ

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{d\sigma}{d\varphi}\right)^2 = \frac{d}{d\varphi}\left(-\frac{A^2}{B^2} + \frac{D}{B^2} - \frac{2GMD}{c^2B^2}\sigma - \sigma^2 + \frac{2GM}{c^2}\sigma^3\right)$$
$$2\frac{d\sigma}{d\varphi}\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} = -\frac{2GMD}{c^2B^2}\frac{d\sigma}{d\varphi} - 2\sigma\frac{d\sigma}{d\varphi} + \frac{6GM}{c^2}\sigma^2\frac{d\sigma}{d\varphi}$$

a następnie dzielimy obustronnie przez

$2\frac{d\sigma}{d\varphi}$, otrzymując

$$\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} = -\frac{GM}{c^2}\frac{D}{B^2} - \sigma + \frac{3GM}{c^2}\sigma^2 \text{ lub}$$

$$\boxed{\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} = \frac{1}{p} - \sigma + \alpha\sigma^2}$$

Równanie orbity

- **Obrót orbity**

Zauważmy, że otrzymane równanie orbity w stacjonarnym centralnie symetrycznym polu grawitacyjnym różni się od analogicznego równania w teorii Newtona członem $\alpha\sigma^2$. Poszukamy rozwiązania tego równania w postaci $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1$, gdzie $\sigma_0 = p^{-1}(1 + e\cos\varphi)$ jest rozwiązaniem newtonowskim, a σ_1 poprawką wynikającą z ogólnej teorii względności odpowiedzialną za obrót orbity.

$$\frac{d^2\sigma_0}{d\varphi^2}=\frac{1}{p}-\sigma_0 \quad\Rightarrow\quad \sigma_0=\frac{1}{p}+\frac{e}{p}\cos\varphi$$

$$\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2}=\frac{1}{p}-\sigma+\alpha\sigma^2 \quad\Rightarrow\quad \sigma=\sigma_0+\sigma_1$$

$$\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2}=\frac{d^2(\sigma_0+\sigma_1)}{d\varphi^2}=\frac{d^2\sigma_0}{d\varphi^2}+\frac{d^2\sigma_1}{d\varphi^2}=\frac{1}{p}-\sigma_0+\frac{d^2\sigma_1}{d\varphi^2}=\frac{1}{p}-\sigma+\alpha\sigma^2=\frac{1}{p}-\sigma_0-\sigma_1+\alpha(\sigma_0+\sigma_1)^2$$

$$\frac{d^2\sigma_1}{d\varphi^2}=-\sigma_1+\alpha(\sigma_0+\sigma_1)^2$$

$$\frac{d^2\sigma_1}{d\varphi^2}+\sigma_1=\frac{2\alpha e}{p^2}\cos\varphi+\left[\alpha\sigma_1^2+\frac{2\alpha}{p}\sigma_1+\frac{2\alpha e}{p}\cos\varphi\cdot\sigma_1+\frac{\alpha e^2}{p^2}\cos^2\varphi+\frac{\alpha}{p^2}\right]$$

Człon $2\alpha e p^{-2}\cos\varphi$ odpowiada za obrót orbity, dając do σ_1 nieokresowy wkład.

$$\frac{d^2\sigma_1}{d\varphi^2}+\sigma_1=\frac{2\alpha e}{p^2}\cos\varphi \quad\Rightarrow\quad \sigma_1=\frac{\alpha e}{p^2}\varphi\sin\varphi$$

$$\sigma=\sigma_0+\sigma_1=\frac{1}{p}+\frac{e}{p}\cos\varphi+\frac{\alpha e}{p^2}\varphi\sin\varphi=\frac{1}{p}+\frac{e}{p}\left(\cos\varphi+\frac{\alpha}{p}\varphi\sin\varphi\right)$$

$$\cos\varphi-\Delta\varphi\sin\varphi\approx\cos(\varphi+\Delta\varphi)$$

$$\Delta\varphi=-\frac{\alpha}{p}\varphi$$

$$\sigma\approx\frac{1}{p}+\frac{e}{p}\cos\left(\varphi-\frac{\alpha}{p}\varphi\right)=\frac{1}{p}+\frac{e}{p}\cos\left[\left(1-\frac{\alpha}{p}\right)\varphi\right]$$

Obliczmy kąt $\delta\varphi$, o który obraca się orbita w jej płaszczyźnie w czasie jednego obiegu.

$$\frac{1}{p}+\frac{e}{p}\cos\left[\left(1-\frac{\alpha}{p}\right)\varphi+2\pi\right]=\frac{1}{p}+\frac{e}{p}\cos\left[\left(1-\frac{\alpha}{p}\right)(\varphi+2\pi+\delta\varphi)\right]$$

$$\left(1-\frac{\alpha}{p}\right)\varphi+2\pi=\left(1-\frac{\alpha}{p}\right)(\varphi+2\pi+\delta\varphi)$$

$$\boxed{\delta\varphi=\frac{2\pi\alpha}{p}\frac{1}{1-\alpha p^{-1}}\approx\frac{2\pi\alpha}{p}\left(1+\frac{\alpha}{p}\right)=2\pi\left(\frac{\alpha}{p}+\frac{\alpha^2}{p^2}\right)}$$

$$\alpha=\frac{3GM}{c^2}$$

$$\frac{1}{p}=-\frac{GM}{c^2}\cdot\frac{D}{B^2},\qquad \frac{1}{p}=\frac{GMm\mu}{L^2}$$

$$\mu=\frac{Mm}{M+m},\qquad L=\mu r^2\dot{\varphi}$$

$$p=(1+e)r_{min}=(1-e)r_{max}$$

$$p=(1-e^2)a$$

$$e=\frac{r_{max}-r_{min}}{r_{max}+r_{min}}$$

$$-\frac{D}{B^2}=\frac{m\mu c^2}{L^2}=\frac{c^2}{GM(1+e)r_{min}}=\frac{c^2}{GM(1-e)r_{max}}$$

$$\frac{\alpha}{p}=\frac{3G^2}{c^2}\cdot\frac{M^2m\mu}{L^2}=\frac{3G}{c^2}\cdot\frac{M}{(1+e)r_{min}}=\frac{3G}{c^2}\cdot\frac{M}{(1-e)r_{max}}$$

$$\boxed{\delta\varphi\approx\frac{6\pi G}{c^2}\cdot\frac{M}{(1+e)r_{min}}=\frac{6\pi G}{c^2}\cdot\frac{M}{(1-e)r_{max}}}$$

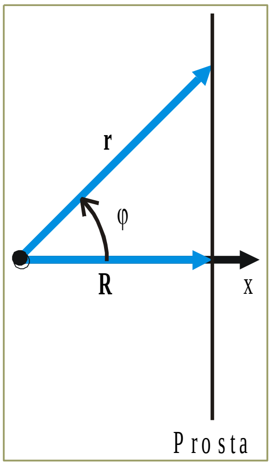
$$\boxed{\delta\varphi\approx\frac{6\pi G}{c^2}\cdot\frac{M}{(1-e^2)a}}$$

- **Zakrzywienie toru promieni świetlnych w polu grawitacyjnym**

Równanie orbity dla promienia świetlnego ($m=0$), ze względu na znikanie członu 1/p, redukuje się do

$$\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2}=-\sigma+\alpha\sigma^2,\quad \sigma=\frac{1}{r},\quad \alpha=\frac{3GM}{c^2}=\frac{3}{2}\cdot r_S,\quad r_S=\frac{2GM}{c^2}.$$

Równanie to rozwiążemy metodą kolejnych przybliżeń.



Pierwsze przybliżenie

$$\frac{d^2\sigma_0}{d\varphi^2}=-\sigma_0 \quad\Rightarrow\quad \sigma_0=\frac{\cos\varphi}{R}\quad \text{lub}\quad r_0=\frac{R}{\cos\varphi},\quad -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}.$$

Rozwiązaniem jest równanie prostej we współrzędnych biegunowych. R jest odległością prostej od bieguna.

Drugie przybliżenie

$$\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2}=-\sigma+\alpha\sigma^2 \quad\Rightarrow\quad \sigma=\sigma_0+\sigma_1$$

$$\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2}=\frac{d^2(\sigma_0+\sigma_1)}{d\varphi^2}=\frac{d^2\sigma_0}{d\varphi^2}+\frac{d^2\sigma_1}{d\varphi^2}=-\sigma_0+\frac{d^2\sigma_1}{d\varphi^2}=-\sigma+\alpha\sigma^2=-(\sigma_0+\sigma_1)+\alpha(\sigma_0+\sigma_1)^2$$

$$\frac{d^2\sigma_1}{d\varphi^2}+\sigma_1=\alpha(\sigma_0+\sigma_1)^2=\alpha\sigma_0^2+2\alpha\sigma_0\sigma_1+\alpha\sigma_1^2=\frac{\alpha\cos^2\varphi}{R^2}+\left[\frac{2\alpha\cos\varphi}{R}\cdot\sigma_1+\alpha\sigma_1^2\right]$$

$$\frac{d^2\sigma_1}{d\varphi^2}+\sigma_1=\frac{\alpha\cos^2\varphi}{R^2}\quad\Rightarrow\quad \sigma_1=\frac{\alpha}{3R^2}+\frac{\alpha}{3R^2}\sin^2\varphi$$

$$\sigma=\frac{1}{r}=\sigma_0+\sigma_1=\frac{\cos\varphi}{R}+\frac{\alpha}{3R^2}+\frac{\alpha}{3R^2}\sin^2\varphi\quad \text{lub}\quad r=\frac{\dfrac{3R^2}{2\alpha}}{1+\left(\dfrac{3}{2}\dfrac{R}{\alpha}-\dfrac{1}{2}\cos\varphi\right)\cos\varphi}$$

Asymptoty krzywej opisanej powyższym równaniem otrzymamy podstawiając $\sigma=0$.

$$\cos\varphi=-\frac{\alpha}{3R}-\frac{\alpha}{3R}\sin^2\varphi$$

$$\varphi=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\Delta\varphi$$

$$\sin^2\varphi\approx 1$$

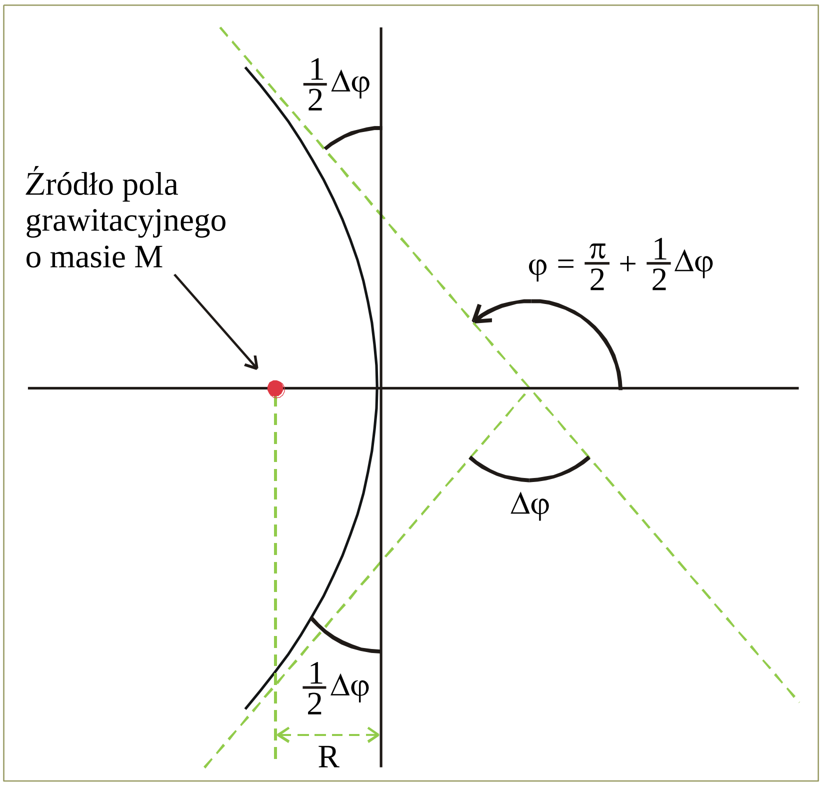
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\Delta\varphi\right)=-\frac{2\alpha}{3R}$$

$$\sin\frac{1}{2}\Delta\varphi=\frac{2\alpha}{3R}$$

$$\frac{1}{2}\Delta\varphi\approx\frac{2\alpha}{3R}$$

$$\boxed{\Delta\varphi\approx\frac{4\alpha}{3R}=\frac{4GM}{c^2R}}$$

Promień świetlny porusza się po krzywej, której asymptoty tworzą kąt $\Delta\varphi$.



- **Metryka Schwarzschilda jako metryka zakrzywionej czasoprzestrzeni**

Przestrzeń n-wymiarową nazywamy zakrzywioną, jeżeli nie istnieje ortonormalny układ współrzędnych względem którego różniczka odległości ds między każdymi dwoma blisko położonymi punktami spełnia zależność

$$(ds)^2 = \sum_{\mu=1}^{n} \left(dx^{\mu}\right)^2 .$$

Innymi słowy, przestrzeń jest płaska wtedy i tylko wtedy, gdy tensor metryczny $g_{\mu\nu}$ w każdym punkcie tej przestrzeni można przekształcić w tensor

$$g'_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

przy pomocy ciągłej transformacji współrzędnych.

Przestrzeń jest płaska wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie składowe mieszanego tensora krzywizny Grossmanna są równe zeru

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = 0 .$$

Miarą krzywizny przestrzeni zdarzeń (czasoprzestrzeni) jest przyrost współrzędnej kontrawariantnej wektora związany z przesunięciem równoległym wzdłuż zamkniętego konturu.

Przestrzeń jest zakrzywiona, jeżeli co najmniej jedna składowa tensora krzywizny $R^{\bullet}_{\bullet\bullet\bullet}$ jest różna od zera.

Aby znaleźć różne od zera składowe mieszanego tensora krzywizny, odpowiadającego metryce Schwarzschilda

$$(ds)^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2 + r^2 \sin^2\theta (d\varphi)^2 + \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)\left(dx^4\right)^2, \quad r_S = \frac{2GM}{c^2},$$

potrzebne będą składowe kowariantnego tensora metrycznego i jego wyznacznik, składowe kontrawariantnego tensora metrycznego i ostatecznie symbole Christoffela drugiego rodzaju i ich pochodne.

$$g_{rr} = g_{11} = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1}, \quad g_{\theta\theta} = g_{22} = r^2, \quad g_{\varphi\varphi} = g_{33} = r^2 \sin^2\theta, \quad g_{x^4x^4} = g_{44} = 1 - \frac{r_S}{r}$$

$$g = g_{11} g_{22} g_{33} g_{44} = r^4 \sin^2\theta$$

$$g^{11} = g_{11}^{-1} = 1 - \frac{r_S}{r}, \quad g^{22} = g_{22}^{-1} = r^{-2}, \quad g^{33} = g_{33}^{-1} = r^{-2}\sin^{-2}\theta, \quad g^{44} = g_{44}^{-1} = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1}$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial r} = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} \cdot \frac{r_S}{r^2}, \quad \Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{22}}{\partial r} = -\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \cdot r$$

$$\Gamma^1_{33} = -\frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{33}}{\partial r} = -\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \cdot r \sin^2\theta, \quad \Gamma^1_{44} = -\frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{44}}{\partial r} = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)\frac{r_S}{r^2}$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{2} g^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial r} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^2_{33} = -\frac{1}{2} g^{22} \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} = -\sin\theta\cos\theta$$

$$\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{2} g^{33} \frac{\partial g_{33}}{\partial r} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \frac{1}{2} g^{33} \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} = \operatorname{ctg}\theta$$

$$\Gamma^4_{14} = \Gamma^4_{41} = \frac{1}{2} g^{44} \frac{\partial g_{44}}{\partial r} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} \cdot \frac{r_S}{r^2}$$

$$\frac{\partial\Gamma^1_{11}}{\partial r}=\frac{r_S(2r-r_S)}{2(r-r_S)^2r^2},\quad \frac{\partial\Gamma^1_{22}}{\partial r}=-1,\quad \frac{\partial\Gamma^1_{33}}{\partial r}=-\sin^2\theta,\quad \frac{\partial\Gamma^1_{33}}{\partial\theta}=-2\left(1-\frac{r_S}{r}\right)r\sin\theta\cos\theta$$

$$\frac{\partial\Gamma^1_{44}}{\partial r}=r_Sr^{-3}-\frac{3}{2}r_s^2r^{-4},\quad \frac{\partial\Gamma^2_{12}}{\partial r}=-\frac{1}{r^2},\quad \frac{\partial\Gamma^2_{33}}{\partial\theta}=\sin^2\theta-\cos^2\theta,\quad \frac{\partial\Gamma^3_{13}}{\partial r}=-\frac{1}{r^2}$$

$$\frac{\partial\Gamma^3_{23}}{\partial\theta}=-\frac{1}{\sin^2\theta}=-\left(1+\mathrm{ctg}^2\theta\right),\quad \frac{\partial\Gamma^4_{14}}{\partial r}=-\frac{r_S(2r-r_S)}{2(r-r_S)^2r^2}$$

Dysponując odpowiednimi „półproduktami”, możemy wyznaczyć różne od zera składowe mieszanego tensora krzywizny

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu}=\frac{\partial\Gamma^\alpha_{\beta\nu}}{\partial x^\mu}-\frac{\partial\Gamma^\alpha_{\beta\mu}}{\partial x^\nu}-\Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\beta\mu}+\Gamma^\alpha_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma_{\beta\nu}.$$

$$R^1_{212}=\frac{\partial\Gamma^1_{22}}{\partial r}-\Gamma^1_{22}\Gamma^2_{21}+\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{22}=-\frac{1}{2}\frac{r_S}{r}$$

$$R^1_{313}=\frac{\partial\Gamma^1_{33}}{\partial r}-\Gamma^1_{33}\Gamma^3_{31}+\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{33}=-\frac{1}{2}\frac{r_S}{r}\sin^2\theta$$

$$R^1_{414}=\frac{\partial\Gamma^1_{44}}{\partial r}-\Gamma^1_{44}\Gamma^4_{41}+\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{44}=r_Sr^{-3}-r_S^2r^{-4}=\frac{r_S}{r^3}\left(1-\frac{r_S}{r}\right)=\frac{2}{c^2r}\left(1-\frac{r_S}{r}\right)\frac{GM}{r^2}$$

$$R^2_{112}=\frac{\partial\Gamma^2_{12}}{\partial r}-\Gamma^2_{12}\Gamma^1_{11}+\Gamma^2_{21}\Gamma^2_{12}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{r_S}{r}\right)^{-1}\frac{r_S}{r^3}$$

$$R^2_{323}=\frac{\partial\Gamma^2_{33}}{\partial\theta}-\Gamma^2_{33}\Gamma^3_{32}+\Gamma^2_{12}\Gamma^1_{33}=\frac{r_S}{r}\sin^2\theta$$

$$R^2_{424}=\Gamma^2_{12}\Gamma^1_{44}=-\frac{1}{2}\left(1-\frac{r_S}{r}\right)^{-1}\frac{r_S}{r^3}$$

$$R^3_{113}=\frac{\partial\Gamma^3_{13}}{\partial r}-\Gamma^3_{13}\Gamma^1_{11}+\Gamma^3_{31}\Gamma^3_{13}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{r_S}{r}\right)^{-1}\frac{r_S}{r^3}$$

$$R^3_{223}=\frac{\partial\Gamma^3_{23}}{\partial\theta}-\Gamma^3_{13}\Gamma^1_{22}+\Gamma^3_{32}\Gamma^3_{23}=-\frac{r_S}{r}$$

$$R^3_{434}=\Gamma^3_{13}\Gamma^1_{44}=-\frac{1}{2}\left(1-\frac{r_S}{r}\right)^{-1}\frac{r_S}{r^3}$$

$$R^4_{114}=\frac{\partial\Gamma^4_{14}}{\partial r}-\Gamma^4_{14}\Gamma^1_{11}+\Gamma^4_{41}\Gamma^4_{14}=-\frac{r_S}{r^4}\left(1-\frac{r_S}{r}\right)^{-2}$$

$$R^4_{334}=-\Gamma^4_{14}\Gamma^1_{33}=\frac{1}{2}\frac{r_S}{r}\sin^2\theta$$

Czasoprzestrzeń Schwarzschilda jest zakrzywiona, ponieważ powyższe składowe mieszanego tensora krzywizny są różne od zera.

UWAGA

Ze względu na pozorne osobliwości na biegunach sferycznego układu współrzędnych należy założyć, że $\theta\neq 0$ i $\theta\neq\pi$.

$r=r_S \;\Rightarrow\; R^1_{414}=0,\quad R^2_{112}=-R^2_{424}=R^3_{113}=-R^3_{434}=\infty,\quad R^4_{114}=\infty$

Przy r dążącym do nieskończoności wszystkie różne od zera składowe dążą do zera.

- **Promień Schwarzschilda i czarne dziury**

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 x^1}\right)^{-1} \left(dx^1\right)^2 + \left(x^1\right)^2 \left(dx^2\right)^2 + \left(x^1\right)^2 \sin^2 x^2 \left(dx^3\right)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 x^1}\right) \left(dx^4\right)^2$$

$$x^1 = r\,, \quad x^2 = \theta\,, \quad x^3 = \varphi\,, \quad x^4 = ict$$

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2 - c^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2$$

Dla $r = 0$ i $r = \frac{2GM}{c^2}$ metryka Schwarzschilda staje się osobliwa (nieokreślona), $ds^2 = +\infty$.

Promieniem Schwarzschilda nazywany jest promień

$$\boxed{r_S = \frac{2GM}{c^2}} \qquad \frac{2G}{c^2} = 1{,}5 \cdot 10^{-27}\,\frac{m}{kg}\,.$$

Czarną dziurą jest obiekt o promieniu mniejszym od promienia Schwarzschilda, czyli obszar ograniczony powierzchnią, nazywaną horyzontem zdarzeń, z której prędkość ucieczki jest równa maksymalnej wartości prędkości rozchodzenia się sygnałów c. Żeby Ziemia była czarną dziurą musiałaby mieć promień równy około 9 mm.

	M	r	r_S	$\frac{r_S}{r}$
Proton	$1{,}67 \cdot 10^{-27}\,kg$		$2{,}47 \cdot 10^{-54}\,m$	
Ziemia	$6 \cdot 10^{24}\,kg$	$6{,}4 \cdot 10^{6}\,m$	$9 \cdot 10^{-3}\,m$	$1{,}5 \cdot 10^{-9}$
Słońce	$2 \cdot 10^{30}\,kg$	$7 \cdot 10^{8}\,m$	$3 \cdot 10^{3}\,m$	$4{,}3 \cdot 10^{-6}$
Czarna dziura				> 1

- **Minimalna średnia gęstość czarnej dziury**

$$\rho = \frac{M}{V} \qquad V = \frac{4}{3}\pi r_S^3 \qquad r_S = \frac{2GM}{c^2}$$

$$\boxed{\rho_{min} = \frac{3}{4}\frac{M}{\pi r_S^3} = \frac{3c^6}{32\pi G^3} \cdot \frac{1}{M^2}}$$

$$\frac{3c^6}{32\pi G^3} = 0{,}73 \cdot 10^{80}\,\frac{kg^3}{m^3}$$

Obiekt o gęstości powietrza byłby czarną dziurą, gdyby jego masa była rzędu $10^{40}\,kg$. Taką masę posiada $5 \cdot 10^9$ Słońc.

- **Radialne przyspieszenie grawitacyjne swobodnego spadku odpowiadające metryce Schwarzschilda**

$$ds^2 = \left(1-\frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2 + \left(1-\frac{r_S}{r}\right)\left(dx^4\right)^2, \quad r > r_S$$

$$\theta = \text{const}, \quad d\theta = 0, \quad \varphi = \text{const}, \quad d\varphi = 0$$

$$\boxed{ds^2 = \left(1-\frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + \left(1-\frac{r_S}{r}\right)\left(dx^4\right)^2} \longrightarrow \boxed{1 = \left(1-\frac{r_S}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + \left(1-\frac{r_S}{r}\right)\left(\frac{dx^4}{ds}\right)^2}$$

Radialne przyspieszenie grawitacyjne swobodnego spadku odpowiadające metryce Schwarzschilda wyznaczymy z równania ruchu.

$$\frac{d^2r}{ds^2} + \Gamma^1_{11}\frac{dr}{ds}\cdot\frac{dr}{ds} + \Gamma^1_{44}\frac{dx^4}{ds}\cdot\frac{dx^4}{ds} = 0, \quad r > r_S$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial r} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{r_S}{r}\right)\frac{\partial}{\partial r}\left(1-\frac{r_S}{r}\right)^{-1} = -\left(1-\frac{r_S}{r}\right)^{-1}\cdot\frac{GM}{c^2r^2}$$

$$\Gamma^1_{44} = -\frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{44}}{\partial r} = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{r_S}{r}\right)\frac{\partial}{\partial r}\left(1-\frac{r_S}{r}\right) = -\left(1-\frac{r_S}{r}\right)\cdot\frac{GM}{c^2r^2}$$

$$\mathbf{a}^r = a^r\mathbf{e}_r, \quad a^r \overset{\text{df}}{=} \left(\operatorname{sgn} ds^2\right)c^2\frac{d^2r}{ds^2} = -c^2\frac{d^2r}{ds^2}$$

$$1 = \left(1-\frac{r_S}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + \left(1-\frac{r_S}{r}\right)\left(\frac{dx^4}{ds}\right)^2$$

$$\boxed{a^r = \left(\operatorname{sgn} ds^2\right)\frac{GM}{r^2}\left[\left(1-\frac{r_S}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + \left(1-\frac{r_S}{r}\right)\left(\frac{dx^4}{ds}\right)^2\right] = \left(\operatorname{sgn} ds^2\right)\frac{GM}{r^2} = -\frac{GM}{r^2}}$$

W przypadku małych prędkości $\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 << 1$, gdy odległość od centrum masy źródłowej jest dużo większa od promienia Schwarzschilda $\frac{r_S}{r} << 1$,

$$\frac{d^2r}{ds^2} = -\frac{1}{c^2A}\frac{d^2r}{dt^2} + \frac{1}{2c^2A^2}\frac{dA}{dt}\frac{dr}{dt} \approx -\frac{1}{c^2}\frac{d^2r}{dt^2},$$

gdzie $A = g_{44}\left[1-\frac{g_{11}}{g_{44}}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\frac{1}{c^2}\right], \quad g_{44} = \frac{1}{g_{11}} = 1-\frac{r_S}{r}.$

Radialne przyspieszenie grawitacyjne przyjmuje wtedy postać identyczną jak w teorii Newtona.

$$\boxed{\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2}}$$

- **Fizyczna (przeskalowana) składowa radialna przyspieszenia grawitacyjnego swobodnego spadku**

$$\mathbf{a}^r = a^r \mathbf{e}_r\,, \quad r > r_S = \frac{2GM}{c^2}\,, \quad ds^2 < 0$$

$$\mathbf{e}_r = \sqrt{g_{rr}}\,\hat{\mathbf{e}}_r\,, \quad |\hat{\mathbf{e}}_r| = 1$$

$$\mathbf{a}^r = a^r \sqrt{g_{rr}}\,\hat{\mathbf{e}}_r$$

$$\hat{a}^r = a^r \sqrt{g_{rr}}$$

$$a^r = -\frac{GM}{r^2}$$

$$\mathbf{a}^r = -\frac{GM}{r^2}\sqrt{g_{rr}}\,\hat{\mathbf{e}}_r$$

$$\mathbf{a}^r = \hat{a}^r\,\hat{\mathbf{e}}_r$$

$$\hat{a}^r = -\frac{GM}{r^2}\sqrt{g_{rr}}$$

$$g_{rr} = g_{11} = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1}$$

$$r > r_S = \frac{2GM}{c^2}$$

$$\boxed{\hat{a}^r = -\frac{GM}{r^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_S}{r}}}}$$

- **Wartość radialnego przyspieszenia grawitacyjnego swobodnego spadku**

$$|\mathbf{a}^r| = \sqrt{\mathbf{a}^r \cdot \mathbf{a}^r} = \sqrt{\left[-\frac{GM}{r^2}\sqrt{g_{rr}}\right]^2} = \frac{GM}{r^2}\sqrt{g_{rr}}$$

$$g_{rr} = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1}, \quad r > r_S = \frac{2GM}{c^2}$$

$$\boxed{|\mathbf{a}^r| = \frac{GM}{r^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_S}{r}}}}$$

- **Współrzędne Kruskala-Szekeresa**
  Aby pozbyć się osobliwości w metryce Schwarzschilda

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) d(ct)^2,$$

Kruskal [1] i niezależnie Szekeres [2] zaproponowali zamianę współrzędnych r, θ, φ, ct na współrzędne u, v, θ, φ.

$$r > r_S = \frac{2GM}{c^2}, \quad u \stackrel{df}{=} \left(\frac{r}{r_S} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{r}{2r_S}\right) \cosh\frac{ct}{2r_S}, \quad v \stackrel{df}{=} \left(\frac{r}{r_S} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{r}{2r_S}\right) \sinh\frac{ct}{2r_S}$$

$$r < r_S = \frac{2GM}{c^2}, \quad u \stackrel{df}{=} \left(1 - \frac{r}{r_S}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{r}{2r_S}\right) \sinh\frac{ct}{2r_S}, \quad v \stackrel{df}{=} \left(1 - \frac{r}{r_S}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{r}{2r_S}\right) \cosh\frac{ct}{2r_S}$$

We współrzędnych Kruskala-Szekeresa metryka Schwarzschilda przyjmuje postać:

$$\boxed{ds^2 = \frac{4r_S^3}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_S}\right)\left(du^2 - dv^2\right) + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2}$$

UWAGA
r nie jest zmienną, a jedynie parametrem określonym w uwikłanej postaci przez

$$r > r_S, \; u^2 - v^2 = \left(\frac{r}{r_S} - 1\right) \exp\left(\frac{r}{r_S}\right)$$

$$r < r_S, \; v^2 - u^2 = \left(1 - \frac{r}{r_S}\right) \exp\left(\frac{r}{r_S}\right)$$

Linie stałego r są hiperbolami o asymptotach
$v = u$ i $v = -u$.
W szczególności
$r = 0$, $v^2 - u^2 = 1$.
Mamy też
$r = r_S$, $u = v = 0$.

Dla radialnie poruszających się fotonów: $ds^2 = 0$, $d\theta = 0$, $d\varphi = 0$, mamy:

$$dv^2 - du^2 = 0, \quad \left(\frac{dv}{du}\right)^2 = 1, \quad \frac{dv}{du} = +1 \quad \text{albo} \quad \frac{dv}{du} = -1.$$

Na diagramie v od u oznacza to, że radialnie poruszające się fotony są reprezentowane przez linie proste nachylone pod kątami 45° albo 135°.

[1] M. D. Kruskal: *Maximal Extension of Schwarzschild Metric.* Physical Review **119**, 5 (September 1, 1960) 1743-1745.

[2] Gy. Szekeres: *On the singularities of a Riemannian manifold.* Publicationes Mathematicae. Institutum Mathematicum Universitatis Debreceniensis **7** (1960) 285-301.

- **Rozwiązanie Schwarzschilda a przybliżone rozwiązanie de Sittera-Einsteina**

Przybliżone rozwiązanie de Sittra-Einsteina, badane w poprzednim rozdziale, oparte było na ortonormalnym układzie wyjściowym. Dyskutowane w tym rozdziale rozwiązanie Schwarzschilda bazowało na sferycznym układzie wyjściowym. Poniżej porównamy oba te rozwiązania.

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2 + \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) dx^4 dx^4, \quad r_S = \frac{2GM}{c^2}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}, \quad \varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}, \quad \sin^2\theta = \frac{x^2+y^2}{r^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} ds^2 = &\left\{\frac{x^2}{r^2}\left[\left(1-\frac{r_S}{r}\right)^{-1} - 1\right] + 1\right\} dx^2 + \left\{\frac{y^2}{r^2}\left[\left(1-\frac{r_S}{r}\right)^{-1} - 1\right] + 1\right\} dy^2 + \\ &+ \left\{\frac{z^2}{r^2}\left[\left(1-\frac{r_S}{r}\right)^{-1} - 1\right] + 1\right\} dz^2 + \left(1-\frac{r_S}{r}\right)\left(dx^4\right)^2 + \\ &+ \frac{2}{r^2}\left[\left(1-\frac{r_S}{r}\right)^{-1} - 1\right]\left(xy\, dxdy + xz\, dxdz + yz\, dydz\right), \quad g = 1. \end{aligned}}$$

Przyjmując przybliżenie $r >> r_S$, $\left(1-\frac{r_S}{r}\right)^{-1} \approx 1 + \frac{r_S}{r}$, otrzymujemy przybliżone rozwiązanie Einsteina, pochodzące z 1915.

$$\boxed{\begin{aligned} ds^2 = &\left(\frac{x^2}{r^2}\frac{r_S}{r} + 1\right) dx^2 + \left(\frac{y^2}{r^2}\frac{r_S}{r} + 1\right) dy^2 + \left(\frac{z^2}{r^2}\frac{r_S}{r} + 1\right) dz^2 + \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) dx^4 dx^4 + \\ &+ 2\frac{xy}{r^2}\frac{r_S}{r} dxdy + 2\frac{xz}{r^2}\frac{r_S}{r} dxdz + 2\frac{yz}{r^2}\frac{r_S}{r} dydz. \end{aligned}}$$

Zakładając dodatkowo, że

$$\frac{2xyr_S}{r^3} = \frac{2xyGM}{c^2 r^3} << 1, \quad \frac{2xzr_S}{r^3} = \frac{2xzGM}{c^2 r^3} << 1, \quad \frac{2yzr_S}{r^3} = \frac{2yzGM}{c^2 r^3} << 1,$$

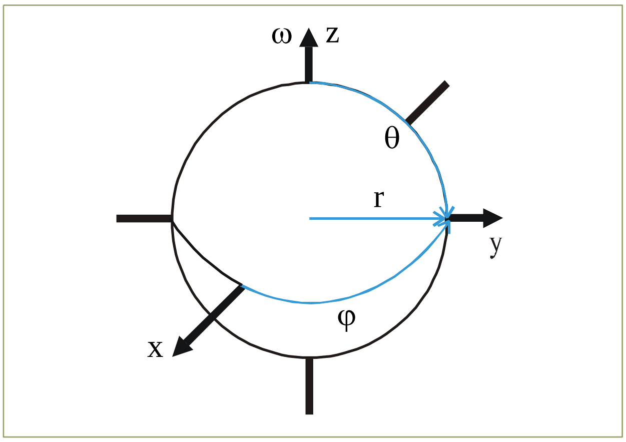
dostajemy równanie przypominające przybliżone rozwiązanie de Sittera-Einsteina.

$$\boxed{ds^2 = \left(1 + \frac{x^2}{r^2}\frac{r_S}{r}\right) dx^2 + \left(1 + \frac{y^2}{r^2}\frac{r_S}{r}\right) dy^2 + \left(1 + \frac{z^2}{r^2}\frac{r_S}{r}\right) dz^2 + \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) dx^4 dx^4}$$

Ślad tensora metrycznego, odpowiadającego powyższej formie metrycznej, wynosi cztery, a jego dywergencja w przybliżeniu jest równa zeru.

$$\sum_{\alpha=1}^{4} \gamma_{\alpha\alpha} = \left(\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} - 1\right)\frac{r_S}{r} = 0, \quad \sum_{\alpha=1}^{4} g_{\alpha\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{4}\left(\delta_{\alpha\alpha} + \gamma_{\alpha\alpha}\right) = 4, \quad \sum_{\nu=1}^{4}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \approx 0.$$

- **Swobodny spadek na wirującą planetę**



Układ nieprimowany obraca się wraz z planetą względem układu primowanego ze stałą prędkością kątową $\boldsymbol{\omega}$ skierowaną wzdłuż osi Z. Mamy więc $\varphi = \varphi' - \omega t'$. Pozostałe współrzędne w obu układach są identyczne.

$$(ds')^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r'}\right)^{-1}(dr')^2 + r'^2(d\theta')^2 + r'^2 \sin^2\theta'(d\varphi')^2 + \left(1 - \frac{r_S}{r'}\right)(dx'^4)^2, \quad r_S = \frac{2GM}{c^2}$$

$$\begin{array}{ll} r = r' & dr' = dr \\ \theta = \theta' & d\theta' = d\theta \\ \varphi = \varphi' - i^{-1}c^{-1}\omega x'^4 & d\varphi' = d\varphi + i^{-1}c^{-1}\omega dx'^4 \\ x^4 = x'^4 & dx'^4 = dx^4 \end{array}$$

$$\boxed{ds^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 + 2\, i^{-1}c^{-1}\omega r^2 \sin^2\theta\, d\varphi\, dx^4 + \left(1 - \frac{r_S}{r} - c^{-2}\omega^2 r^2 \sin^2\theta\right)(dx^4)^2}$$

Na podstawie formy metrycznej możemy wyznaczyć składowe kowariantnego tensora metrycznego i jego wyznacznik oraz składowe kontawariantnego tensora metrycznego.

$$g_{rr} = g_{11} = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1}, \quad g_{\theta\theta} = g_{22} = r^2, \quad g_{\varphi\varphi} = g_{33} = r^2 \sin^2\theta$$

$$g_{\varphi x^4} = g_{34} = i^{-1}c^{-1}\omega r^2 \sin^2\theta, \quad g_{x^4\varphi} = g_{43} = i^{-1}c^{-1}\omega r^2 \sin^2\theta$$

$$g_{x^4x^4} = g_{44} = 1 - \frac{r_S}{r} - c^{-2}\omega^2 r^2 \sin^2\theta$$

$$\boxed{g = g_{11}g_{22}\left(g_{33}g_{44} - g_{34}g_{34}\right) = r^4 \sin^2\theta} \qquad g_{33}g_{44} - g_{34}g_{34} = r^2 \sin^2\theta\left(1 - r_S r^{-1}\right)$$

$$g^{11} = g_{11}^{-1} = 1 - \frac{r_S}{r}, \quad g^{22} = g_{22}^{-1} = r^{-2}, \quad g^{33} = \frac{g_{44}}{g_{33}g_{44} - g_{34}g_{34}}$$

$$g^{34} = g^{43} = \frac{-g_{34}}{g_{33}g_{44} - g_{34}g_{34}} = -i^{-1}c^{-1}\omega\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1}, \quad g^{44} = \frac{g_{33}}{g_{33}g_{44} - g_{34}g_{34}} = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1}$$

$$\boxed{ds^2 = -c^2 dt^2 g_{44}\left\{1 - \frac{1}{c^2}\left[\frac{g_{11}}{g_{44}}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{r^2}{g_{44}}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{r^2 \sin^2\theta}{g_{44}}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] - \frac{2\omega r^2 \sin^2\theta}{c^2 g_{44}}\frac{d\varphi}{dt}\right\}}$$

Symbole Christoffela pierwszego rodzaju:

$$\left[\begin{smallmatrix}1\ 1\\ 1\end{smallmatrix}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial r}=-\frac{1}{2}\left(1-\frac{r_S}{r}\right)^{-2}\cdot\frac{r_S}{r^2}$$

$$\left[\begin{smallmatrix}2\ 2\\ 1\end{smallmatrix}\right]=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial r}=-r$$

$$\left[\begin{smallmatrix}3\ 3\\ 1\end{smallmatrix}\right]=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial r}=-r\sin^2\theta$$

$$\left[\begin{smallmatrix}3\ 3\\ 2\end{smallmatrix}\right]=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial \theta}=-r^2\sin\theta\cos\theta$$

$$\left[\begin{smallmatrix}4\ 4\\ 1\end{smallmatrix}\right]=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial r}=-\frac{1}{2}\frac{r_S}{r^2}+\frac{1}{c^2}\cdot\omega^2 r\sin^2\theta$$

$$\left[\begin{smallmatrix}4\ 4\\ 2\end{smallmatrix}\right]=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial \theta}=\frac{1}{c^2}\cdot\omega^2 r^2\sin\theta\cos\theta$$

$$\left[\begin{smallmatrix}1\ 2\\ 2\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix}2\ 1\\ 2\end{smallmatrix}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial r}=r$$

$$\left[\begin{smallmatrix}1\ 3\\ 3\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix}3\ 1\\ 3\end{smallmatrix}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial r}=r\sin^2\theta$$

$$\left[\begin{smallmatrix}1\ 3\\ 4\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix}3\ 1\\ 4\end{smallmatrix}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{34}}{\partial r}=\frac{1}{ic}\cdot\omega r\sin^2\theta$$

$$\left[\begin{smallmatrix}1\ 4\\ 3\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix}4\ 1\\ 3\end{smallmatrix}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{43}}{\partial r}=\frac{1}{ic}\cdot\omega r\sin^2\theta$$

$$\left[\begin{smallmatrix}1\ 4\\ 4\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix}4\ 1\\ 4\end{smallmatrix}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial r}=\frac{1}{2}\frac{r_S}{r^2}-\frac{1}{c^2}\cdot\omega^2 r\sin^2\theta$$

$$\left[\begin{smallmatrix}2\ 3\\ 3\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix}3\ 2\\ 3\end{smallmatrix}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial \theta}=r^2\sin\theta\cos\theta$$

$$\left[\begin{smallmatrix}2\ 3\\ 4\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix}3\ 2\\ 4\end{smallmatrix}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{34}}{\partial \theta}=\frac{1}{ic}\cdot\omega r^2\sin\theta\cos\theta$$

$$\left[\begin{smallmatrix}2\ 4\\ 3\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix}4\ 2\\ 3\end{smallmatrix}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{34}}{\partial \theta}=\frac{1}{ic}\cdot\omega r^2\sin\theta\cos\theta$$

$$\left[\begin{smallmatrix}2\ 4\\ 4\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix}4\ 2\\ 4\end{smallmatrix}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial \theta}=-\frac{1}{c^2}\cdot\omega^2 r^2\sin\theta\cos\theta$$

$$\left[\begin{smallmatrix}3\ 4\\ 1\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix}4\ 3\\ 1\end{smallmatrix}\right]=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{34}}{\partial r}=-\frac{1}{ic}\cdot\omega r\sin^2\theta$$

$$\left[\begin{smallmatrix}3\ 4\\ 2\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix}4\ 3\\ 2\end{smallmatrix}\right]=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{34}}{\partial \theta}=-\frac{1}{ic}\cdot\omega r^2\sin\theta\cos\theta$$

Symbole Christoffela drugiego rodzaju (przybliżone wartości podano dla $r >> r_S$):

$$\Gamma^1_{11}=g^{11}\left[\begin{smallmatrix}1\ 1\\ 1\end{smallmatrix}\right]=-\frac{1}{2}\left(1-\frac{r_S}{r}\right)^{-1}\cdot\frac{r_S}{r^2}=-\left(1-\frac{r_S}{r}\right)^{-1}\cdot\frac{1}{c^2}\cdot\frac{GM}{r^2}\approx-\frac{1}{c^2}\cdot\frac{GM}{r^2}$$

$$\Gamma^1_{22}=g^{11}\left[\begin{smallmatrix}2\ 2\\ 1\end{smallmatrix}\right]=-\left(1-\frac{r_S}{r}\right)\cdot r\approx -r$$

$$\Gamma^1_{33}=g^{11}\left[\begin{smallmatrix}3\ 3\\ 1\end{smallmatrix}\right]=-\left(1-\frac{r_S}{r}\right)\cdot r\sin^2\theta\approx -r\sin^2\theta$$

$$\Gamma^1_{34}=\Gamma^1_{43}=g^{11}\left[\begin{smallmatrix}3\ 4\\ 1\end{smallmatrix}\right]=-\left(1-\frac{r_S}{r}\right)\cdot\frac{1}{ic}\cdot\omega r\sin^2\theta\approx-\frac{1}{ic}\cdot\omega r\sin^2\theta$$

$$\Gamma^1_{44}=g^{11}\left[\begin{smallmatrix}4\ 4\\ 1\end{smallmatrix}\right]=\left(1-\frac{r_S}{r}\right)\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{r_S}{r^2}+\frac{1}{c^2}\cdot\omega^2 r\sin^2\theta\right)\approx-\frac{1}{c^2}\cdot\frac{GM}{r^2}+\frac{1}{c^2}\cdot\omega^2 r\sin^2\theta$$

$$\Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=g^{22}\left[\begin{smallmatrix}1\ 2\\ 2\end{smallmatrix}\right]=\frac{1}{r}$$

$$\Gamma^2_{33}=g^{22}\left[\begin{smallmatrix}3\ 3\\ 2\end{smallmatrix}\right]=-\sin\theta\cos\theta$$

$$\Gamma^2_{34}=\Gamma^2_{43}=g^{22}\left[\begin{smallmatrix}3\ 4\\ 2\end{smallmatrix}\right]=-\frac{1}{ic}\cdot\omega\sin\theta\cos\theta$$

$$\Gamma^2_{44}=g^{22}\left[\begin{smallmatrix}4\ 4\\ 2\end{smallmatrix}\right]=\frac{1}{c^2}\cdot\omega^2\sin\theta\cos\theta$$

$$g^{33}+g^{34}\cdot\frac{\omega}{ic}=\frac{g_{44}-g_{34}\cdot\dfrac{\omega}{ic}}{g_{33}g_{44}-g_{34}g_{34}}=\frac{1}{r^2\sin^2\theta}$$

$$g^{43}+g^{44}\cdot\frac{\omega}{ic}=\frac{-g_{34}+g_{33}\cdot\dfrac{\omega}{ic}}{g_{33}g_{44}-g_{34}g_{34}}=0$$

$$\Gamma^3_{13}=\Gamma^3_{31}=g^{33}\left[{1\,3 \atop 3}\right]+g^{34}\left[{1\,3 \atop 4}\right]=r\sin^2\theta\cdot\left(g^{33}+g^{34}\cdot\frac{\omega}{ic}\right)=\frac{1}{r}$$

$$\Gamma^3_{14}=\Gamma^3_{41}=g^{33}\left[{1\,4 \atop 3}\right]+g^{34}\left[{1\,4 \atop 4}\right]=\frac{\omega}{icr}\cdot\left[1-\frac{1}{2}\cdot\frac{r_S}{r}\cdot\left(1-\frac{r_S}{r}\right)^{-1}\right]\underset{c^2>>\omega^2r^2}{\overset{r>>r_S}{\approx}}\frac{\omega}{icr}$$

$$\Gamma^3_{23}=\Gamma^3_{32}=g^{33}\left[{2\,3 \atop 3}\right]+g^{34}\left[{2\,3 \atop 4}\right]=r^2\sin\theta\cos\theta\cdot\left(g^{33}+g^{34}\cdot\frac{\omega}{ic}\right)=\mathrm{ctg}\,\theta$$

$$\Gamma^3_{24}=\Gamma^3_{42}=g^{33}\left[{2\,4 \atop 3}\right]+g^{34}\left[{2\,4 \atop 4}\right]=\frac{1}{ic}\cdot\omega r^2\sin\theta\cos\theta\cdot\left(g^{33}+g^{34}\cdot\frac{\omega}{ic}\right)=\frac{1}{ic}\cdot\omega\,\mathrm{ctg}\,\theta$$

$$\Gamma^4_{13}=\Gamma^4_{31}=g^{43}\left[{1\,3 \atop 3}\right]+g^{44}\left[{1\,3 \atop 4}\right]=0$$

$$\Gamma^4_{14}=\Gamma^4_{41}=g^{43}\left[{1\,4 \atop 3}\right]+g^{44}\left[{1\,4 \atop 4}\right]=\frac{1}{c^2}\cdot\frac{GM}{r^2}\cdot\left(1-\frac{r_S}{r}\right)^{-1}\overset{r>>r_S}{\approx}\frac{1}{c^2}\cdot\frac{GM}{r^2}$$

$$\Gamma^4_{23}=\Gamma^4_{32}=g^{43}\left[{2\,3 \atop 3}\right]+g^{44}\left[{2\,3 \atop 4}\right]=0$$

$$\Gamma^4_{24}=\Gamma^4_{42}=g^{43}\left[{2\,4 \atop 3}\right]+g^{44}\left[{2\,4 \atop 4}\right]=0$$

Trójwymiarowe równania ruchu swobodnej cząstki:

$$\frac{d^2r}{ds^2}=-\Gamma^1_{11}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds}-\Gamma^1_{22}\frac{d\theta}{ds}\frac{d\theta}{ds}-\Gamma^1_{33}\frac{d\varphi}{ds}\frac{d\varphi}{ds}-2\Gamma^1_{34}\frac{d\varphi}{ds}\frac{dx^4}{ds}-\Gamma^1_{44}\frac{dx^4}{ds}\frac{dx^4}{ds}$$

$$\frac{d^2\theta}{ds^2}=-2\Gamma^2_{12}\frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds}-\Gamma^2_{33}\frac{d\varphi}{ds}\frac{d\varphi}{ds}-2\Gamma^2_{34}\frac{d\varphi}{ds}\frac{dx^4}{ds}-\Gamma^2_{44}\frac{dx^4}{ds}\frac{dx^4}{ds}$$

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2}=-2\Gamma^3_{13}\frac{dr}{ds}\frac{d\varphi}{ds}-2\Gamma^3_{14}\frac{dr}{ds}\frac{dx^4}{ds}-2\Gamma^3_{23}\frac{d\theta}{ds}\frac{d\varphi}{ds}-2\Gamma^3_{24}\frac{d\theta}{ds}\frac{dx^4}{ds}$$

$$\frac{d}{ds}\approx\frac{1}{ic}\frac{d}{dt},\qquad \frac{d^2}{ds^2}\approx-\frac{1}{c^2}\frac{d^2}{dt^2},\qquad \text{gdy}\quad r>>r_S,\quad \omega^2r^2<<c^2,\quad v^2<<c^2$$

$$\mathbf{a}=\frac{d^2r}{dt^2}\sqrt{g_{rr}}\frac{\mathbf{e}_r}{\sqrt{g_{rr}}}+\frac{d^2\theta}{dt^2}\sqrt{g_{\theta\theta}}\frac{\mathbf{e}_\theta}{\sqrt{g_{\theta\theta}}}+\frac{d^2\varphi}{dt^2}\sqrt{g_{\varphi\varphi}}\frac{\mathbf{e}_\varphi}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}}$$

$$\sqrt{g_{rr}}=1,\qquad \sqrt{g_{\theta\theta}}=r,\qquad \sqrt{g_{\varphi\varphi}}=r\sin\theta$$

$$\frac{d^2r}{dt^2}\cdot\sqrt{g_{rr}}=-\frac{GM}{r^2}+\omega^2r\sin^2\theta+2\omega\,r\sin^2\theta\frac{d\varphi}{dt}+r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r\sin^2\theta\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}\cdot\sqrt{g_{\theta\theta}}=\omega^2r\sin\theta\cos\theta+2\omega\,r\sin\theta\cos\theta\frac{d\varphi}{dt}-2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r\sin\theta\cos\theta\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}\cdot\sqrt{g_{\varphi\varphi}}=-2\omega\sin\theta\frac{dr}{dt}-2\omega\,r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}-2\sin\theta\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}-2r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\frac{d\varphi}{dt}$$

Przyspieszenie swobodnie spadającej cząstki na wirującą planetę w przypadku słabo zakrzywionej czasoprzestrzeni dla małych prędkości zapiszemy w postaci wektorowej umożliwiającej fizyczną interpretację poszczególnych członów.

$$\boxed{\mathbf{a} = \mathbf{a}_G + \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_B} \qquad \hat{\mathbf{e}}_r = \frac{\mathbf{e}_r}{\sqrt{g_{rr}}}, \quad \hat{\mathbf{e}}_\theta = \frac{\mathbf{e}_\theta}{\sqrt{g_{\theta\theta}}}, \quad \hat{\mathbf{e}}_\varphi = \frac{\mathbf{e}_\varphi}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}}$$

$\mathbf{a}_G$ = przyspieszenie grawitacyjne

$\mathbf{a}_O$ = przyspieszenie odśrodkowe

$\mathbf{a}_C$ = przyspieszenie Coriolisa

$\mathbf{a}_B$ = przyspieszenie balistyzne

$$\mathbf{a}_G = -\frac{GM}{r^2}\cdot\hat{\mathbf{e}}_r$$

$$\mathbf{a}_O = \omega^2 r\sin^2\theta\cdot\hat{\mathbf{e}}_r + \omega^2 r\sin\theta\cos\theta\cdot\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

$$\mathbf{a}_C = 2\mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega} = a_C^r\cdot\hat{\mathbf{e}}_r + a_C^\theta\cdot\hat{\mathbf{e}}_\theta + a_C^\varphi\cdot\hat{\mathbf{e}}_\varphi$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega^r\cdot\hat{\mathbf{e}}_r + \omega^\theta\cdot\hat{\mathbf{e}}_\theta + \omega^\varphi\cdot\hat{\mathbf{e}}_\varphi$$

$$\mathbf{v} = v^r\cdot\hat{\mathbf{e}}_r + v^\theta\cdot\hat{\mathbf{e}}_\theta + v^\varphi\cdot\hat{\mathbf{e}}_\varphi$$

$$\omega^r = \omega\cos\theta, \quad \omega^\theta = -\omega\sin\theta, \quad \omega^\varphi = 0$$

$$v^r = \frac{dr}{dt}, \quad v^\theta = r\frac{d\theta}{dt}, \quad v^\varphi = r\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}$$

$$a_C^r = 2\left(v^\theta\omega^\varphi - v^\varphi\omega^\theta\right) = 2\omega r\sin^2\theta\frac{d\varphi}{dt}$$

$$a_C^\theta = 2\left(v^\varphi\omega^r - v^r\omega^\varphi\right) = 2\omega r\sin\theta\cos\theta\frac{d\varphi}{dt}$$

$$a_C^\varphi = 2\left(v^r\omega^\theta - v^\theta\omega^r\right) = -2\omega\sin\theta\frac{dr}{dt} - 2\omega r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$\mathbf{a}_C = 2\omega r\sin^2\theta\frac{d\varphi}{dt}\cdot\hat{\mathbf{e}}_r + 2\omega r\sin\theta\cos\theta\frac{d\varphi}{dt}\cdot\hat{\mathbf{e}}_\theta - \left(2\omega\sin\theta\frac{dr}{dt} + 2\omega r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right)\cdot\hat{\mathbf{e}}_\varphi$$

$$\mathbf{a}_C = 2\omega\sin\theta\, v^\varphi\cdot\hat{\mathbf{e}}_r + 2\omega\cos\theta\, v^\varphi\cdot\hat{\mathbf{e}}_\theta - 2\omega\left(\sin\theta\, v^r + \cos\theta\, v^\theta\right)\cdot\hat{\mathbf{e}}_\varphi$$

$$\mathbf{a}_B = \left(r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\sin^2\theta\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right)\cdot\hat{\mathbf{e}}_r + \left(-2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\sin\theta\cos\theta\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right)\cdot\hat{\mathbf{e}}_\theta +$$
$$+\left(-2\sin\theta\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} - 2r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right)\cdot\hat{\mathbf{e}}_\varphi$$

$$\mathbf{a}_B = \frac{1}{r}\left(v^\theta v^\theta + v^\varphi v^\varphi\right)\cdot\hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r}\left(-2v^r v^\theta + v^\varphi v^\varphi \mathrm{ctg}\theta\right)\cdot\hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{1}{r}\left(-2v^r v^\varphi - v^\theta v^\varphi \mathrm{ctg}\theta\right)\cdot\hat{\mathbf{e}}_\varphi$$

UWAGA
Ze względu na pozorne osobliwości na biegunach sferycznego układu współrzędnych należy założyć, że $\theta \neq 0$ i $\theta \neq \pi$.

Przyspieszenie swobodnie spadającej cząstki na wirującą planetę w przypadku słabo zakrzywionej czasoprzestrzeni dla małych prędkości zapiszemy ponownie w postaci wektorowej.

$$\boxed{\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_\theta + \mathbf{a}_\varphi} \qquad \hat{\mathbf{e}}_r = \frac{\mathbf{e}_r}{\sqrt{g_{rr}}}, \quad \hat{\mathbf{e}}_\theta = \frac{\mathbf{e}_\theta}{\sqrt{g_{\theta\theta}}}, \quad \hat{\mathbf{e}}_\varphi = \frac{\mathbf{e}_\varphi}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}}$$

$$\mathbf{a}_r = \left(-\frac{GM}{r^2} + \omega^2 r\sin^2\theta + 2\omega r\sin^2\theta\frac{d\varphi}{dt} + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\sin^2\theta\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right)\cdot\hat{\mathbf{e}}_r$$

$$\mathbf{a}_\theta = \left(\omega^2 r\sin\theta\cos\theta + 2\omega r\sin\theta\cos\theta\frac{d\varphi}{dt} - 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\sin\theta\cos\theta\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right)\cdot\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

$$\mathbf{a}_\varphi = -\left(2\omega\sin\theta\frac{dr}{dt} + 2\omega r\cos\theta\frac{d\theta}{dt} + 2\sin\theta\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + 2r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right)\cdot\hat{\mathbf{e}}_\varphi$$

Niezerowy wypadkowy moment obrotowy $m(\mathbf{r}\times\mathbf{a})$ działający na cząstkę testową o masie m powoduje precesję jej momentu orbitalego.

$$m(\mathbf{r}\times\mathbf{a}) = m\mathbf{r}\times(\mathbf{a}_r + \mathbf{a}_\theta + \mathbf{a}_\varphi)$$

$$m(\mathbf{r}\times\mathbf{a}) = m\mathbf{r}\times\mathbf{a}_r + m\mathbf{r}\times\mathbf{a}_\theta + m\mathbf{r}\times\mathbf{a}_\varphi$$

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{e}}_r$$

$$\mathbf{a}_r = a_r\hat{\mathbf{e}}_r, \quad a_r = -\frac{GM}{r^2} + \omega^2 r\sin^2\theta + 2\omega r\sin^2\theta\frac{d\varphi}{dt} + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\sin^2\theta\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\mathbf{a}_\theta = a_\theta\hat{\mathbf{e}}_\theta, \quad a_\theta = \omega^2 r\sin\theta\cos\theta + 2\omega r\sin\theta\cos\theta\frac{d\varphi}{dt} - 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\sin\theta\cos\theta\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\mathbf{a}_\varphi = a_\varphi\hat{\mathbf{e}}_\varphi, \quad a_\varphi = -\left(2\omega\sin\theta\frac{dr}{dt} + 2\omega r\cos\theta\frac{d\theta}{dt} + 2\sin\theta\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + 2r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right)$$

$$m(\mathbf{r}\times\mathbf{a}) = mr\hat{\mathbf{e}}_r\times a_r\hat{\mathbf{e}}_r + mr\hat{\mathbf{e}}_r\times a_\theta\hat{\mathbf{e}}_\theta + mr\hat{\mathbf{e}}_r\times a_\varphi\hat{\mathbf{e}}_\varphi$$

$$m(\mathbf{r}\times\mathbf{a}) = mra_r(\hat{\mathbf{e}}_r\times\hat{\mathbf{e}}_r) + mra_\theta(\hat{\mathbf{e}}_r\times\hat{\mathbf{e}}_\theta) + mra_\varphi(\hat{\mathbf{e}}_r\times\hat{\mathbf{e}}_\varphi)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_r\times\hat{\mathbf{e}}_r = 0$$

$$\hat{\mathbf{e}}_r\times\hat{\mathbf{e}}_\theta = +\hat{\mathbf{e}}_\varphi$$

$$\hat{\mathbf{e}}_r\times\hat{\mathbf{e}}_\varphi = -\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

$$m(\mathbf{r}\times\mathbf{a}) = +mra_\theta\hat{\mathbf{e}}_\varphi - mra_\varphi\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

Niezerowy wypadkowy moment obrotowy można przedstawić w postaci sumy momentów odpowiadających odpowiednio przyspieszeniom $\mathbf{a}_1$ oraz $\mathbf{a}_2$

$$\mathbf{a}_1 = \left(-2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\sin\theta\cos\theta\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right)\cdot\hat{\mathbf{e}}_\theta - \left(2\sin\theta\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + 2r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right)\cdot\hat{\mathbf{e}}_\varphi$$

$$\mathbf{a}_2 = \left(\omega^2 r\sin\theta\cos\theta + 2\omega r\sin\theta\cos\theta\frac{d\varphi}{dt}\right)\cdot\hat{\mathbf{e}}_\theta - \left(2\omega\sin\theta\frac{dr}{dt} + 2\omega r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right)\cdot\hat{\mathbf{e}}_\varphi.$$

Tylko drugi z tych momentów obrotowych zależy od wartości prędkości kątowej ω wirowania planety.

PRZYKŁADY

Pierwsza prędkość kosmiczna dla orbity kołowej w płaszczyźnie równikowej

Z założenia

$$r = \text{const}\,, \quad v^r = \frac{dr}{dt} = 0\,, \quad \theta = \tfrac{1}{2}\pi\,, \quad v^\theta = r\frac{d\theta}{dt} = 0\,, \quad v^\varphi = r\sin\theta\frac{d\varphi}{dt} = r\frac{d\varphi}{dt}\,.$$

Mamy więc

$$\mathbf{a}_r = 0 \quad \text{lub} \quad \mathbf{a}_G + \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_B = 0$$

$$-\frac{GM}{r^2} + \omega^2 r + 2\omega\left|v^\varphi\right| + \frac{\left|v^\varphi\right|\left|v^\varphi\right|}{r} = 0 \quad \text{oraz} \quad -\frac{GM}{r^2} + \omega^2 r - 2\omega\left|v^\varphi\right| + \frac{\left|v^\varphi\right|\left|v^\varphi\right|}{r} = 0\,.$$

Wśród czterech rozwiązań powyższych równań będących trójmianami kwadratowymi względem $|v^\varphi|$, tylko dwa rozwiązania są fizyczne.

$$\boxed{\left|v_1^\varphi\right| = +v_1^\varphi = -\omega r + \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad \text{i} \quad \left|v_2^\varphi\right| = -v_2^\varphi = +\omega r + \sqrt{\frac{GM}{r}}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\omega = 2\pi\frac{\text{rad}}{\text{doba}} = 7{,}3\cdot 10^{-5}\,\frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ &r = 6{,}4\cdot 10^6\,\text{m} \\ &M = 6\cdot 10^{24}\,\text{kg} \\ &G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg}\cdot\text{s}^2} \end{aligned}}$$

$$\omega r = 467{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 0{,}5\cdot 10^3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,, \quad \sqrt{\frac{GM}{r}} = 7{,}9\cdot 10^3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_1^\varphi = +7{,}4\cdot 10^3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,, \quad \mathbf{v}_1^\varphi = v_1^\varphi\,\mathbf{e}_\varphi$$

$$v_2^\varphi = -8{,}4\cdot 10^3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,, \quad \mathbf{v}_2^\varphi = v_2^\varphi\,\mathbf{e}_\varphi$$

Prędkość $\mathbf{v}_1^\varphi$ należy nadać rakiecie wystrzelonej w kierunku wschodnim, przyspieszenie Coriolisa $\mathbf{a}_{C1} = 2m\left(\mathbf{v}_1^\varphi \times \boldsymbol{\omega}\right)$ skierowane jest wtedy radialnie od centrum źródła pola. Prędkość $\mathbf{v}_2^\varphi$ należy nadać rakiecie wystrzelonej w kierunku zachodnim, przyspieszenie Coriolisa $\mathbf{a}_{C2} = 2m\left(\mathbf{v}_2^\varphi \times \boldsymbol{\omega}\right)$ skierowane jest wtedy radialnie ku centrum źródła pola. Okres obiegu orbity w kierunku wschodnim jest większy niż w kierunku zachodnim.

Ogólna postać w zmiennych (t, r, θ, φ) równań ruchu swobodnej cząstki próbnej w polu grawitacyjnym wirującej planety

Aby przedstawić w ogólnej postaci w zmiennych (t, r, θ, φ) równania ruchu swobodnej cząstki próbnej w polu grawitacyjnym wirującej planety, potrzebne będą następujące relacje

$$ds^2 = -c^2 A\, dt^2\,,$$

$$ds = i\,c\sqrt{A}\,dt\,,$$

$$\frac{d}{ds} = \frac{1}{ic\sqrt{A}}\frac{d}{dt}\,,$$

$$\left(\frac{d}{ds}\right)^2 = -\frac{1}{c^2 A}\left(\frac{d}{dt}\right)^2,$$

$$\frac{d^2}{ds^2} = -\frac{1}{c^2 A}\frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{2c^2 A^2}\frac{dA}{dt}\frac{d}{dt}\,,$$

$$A = g_{44}\left\{1 - \frac{1}{c^2}\left[\frac{g_{11}}{g_{44}}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{r^2}{g_{44}}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{r^2\sin^2\theta}{g_{44}}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] - \frac{2\omega r^2\sin^2\theta}{c^2 g_{44}}\frac{d\varphi}{dt}\right\}\,.$$

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\left(1-\frac{r_S}{r}\right)\left\{-\frac{GM}{r^2}\left[1-\left(1-\frac{r_S}{r}\right)^{-2}\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]+\omega^2 r\sin^2\theta+2\omega\, r\sin^2\theta\frac{d\varphi}{dt}+r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\right.$$
$$\left.+r\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right\}+\frac{1}{2A}\frac{dA}{dt}\frac{dr}{dt}$$
$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=\omega^2\sin\theta\cos\theta+2\omega\sin\theta\cos\theta\frac{d\varphi}{dt}-\frac{2}{r}\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+\sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+\frac{1}{2A}\frac{dA}{dt}\frac{d\theta}{dt}$$
$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-\frac{2\omega}{r}\frac{dr}{dt}-2\omega\,\mathrm{ctg}\theta\frac{d\theta}{dt}-\frac{2}{r}\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}-2\mathrm{ctg}\theta\frac{d\theta}{dt}\frac{d\varphi}{dt}+\omega\left(1-\frac{r_S}{r}\right)^{-1}\frac{r_S}{r^2}\frac{dr}{dt}+\frac{1}{2A}\frac{dA}{dt}\frac{d\varphi}{dt}$$

Równania te opisują efekty spowodowane przyspieszeniami – grawitacyjnym, odśrodkowym, Coriolisa, de Sittera oraz Lensego-Thirringa. Swobodna cząstka próbna w polu grawitacyjnym wirującej planety porusza się po rozecie eliptycznej, orbitalny moment pędu (prostopadły do płaszczyzny orbity) ulega precesji, a okres obiegu orbity zależy od kierunku ruchu cząstki. Pierwsze zjawisko wyjaśnił Albert Einstein w 1915. Drugi i trzeci efekt opisali – Willem de Sitter w 1916 oraz Joseph Lense i Hans Thirring w 1918.

Dla $r \gg r_S$ oraz $v_r^2, v_\theta^2, v_\varphi^2, \omega^2 r^2 \ll c^2$ równania ruchu swobodnej cząstki próbnej redukują się do

$$\frac{d^2r}{dt^2}=-\frac{GM}{r^2}+\omega^2 r\sin^2\theta+2\omega\, r\sin^2\theta\frac{d\varphi}{dt}+r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+r\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$
$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=\omega^2\sin\theta\cos\theta+2\omega\sin\theta\cos\theta\frac{d\varphi}{dt}-\frac{2}{r}\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+\sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$
$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-\frac{2\omega}{r}\frac{dr}{dt}-2\omega\,\mathrm{ctg}\theta\frac{d\theta}{dt}-\frac{2}{r}\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}-2\mathrm{ctg}\theta\frac{d\theta}{dt}\frac{d\varphi}{dt}$$

Równania te stanowią uproszczony opis efektów spowodowanych przyspieszeniami – grawitacyjnym, odśrodkowym, Coriolisa oraz balistycznym.

Kiedy planeta nie wiruje, równania ruchu stają się jeszcze prostsze.

$$\frac{d^2r}{dt^2}=-\frac{GM}{r^2}+r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+r\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$
$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{2}{r}\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+\sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$
$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-\frac{2}{r}\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}-2\mathrm{ctg}\theta\frac{d\theta}{dt}\frac{d\varphi}{dt}$$

Z równań tych wynika, że swobodna cząstka próbna porusza się po orbicie eliptycznej (w szczególności kołowej), orbitalny moment pędu (prostopadły do płaszczyzny orbity) jest stały, a okres obiegu orbity nie zależy od kierunku ruchu cząstki.

4 ROZWIĄZANIE WEYLA

- **Metryka Weyla**

W 1917 Weyl badał statyczne osiowo symetryczne rozwiązanie próżniowych równań pola. Źródłem takich pól jest nieruchoma masa, rozmieszczona z zachowaniem osiowej symetrii. Poszukiwane rozwiązanie próżniowych równań pola w układzie współrzędnych cylindrycznych (walcowych)

$x^1 = z\,,\quad x^2 = \rho\,,\quad x^3 = \varphi\,,\quad x^4 = ict$

ma postać

$$\boxed{g_{11} = e^{\nu}\,,\quad g_{22} = e^{\nu}\,,\quad g_{33} = e^{-\mu}\left(x^2\right)^2,\quad g_{44} = e^{\mu}}$$

Odpowiada mu różniczkowa forma kwadratowa

$$ds^2 = e^{\nu}(dz)^2 + e^{\nu}(d\rho)^2 + e^{-\mu}\rho^2(d\varphi)^2 + e^{-\mu}\left(dx^4\right)^2,$$

$$ds^2 = e^{\nu}\left(dx^1\right)^2 + e^{\nu}\left(dx^2\right)^2 + e^{-\mu}\left(x^2\right)^2\left(dx^3\right)^2 + e^{\mu}\left(dx^4\right)^2.$$

Ponadto zakładamy, że

$$\mu = \mu(x^1, x^2)\,,\quad \nu = \nu(x^1, x^2)\,,\quad \frac{\partial\mu}{\partial x^3} = \frac{\partial\mu}{\partial x^4} = \frac{\partial\nu}{\partial x^3} = \frac{\partial\nu}{\partial x^4} = 0\,.$$

Podstawiając składowe tensora metrycznego do próżniowych równań pola, (symbole Christoffela drugiego rodzaju i składowe tensora Ricciego, odpowiadające temu rozwiązaniu, zamieściliśmy w Niezbędniku) otrzymujemy

$$2R_{11} = \frac{\partial^2\nu}{\partial x^1\partial x^1} + \frac{\partial^2\nu}{\partial x^2\partial x^2} + \frac{1}{x^2}\frac{\partial\nu}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial\mu}{\partial x^1}\right)^2 = 0\,,$$

$$2R_{22} = \frac{\partial^2\nu}{\partial x^1\partial x^1} + \frac{\partial^2\nu}{\partial x^2\partial x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial\nu}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial\mu}{\partial x^2}\right)^2 - \frac{2}{x^2}\frac{\partial\mu}{\partial x^2} = 0\,,$$

$$-2\left(x^2\right)^{-2}e^{\mu}e^{\nu}R_{33} = \frac{\partial^2\mu}{\partial x^1\partial x^1} + \frac{\partial^2\mu}{\partial x^2\partial x^2} + \frac{1}{x^2}\frac{\partial\mu}{\partial x^2} = 0\,,$$

$$-2\left(x^2\right)^{-2}e^{\mu}e^{\nu}R_{33} = 2e^{\mu}e^{\nu}R_{44} = \frac{\partial^2\mu}{\partial x^1\partial x^1} + \frac{\partial^2\mu}{\partial x^2\partial x^2} + \frac{1}{x^2}\frac{\partial\mu}{\partial x^2} = 0\,.$$

Powyższe równania zapiszemy w innej formie

$$\boxed{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\mu}{\partial x^1\partial x^1} + \frac{\partial^2\mu}{\partial x^2\partial x^2} + \frac{1}{x^2}\frac{\partial\mu}{\partial x^2} = 0\\
&\frac{\partial^2\nu}{\partial x^1\partial x^1} + \frac{\partial^2\nu}{\partial x^2\partial x^2} + \frac{1}{x^2}\frac{\partial\nu}{\partial x^2} = -\left(\frac{\partial\mu}{\partial x^1}\right)^2\\
&\left(\frac{\partial\mu}{\partial x^1}\right)^2 = \left(\frac{\partial\mu}{\partial x^2}\right)^2 - \frac{2}{x^2}\left(\frac{\partial\mu}{\partial x^2} + \frac{\partial\nu}{\partial x^2}\right)
\end{aligned}}$$

Zauważmy, że pierwsze z nich jest równaniem Laplace'a we współrzędnych cylindrycznych.

5 ROZWIĄZANIE KERRA

- **Metryka Kerra**

W 1963 roku Kerr [1] zaproponował stacjonarne osiowo symetryczne rozwiązanie próżniowych równań pola grawitacyjnego, którego źródłem jest wirująca masa. Metryka Kerra zapisywana jest zwykle w postaci podanej w 1967 przez Boyera i Lindquista [2].

$$ds^2 = \frac{r^2 + a^2\cos^2\theta}{r^2 - r\,r_S + a^2}\,dr^2 + \left(r^2 + a^2\cos^2\theta\right)d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{a^2 r\,r_S\sin^2\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\right)\sin^2\theta\,d\varphi^2 +$$

$$-\frac{2a\,r\,r_S\sin^2\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\,d\varphi\cdot d(ct) - \left(1 - \frac{r\,r_S}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\right)d(ct)^2$$

$$r_S = \frac{2GM}{c^2}$$

$$a = \frac{\text{moment pędu układu względem osi z}}{\text{całkowita masa układu}\cdot c}, \qquad [a] = \mathrm{m}$$

Dla $a = 0$ metryka Kerra redukuje się do metryki Schwarzschilda

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2 - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)d(ct)^2 .$$

Dla dużych wartości r metryka Kerra przyjmuje graniczną postać

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2 - 2a\frac{r_S}{r}\sin^2\theta\,d\varphi\,d(ct) - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)d(ct)^2 .$$

Metryka Kerra przedstawiana jest również jako

$$ds^2 = \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{a^2 r\,r_S\sin^2\theta}{\rho^2}\right)\sin^2\theta\,d\varphi^2 +$$

$$-\frac{2a\,r\,r_S\sin^2\theta}{\rho^2}\,d\varphi\cdot d(ct) - \left(1 - \frac{r\,r_S}{\rho^2}\right)d(ct)^2,$$

gdzie

$$\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta, \quad \Delta = r^2 - r\,r_S + a^2, \quad r_S = \frac{2GM}{c^2},$$

$$a = \frac{\text{moment pędu układu względem osi z}}{\text{całkowita masa układu}\cdot c},$$

$$r = x^1, \quad \theta = x^2, \quad \varphi = x^3, \quad ct = x^4 .$$

[1] R. P. Kerr: *Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics.* Physical Review Letters **11**, 5 (1963) 237-238.

[2] R. H. Boyer and R. W. Lindquist: *Maximal Analytic Extension of the Kerr Metric.* Journal of Mathematical Physics **8**, 2 (1967) 265-281.

6 FALE GRAWITACYJNE

- **Równania niestacjonarnego słabego pola grawitacyjnego w próżni są równaniami falowymi**

  Równania niestacjonarnego słabego pola grawitacyjnego w próżni

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial^2\gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\alpha} = \frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial^2\gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\beta \partial x^\beta} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\gamma_{\mu\nu}}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\Box\gamma_{\mu\nu} = 0\,, \quad g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}\,, \quad \left|\gamma_{\mu\nu}\right| << 1$$

mają postać równania falowego

$$\boxed{\sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial^2\gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\alpha} = \sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial^2\gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\beta \partial x^\beta} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\gamma_{\mu\nu}}{\partial t^2} = \Box\gamma_{\mu\nu} = 0} \qquad \Box = \sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x^\beta \partial x^\beta} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Fale grawitacyjne polegają na rozchodzeniu się z prędkością światła w pustej przestrzeni zmian składowych tensora metrycznego. Źródłem fal grawitacyjnych jest niestacjonarne pole grawitacyjne. Jak pokażemy dalej, fale grawitacyjne są falami poprzecznymi.

Składowe tensora krzywizny Ricciego niestacjonarnego słabego pola grawitacyjnego w próżni [porównaj ze stroną 78] (przemnożone przez dwa) stanowią lewe strony równań falowych, jeżeli

$$\frac{\partial^2\gamma_{\alpha\alpha}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial^2\gamma_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu \partial x^\alpha} - \frac{\partial^2\gamma_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu \partial x^\alpha} = 0$$

lub

$$-\left(\frac{\partial^2\gamma'_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu \partial x^\alpha} + \frac{\partial^2\gamma'_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu \partial x^\alpha}\right) = 0\,,$$

gdzie

$$\gamma'_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\gamma_{\sigma\sigma} = \gamma_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\sum_{\sigma=1}^{4}\gamma_{\sigma\sigma}\,.$$

Warunek ten jest spełniony, gdy

$$\frac{\partial\gamma'_{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\nu} - \tfrac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\frac{\partial\gamma_{\sigma\sigma}}{\partial x^\nu} = 0$$

lub

$$\sum_{\nu=1}^{4}\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0 \quad \text{i} \quad \sum_{\sigma=1}^{4}\gamma_{\sigma\sigma} = \text{const} \quad \text{lub w szczególności} \quad \sum_{\sigma=1}^{4}\gamma_{\sigma\sigma} = 0\,.$$

$$\boxed{\sum_{\nu=1}^{4}\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0 \quad \text{i} \quad \sum_{\sigma=1}^{4}\gamma_{\sigma\sigma} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2\gamma_{\alpha\alpha}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial^2\gamma_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu \partial x^\alpha} - \frac{\partial^2\gamma_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu \partial x^\alpha} = 0}$$

Uwzględniając, że $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}$, $\left|\gamma_{\mu\nu}\right| << 1$, ostatnie żądanie można zapisać w postaci

$$\sum_{\nu=1}^{4}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0 \quad \text{i} \quad \sum_{\sigma=1}^{4} g_{\sigma\sigma} = 4\,.$$

Jeżeli składowe diagonalne tensora metrycznego są w przybliżeniu równe jedności a pozostałe składowe są w przybliżeniu zerami, jego dywergencja znika, a ślad jest równy wymiarowi czasoprzestrzeni, to składowe tensora krzywizny Ricciego niestacjonarnego słabego pola grawitacyjnego w próżni (przemnożone przez dwa) stanowią lewe strony równań falowych.

- **Cechowanie TT**

W małym obszarze czasoprzestrzeni fale grawitacyjne można traktować jako fale płaskie. Rozwiązanie równania falowego dla fali płaskiej ma postać
$\gamma_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu}^{\max} f(\xi)$.

$f(\xi)$ = dowolna funkcja argumentu ξ dwukrotnie różniczkowalna względem czasu i współrzędnych przestrzennych

$\xi = n_x x + n_y y + n_z z - ct = n^1 x^1 + n^2 x^2 + n^3 x^3 + n^4 x^4 = n^\alpha x^\alpha$

$n^4 = i$

$x^4 = ict$

$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$

$\mathbf{n} = \left(n_x, n_y, n_z\right)$ = wersor kierunku rozchodzenia się fali

$\tilde{\mathbf{n}} = \left(\mathbf{n}, n^4\right)$

$\left(n^1\right)^2 + \left(n^2\right)^2 + \left(n^3\right)^2 + \left(n^4\right)^2 = 0$

Przez odpowiednie cechowanie (wybór układu odniesienia) można liczbę niezależnych niezerowych składowych tensora $\gamma_{\bullet\bullet}$ zredukować do dwóch.

$$\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu}\gamma_{\mu\nu}^{\max} f(\xi) = \gamma_{\mu\nu}^{\max}\frac{\partial f(\xi)}{\partial x^\nu} = \gamma_{\mu\nu}^{\max}\frac{\partial f(\xi)}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x^\nu} = \gamma_{\mu\nu}^{\max}\frac{\partial f(\xi)}{\partial\xi} n^\nu$$

$$\downarrow \quad \frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0$$

$$\gamma_{\mu\nu} n^\nu = 0$$

$\downarrow$ Fala z założenia porusza się w kierunku osi z. $\tilde{\mathbf{n}} = \left(0, 0, n^3, n^4\right)$

$$\gamma_{\mu 3} n^3 + \gamma_{\mu 4} n^4 = 0$$

$$\downarrow \quad \gamma_{\mu 4} = 0 \quad \text{czyli} \quad \gamma_{14} = \gamma_{24} = \gamma_{34} = \gamma_{44} = 0$$

Różnymi od zera składowymi tensora $\gamma_{\bullet\bullet}$ są
γ_{11}, γ_{22} i $\gamma_{12} = \gamma_{21}$.

$$\downarrow \quad \sum_{\alpha=1}^{4}\gamma_{\alpha\alpha} = 0 \quad \text{czyli} \quad \gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33} + \gamma_{44} = 0$$

Niezależnymi różnymi od zera składowymi tensora $\gamma_{\bullet\bullet}$ są
$\gamma_{11} = -\gamma_{22} \overset{\text{df}}{=} \gamma_{+}$ i $\gamma_{12} = \gamma_{21} \overset{\text{df}}{=} \gamma_{\times}$.
Przeprowadzone cechowanie

$$\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0, \quad \gamma_{\mu 4} = 0, \quad \sum_{\alpha=1}^{4}\gamma_{\alpha\alpha} = 0$$

nazywane jest cechowaniem TT (Transverse – Traceless) czyli poprzecznościowo – bezśladowym. Pozwala ono tensorowi metrycznemu $g_{\bullet\bullet}$ nadać postać

$$g_{\bullet\bullet}^{TT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{+} & \gamma_{\times} & 0 & 0 \\ \gamma_{\times} & -\gamma_{+} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\gamma_{+} & \gamma_{\times} & 0 & 0 \\ \gamma_{\times} & 1-\gamma_{+} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- **Fale grawitacyjne są falami poprzecznymi**

W nieobecności fal grawitacyjnych kwadrat różniczki odległości między dwoma sąsiednimi cząstkami próbnymi wynosi

$$dl_0^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 .$$

W obecności fal grawitacyjnych

$$dl^2 = \sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3} g_{\alpha\beta}^{TT} dx^\alpha dx^\beta = \left(1+\gamma_+\right)dx^2 + \left(1-\gamma_+\right)dy^2 + dz^2 + 2\gamma_\times dx\,dy ,$$

$$dl^2 = dl_0^2 + \gamma_+\left(dx^2 - dy^2\right) + 2\gamma_\times dx\,dy .$$

Równania falowe w przypadku fal płaskich biegnących wzdłuż osi z przybierają postać

$$\frac{\partial^2\gamma_+}{\partial z^2} - \frac{1}{c}\frac{\partial^2\gamma_+}{\partial t^2} = 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial^2\gamma_\times}{\partial z^2} - \frac{1}{c}\frac{\partial^2\gamma_\times}{\partial t^2} = 0 .$$

Ich harmonicznymi rozwiązaniami są

$$\gamma_+ = \gamma_+^{max}\cos k\left(z-ct\right) = \gamma_+^{max}\cos\varphi \quad \text{oraz} \quad \gamma_\times = \gamma_\times^{max}\cos k\left(z-ct\right) = \gamma_\times^{max}\cos\varphi ,$$

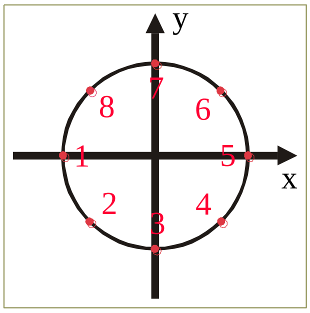
gdzie

$$k = \frac{2\pi}{cT} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \lambda = cT , \quad \varphi = k\left(z-ct\right) = \frac{2\pi}{\lambda}z - \frac{2\pi}{T}t .$$

Składowe γ_+ i $\gamma_\times$ opisują dwie niezależne polaryzacje fal grawitacyjnych przesunięte względem siebie w przypadku fal harmonicznych o kąt $\frac{\pi}{4}$ w płaszczyźnie x, y.

PRZYKŁAD

Zbadamy jak oddziałują z falami grawitacyjnymi cząstki próbne początkowo rozmieszczone w równych odstępach na okręgu w płaszczyźnie (x, y) w odległości $z = \frac{1}{2}\lambda\left(n+\frac{1}{2}\right)$ od środka.



$$\gamma_+ = \gamma_+^{max}\cos\varphi , \quad \gamma_\times = 0 , \quad dl^2 = dl_0^2 + \gamma_+\left(dx^2 - dy^2\right)$$

$$dl_{15}^2 = dl_0^2\left(1+\gamma_+\right), \quad dl_{37}^2 = dl_0^2\left(1-\gamma_+\right), \quad dl_{26}^2 = dl_0^2 , \quad dl_{48}^2 = dl_0^2$$

$$t=0, \quad \gamma_+ = 0, \quad dl_{15}^2 = dl_0^2, \quad dl_{37}^2 = dl_0^2, \quad dl_{26}^2 = dl_0^2, \quad dl_{48}^2 = dl_0^2$$

$$t=\tfrac{1}{4}T, \quad \gamma_+ = \gamma_+^{max}, \quad dl_{15}^2 = dl_0^2\left(1+\gamma_+^{max}\right), \quad dl_{37}^2 = dl_0^2\left(1-\gamma_+^{max}\right), \quad dl_{26}^2 = dl_0^2, \quad dl_{48}^2 = dl_0^2$$

$$t=\tfrac{1}{2}T, \quad \gamma_+ = 0, \quad dl_{15}^2 = dl_0^2, \quad dl_{37}^2 = dl_0^2, \quad dl_{26}^2 = dl_0^2, \quad dl_{48}^2 = dl_0^2$$

$$t=\tfrac{3}{4}T, \quad \gamma_+ = -\gamma_+^{max}, \quad dl_{15}^2 = dl_0^2\left(1-\gamma_+^{max}\right), \quad dl_{37}^2 = dl_0^2\left(1+\gamma_+^{max}\right), \quad dl_{26}^2 = dl_0^2, \quad dl_{48}^2 = dl_0^2$$

$$\gamma_+ = 0, \quad \gamma_\times = \gamma_\times^{max}\cos\varphi, \quad dl^2 = dl_0^2 + 2\gamma_\times dx\,dy$$

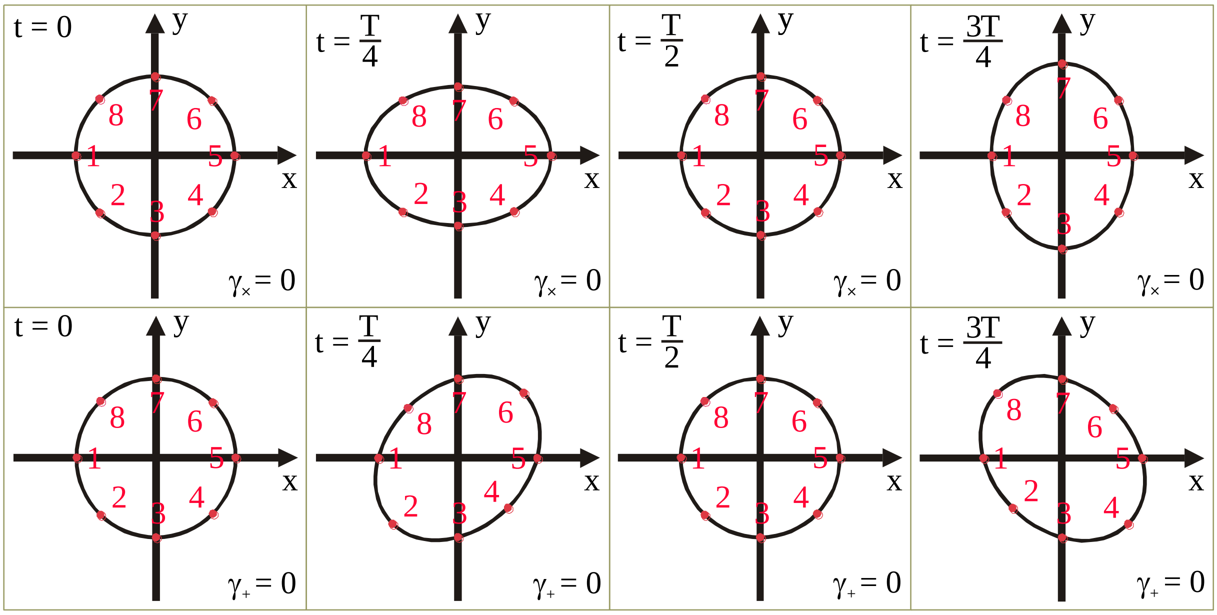
$$dl_{15}^2 = dl_0^2, \quad dl_{37}^2 = dl_0^2, \quad dl_{26}^2 = dl_0^2\left(1+\gamma_\times\right), \quad dl_{48}^2 = dl_0^2\left(1-\gamma_\times\right)$$

$$t=0, \quad \gamma_\times = 0, \quad dl_{15}^2 = dl_0^2, \quad dl_{37}^2 = dl_0^2, \quad dl_{26}^2 = dl_0^2, \quad dl_{48}^2 = dl_0^2$$

$$t=\tfrac{1}{4}T, \quad \gamma_\times = \gamma_\times^{max}, \quad dl_{15}^2 = dl_0^2, \quad dl_{37}^2 = dl_0^2, \quad dl_{26}^2 = dl_0^2\left(1+\gamma_\times^{max}\right), \quad dl_{48}^2 = dl_0^2\left(1-\gamma_\times^{max}\right)$$

$$t=\tfrac{1}{2}T, \quad \gamma_\times = 0, \quad dl_{15}^2 = dl_0^2, \quad dl_{37}^2 = dl_0^2, \quad dl_{26}^2 = dl_0^2, \quad dl_{48}^2 = dl_0^2$$

$$t=\tfrac{3}{4}T, \quad \gamma_\times = -\gamma_\times^{max}, \quad dl_{15}^2 = dl_0^2, \quad dl_{37}^2 = dl_0^2, \quad dl_{26}^2 = dl_0^2\left(1-\gamma_\times^{max}\right), \quad dl_{48}^2 = dl_0^2\left(1+\gamma_\times^{max}\right)$$



Składowe γ_+ i $\gamma_\times$ opisują dwie niezależne polaryzacje harmonicznej fali grawitacyjnej przesunięte względem siebie o kąt $\pi/4$ w płaszczyźnie x, y.

- **Równania niestacjonarnego słabego pola poruszających się ciał**
  Równania niestacjonarnego pola grawitacyjnego poruszających się ciał

$$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \qquad R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$$

lub

$$R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T^*_{\mu\nu}, \qquad T^*_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} T, \qquad T = g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}, \qquad R = \frac{8\pi G}{c^4} T,$$

w przypadku słabych pól

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}, \qquad |\gamma_{\mu\nu}| << 1, \qquad \left| \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} \right| << 1, \qquad \left| \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda \partial x^\kappa} \right| << 1, \qquad \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0, \qquad \gamma_{\sigma\sigma} = 0,$$

można przedstawić jako

$$R_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2} \Box g_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2} \Box \gamma_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2} \Box \gamma'_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T^*_{\mu\nu}, \qquad \Box \overset{df}{=} \sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\alpha}, \qquad \gamma'_{\mu\nu} \overset{df}{=} \gamma_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \gamma_{\sigma\sigma} .$$

Ogólne rozwiązania niejednorodnych równań falowych

$$\boxed{\Box \gamma_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T^*_{\mu\nu}}$$

mają postać

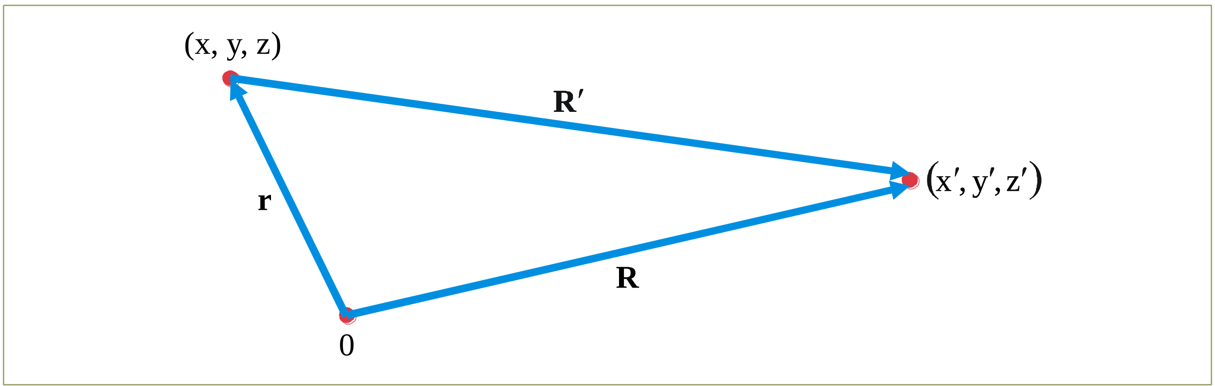
$$\gamma_{\mu\nu}(x', y', z', t) = \frac{4G}{c^4} \iiint_V \frac{T^*_{\mu\nu}\left(x, y, x, t - R'/c\right)}{R'} dV, \qquad \left(z, y, z, t - R'/c\right) \ = \ \text{argument}.$$

R' = odległość od elementu objętości dV do punktu obserwacji (x', y', z'), w którym wyznaczamy $\gamma_{\mu\nu}$

(x, y, z) = współrzędne elementu objętości dV

$\dfrac{R'}{c}$ = opóźnienie

UWAGA
Należy podkreślić, ze czas t związany jest z aktem pomiaru składowej $\gamma_{\mu\nu}$ w punkcie obserwacji. Natomiast czas $\left(t-\frac{R'}{c}\right)$ mierzony jest w punkcie, w którym znajduje się element dV. Różnica ta wynika z faktu, że informacje o zmianie w rozkładzie źródłowych mas docierają do punktu obserwacji z opóźnieniem $\frac{R'}{c}$, ponieważ fale grawitacyjne rozchodzą się z prędkością o stałej wartości c.



0 = początek układu współrzędnych umieszczony dla wygody w środku źródłowych mas
(x, y, z) = współrzędne elementu objętości dV
(x', y', z') = współrzędne punktu obserwacji
$\mathbf{r}$ = promień wodzący poprowadzony ze środka układu współrzędnych do elementu dV
$\mathbf{R}'$ = promień wodzący poprowadzony z elementu dV do punktu obserwacji
$\mathbf{R}$ = promień wodzący poprowadzony ze środka układu współrzędnych do punktu obserwacji

$$\mathbf{R}' = \mathbf{R} - \mathbf{r}$$

Aby uprościć rozwiązanie równania falowego należałoby przyjąć, że $R' = R$. Zbadamy przy jakich założeniach jest możliwe takie przybliżenie.

$$R' = \sqrt{R^2 - 2\mathbf{R}\cdot\mathbf{r} + r^2} = R\sqrt{1 - \frac{2\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}}{R^2} + \frac{r^2}{R^2}} \approx R\left(1 - \frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}}{R^2} + \frac{r^2}{2R^2}\right) \approx R\left(1 - \frac{r}{R}\right) \approx R$$

Przy dużych odległościach punktu obserwacji od źródłowych mas w stosunku do ich wzajemnych odległości w mianowniku wyrażenia podcałkowego można przyjąć przybliżenie $R' = R$. Ponieważ element objętości dV nie zależy od R, to można R wynieść przed całkę.

Argument w liczniku wyrażenia podcałkowego $\left(x, y, z, t - R'/c\right)$ przy tym samym rzędzie przybliżenia i dodatkowym założeniu, że źródłowe masy poruszają się z prędkościami dużo mniejszymi od prędkości światła, można zastąpić argumentem $\left(x, y, z, t - R/c\right)$.

Uwzględniając powyższe uwagi, otrzymujemy przybliżone rozwiązania opóźnione niejednorodnych równań falowych.

$$\boxed{\gamma_{\mu\nu}(x', y', z', t) = \frac{4G}{c^4 R}\iiint_V T^*_{\mu\nu}\left(x, y, z, t - R/c\right) dV\,, \quad \left(x, y, z, t - R/c\right) \ = \text{argument}}$$

Celem poniższych rachunków będzie wyrażenie całek objętościowych ze składowych $T^*_{\alpha\beta}$ $(\alpha,\beta=1,2,3)$ przez składową T^*_{44}.

$$\frac{\partial T^*_{\mu\nu}}{\partial x^\nu}=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \dfrac{\partial T^*_{\alpha\gamma}}{\partial x^\gamma}=-\dfrac{\partial T^*_{\alpha 4}}{\partial x^4} \\ \dfrac{\partial T^*_{4\gamma}}{\partial x^\gamma}=-\dfrac{\partial T^*_{44}}{\partial x^4} \end{cases} \quad (\alpha,\beta,\gamma=1,2,3)$$

$$\frac{\partial T^*_{\alpha\gamma}}{\partial x^\gamma}\cdot x^\beta=-\frac{\partial T^*_{\alpha 4}}{\partial x^4}\cdot x^\beta$$

$$\frac{\partial T^*_{\alpha\gamma}}{\partial x^\gamma}\cdot x^\beta=\frac{\partial T^*_{\alpha\gamma}x^\beta}{\partial x^\gamma}-\frac{\partial x^\beta}{\partial x^\gamma}T^*_{\alpha\beta}=\frac{\partial T^*_{\alpha\gamma}x^\beta}{\partial x^\gamma}-T^*_{\alpha\beta}$$

$$-\frac{\partial T^*_{\alpha 4}}{\partial x^4}\cdot x^\beta=-\frac{\partial T^*_{\alpha 4}x^\beta}{\partial x^4}+\frac{\partial x^\beta}{\partial x^4}T^*_{\alpha 4}=-\frac{\partial T^*_{\alpha 4}x^\beta}{\partial x^4}$$

$$\frac{\partial T^*_{\alpha\gamma}x^\beta}{\partial x^\gamma}-T^*_{\alpha\beta}=-\frac{\partial T^*_{\alpha 4}x^\beta}{\partial x^4}$$

$$\iiint_V \frac{\partial T^*_{\alpha\gamma}x^\beta}{\partial x^\gamma}dV-\iiint_V T^*_{\alpha\beta}dV=-\frac{\partial}{\partial x^4}\iiint_V T^*_{\alpha 4}x^\beta dV\,, \quad (\alpha,\beta,\gamma=1,2,3)$$

$$\iiint_V \frac{\partial T^*_{\alpha\gamma}x^\beta}{\partial x^\gamma}dV=0$$

$$\iiint_V T^*_{\alpha\beta}dV=\tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^4}\iiint_V\left(T^*_{\alpha 4}x^\beta+T^*_{\beta 4}x^\alpha\right)dV\,, \quad (\alpha,\beta=1,2,3)$$

$$\frac{\partial T^*_{4\gamma}}{\partial x^\gamma}\cdot x^\alpha x^\beta=-\frac{\partial T^*_{44}}{\partial x^4}\cdot x^\alpha x^\beta$$

$$\frac{\partial T^*_{4\gamma}}{\partial x^\gamma}\cdot x^\alpha x^\beta=\frac{\partial T^*_{4\gamma}x^\alpha x^\beta}{\partial x^\gamma}-T^*_{4\gamma}\frac{\partial x^\alpha x^\beta}{\partial x^\gamma}=\frac{\partial T^*_{4\gamma}x^\alpha x^\beta}{\partial x^\gamma}-T^*_{4\alpha}x^\beta-T^*_{4\beta}x^\alpha$$

$$-\frac{\partial T^*_{44}}{\partial x^4}\cdot x^\alpha x^\beta=-\frac{\partial T^*_{44}x^\alpha x^\beta}{\partial x^4}+T^*_{44}\frac{\partial x^\alpha x^\beta}{\partial x^4}=-\frac{\partial T^*_{44}x^\alpha x^\beta}{\partial x^4}$$

$$\frac{\partial T^*_{4\gamma}x^\alpha x^\beta}{\partial x^\gamma}-T^*_{4\alpha}x^\beta-T^*_{4\beta}x^\alpha=-\frac{\partial T^*_{44}x^\alpha x^\beta}{\partial x^4}$$

$$\iiint_V \frac{\partial T^*_{4\gamma}x^\alpha x^\beta}{\partial x^\gamma}dV-\iiint_V\left(T^*_{4\alpha}x^\beta+T^*_{4\beta}x^\alpha\right)dV=-\frac{\partial}{\partial x^4}\iiint_V T^*_{44}x^\alpha x^\beta dV\,, \quad (\alpha,\beta,\gamma=1,2,3)$$

$$\iiint_V \frac{\partial T^*_{4\gamma}x^\alpha x^\beta}{\partial x^\gamma}dV=0$$

$$\iiint_V\left(T^*_{4\alpha}x^\beta+T^*_{4\beta}x^\alpha\right)dV=\frac{\partial}{\partial x^4}\iiint_V T^*_{44}x^\alpha x^\beta dV\,, \quad (\alpha,\beta=1,2,3)$$

$$\boxed{\iiint_V T^*_{\alpha\beta}dV=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^4\partial x^4}\iiint_V T^*_{44}x^\alpha x^\beta dV\,, \quad (\alpha,\beta=1,2,3)}$$

$$\iiint\limits_V T^*_{\alpha\beta} dV = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^4 \partial x^4}\iiint\limits_V T^*_{44} x^\alpha x^\beta dV\,, \qquad (\alpha,\beta = 1,2,3)$$

$$T^*_{44} = -\gamma^2 \rho c^2 - \tfrac{1}{2} g_{44} T\,, \qquad \gamma \approx 1$$

$$x^4 = ict$$

ρ = gęstość spoczynkowa źródłowych mas

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{2G}{c^4 R}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\iiint\limits_V \left(\rho + \frac{g_{44}T}{2c^2}\right) x^\alpha x^\beta dV$$

$$\frac{g_{44}T}{2c^2} \approx 0$$

$$\gamma_{\alpha\beta}(x', y', z', t) = \frac{2G}{c^4 R}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\iiint\limits_V \rho(x, y, z, t - R/c)\, x^\alpha x^\beta\, dV\,, \qquad (\alpha,\beta = 1,2,3)$$

Aby spełnić wymogi przyjętego cechowania TT

$$\gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33} + \gamma_{44} = 0\,, \qquad \gamma_{14} = \gamma_{24} = \gamma_{34} = \gamma_{44} = 0\,,$$

należy tensor momentu kwadrupolowego źródłowych mas

$$d_{\alpha\beta} \overset{df}{=} \iiint\limits_V \rho\, x^\alpha x^\beta dV$$

zastąpić jego wersją bezśladową

$$D_{\alpha\beta} \overset{df}{=} \iiint\limits_V \rho\left(3x^\alpha x^\beta - \delta_{\alpha\beta} x^\gamma x^\gamma\right) dV\,.$$

$$\boxed{\gamma^{TT}_{\alpha\beta} = \frac{2G}{3c^4 R}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\iiint\limits_V \rho\left(3x^\alpha x^\beta - \delta_{\alpha\beta} x^\gamma x^\gamma\right) dV} \qquad (\alpha,\beta,\gamma = 1,2,3)$$

UWAGA

W rachunkach przeprowadzonych w tym paragrafie przyjęliśmy następujące założenia.

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu},$$

$$\left|\gamma_{\mu\nu}\right| << 1\,, \qquad \left|\frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa}\right| << 1\,, \qquad \left|\frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda \partial x^\kappa}\right| << 1\,,$$

$$\frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0\,, \quad \gamma_{\sigma\sigma} = 0 \quad \text{lub} \quad \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0\,, \quad \sum_{\sigma=1}^{4} g_{\sigma\sigma} = 4 \quad \text{lub} \quad \frac{\partial \gamma'}{\partial x^\nu} = 0\,,$$

$$v << c\,, \quad \gamma = \left(1 - v^2 c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1\,,$$

$$R' \approx R\,, \quad R >> r\,.$$

Środek układu współrzędnych znajduje się w środku źródłowych mas.

$$\frac{\partial T^*_{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^\nu} - \tfrac{1}{2} T \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu}\frac{\partial T}{\partial x^\nu} = 0\,, \quad \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0\,, \quad g_{\mu\nu}\frac{\partial T}{\partial x^\nu} = 0\,,$$

$$\iiint\limits_V \frac{\partial T^*_{\alpha\gamma} x^\beta}{\partial x^\gamma} dV = 0\,, \qquad \iiint\limits_V \frac{\partial T^*_{4\gamma} x^\alpha x^\beta}{\partial x^\gamma} dV = 0\,,$$

$$\frac{g_{44}T}{2c^2} \approx 0\,,$$

$$\gamma_{14} = \gamma_{24} = \gamma_{34} = \gamma_{44} = 0\,.$$

- **Emisja fal grawitacyjnych**

Przypomnijmy: fale grawitacyjne są zaburzeniami czasoprzestrzeni w postaci zmian składowych tensora metrycznego, rozchodzącymi się w próżni z prędkością światła.

Moc energii wysyłanej w formie fal grawitacyjnych przez poruszające się ciała, będące emiterami, dana jest wzorem [1]:

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{G}{45c^5}\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\left(\frac{\partial^3}{\partial t^3}D^{\alpha\beta}\right)^2 \qquad \frac{G}{45c^5} = 6{,}1218\cdot 10^{-55}\,\frac{s^3}{m^2 kg}$$

Bezśladowy tensor momentu kwadrupolowego układu punktów materialnych:

$$D^{\alpha\beta} = \sum_i M_i\left(3x_i^\alpha x_i^\beta - R_i^2\delta_{\alpha\beta}\right),$$ R_i = promień wodzący i-tego punktu materialnego

Bezśladowy tensor momentu kwadrupolowego ciągłego rozkładu mas:

$$D^{\alpha\beta} \overset{df}{=} \iiint_V \rho\left(3x^\alpha x^\beta - \delta_{\alpha\beta}x^\gamma x^\gamma\right)dV,$$ ρ = gęstość, $(\alpha,\beta = 1,2,3)$

Informacje o tensorze momentu kwadrupolowego układu punktów materialnych znajdują się w części „Pole grawitacyjne – teoria Newtona” w rozdziale „Rozwinięcie multipolowe potencjału pola grawitacyjnego układu punktów materialnych” w paragrafie „Tensor momentu kwadrupolowego”.

$$D^{xx} = \sum_i M_i\left(2x_i^2 - y_i^2 - z_i^2\right)$$
$$D^{yy} = \sum_i M_i\left(2y_i^2 - x_i^2 - z_i^2\right)$$
$$D^{zz} = \sum_i M_i\left(2z_i^2 - x_i^2 - y_i^2\right)$$
$$D^{xy} = D^{yx} = \sum_i 3M_i x_i y_i$$
$$D^{xz} = D^{zx} = \sum_i 3M_i x_i z_i$$
$$D^{yz} = D^{zy} = \sum_i 3M_i y_i z_i$$
$$D^{xx} + D^{yy} + D^{zz} = 0$$

Bezśladowy tensor momentu kwadrupolowego układu punktów materialnych

M_i = masa i-tego punktu materialnego

Tensorowi momentu kwadrupolowego ciągłego rozkładu mas poświęcony jest następny rozdział.

$$D^{xx} = \frac{1}{5}\cdot M\left(2a^2 - b^2 - c^2\right)$$
$$D^{yy} = \frac{1}{5}\cdot M\left(2b^2 - a^2 - c^2\right)$$
$$D^{zz} = \frac{1}{5}\cdot M\left(2c^2 - b^2 - a^2\right)$$
$$D^{xy} = D^{yx} = D^{xz} = D^{zx} = D^{yz} = D^{zy} = 0$$
$$D^{xx} + D^{yy} + D^{zz} = 0$$

Bezśladowy tensor momentu kwadrupolowego jednorodnej elipsoidy

M = masa elipsoidy
a, b, c = osi elipsoidy

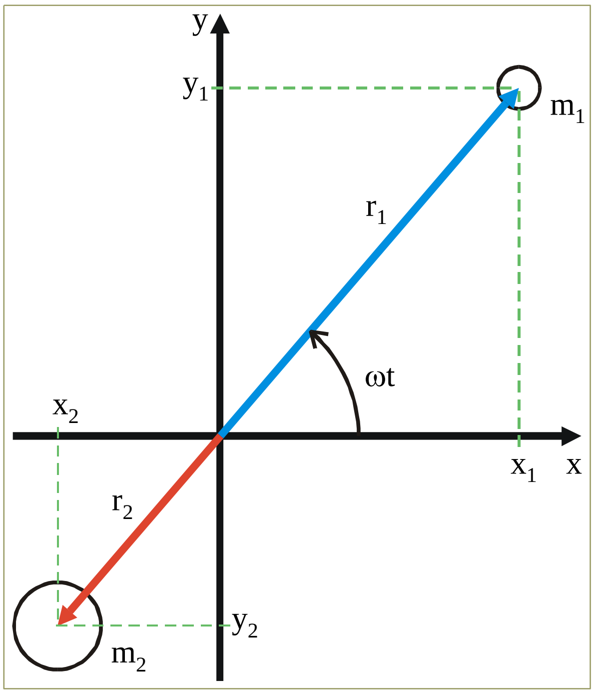
Wszystkie składowe tensora momentu kwadrupolowego kuli są równe zeru.

[1] L. Landau, E. Lifszic: *Teoria pola*. PWN, W-wa 1958. [Strona 353]

PRZYKŁAD

Moc fal grawitacyjnych emitowanych przez układ dwóch mas m_1 i m_2 wirujących wokół ich wspólnego środka masy, odległych odpowiednio o r_1 i r_2 od niego. Obliczenia zostaną podane w układzie środka masy.

$$\boxed{-\frac{dE}{dt}=\frac{G}{45c^5}\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\left(\frac{\partial^3}{\partial t^3}D^{\alpha\beta}\right)^2}$$



$$x_1=r_1\cos\omega t$$
$$y_1=r_1\sin\omega t$$
$$x_2=-r_2\cos\omega t$$
$$y_2=-r_2\sin\omega t$$
$$D^{xx}=m_1\left(2x_1^2-y_1^2\right)+m_2\left(2x_2^2-y_2^2\right)$$
$$D^{yy}=m_1\left(2y_1^2-x_1^2\right)+m_2\left(2y_2^2-x_2^2\right)$$
$$D^{zz}=-m_1\left(x_1^2+y_1^2\right)-m_2\left(x_2^2+y_2^2\right)$$
$$D^{xy}=D^{yx}=3m_1x_1+3m_2x_2$$

$$\boxed{-\frac{dE}{dt}=\frac{32}{5}\cdot\frac{G}{c^5}\cdot\left(m_1r_1^2+m_2r_2^2\right)^2\cdot\omega^6}$$

$$\frac{Gm_1m_2}{\left(r_1+r_2\right)^2}=m_1\omega^2r_1+m_2\omega^2r_2$$

$$m_1r_1=m_2r_2\quad\Rightarrow\quad m_1r_1^2+m_2r_2^2=\frac{1}{2}\left(m_1r_1+m_2r_2\right)\left(r_1+r_2\right)$$

$$\boxed{-\frac{dE}{dt}=\frac{8}{5}\cdot\frac{G^4}{c^5}\cdot\frac{\left(m_1m_2\right)^3}{\left(r_1+r_2\right)^4\left(m_1r_1+m_2r_2\right)}=\frac{4}{5}\cdot\frac{G^4}{c^5}\cdot\frac{\left(m_1m_2\right)^3}{\left(r_1+r_2\right)^3\left(m_1r_1^2+m_2r_2^2\right)}}$$

W przypadku, gdy

$$m_1=m_2=m\,,$$
$$r_1=r_2=r\,,$$
$$l=r_1+r_2=2r\,,$$

otrzymujemy

$$\boxed{-\frac{dE}{dt}=\frac{8}{5}\cdot\frac{G}{c^5}\cdot m^2\cdot l^4\cdot\omega^6}$$

$$\boxed{-\frac{dE}{dt}=\frac{8}{5}\cdot\frac{G^4}{c^5}\cdot\frac{m^5}{l^5}}$$

7 TENSOR MOMENTU KWADRUPOLOWEGO

- **Tensor momentu kwadrupolowego ciągłego rozkładu mas**

$$d_{\alpha\beta} \overset{df}{=} \iiint_V \rho\, x^\alpha x^\beta dV\,, \quad (\alpha, \beta = 1,2,3)$$

Tensor momentu kwadrupolowego ciągłego rozkładu mas jest symetrycznym tensorem drugiego rzędu posiadającym sześć niezależnych składowych.

- **Bezśladowy tensor momentu kwadrupolowego ciągłego rozkładu mas**

$$D_{\alpha\beta} \overset{df}{=} \iiint_V \rho \left(3x^\alpha x^\beta - \delta_{\alpha\beta} x^\gamma x^\gamma \right) dV\,, \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1,2,3)$$

Bezśladowy tensor momentu kwadrupolowego ciągłego rozkładu mas jest symetrycznym tensorem drugiego rzędu o znikającym śladzie, posiadającym pięć niezależnych składowych.

- **Elipsoida**

Elipsoida obrotowa modeluje wiele brył od koła poczynając poprzez dysk, kulę, cygaro, a na walcu kończąc. Elipsoida trójosiowa jest powierzchnią daną równaniem kanonicznym.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

a, b, c = półosie elipsoidy

$a = b = c$ sfera
$a = b > c$ elipsoida obrotowa spłaszczona
$a = b < c$ elipsoida obrotowa wydłużona

Objętość elipsoidy wynosi

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi abc$$

Kontur rzutu na płaszczyznę x, y przekroju elipsoidy płaszczyzną prostopadłą do osi z jest elipsą

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)} = 1, \; z = const$$

o półosiach

$$a\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}} \quad i \quad b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}$$

i polu powierzchni

$$|R_z| = \pi ab\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)$$

- **Tensor momentu kwadrupolowego ciągłego rozkładu mas rozmieszczonych ze stałą gęstością objętościową w obszarze elipsoidy w układzie współrzędnych, który stanowią osie elipsoidy**

$$d_{xx} = \iiint_V \rho(x,y,z)x^2 dV$$

$$\rho(x,y,z) = \frac{3M}{4\pi abc}$$

$$\iint_{R_x} dy\,dz = \pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$\int_{-a}^{+a} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{+a} = \frac{2}{3}a^3$$

$$\int_{-a}^{+a} x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-a}^{+a} = \frac{2}{5}a^5$$

$$\Downarrow$$

$$d_{xx} = \frac{3M}{4\pi abc}\iiint_V x^2 dx\,dy\,dz =$$

$$= \frac{3M}{4\pi abc}\int_{-a}^{+a} x^2 dx \iint_{R_x} dy\,dz =$$

$$= \frac{3M}{4\pi abc}\pi bc\int_{-a}^{+a} x^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx$$

$$\boxed{d_{xx} = \frac{1}{5}Ma^2}$$

$$d_{yy} = \iiint_V \rho(x,y,z)y^2 dV$$

$$\rho(x,y,z) = \frac{3M}{4\pi abc}$$

$$\iint_{R_y} dx\,dz = \pi ac\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)$$

$$\int_{-b}^{+b} y^2 dy = \left[\frac{y^3}{3}\right]_{-b}^{+b} = \frac{2}{3}b^3$$

$$\int_{-b}^{+b} y^4 dy = \left[\frac{y^5}{5}\right]_{-b}^{+b} = \frac{2}{5}b^5$$

$$\Downarrow$$

$$d_{yy} = \frac{3M}{4\pi ab}\iiint_V y^2 dx\,dy\,dz =$$

$$= \frac{3M}{4\pi abc}\int_{-b}^{+b} y^2 dy \iint_{R_y} dx\,dz =$$

$$= \frac{3M}{4\pi abc}\pi ac\int_{-b}^{+b} y^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy$$

$$\boxed{d_{yy} = \frac{1}{5}Mb^2}$$

$$d_{zz} = \iiint_V \rho(x,y,z)z^2 dV$$

$$\rho(x,y,z) = \frac{3M}{4\pi abc}$$

$$\iint_{R_z} dx\,dy = \pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)$$

$$\int_{-c}^{+c} z^2 dz = \left[\frac{z^3}{3}\right]_{-c}^{+c} = \frac{2}{3}c^3$$

$$\int_{-c}^{+c} z^4 dz = \left[\frac{z^5}{5}\right]_{-c}^{+c} = \frac{2}{5}c^5$$

$$\Downarrow$$

$$d_{zz} = \frac{3M}{4\pi abc}\iiint_V z^2 dx\,dy\,dz =$$

$$= \frac{3M}{4\pi abc}\int_{-c}^{+c} z^2 dz \iint_{R_z} dx\,dy =$$

$$= \frac{3M}{4\pi abc}\pi ab\int_{-c}^{+c} z^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz$$

$$\boxed{d_{zz} = \frac{1}{5}Mc^2}$$

R_x = rzut na płaszczyznę y, z przekroju elipsoidy płaszczyzną prostopadłą do osi x

$\iint_{R_x} dy\,dz =$ pole rzutu na płaszczyznę y, z przekroju elipsoidy płaszczyzną prostopadłą do osi x

R_y = rzut na płaszczyznę x, z przekroju elipsoidy płaszczyzną prostopadłą do osi y

$\iint_{R_y} dx\,dz =$ pole rzutu na płaszczyznę x, z przekroju elipsoidy płaszczyzną prostopadłą do osi y

R_z = rzut na płaszczyznę x, y przekroju elipsoidy płaszczyzną prostopadłą do osi z

$\iint_{R_z} dx\,dy =$ pole rzutu na płaszczyznę x, y przekroju elipsoidy płaszczyzną prostopadłą do osi z

$$D_{xx}=\iiint\limits_V \rho(x,y,z)\left(2x^2-y^2-z^2\right)dV$$

$$\rho(x,y,z)=\frac{3M}{4\pi abc}$$

$$\Downarrow$$

$$D_{xx}=\frac{3M}{4\pi abc}\iiint\limits_V\left(2x^2-y^2-z^2\right)dx\,dy\,dz=$$

$$=\frac{3M}{4\pi abc}\left(2\int\limits_{-a}^{+a}x^2dx\iint\limits_{R_x}dy\,dz-\int\limits_{-b}^{+b}y^2dy\iint\limits_{R_y}dx\,dz-\int\limits_{-c}^{+c}z^2dz\iint\limits_{R_z}dx\,dy\right)=$$

$$=\frac{3M}{4\pi abc}\left[2\pi bc\int\limits_{-a}^{+a}x^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx-\pi ac\int\limits_{-b}^{+b}y^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy-\pi ab\int\limits_{-c}^{+c}z^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz\right]=$$

$$=\frac{3M}{4\pi abc}\left[\frac{8}{15}\cdot\pi a^3bc-\frac{4}{15}\cdot\pi ab^3c-\frac{4}{15}\cdot\pi abc^3\right]$$

$$D_{xx}=\frac{1}{5}\cdot M\left(2a^2-b^2-c^2\right)$$

$$D_{yy}=\iiint\limits_V \rho(x,y,z)\left(2y^2-x^2-z^2\right)dV$$

$$\rho(x,y,z)=\frac{3M}{4\pi abc}$$

$$\Downarrow$$

$$D_{yy}=\frac{3M}{4\pi abc}\iiint\limits_V\left(2y^2-x^2-z^2\right)dx\,dy\,dz=$$

$$=\frac{3M}{4\pi abc}\left(2\int\limits_{-b}^{+b}y^2dy\iint\limits_{R_y}dx\,dz-\int\limits_{-a}^{+a}x^2dx\iint\limits_{R_x}dy\,dz-\int\limits_{-c}^{+c}z^2dz\iint\limits_{R_z}dx\,dy\right)=$$

$$=\frac{3M}{4\pi abc}\left[2\pi ac\int\limits_{-b}^{+b}y^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy-\pi bc\int\limits_{-a}^{+a}x^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx-\pi ab\int\limits_{-c}^{+c}z^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz\right]=$$

$$=\frac{3M}{4\pi abc}\left[\frac{8}{15}\cdot\pi ab^3c-\frac{4}{15}\cdot\pi a^3bc-\frac{4}{15}\cdot\pi abc^3\right]$$

$$D_{yy}=\frac{1}{5}\cdot M\left(2b^2-a^2-c^2\right)$$

$$D_{zz} = \iiint\limits_V \rho(x,y,z)\left(2z^2 - y^2 - x^2\right) dV$$
$$\rho(x,y,z) = \frac{3M}{4\pi abc}$$

$$\Downarrow$$

$$D_{zz} = \frac{3M}{4\pi abc} \iiint\limits_V \left(2z^2 - y^2 - x^2\right) dx\,dy\,dz =$$
$$= \frac{3M}{4\pi abc}\left(2\int\limits_{-c}^{+c} z^2 dz \iint\limits_{R_z} dx\,dy - \int\limits_{-b}^{+b} y^2 dy \iint\limits_{R_y} dx\,dz - \int\limits_{-a}^{+a} x^2 dx \iint\limits_{R_x} dy\,dz\right) =$$
$$= \frac{3M}{4\pi abc}\left[2\pi ab \int\limits_{-c}^{+c} z^2\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz - \pi ac \int\limits_{-b}^{+b} y^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy - \pi bc \int\limits_{-a}^{+a} x^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx\right] =$$
$$= \frac{3M}{4\pi abc}\left[\frac{8}{15}\cdot \pi abc^3 - \frac{4}{15}\cdot \pi ab^3 c - \frac{4}{15}\cdot \pi a^3 bc\right]$$

$$\boxed{D_{zz} = \frac{1}{5}\cdot M\left(2c^2 - b^2 - a^2\right)}$$

Zbierzmy uzyskane wyniki.

$$d_{xx} = \frac{1}{5}\cdot M a^2, \quad d_{yy} = \frac{1}{5}\cdot M b^2, \quad d_{zz} = \frac{1}{5}\cdot M c^2$$
$$D_{xx} = \frac{1}{5}\cdot M\left(2a^2 - b^2 - c^2\right), \quad D_{yy} = \frac{1}{5}\cdot M\left(2b^2 - a^2 - c^2\right), \quad D_{zz} = \frac{1}{5}\cdot M\left(2c^2 - b^2 - a^2\right)$$
$$D_{xx} + D_{yy} + D_{zz} = 0$$

Składowe niediagonalne obu tensorów są wszystkie równe zeru.

W przypadku elipsoidy obrotowej
$a = b$,

$$D_{xx} = \frac{1}{5} M\left(a^2 - c^2\right),$$

$$D_{yy} = \frac{1}{5} M\left(a^2 - c^2\right),$$

$$D_{zz} = \frac{2}{5} M\left(c^2 - a^2\right),$$

$$-\frac{1}{2} D_{zz} = D_{xx} = D_{yy},$$

tensor momentu kwadrupolowego $D_{\mu\nu}$ posiada tylko jedną składową niezależną D_{zz}. Składowa D_{zz} bywa utożsamiana z tensorem momentu kwadrupolowego, co prowadzi do nieporozumień.

8 MODEL WSZECHŚWIATA EINSTEINA: „MATERIA BEZ RUCHU”

- **Trójwymiarowa hipersfera zanurzona w czterowymiarowej płaskiej przestrzeni Euklidesowej jako trójwymiarowa przestrzeń o stałej krzywiźnie Riemanna**

W czterowymiarowej płaskiej przestrzeni Euklidesowej (nie mającej nic wspólnego z czasoprzestrzenią) o metryce

$$d\sigma^2 = \left(dz^1\right)^2 + \left(dz^2\right)^2 + \left(dz^3\right)^2 + \left(dz^4\right)^2$$

rozpatrzmy trójwymiarową hipersferę

$$a^2 = \left(z^1\right)^2 + \left(z^2\right)^2 + \left(z^3\right)^2 + \left(z^4\right)^2 .$$

Wyznaczając na podstawie powyższego równania różniczkę współrzędnej z^4, otrzymujemy dla podstawowej formy metrycznej wyrażenie

$$d\sigma^2 = \left(\delta_{\alpha\beta} + \frac{z^\alpha z^\beta}{a^2 - z^\kappa z^\kappa} \right) dz^\alpha dz^\beta = \gamma_{\alpha\beta} dz^\alpha dz^\beta \quad \left(\alpha, \beta, \kappa = 1, 2, 3\right),$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{z^\alpha z^\beta}{a^2 - z^\kappa z^\kappa} \quad \left(\alpha, \beta, \kappa = 1, 2, 3\right).$$

Następnie obliczamy trójwymiarowe symbole Christoffela drugiego rodzaju, ich pochodne oraz składowe trójwymiarowego tensora Ricciego.

$$\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = \frac{\delta_{\alpha\beta} z^\lambda}{a^2 - z^\kappa z^\kappa} + \frac{z^\alpha z^\beta z^\lambda}{\left(a^2 - z^\kappa z^\kappa\right)^2}, \quad \left(\alpha, \beta, \kappa, \lambda = 1, 2, 3\right)$$

$$\frac{\partial \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}}{\partial z^\kappa} = \frac{\left(a^2 - z^\kappa z^\kappa\right)\delta_{\alpha\beta}\delta_{\kappa\lambda} + 2\delta_{\alpha\beta} z^\kappa z^\lambda}{\left(a^2 - x^\kappa x^\kappa\right)^2} +$$

$$+ \frac{\left(a^2 - z^\kappa z^\kappa\right)^2 \left(z^\alpha \dfrac{\partial z^\beta z^\lambda}{\partial z^\kappa} + z^\beta z^\lambda \dfrac{\partial z^\alpha}{\partial z^\kappa} \right) - z^\alpha z^\beta z^\lambda \dfrac{\partial}{\partial z^\kappa} \left(a^2 - z^\kappa z^\kappa\right)^2}{\left(a^2 - z^\kappa z^\kappa\right)^4}$$

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\alpha\lambda}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\kappa_{\alpha\lambda}\Gamma^\lambda_{\kappa\beta} - \Gamma^\kappa_{\alpha\beta}\Gamma^\lambda_{\kappa\lambda}, \quad \left(\alpha, \beta, \kappa, \lambda = 1, 2, 3\right)$$

W punkcie o współrzędnych $z^1 = z^2 = z^3 = 0$, $z^4 = a$:

$$\left(g_{\alpha\beta}\right)_0 = \delta_{\alpha\beta}, \quad \left(\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}}{\partial z^\kappa} \right)_0 = \frac{\delta_{\alpha\beta}\delta_{\kappa\lambda}}{a^2}, \quad \left(R_{\alpha\beta}\right)_0 = -\frac{2\delta_{\alpha\beta}}{a^2} = -\frac{2\left(g_{\alpha\beta}\right)_0}{a^2}.$$

W dowolnym punkcie trójwymiarowej hipersfery:

$$R_{\alpha\beta} = -\frac{2g_{\alpha\beta}}{a^2}, \quad \left(\alpha, \beta = 1, 2, 3\right).$$

Na koniec wyznaczmy krzywiznę Riemanna badanej hiperpowierzchni

$$K = \frac{R_{\alpha\beta}}{\left(1 - N\right) g_{\alpha\beta}} = \frac{R_{\alpha\beta}}{-2g_{\alpha\beta}} = \frac{1}{a^2}.$$

Trójwymiarowa hipersfera o promieniu a zanurzona w czterowymiarowej płaskiej przestrzeni Euklidesowej jest trójwymiarową przestrzenią o stałej krzywiźnie Riemanna $K = a^{-2}$.

- **Metryka modelu Wszechświata Einsteina**

W modelu tym trójwymiarowa przestrzeń jest jednorodna, izotropowa, skończona, ale nie ograniczona i o stałej krzywiźnie. Prędkości ciał będących źródłem pola są małe w stosunku do prędkości światła.

$$\boxed{ds^2 = \left(\delta_{\alpha\beta} + \frac{x^\alpha x^\beta}{a^2 - x^\kappa x^\kappa}\right) dx^\alpha dx^\beta + dx^4 dx^4 , \quad (\alpha, \beta, \kappa = 1, 2, 3)}$$

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4) \quad x^4 = ict , \quad ds^2 \le 0$$

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{x^\alpha x^\beta}{a^2 - x^\kappa x^\kappa} \quad (\alpha, \beta, \kappa = 1, 2, 3)$$

$$g_{14} = g_{41} = g_{24} = g_{42} = g_{34} = g_{43} = 0 , \quad g_{44} = 1$$

- **Składowe tensora Ricciego**

$$R_{\alpha\beta} = -\frac{2}{a^2} g_{\alpha\beta} , \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3)$$

$$R_{14} = R_{41} = R_{24} = R_{42} = R_{34} = R_{43} = R_{44} = 0$$

- **Skalar krzywizny**

$$R = -g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \frac{2}{a^2} = -\frac{6}{a^2} , \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3)$$

- **Składowe tensora Einsteina**

$$R_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = \frac{1}{a^2} g_{\alpha\beta} , \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3)$$

$$R_{44} - \tfrac{1}{2} g_{44} R = \frac{3}{a^2}$$

- **Tensor pędu energii**

$$T'_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \rho \tilde{v}^\alpha \tilde{v}^\beta + g_{\mu\nu} p$$

$$\tilde{v}^\lambda = \sqrt{\operatorname{sgn} ds^2}\, c \frac{dx^\lambda}{ds} , \quad \operatorname{sgn} ds^2 = -1$$

$$\tilde{v}^1 = \tilde{v}^2 = \tilde{v}^3 = 0$$

$$T'_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} p \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3)$$

$$T'_{44} = g_{44} g_{44} \rho c^2 \left(\operatorname{sgn} ds^2\right) \frac{dx^4}{ds} \frac{dx^4}{ds} + g_{44} p = -\rho c^2 + p$$

- **Równania pola:** $R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\kappa T'_{\mu\nu}$.

$$\frac{1}{a^2} g_{\alpha\beta} = -\kappa p g_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3) \qquad \text{Równania przestrzenno-przestrzenne}$$

$$\frac{3}{a^2} = -\kappa\left(-\rho c^2 + p\right) \qquad \text{Równanie czasowo-czasowe}$$

Z powyższych równań wynika, że

$$\boxed{p = -\frac{\rho c^2}{2}} \qquad \boxed{a = \sqrt{\frac{2}{\kappa \rho c^2}}}$$

Promień krzywizny wszechświata a jest skończony.

- **Równania pola z członem kosmologicznym**

Identyczne rozwiązanie można otrzymać wprowadzając do równań pola tzw. człon kosmologiczny zamiast ujemnego ciśnienia w tensorze pędu-energii. Równaniom pola

$$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\kappa T'_{\mu\nu} = -\kappa g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \rho \tilde{v}^{\alpha} \tilde{v}^{\beta} - \kappa p g_{\mu\nu}$$

nadamy za Einsteinem inną postać

$$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \kappa p g_{\mu\nu} = -\kappa g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \rho \tilde{v}^{\alpha} \tilde{v}^{\beta} = -\kappa T_{\mu\nu}$$

lub

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R - g_{\mu\nu} \Lambda = -\kappa T_{\mu\nu}}$$

$\Lambda g_{\mu\nu}$ = człon kosmologiczny

Λ = stała kosmologiczna

Uzyskane wyniki można zapisać używając zamiast ujemnego ciśnienia stałej kosmologicznej

$\Lambda = -\kappa p \geq 0$,

$\Lambda = \tfrac{1}{2} \kappa \rho c^2$,

$\Lambda = a^{-2}$.

- **Warunki wynikające z równań bilansu pędu i energii, jakie musi spełniać człon kosmologiczny jako dodatkowy człon w równaniach pola**

Wyznaczymy dywergencje obu stron równań pola z członem kosmologicznym

$$\left(R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R - g_{\mu\nu} \Lambda \right)_{;\nu} = \left(-\kappa T_{\mu\nu} \right)_{;\nu}$$

$$\left(R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right)_{;\nu} - \left(g_{\mu\nu} \Lambda \right)_{;\nu} = -\kappa T_{\mu\nu;\nu}$$

$$\left(R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right)_{;\nu} = 0$$

$$g_{\mu\nu;\nu} = 0$$

$$\Lambda_{;\nu} = \Lambda_{,\nu} = \frac{\partial \Lambda}{\partial x^{\nu}}$$

$$T_{\mu\nu;\nu} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$g_{\mu\nu} \Lambda_{,\nu} = 0$$

$$\Updownarrow \quad \det g_{\bullet\bullet} \neq 0$$

$$\boxed{\Lambda_{,\nu} = 0}$$

- **Metryka Einsteina we współrzędnych sferycznych**

$$ds^2 = \left(\delta_{\alpha\beta} + \frac{x^{\alpha} x^{\beta}}{a^2 - x^{\kappa} x^{\kappa}} \right) dx^{\alpha} dx^{\beta} + dx^4 dx^4 \qquad (\alpha, \beta, \kappa = 1, 2, 3)$$

$$\Downarrow \quad x^1 = r \sin\theta \cos\varphi, \quad x^2 = r \sin\theta \sin\varphi, \quad x^3 = r \cos\theta, \quad x^4 = x^4$$

$$\boxed{ds^2 = \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2 \right) + d\left(x^4 \right)^2}$$

9 MODEL WSZECHŚWIATA DE SITTERA:”RUCH BEZ MATERII”

- **Rozwiązanie de Sittera**

W 1917 roku de Sitter podał [1)] rozwiązanie równań pola grawitacyjnego

$$R_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} \kappa T ,$$

opisujące wszechświat bez materii, traktowany jako czasoprzestrzeń o stałej ujemnej krzywiźnie Riemanna.

$$T_{\mu\nu} = 0 , \quad (\mu, \nu = 1,2,3,4),$$

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} - \frac{x^{\mu} x^{\nu}}{a^2 - x^{\alpha} x^{\alpha}} , \quad (\mu, \nu, \alpha = 1,2,3,4), \quad \boxed{x^4 = ict , \quad ds^2 \geq 0} ,$$

gdzie (a) jest czterowymiarowym stałym promieniem krzywizny.

Rozwiązanie to oznacza, że

$$\Lambda = -\frac{3}{a^2} , \quad \rho = 0 .$$

Reprezentuje ono zakrzywioną czasoprzestrzeń bez materii, i może być traktowane jako graniczny przypadek bardziej realistycznych modeli wszechświata. **Ruch bez materii**, to nazwa która przylgnęła do modelu wszechświata de Sittera.

Następnie przedstawił [2)] metrykę modelu z poprzedniej pracy w innym układzie współrzędnych.

$$ds^2 = -dr^2 - a^2 \sin^2\left(\frac{r}{a}\right)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2\right) + \cos^2\left(\frac{r}{a}\right) c^2 dt^2$$

Po dokonaniu transformacji współrzędnych

$$r' = a \sin\left(\frac{r}{a}\right) ,$$

przyjmuje ona postać spotykaną we współczesnej literaturze

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r'^2}{a^2}\right)^{-1} dr'^2 - r'^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2\right) + \left(1 - \frac{r'^2}{a^2}\right) c^2 dt^2 .$$

Analogicznymi wyrażeniami dla metryki wszechświata Einsteina są odpowiednio wzory

$$ds^2 = -dr^2 - a^2 \sin^2\left(\frac{r}{a}\right)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2\right) + c^2 dt^2 ,$$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r'^2}{a^2}\right)^{-1} dr'^2 - r'^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2\right) + c^2 dt^2 .$$

UWAGA

Jeżeli wyznacznik tensora metrycznego, którego składowe są rozwiązaniami równań pola, jest dla pewnych wartości współrzędnych równy zeru, to wtedy badane rozwiązania nie spełniają równań pola.

[1)] W. de Sitter: *Over de relativiteit der traagheid: Beschouwingen naar aanleiding van Einstein's laatste hypothese.* Verslag [van de gewone vergaderingen der wis-en natuurkundige afdeeling] der Koninklijke Akademie van Wetenschappen [te Amsterdam] **25**, 9 (31 Maart 1917) 1268-1276.
O względności inercji: uwagi dotyczące ostatnich hipotez Einsteina.

[2)] W. de Sitter: *Over de kromming der ruimte.* Verslag [van de gewone vergaderingen der wiosen natuurkundige afdeeling] der Koninklijke Akademie van Wetenschappen [te Amsterdam] **26**, 2 (30 Juni 1917) 222-236.
O krzywiźnie przestrzeni.

10 MODEL WSZECHŚWIATA FRIEDMANA

- **Podstawowe założenia**

Według prawa Hubble'a obserwator związany z Ziemią postrzega pozorną ucieczkę galaktyk z prędkością radialną o wartości wprost proporcjonalnej do ich odległości. Fakt ten można interpretować jako rozszerzanie się przestrzeni dla wszystkich obserwatorów spoczywających względem otaczającej ich materii jednorodnie rozmieszczonej w skali wszechświata.

- **Podstawowa forma metryczna Friedmana-Lemaître'a-Robertsona-Walkera w układzie kartezjańskim**

$$ds^2 = B^2L^2\left[\left(dx^1\right)^2 + \left(dx^2\right)^2 + \left(dx^3\right)^2\right] + \left(dx^4\right)^2$$

$x^4 = ict$, $\quad L = L(t)$ = bezwymiarowy czasowy czynnik skali

$$B = \frac{1}{1+\frac{1}{4}\frac{L^2r^2}{L^2a^2}} = \frac{1}{1+\frac{1}{4}\frac{r^2}{a^2}} = \frac{1}{1+\frac{1}{4}kr^2}, \quad r^2 = \left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 + \left(x^3\right)^2, \quad k = \frac{1}{a^2}$$

$\operatorname{sgn} k = \operatorname{sgn}\frac{1}{a^2} = -1,\ 0,\ +1$, $\quad a^2$ = kwadrat nieprzeskalowanego promienia krzywizny przestrzeni

- **Składowe kowariantnego tensora metrycznego F-L-R-W**

$$g_{\bullet\bullet} = \begin{bmatrix} B^2L^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B^2L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B^2L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g_{\bullet\bullet} = \operatorname{diag}\left(B^2L^2, B^2L^2, B^2L^2, 1\right)$$

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = B^2L^2, \quad g_{44} = 1$$

Pozostałe składowe kowariantnego tensora metrycznego są równe zeru.

$$g = g_{11}g_{22}g_{33}g_{44} = B^6L^6$$

- **Składowe kontrawariantnego tensora metrycznego F-L-R-W**

$$g^{\bullet\bullet} = \begin{bmatrix} B^{-2}L^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B^{-2}L^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B^{-2}L^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g^{\bullet\bullet} = \operatorname{diag}\left(B^{-2}L^{-2}, B^{-2}L^{-2}, B^{-2}L^{-2}, 1\right)$$

$$g^{\alpha\alpha} = g^{-1}_{\alpha\alpha}, \quad g^{11} = g^{22} = g^{33} = B^{-2}L^{-2}, \quad g^{44} = 1$$

Pozostałe składowe kontrawariantnego tensora metrycznego są równe zeru.

- **Składowe mieszanego tensora metrycznego F-L-R-W**

$$g^{\bullet}_{\bullet} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g^{\bullet}_{\bullet} = \operatorname{diag}\left(1,1,1,1\right)$$

$$g^1_1 = g^2_2 = g^3_3 = g^4_4 = 1$$

Pozostałe składowe mieszanego tensora metrycznego są równe zeru.

- **Symbole Christoffela pierwszego rodzaju:** $\left[{\mu\ \nu \atop \alpha}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\right)$

$$\left[{1\ 1 \atop 1}\right] = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^{1}}$$
$$\left[{2\ 2 \atop 1}\right] = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^{1}}$$
$$\left[{3\ 3 \atop 1}\right] = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^{1}}$$
$$\left[{1\ 2 \atop 2}\right] = \left[{2\ 1 \atop 2}\right] = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^{1}}$$
$$\left[{1\ 3 \atop 3}\right] = \left[{3\ 1 \atop 3}\right] = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^{1}}$$

$$\left[{1\ 1 \atop 2}\right] = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^{2}}$$
$$\left[{2\ 2 \atop 2}\right] = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^{2}}$$
$$\left[{3\ 3 \atop 2}\right] = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^{2}}$$
$$\left[{1\ 2 \atop 1}\right] = \left[{2\ 1 \atop 1}\right] = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^{2}}$$
$$\left[{2\ 3 \atop 3}\right] = \left[{3\ 2 \atop 3}\right] = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^{2}}$$

$$\left[{1\ 1 \atop 3}\right] = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^{3}}$$
$$\left[{2\ 2 \atop 3}\right] = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^{3}}$$
$$\left[{3\ 3 \atop 3}\right] = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^{3}}$$
$$\left[{1\ 3 \atop 1}\right] = \left[{3\ 1 \atop 1}\right] = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^{3}}$$
$$\left[{2\ 3 \atop 2}\right] = \left[{3\ 2 \atop 2}\right] = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^{3}}$$

$$\left[{1\ 1 \atop 4}\right] = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^{4}}$$
$$\left[{2\ 2 \atop 4}\right] = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^{4}}$$
$$\left[{3\ 3 \atop 4}\right] = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^{4}}$$
$$\left[{1\ 4 \atop 1}\right] = \left[{4\ 1 \atop 1}\right] = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^{4}}$$
$$\left[{2\ 4 \atop 2}\right] = \left[{4\ 2 \atop 2}\right] = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^{4}}$$
$$\left[{3\ 4 \atop 3}\right] = \left[{4\ 3 \atop 3}\right] = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^{4}}$$

- **Symbole Christoffela drugiego rodzaju:** $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = g^{\sigma\alpha}\left[{\mu\ \nu \atop \alpha}\right]$

$$\Gamma^{1}_{11} = g^{11}\left[{1\ 1 \atop 1}\right] = A_1$$
$$\Gamma^{1}_{22} = g^{11}\left[{2\ 2 \atop 1}\right] = -A_1$$
$$\Gamma^{1}_{33} = g^{11}\left[{3\ 3 \atop 1}\right] = -A_1$$
$$\Gamma^{2}_{12} = \Gamma^{2}_{21} = g^{22}\left[{1\ 2 \atop 2}\right] = A_1$$
$$\Gamma^{3}_{13} = \Gamma^{3}_{31} = g^{33}\left[{1\ 3 \atop 3}\right] = A_1$$

$$\Gamma^{2}_{11} = g^{22}\left[{1\ 1 \atop 2}\right] = -A_2$$
$$\Gamma^{2}_{22} = g^{22}\left[{2\ 2 \atop 2}\right] = A_2$$
$$\Gamma^{2}_{33} = g^{22}\left[{3\ 3 \atop 2}\right] = -A_2$$
$$\Gamma^{1}_{12} = \Gamma^{1}_{21} = g^{11}\left[{1\ 2 \atop 1}\right] = A_2$$
$$\Gamma^{3}_{23} = \Gamma^{3}_{32} = g^{33}\left[{2\ 3 \atop 3}\right] = A_2$$

$$\Gamma^{3}_{11} = g^{33}\left[{1\ 1 \atop 3}\right] = -A_3$$
$$\Gamma^{3}_{22} = g^{33}\left[{2\ 2 \atop 3}\right] = -A_3$$
$$\Gamma^{3}_{33} = g^{33}\left[{3\ 3 \atop 3}\right] = A_3$$
$$\Gamma^{1}_{13} = \Gamma^{1}_{31} = g^{11}\left[{1\ 3 \atop 1}\right] = A_3$$
$$\Gamma^{2}_{23} = \Gamma^{2}_{32} = g^{22}\left[{2\ 3 \atop 2}\right] = A_3$$

$$\Gamma^{4}_{11} = g^{44}\left[{1\ 1 \atop 4}\right] = -A_4$$
$$\Gamma^{4}_{22} = g^{44}\left[{2\ 2 \atop 4}\right] = -A_4$$
$$\Gamma^{4}_{33} = g^{44}\left[{3\ 3 \atop 4}\right] = -A_4$$

$$\Gamma^{1}_{14} = \Gamma^{1}_{41} = g^{11}\left[{1\ 4 \atop 1}\right] = A_5$$
$$\Gamma^{2}_{24} = \Gamma^{2}_{42} = g^{22}\left[{2\ 4 \atop 2}\right] = A_5$$
$$\Gamma^{3}_{34} = \Gamma^{3}_{43} = g^{33}\left[{3\ 4 \atop 3}\right] = A_5$$

$$B=\frac{1}{1+\frac{1}{4}k\left[\left(x^1\right)^2+\left(x^2\right)^2+\left(x^3\right)^2\right]}$$

$$\frac{\partial B}{\partial x^i}=-\tfrac{1}{2}k\,x^i B^2,\qquad \frac{\partial B}{\partial x^4}=0$$

$$L=L\left(x^4\right)$$

$$A_i=-\tfrac{1}{2}k\,x^i B,\qquad (i=1,2,3)$$

$$A_4=B^2L\frac{\partial L}{\partial x^4}$$

$$A_5=B^{-2}L^{-2}A_4=L^{-1}\frac{\partial L}{\partial x^4}$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^j}=\tfrac{1}{4}k^2\,x^i x^j B^2-\tfrac{1}{2}kB\delta_{ij},\qquad (i,j=1,2,3)$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^4}=0,\qquad (i=1,2,3)$$

$$\frac{\partial A_4}{\partial x^4}=B^2L\frac{\partial^2 L}{\partial x^4\partial x^4}+B^2\left(\frac{\partial L}{\partial x^4}\right)^2$$

$$\frac{\partial A_5}{\partial x^i}=0,\qquad (i=1,2,3)$$

$$\frac{\partial A_5}{\partial x^4}=L^{-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x^4\partial x^4}-L^{-2}\left(\frac{\partial L}{\partial x^4}\right)^2$$

- **Składowe tensora Ricciego:** $R_{\mu\nu}=\dfrac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}}-\dfrac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}+\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}-\Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}$

$$R_{11}=\frac{\partial\Gamma^2_{12}}{\partial x^1}+\frac{\partial\Gamma^3_{13}}{\partial x^1}-\frac{\partial\Gamma^2_{11}}{\partial x^2}-\frac{\partial\Gamma^3_{11}}{\partial x^3}-\frac{\partial\Gamma^4_{11}}{\partial x^4}+\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11}+\Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12}+\Gamma^1_{13}\Gamma^3_{11}+\Gamma^3_{13}\Gamma^3_{13}+\Gamma^1_{14}\Gamma^4_{11}+$$
$$-\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12}-\Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22}-\Gamma^3_{11}\Gamma^2_{23}-\Gamma^4_{11}\Gamma^2_{24}-\Gamma^1_{11}\Gamma^3_{13}-\Gamma^2_{11}\Gamma^3_{23}-\Gamma^3_{11}\Gamma^3_{33}-\Gamma^4_{11}\Gamma^3_{34}$$

$$R_{22}=\frac{\partial\Gamma^1_{21}}{\partial x^2}+\frac{\partial\Gamma^3_{23}}{\partial x^2}-\frac{\partial\Gamma^1_{22}}{\partial x^1}-\frac{\partial\Gamma^3_{22}}{\partial x^3}-\frac{\partial\Gamma^4_{22}}{\partial x^4}+\Gamma^1_{12}\Gamma^1_{12}+\Gamma^2_{12}\Gamma^1_{22}+\Gamma^2_{23}\Gamma^3_{22}+\Gamma^3_{23}\Gamma^3_{23}+\Gamma^2_{24}\Gamma^4_{22}+$$
$$-\Gamma^1_{22}\Gamma^1_{11}-\Gamma^2_{22}\Gamma^1_{12}-\Gamma^3_{22}\Gamma^1_{13}-\Gamma^4_{22}\Gamma^1_{14}-\Gamma^1_{22}\Gamma^3_{13}-\Gamma^2_{22}\Gamma^3_{23}-\Gamma^3_{22}\Gamma^3_{33}-\Gamma^4_{22}\Gamma^3_{34}$$

$$R_{33}=\frac{\partial\Gamma^1_{13}}{\partial x^3}+\frac{\partial\Gamma^2_{23}}{\partial x^3}-\frac{\partial\Gamma^1_{33}}{\partial x^1}-\frac{\partial\Gamma^2_{33}}{\partial x^2}-\frac{\partial\Gamma^4_{33}}{\partial x^4}+\Gamma^1_{13}\Gamma^1_{13}+\Gamma^3_{13}\Gamma^1_{33}+\Gamma^2_{23}\Gamma^2_{23}+\Gamma^3_{23}\Gamma^2_{33}+\Gamma^3_{34}\Gamma^4_{33}+$$
$$-\Gamma^1_{33}\Gamma^1_{11}-\Gamma^2_{33}\Gamma^1_{12}-\Gamma^3_{33}\Gamma^1_{13}-\Gamma^4_{33}\Gamma^1_{14}-\Gamma^1_{33}\Gamma^2_{12}-\Gamma^2_{33}\Gamma^2_{22}-\Gamma^3_{33}\Gamma^2_{23}-\Gamma^4_{33}\Gamma^2_{24}$$

$$R_{44}=\frac{\partial\Gamma^1_{14}}{\partial x^4}+\frac{\partial\Gamma^2_{24}}{\partial x^4}+\frac{\partial\Gamma^3_{34}}{\partial x^4}+\Gamma^1_{14}\Gamma^1_{14}+\Gamma^2_{24}\Gamma^2_{24}+\Gamma^3_{34}\Gamma^3_{34}$$

$$R_{12}=R_{21}=\frac{\partial\Gamma^1_{11}}{\partial x^2}+\frac{\partial\Gamma^3_{13}}{\partial x^2}-\frac{\partial\Gamma^1_{12}}{\partial x^1}+\Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22}+\Gamma^3_{13}\Gamma^3_{23}-\Gamma^2_{12}\Gamma^1_{12}-\Gamma^1_{12}\Gamma^3_{13}-\Gamma^2_{12}\Gamma^3_{23}$$

$$R_{13}=R_{31}=\frac{\partial\Gamma^1_{11}}{\partial x^3}+\frac{\partial\Gamma^2_{12}}{\partial x^3}-\frac{\partial\Gamma^1_{13}}{\partial x^1}+\Gamma^3_{11}\Gamma^1_{33}+\Gamma^2_{12}\Gamma^2_{23}-\Gamma^3_{13}\Gamma^1_{13}-\Gamma^1_{13}\Gamma^2_{12}-\Gamma^3_{13}\Gamma^2_{23}$$

$$R_{14}=R_{41}=\frac{\partial\Gamma^1_{11}}{\partial x^4}+\frac{\partial\Gamma^2_{12}}{\partial x^4}+\frac{\partial\Gamma^3_{13}}{\partial x^4}-\frac{\partial\Gamma^1_{14}}{\partial x^1}+\Gamma^2_{12}\Gamma^2_{24}+\Gamma^3_{13}\Gamma^3_{34}-\Gamma^1_{14}\Gamma^2_{12}-\Gamma^1_{14}\Gamma^3_{13}$$

$$R_{23}=R_{32}=\frac{\partial\Gamma^1_{21}}{\partial x^3}+\frac{\partial\Gamma^2_{22}}{\partial x^3}-\frac{\partial\Gamma^2_{23}}{\partial x^2}+\Gamma^1_{12}\Gamma^1_{13}+\Gamma^3_{22}\Gamma^2_{33}-\Gamma^2_{23}\Gamma^1_{12}-\Gamma^3_{23}\Gamma^1_{13}-\Gamma^3_{23}\Gamma^2_{23}$$

$$R_{24}=R_{42}=\frac{\partial\Gamma^1_{21}}{\partial x^4}+\frac{\partial\Gamma^2_{22}}{\partial x^4}+\frac{\partial\Gamma^3_{23}}{\partial x^4}-\frac{\partial\Gamma^2_{24}}{\partial x^2}+\Gamma^1_{12}\Gamma^1_{14}+\Gamma^3_{23}\Gamma^3_{34}-\Gamma^2_{24}\Gamma^1_{12}-\Gamma^2_{24}\Gamma^3_{23}$$

$$R_{34}=R_{43}=\frac{\partial\Gamma^1_{31}}{\partial x^4}+\frac{\partial\Gamma^2_{32}}{\partial x^4}+\frac{\partial\Gamma^3_{33}}{\partial x^4}-\frac{\partial\Gamma^3_{34}}{\partial x^3}+\Gamma^1_{13}\Gamma^1_{14}+\Gamma^2_{23}\Gamma^2_{24}-\Gamma^3_{34}\Gamma^1_{13}-\Gamma^3_{34}\Gamma^2_{23}$$

- **Składowe tensora Ricciego (dalszy ciąg)**

$$R_{11} = 2\frac{\partial A_1}{\partial x^1} + \frac{\partial A_2}{\partial x^2} + \frac{\partial A_3}{\partial x^3} + \frac{\partial A_4}{\partial x^4} + A_2 A_2 + A_3 A_3 + A_4 A_5$$

$$R_{22} = \frac{\partial A_1}{\partial x^1} + 2\frac{\partial A_2}{\partial x^2} + \frac{\partial A_3}{\partial x^3} + \frac{\partial A_4}{\partial x^4} + A_1 A_1 + A_3 A_3 + A_4 A_5$$

$$R_{33} = \frac{\partial A_1}{\partial x^1} + \frac{\partial A_2}{\partial x^2} + 2\frac{\partial A_3}{\partial x^3} + \frac{\partial A_4}{\partial x^4} + A_1 A_1 + A_2 A_2 + A_4 A_5$$

$$R_{13} = R_{31} = 2\frac{\partial A_1}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^1} - A_1 A_3 = 0$$

$$R_{23} = R_{32} = 2\frac{\partial A_2}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^2} - A_2 A_3 = 0$$

$$R_{14} = R_{41} = 3\frac{\partial A_1}{\partial x^4} - \frac{\partial A_5}{\partial x^1} = 0$$

$$R_{24} = R_{42} = 3\frac{\partial A_2}{\partial x^4} - \frac{\partial A_5}{\partial x^2} = 0$$

$$R_{34} = R_{43} = 3\frac{\partial A_3}{\partial x^4} - \frac{\partial A_5}{\partial x^3} = 0$$

$$R_{44} = 3\frac{\partial A_5}{\partial x^4} + 3A_5 A_5$$

$$\boxed{R_{11} = R_{22} = R_{33} = B^2\left[-2k + 2\left(\frac{\partial L}{\partial x^4}\right)^2 + L\frac{\partial^2 L}{\partial x^4 \partial x^4}\right], \qquad R_{44} = 3L^{-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x^4 \partial x^4}}$$

Pozostałe składowe tensora Ricciego są równe zeru.

- **Skalar krzywizny**

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$
$$R = g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33} + g^{44} R_{44}$$
$$R = B^{-2} L^{-2}\left(R_{11} + R_{22} + R_{33}\right) + R_{44}$$

$$\boxed{R = -6L^{-2}k + 6L^{-2}\left(\frac{\partial L}{\partial x^4}\right)^2 + 6L^{-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x^4 \partial x^4}}$$

- **Składowe tensora Einsteina**

$$R_{ij}-\tfrac{1}{2}g_{ij}R-g_{ij}\Lambda=B^2L^2\left[\frac{k}{L^2}-\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial L}{\partial x^4}\right)^2-\frac{2}{L}\frac{\partial^2 L}{\partial x^4\partial x^4}-\Lambda\right]\delta_{ij},\quad (i,j=1,2,3)$$

$$R_{i4}-\tfrac{1}{2}g_{i4}R-g_{i4}\Lambda=0,\quad (i=1,2,3)$$

$$R_{44}-\tfrac{1}{2}g_{44}R-g_{44}\Lambda=\frac{3k}{L^2}-\frac{3}{L^2}\left(\frac{\partial L}{\partial x^4}\right)^2-\Lambda$$

- **Tensor pędu-energii dla pyłu i promieniowania**

Rozkład gęstości energii pyłu i promieniowania we wszechświecie opiszemy tensorem pędu-energii dla cieczy nielepkiej.

$$T^{\mu\nu}=\left(pc^{-2}+\rho\right)\tilde{v}^{\mu}\tilde{v}^{\nu}+g^{\mu\nu}p,\quad p=\text{ ciśnienie promieniowania}$$

$$T_{\alpha\beta}=\left(pc^{-2}+\rho\right)\tilde{v}_{\alpha}\tilde{v}_{\beta}+g_{\alpha\beta}p$$

$$T^{\mu}_{\sigma}=\left(pc^{-2}+\rho\right)\tilde{v}^{\mu}\tilde{v}_{\sigma}+g^{\mu}_{\sigma}p$$

$$\tilde{v}^{\alpha}=\sqrt{\operatorname{sgn} ds^2}\,c\frac{dx^{\alpha}}{ds},\quad \operatorname{sgn} ds^2=-1$$

$$g_{\mu\alpha}\tilde{v}^{\mu}=\tilde{v}_{\alpha},\quad g_{\beta\nu}\tilde{v}^{\nu}=\tilde{v}_{\beta},\quad g_{\sigma\nu}\tilde{v}^{\nu}=\tilde{v}_{\sigma}$$

$$\tilde{v}^1=\tilde{v}^2=\tilde{v}^3=0,\quad dx^4=ds$$

$$\boxed{\begin{aligned}&T^{\bullet\bullet}=\operatorname{diag}\left(B^{-2}L^{-2}p,B^{-2}L^{-2}p,B^{-2}L^{-2}p,-c^2\rho\right)\\&T_{\bullet\bullet}=\operatorname{diag}\left(B^{2}L^{2}p,B^{2}L^{2}p,B^{2}L^{2}p,-c^2\rho\right)\\&T^{\bullet}_{\bullet}=\operatorname{diag}\left(p,p,p,-c^2\rho\right)\end{aligned}}$$

- **Równania pola**

$$R_{\alpha\beta}-\tfrac{1}{2}g_{\alpha\beta}R-g_{\alpha\beta}\Lambda=-\kappa T_{\alpha\beta},\quad \kappa=8\pi Gc^{-4}=2{,}073\cdot 10^{-43}s^2kg^{-1}m^{-1}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{k}{L^2}-\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial L}{\partial x^4}\right)^2-\frac{2}{L}\frac{\partial^2 L}{\partial x^4\partial x^4}-\Lambda=-\kappa p\\&\frac{3k}{L^2}-\frac{3}{L^2}\left(\frac{\partial L}{\partial x^4}\right)^2-\Lambda=\kappa\rho c^2\end{aligned}}\qquad\boxed{\begin{aligned}&\frac{c^2k}{L^2}+\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2+\frac{2}{L}\frac{\partial^2 L}{\partial t^2}-c^2\Lambda=-\kappa c^2 p\\&\frac{c^2k}{L^2}+\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2-\tfrac{1}{3}c^2\Lambda=\tfrac{1}{3}\kappa\rho c^4\end{aligned}}$$

Odejmując stronami ostatnie dwa równania, otrzymujemy

$$\boxed{\frac{1}{L}\frac{\partial^2 L}{\partial t^2}-\tfrac{1}{3}c^2\Lambda+\tfrac{1}{2}\kappa c^2\left(\tfrac{1}{3}\rho c^2+p\right)=0}$$

- **Równania pola wyrażone przez stałą Hubble'a**

Równania pola przestrzenno-przestrzenne i czasowo-czasowe zapiszemy tak, by pojawiła się w nich stała Hubble'a.

$$\frac{c^2k}{L^2}+\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2+\frac{2}{L}\frac{\partial^2 L}{\partial t^2}-c^2\Lambda=-c^2\kappa p\,,\qquad \frac{c^2k}{L^2}+\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2-\tfrac{1}{3}c^2\Lambda=\tfrac{1}{3}\kappa\rho c^4$$

$$H\overset{\mathrm{df}}{=}\frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial t}$$

H = współczynnik hubble'owskiego rozszerzania się wszechświata (stała Hubble'a)

$$\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{1}{L}\frac{\partial^2 L}{\partial t^2}-\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2=\frac{1}{L}\frac{\partial^2 L}{\partial t^2}-H^2\,,\qquad \frac{1}{L}\frac{\partial^2 L}{\partial t^2}=H^2+\frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\boxed{2\frac{\partial H}{\partial t}+3H^2=-\frac{c^2k}{L^2}-c^2\kappa p+c^2\Lambda}$$

Jeżeli $k=0$, $p=0$, $\Lambda=0$, to $H=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{t}$.

$$\boxed{H^2=\tfrac{1}{3}\kappa\rho c^4-\frac{c^2k}{L^2}+\tfrac{1}{3}c^2\Lambda}$$

Jeżeli $k=0$, $\Lambda=0$, to $H=c^2\sqrt{\tfrac{1}{3}\kappa\rho}$.

- **Równania bilansu pędu i energii**

Prawa zachowania opisane są przez znikanie dywergencji tensora pędu-energii.

$$T^{\alpha}_{\beta;\alpha}=\frac{\partial T^{\alpha}_{\beta}}{\partial x^{\alpha}}-\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}T^{\alpha}_{\mu}+\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}T^{\mu}_{\beta}=0\,,\qquad (\beta=1,2,3,4)$$

Dla $\beta=1$ (oraz analogicznie dla $\beta=2$ i $\beta=3$) mamy:

$$T^{\alpha}_{1;\alpha}=\frac{\partial T^{\alpha}_{1}}{\partial x^{\alpha}}-\Gamma^{\mu}_{1\alpha}T^{\alpha}_{\mu}+\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}T^{\mu}_{1}=\frac{\partial T^{1}_{1}}{\partial x^{1}}-\Gamma^{1}_{11}T^{1}_{1}-\Gamma^{2}_{12}T^{2}_{2}-\Gamma^{3}_{13}T^{3}_{3}+T^{1}_{1}\left(\Gamma^{1}_{11}+\Gamma^{2}_{12}+\Gamma^{3}_{13}\right)=0\,,$$

$$\frac{\partial p}{\partial x^1}-3pA_1+3pA_1=0\,,$$

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial x^1}=0}\qquad\boxed{\frac{\partial p}{\partial x^2}=0}\qquad\boxed{\frac{\partial p}{\partial x^3}=0}$$

Powyższe trzy równania można zapisać w zwartej postaci.

$$\boxed{\operatorname{grad} p=0}$$

Dla $\beta=4$ mamy:

$$T^{\alpha}_{4;\alpha}=\frac{\partial T^{\alpha}_{4}}{\partial x^{\alpha}}-\Gamma^{\mu}_{4\alpha}T^{\alpha}_{\mu}+\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}T^{\mu}_{4}=\frac{\partial T^{4}_{4}}{\partial x^{4}}-\Gamma^{1}_{41}T^{1}_{1}-\Gamma^{2}_{42}T^{2}_{2}-\Gamma^{3}_{43}T^{3}_{3}+T^{4}_{4}\left(\Gamma^{1}_{41}+\Gamma^{2}_{42}+\Gamma^{3}_{43}\right)=0$$

$$-c^2\frac{\partial\rho}{\partial x^4}-3pA_5-3c^2\rho A_5=0$$

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{3}{L}\frac{\partial L}{\partial t}\left(\rho+\frac{p}{c^2}\right)=0}$$

- **Równania kosmologiczne dla pyłu i promieniowania**

Równania pola przestrzenno-przestrzenne (Równanie Friedmana)

$$\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2+\frac{2}{L}\frac{\partial^2 L}{\partial t^2}=-\frac{c^2k}{L^2}-c^2\kappa p+c^2\Lambda \quad \text{lub} \quad 2\frac{\partial H}{\partial t}+3H^2=-\frac{c^2k}{L^2}-c^2\kappa p+c^2\Lambda$$

Równania pola czasowo-czasowe (Równanie Friedmana)

$$\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2=\tfrac{1}{3}\kappa\rho c^4-\frac{c^2k}{L^2}+\tfrac{1}{3}c^2\Lambda \quad \text{lub} \quad H^2=\tfrac{1}{3}\kappa\rho c^4-\frac{c^2k}{L^2}+\tfrac{1}{3}c^2\Lambda$$

Równanie na przyspieszenie czynnika skali (Równanie oscylatora kosmologicznego)

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t^2}+\left[-\tfrac{1}{3}c^2\Lambda+\tfrac{1}{2}\kappa c^2\left(\tfrac{1}{3}\rho c^2+p\right)\right]L=0$$

Równania bilansu pędu dla pyłu i promieniowania

$$\operatorname{grad} p=0$$

Równania bilansu energii dla pyłu i promieniowania

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+3\left(\rho+\frac{p}{c^2}\right)\frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial t}=0$$

p = ciśnienie promieniowania
ρ = gęstość pyłu

Równanie bilansu energii zapiszemy w postaci wygodnej do analizy.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+3\left(\rho+\frac{p}{c^2}\right)\frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial t}=0$$

$$\frac{\partial L^3}{\partial t}=3L^2\frac{\partial L}{\partial t}, \qquad \frac{\partial\left(\rho L^3\right)}{\partial t}=3\rho L^2\frac{\partial L}{\partial t}+L^3\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

$$\boxed{\frac{\partial\left(\rho L^3\right)}{\partial t}+\frac{p}{c^2}\frac{\partial L^3}{\partial t}=0}$$

- **Analiza modelu**

Wszechświat wypełniony jest tylko materią: $p = 0$

$$\frac{\partial(\rho L^3)}{\partial t} = 0, \quad \rho = \frac{A}{L^3}, \quad A = \mathrm{const} > 0$$

Przypadek: $\operatorname{sgn} k = 0, \quad \Lambda = 0$

$$\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2 = H^2 = \tfrac{1}{3}\kappa\rho c^4 \quad \text{lub} \quad \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2 = \frac{\tfrac{1}{3}\kappa A c^4}{L}, \quad \boxed{\rho = \rho_c = \frac{3H^2}{\kappa c^4}}$$

$L \to \infty, \quad \dfrac{\partial L}{\partial t} \to 0.$ L zwiększa się z szybkością malejącą do zera.

Przypadek: $\operatorname{sgn} k = -1, \quad \Lambda = 0$

$$\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2 = H^2 = \tfrac{1}{3}\kappa\rho c^4 + \frac{c^2}{|a^2| L^2} \quad \text{lub} \quad \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2 = \frac{\tfrac{1}{3}\kappa A c^4}{L} + \frac{c^2}{|a^2|}, \quad \boxed{\rho < \rho_c = \frac{3H^2}{\kappa c^4}}$$

$L \to \infty, \quad \dfrac{\partial L}{\partial t} \to \dfrac{c}{\sqrt{|a^2|}}.$ L zwiększa się z szybkością malejącą do stałej wartości.

Przypadek: $\operatorname{sgn} k = +1, \quad \Lambda = 0$

$$\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2 = H^2 = \tfrac{1}{3}\kappa\rho c^4 - \frac{c^2}{a^2 L^2} \quad \text{lub} \quad \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2 = \frac{\tfrac{1}{3}\kappa A c^4}{L} - \frac{c^2}{a^2}, \quad \boxed{\rho > \rho_c = \frac{3H^2}{\kappa c^4}}$$

Po pewnym czasie czynnik L przestaje się zwiększać i zaczyna się zmniejszać.

Wszechświat wypełniony jest tylko energią związaną z promieniowaniem: $p = \tfrac{1}{3}\rho c^2$

$$\frac{\partial(\rho L^3)}{\partial t} + \tfrac{1}{3}\rho\frac{\partial L^3}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial(\rho L^4)}{\partial t} = L\frac{\partial(\rho L^3)}{\partial t} + \tfrac{1}{3}\rho L\frac{\partial L^3}{\partial t}$$

$$\frac{\partial(\rho L^4)}{\partial t} = 0, \quad \rho = \frac{B}{L^4}, \quad B = \mathrm{const} > 0$$

Przypadek: $\operatorname{sgn} k = 0, \quad \Lambda = 0$

$$\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2 = H^2 = \tfrac{1}{3}\kappa\rho c^4 \quad \text{lub} \quad \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2 = \frac{\tfrac{1}{3}\kappa B c^4}{L^2}, \quad \boxed{\rho = \rho_c = \frac{3H^2}{\kappa c^4}}$$

$L \to \infty, \quad \dfrac{\partial L}{\partial t} \to 0.$ L zwiększa się z szybkością malejącą do zera.

Przypadek: $\operatorname{sgn} k = -1, \quad \Lambda = 0$

$$\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2 = H^2 = \tfrac{1}{3}\kappa\rho c^4 + \frac{c^2}{|a^2| L^2} \quad \text{lub} \quad \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2 = \frac{\tfrac{1}{3}\kappa B c^4}{L^2} + \frac{c^2}{|a^2|}, \quad \boxed{\rho < \rho_c = \frac{3H^2}{\kappa c^4}}$$

$L \to \infty, \quad \dfrac{\partial L}{\partial t} \to \dfrac{c}{\sqrt{|a^2|}}.$ L zwiększa się z szybkością malejącą do stałej wartości.

Przypadek: $\operatorname{sgn} k = +1, \quad \Lambda = 0$

$$\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2 = H^2 = \tfrac{1}{3}\kappa\rho c^4 - \frac{c^2}{a^2 L^2} \quad \text{lub} \quad \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2 = \frac{\tfrac{1}{3}\kappa B c^4}{L^2} - \frac{c^2}{a^2}, \quad \boxed{\rho > \rho_c = \frac{3H^2}{\kappa c^4}}$$

Po pewnym czasie czynnik L przestaje się zwiększać i zaczyna się zmniejszać.

- **Analiza modelu w przypadku różnej od zera stałej kosmologicznej**

Przypadek: $\operatorname{sgn} k = 0$

$$\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2 = H^2 = \tfrac{1}{3}\kappa\rho c^4 - \frac{c^2 k}{L^2} + \tfrac{1}{3}c^2\Lambda\,, \qquad \frac{1}{L}\frac{\partial^2 L}{\partial t^2} = \tfrac{1}{3}c^2\Lambda - \tfrac{1}{2}\kappa c^2\left(\tfrac{1}{3}\rho c^2 + p\right)$$

$$p = 0\,, \quad \rho = 0\,, \quad \operatorname{sgn} k = 0\,, \quad \Lambda = \text{const} > 0$$

$$\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2 = H^2 = -\tfrac{1}{3}c^2\Lambda\,, \qquad \frac{1}{L}\frac{\partial^2 L}{\partial t^2} = -\tfrac{1}{3}c^2\Lambda$$

$$L = \exp\left[\left(\tfrac{1}{3}\Lambda\right)^{\frac{1}{2}} ct\right] = \exp[Ht], \qquad H = c\left(\tfrac{1}{3}\Lambda\right)^{\frac{1}{2}} = \text{const}$$

L zwiększa się eksponencjalnie w czasie. $H = \text{const}$ oznacza ciągłą pozorną ucieczkę cząstki póbnej zgodnie z prawem Hubble'a.

UWAGA

Ze względu na $p = 0$ i $\rho = 0$ rozpatrywany model opisuje wszechświat de Sittera i powinien być traktowany jako graniczny przypadek bardziej realistycznych modeli.

Przypadek: $\operatorname{sgn} k = -1$

$$\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2 = H^2 = \tfrac{1}{3}\kappa\rho c^4 - \frac{c^2 k}{L^2} + \tfrac{1}{3}c^2\Lambda\,, \qquad \frac{1}{L}\frac{\partial^2 L}{\partial t^2} = \tfrac{1}{3}c^2\Lambda - \tfrac{1}{2}\kappa c^2\left(\tfrac{1}{3}\rho c^2 + p\right)$$

$$p = 0\,, \quad \rho = 0\,, \quad \operatorname{sgn} k = -1\,, \quad \Lambda = \text{const} > 0$$

$$\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2 = H^2 = \frac{c^2}{|a^2|L^2} + \tfrac{1}{3}c^2\Lambda\,, \qquad \frac{1}{L}\frac{\partial^2 L}{\partial t^2} = \tfrac{1}{3}c^2\Lambda$$

Układ nie posiada wspólnych rozwiązań.

Przypadek: $\operatorname{sgn} k = +1$

$$\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2 = H^2 = \tfrac{1}{3}\kappa\rho c^4 - \frac{c^2 k}{L^2} + \tfrac{1}{3}c^2\Lambda\,, \qquad \frac{1}{L}\frac{\partial^2 L}{\partial t^2} = \tfrac{1}{3}c^2\Lambda - \tfrac{1}{2}\kappa c^2\left(\tfrac{1}{3}\rho c^2 + p\right)$$

$$p = 0\,, \quad \rho = 0\,, \quad \operatorname{sgn} k = +1\,, \quad \Lambda = \text{const} > 0$$

$$\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2 = H^2 = -\frac{c^2}{a^2 L^2} + \tfrac{1}{3}c^2\Lambda\,, \qquad \frac{1}{L}\frac{\partial^2 L}{\partial t^2} = \tfrac{1}{3}c^2\Lambda$$

Układ nie posiada wspólnych rozwiązań.

- Prawo Hubble'a

$$\hat{v}^{\mu} \overset{df}{=} \sqrt{\operatorname{sgn} ds^2}\, c \frac{d\hat{x}^{\mu}}{ds}$$

$$\operatorname{sgn} ds^2 = -1$$

$$\hat{v}^{\mu} = i\, c \frac{d\hat{x}^{\mu}}{ds}$$

$$\hat{x}^{\alpha} = \int_0^{x^{\alpha}} BLdx^{\alpha}, \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$

$$\hat{x}^4 = x^4$$

$$\hat{v}^{\alpha} = i\, c \int_0^{x^{\alpha}} \frac{dBL}{ds} d\, x^{\alpha}, \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$

$$v^{\alpha} = ic \frac{dx^{\alpha}}{ds} \overset{\text{zał}}{=} 0, \quad \frac{dx^{\alpha}}{ds} = 0, \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$

$$\frac{dx^4}{ds} = 1$$

$$\frac{dBL}{ds} = \frac{\partial BL}{\partial t}\frac{dt}{ds} + \frac{\partial BL}{\partial x^1}\frac{dx^1}{ds} + \frac{\partial BL}{\partial x^2}\frac{dx^2}{ds} + \frac{\partial BL}{\partial x^3}\frac{dx^3}{ds} = \frac{\partial BL}{\partial t}\frac{1}{ic}\frac{dx^4}{ds} = \frac{1}{ic} B \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\hat{v}^{\alpha} = \frac{\partial L}{\partial t}\int_0^{x^{\alpha}} Bdx^{\alpha} = \frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial t}\int_0^{x^{\alpha}} BLdx^{\alpha} \quad = \text{ pozorna prędkość ucieczki}$$

$$H \overset{df}{=} \frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial t} \quad = \text{ stała (parametr) Hubble'a}$$

$$\hat{x}^{\alpha} = \int_0^{x^{\alpha}} BLdx^{\alpha}, \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$

$$\boxed{\hat{v}^{\alpha} = H\, \hat{x}^{\alpha}}$$ Prawo Hubble'a

x^{α} = współrzędne względem układu kartezjańskiego sztywno związanego z Ziemią

$\hat{x}^{\alpha}$ = współrzędne przeskalowane

$L = L(t)$ = bezwymiarowy czasowy czynnik skali

UWAGA

Prawo Hubble'a głoszące, że galaktyki oddalają się od nas z pozorną prędkością wprost proporcjonalną do ich przeskalowanej odległości, jest równoważne ze stwierdzeniem, że czynnik skali wszechświata rośnie w czasie eksponencjalnie, ponieważ niezmienność w czasie stałej (parametru) Hubble'a oznacza, że

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial t}\right) = 0$$

$$\boxed{L = \exp Ht}$$

- **Metryka F-L-R-W we współrzędnych sferycznych**

$$ds^2 = L^2 \frac{\left(dx^1\right)^2 + \left(dx^2\right)^2 + \left(dx^3\right)^2}{\left[1 + \frac{k}{4}\left\{\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 + \left(x^3\right)^2\right\}\right]^2} + \left(dx^4\right)^2$$

Metryka F-L-R-W w kartezjańskich współrzędnych izotropowych

$$x^1 = r\sin\theta\cos\varphi, \quad dx^1 = \sin\theta\cos\varphi\, dr + r\cos\theta\cos\varphi\, d\theta - r\sin\theta\sin\varphi\, d\varphi$$

$$x^2 = r\sin\theta\sin\varphi, \quad dx^2 = \sin\theta\sin\varphi\, dr + r\cos\theta\sin\varphi\, d\theta + r\sin\theta\cos\varphi\, d\varphi$$

$$x^3 = r\cos\theta, \quad dx^3 = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta$$

$$x^4 = x^4 = ict$$

$$r^2 = \left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 + \left(x^3\right)^2$$

$$ds^2 = L^2 \frac{dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)}{\left(1 + \frac{k}{4}r^2\right)^2} + \left(dx^4\right)^2$$

Metryka F-L-R-W w sferycznych współrzędnych izotropowych

$$\hat{r} = \frac{r}{1 + \frac{k}{4}r^2}$$

$$r^2 = \left(1 + \frac{k}{4}r^2\right)^2 \hat{r}^2, \quad \frac{\left(1 + \frac{k}{4}r^2\right)^2}{\left(1 - \frac{k}{4}r^2\right)^2} = \frac{1}{1 - k\hat{r}^2}, \quad dr^2 = \frac{\left(1 + \frac{k}{4}r^2\right)^4}{\left(1 - \frac{k}{4}r^2\right)^2} d\hat{r}^2 = \frac{\left(1 + \frac{k}{4}r^2\right)^2}{1 - k\hat{r}^2} d\hat{r}^2$$

$$ds^2 = L^2 \left[\frac{d\hat{r}^2}{1 - k\hat{r}^2} + \hat{r}^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right] + \left(dx^4\right)^2$$

UWAGA

Współrzędnymi izotropowymi nazywane są współrzędne, w których przestrzenna część metryki jest proporcjonalna do odpowiadającego jej wyrażenia euklidesowego.

11 PROSTY MODEL ROZSZERZAJĄCEJ SIĘ CZASOPRZESTRZENI

- **Podstawowe założenia**

Podamy interpretację prawa Hubble'a w oparciu o model rozszerzającej się czasoprzestrzeni. Zakładamy, że względem układu związanego z Ziemią otaczająca ją jednorodnie rozmieszczona w skali wszechświata materia pozostaje w spoczynku. Ekspansji ulega czasoprzestrzeń, wskutek czego obserwujemy pozorną ucieczkę galaktyk.

- **Podstawowa forma metryczna**

$$ds^2 = L^2\left[\left(dx^1\right)^2 + \left(dx^2\right)^2 + \left(dx^3\right)^2 + \left(dx^4\right)^2\right]$$

$$x^4 = ict$$

$L = L(t)$ = bezwymiarowy czynnik skali

- **Składowe kowariantnego tensora metrycznego**

$$g_{\bullet\bullet} = \begin{bmatrix} L^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L^2 \end{bmatrix}, \quad g_{\bullet\bullet} = \text{diag}\left(L^2, L^2, L^2, L^2\right)$$

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = g_{44} = L^2$$

Pozostałe składowe kowariantnego tensora metrycznego są równe zeru.

$$g = g_{11}g_{22}g_{33}g_{44} = L^8$$

- **Składowe kontrawariantnego tensora metrycznego**

$$g^{\alpha\alpha} = g_{\alpha\alpha}^{-1}$$

$$g^{\bullet\bullet} = \begin{bmatrix} L^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L^{-2} \end{bmatrix}, \quad g^{\bullet\bullet} = \text{diag}\left(L^{-2}, L^{-2}, L^{-2}, L^{-2}\right)$$

$$g^{11} = g^{22} = g^{33} = g^{44} = L^{-2}$$

Pozostałe składowe kontrawariantnego tensora metrycznego są równe zeru.

- **Składowe mieszanego tensora metrycznego**

$$g_{\bullet}^{\bullet} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g_{\bullet}^{\bullet} = \text{diag}\left(1, 1, 1, 1\right)$$

$$g_1^1 = g_2^2 = g_3^3 = g_4^4 = 1$$

Pozostałe składowe mieszanego tensora metrycznego są równe zeru.

- **Symbole Christoffela pierwszego rodzaju:** $\left[{}^{\mu\ \nu}_{\ \alpha}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}}+\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\right)$

$$\left[{}^{1\ 1}_{\ 4}\right]=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^4}$$
$$\left[{}^{2\ 2}_{\ 4}\right]=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^4}$$
$$\left[{}^{3\ 3}_{\ 4}\right]=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^4}$$
$$\left[{}^{1\ 4}_{\ 1}\right]=\left[{}^{4\ 1}_{\ 1}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^4}$$
$$\left[{}^{2\ 4}_{\ 2}\right]=\left[{}^{4\ 2}_{\ 2}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^4}$$
$$\left[{}^{3\ 4}_{\ 3}\right]=\left[{}^{4\ 3}_{\ 3}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^4}$$
$$\left[{}^{4\ 4}_{\ 4}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^4}$$

- **Symbole Christoffela drugiego rodzaju:** $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}=g^{\sigma\alpha}\left[{}^{\mu\ \nu}_{\ \alpha}\right]$

$$\Gamma^4_{11}=g^{44}\left[{}^{1\ 1}_{\ 4}\right]=-\frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial x^4}$$
$$\Gamma^4_{22}=g^{44}\left[{}^{2\ 2}_{\ 4}\right]=-\frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial x^4}$$
$$\Gamma^4_{33}=g^{44}\left[{}^{3\ 3}_{\ 4}\right]=-\frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial x^4}$$

$$\Gamma^1_{14}=\Gamma^1_{41}=g^{11}\left[{}^{1\ 4}_{\ 1}\right]=\frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial x^4}$$
$$\Gamma^2_{24}=\Gamma^2_{42}=g^{22}\left[{}^{2\ 4}_{\ 2}\right]=\frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial x^4}$$
$$\Gamma^3_{34}=\Gamma^3_{43}=g^{33}\left[{}^{3\ 4}_{\ 3}\right]=\frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial x^4}$$
$$\Gamma^4_{44}=g^{44}\left[{}^{4\ 4}_{\ 4}\right]=\frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial x^4}$$

- **Składowe tensora Ricciego:** $R_{\mu\nu}=\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}+\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}-\Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}$

$$R_{11}=-\frac{\partial\Gamma^4_{11}}{\partial x^4}+\Gamma^1_{14}\Gamma^4_{11}-\Gamma^4_{11}\Gamma^2_{24}-\Gamma^4_{11}\Gamma^3_{34}-\Gamma^4_{11}\Gamma^4_{44}$$
$$R_{22}=-\frac{\partial\Gamma^4_{22}}{\partial x^4}+\Gamma^2_{24}\Gamma^4_{22}-\Gamma^4_{22}\Gamma^1_{14}-\Gamma^4_{22}\Gamma^3_{34}-\Gamma^4_{22}\Gamma^4_{44}$$
$$R_{33}=-\frac{\partial\Gamma^4_{33}}{\partial x^4}+\Gamma^3_{34}\Gamma^4_{33}-\Gamma^4_{33}\Gamma^1_{14}-\Gamma^4_{33}\Gamma^2_{24}-\Gamma^4_{33}\Gamma^4_{44}$$
$$R_{44}=\frac{\partial\Gamma^1_{14}}{\partial x^4}+\frac{\partial\Gamma^2_{24}}{\partial x^4}+\frac{\partial\Gamma^3_{34}}{\partial x^4}+\Gamma^1_{14}\Gamma^1_{14}+\Gamma^2_{24}\Gamma^2_{24}+\Gamma^3_{34}\Gamma^3_{34}-\Gamma^4_{44}\left(\Gamma^1_{14}+\Gamma^2_{24}+\Gamma^3_{34}\right)$$

$$R_{11}=R_{22}=R_{33}=\frac{1}{L}\frac{\partial^2 L}{\partial x^4\partial x^4}+\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial L}{\partial x^4}\right)^2=-\frac{1}{c^2}\left[\frac{1}{L}\frac{\partial^2 L}{\partial t^2}+\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2\right]$$
$$R_{44}=\frac{3}{L}\frac{\partial^2 L}{\partial x^4\partial x^4}-\frac{3}{L^2}\left(\frac{\partial L}{\partial x^4}\right)^2=-\frac{3}{c^2}\left[\frac{1}{L}\frac{\partial^2 L}{\partial t^2}-\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2\right]$$
Pozostałe składowe tensora Ricciego są równe zeru.

- **Skalar krzywizny:** $R=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, $\quad R=g^{11}R_{11}+g^{22}R_{22}+g^{33}R_{33}+g^{44}R_{44}$

$$R=\frac{6}{L^3}\frac{\partial^2 L}{\partial x^4\partial x^4}=-\frac{6}{c^2}\frac{1}{L^3}\frac{\partial^2 L}{\partial t^2}$$

- **Składowe tensora Einsteina**

$$R_{ij}-\tfrac{1}{2}g_{ij}R=\left[\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial L}{\partial x^4}\right)^2-\frac{2}{L}\frac{\partial^2 L}{\partial x^4\partial x^4}\right]\delta_{ij}=\frac{1}{c^2}\left[-\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2+\frac{2}{L}\frac{\partial^2 L}{\partial t^2}\right]\delta_{ij},\quad (i,j=1,2,3)$$

$$R_{i4}-\tfrac{1}{2}g_{i4}R=0,\quad (i=1,2,3)$$

$$R_{44}-\tfrac{1}{2}g_{44}R=-\frac{3}{L^2}\left(\frac{\partial L}{\partial x^4}\right)^2=\frac{3}{L^2c^2}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2$$

- **Tensor pędu-energii dla pyłu i promieniowania**

Rozkład gęstości energii dla pyłu i promieniowania we wszechświecie opiszemy tensorem pędu-energii dla cieczy nielepkiej.

$$T^{\mu\nu}=\left(pc^{-2}+\rho\right)\tilde{v}^{\mu}\tilde{v}^{\nu}+g^{\mu\nu}p,\quad p=\text{ ciśnienie promieniowania}$$

$$T_{\alpha\beta}=\left(pc^{-2}+\rho\right)\tilde{v}_{\alpha}\tilde{v}_{\beta}+g_{\alpha\beta}p=\left(pc^{-2}+\rho\right)g_{\mu\alpha}g_{\beta\nu}\tilde{v}^{\mu}\tilde{v}^{\nu}+g_{\alpha\beta}p$$

$$T^{\mu}_{\sigma}=\left(pc^{-2}+\rho\right)\tilde{v}^{\mu}\tilde{v}_{\sigma}+g^{\mu}_{\sigma}p=\left(pc^{-2}+\rho\right)g_{\sigma\nu}\tilde{v}^{\mu}\tilde{v}^{\nu}+g^{\mu}_{\sigma}p$$

$$\tilde{v}^{\alpha}=\sqrt{\operatorname{sgn} ds^2}\,c\frac{dx^{\alpha}}{ds},\quad \operatorname{sgn} ds^2=-\operatorname{sgn} g_{44}=-\operatorname{sgn} L^2=-1$$

$$g_{\mu\alpha}\tilde{v}^{\mu}=\tilde{v}_{\alpha},\quad g_{\beta\nu}\tilde{v}^{\nu}=\tilde{v}_{\beta},\quad g_{\sigma\nu}\tilde{v}^{\nu}=\tilde{v}_{\sigma}$$

$$\tilde{v}^1=\tilde{v}^2=\tilde{v}^3=0,\quad ds=\sqrt{g_{44}}dx^4$$

$$\boxed{\begin{aligned}&T^{\bullet\bullet}=\operatorname{diag}\left(L^{-2}p,L^{-2}p,L^{-2}p,T^{44}\right),T^{44}=-L^{-2}\rho c^2\\&T_{\bullet\bullet}=\operatorname{diag}\left(L^{2}p,L^{2}p,L^{2}p,T_{44}\right),\quad T_{44}=-L^{2}\rho c^2\\&T^{\bullet}_{\bullet}=\operatorname{diag}\left(p,p,p,T^4_4\right),\quad T^4_4=-\rho c^2\end{aligned}}$$

- **Równania pola**

$$R_{\alpha\beta}-\tfrac{1}{2}g_{\alpha\beta}R=-\kappa T_{\alpha\beta},\quad \kappa=8\pi Gc^{-4}=2{,}073\cdot 10^{-43}s^2kg^{-1}m^{-1}$$

$$\boxed{\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial L}{\partial x^4}\right)^2-\frac{2}{L}\frac{\partial^2 L}{\partial x^4\partial x^4}=-\kappa L^2 p}\quad\text{lub}\quad\boxed{-\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2+\frac{2}{L}\frac{\partial^2 L}{\partial t^2}=-c^2\kappa L^2 p}$$

$$\boxed{-\frac{3}{L^2}\left(\frac{\partial L}{\partial x^4}\right)^2=c^2\kappa L^2\rho}\quad\text{lub}\quad\boxed{+\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2=+\tfrac{1}{3}c^4\kappa L^2\rho}$$

Łącząc powyższe dwa równania, otrzymujemy

$$\boxed{\frac{\partial^2 L}{\partial x^4\partial x^4}=\tfrac{1}{2}\kappa L^3\left(p-\tfrac{1}{3}c^2\rho\right)}\quad\text{lub}\quad\boxed{\frac{\partial^2 L}{\partial t^2}=\tfrac{1}{2}c^2\kappa L^3\left(-p+\tfrac{1}{3}c^2\rho\right)}$$

- **Prawa zachowania**

Prawa zachowania pędu i energii wyrazimy przez znikanie dywergencji tensora pędu-energii.

$$T^{\alpha}_{\beta;\alpha} = \frac{\partial T^{\alpha}_{\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \Gamma^{\mu}_{\beta\alpha} T^{\alpha}_{\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} T^{\mu}_{\beta} = 0, \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

Dla $\alpha = 1$ (oraz analogicznie dla $\alpha = 2$ i $\alpha = 3$) mamy:

$$T^{\alpha}_{1;\alpha} = \frac{\partial T^{\alpha}_{1}}{\partial x^{\alpha}} - \Gamma^{\mu}_{1\alpha} T^{\alpha}_{\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} T^{\mu}_{1} = \frac{\partial T^{1}_{1}}{\partial x^{1}} = \frac{\partial p}{\partial x^{1}} = 0,$$

$$T^{\alpha}_{2;\alpha} = \frac{\partial T^{2}_{2}}{\partial x^{2}} = \frac{\partial p}{\partial x^{2}} = 0, \quad T^{\alpha}_{3;\alpha} = \frac{\partial T^{3}_{3}}{\partial x^{3}} = \frac{\partial p}{\partial x^{3}} = 0.$$

Powyższe trzy równania można zapisać w zwartej postaci.

$$\boxed{\operatorname{grad} p = 0}$$

Dla $\alpha = 4$ oraz $\operatorname{sgn} ds^2 = -1$, mamy:

$$T^{\alpha}_{4;\alpha} = \frac{\partial T^{\alpha}_{4}}{\partial x^{\alpha}} - \Gamma^{\mu}_{4\alpha} T^{\alpha}_{\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} T^{\mu}_{4} = \frac{\partial T^{4}_{4}}{\partial x^{4}} - \Gamma^{1}_{41} T^{1}_{1} - \Gamma^{2}_{42} T^{2}_{2} - \Gamma^{3}_{43} T^{3}_{3} + T^{4}_{4}\left(\Gamma^{1}_{41} + \Gamma^{2}_{42} + \Gamma^{3}_{43}\right) = 0,$$

$$-c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x^4} - \frac{3}{L}\frac{\partial L}{\partial x^4} p - \frac{3}{L}\frac{\partial L}{\partial x^4} \rho c^2 = 0.$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{3}{L}\frac{\partial L}{\partial t}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0}$$

- **Równania kosmologiczne dla pyłu i promieniowania**, $\operatorname{sgn} L^2 = +1$, $\operatorname{sgn} L = +1$

Równanie pola przestrzenno-przestrzenne

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t^2} = \frac{1}{2L}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2 - \tfrac{1}{2} c^2 \kappa L^3 p$$

Równanie pola czasowo-czasowe

$$\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2 = \tfrac{1}{3}\kappa c^4 L^2 \rho \quad \text{lub} \quad \frac{1}{L^4}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2 = H^2 = \tfrac{1}{3}\kappa c^4 \rho$$

Połączenie obu równań pola

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t^2} = \tfrac{1}{2} c^2 \kappa L^3 \left(-p + \tfrac{1}{3}\rho c^2\right)$$

Równanie bilansu pędu

$\operatorname{grad} p = 0$

Równanie bilansu energii

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3L^{-1}\frac{\partial L}{\partial t}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0 \quad \text{lub} \quad \frac{\partial\left(\rho L^3\right)}{\partial t} + \frac{p}{c^2}\frac{\partial L^3}{\partial t} = 0$$

p = ciśnienie promieniowania

ρ = gęstość pyłu

- **Niezerowe składowe mieszanego tensora krzywizny**

$$R^1_{212} = R^1_{313} = R^2_{121} = R^2_{323} = R^3_{131} = R^3_{232} = \left(\frac{1}{Lc}\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2 = \tfrac{1}{3}\kappa c^2 \rho L^2$$

$$R^1_{414} = R^2_{424} = R^3_{434} = R^4_{141} = R^4_{242} = R^4_{343} = \frac{1}{Lc^2}\frac{\partial^2 L}{\partial t^2} - \left(\frac{1}{Lc}\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2 = -\tfrac{1}{2}\kappa L^2\left(\tfrac{1}{3}\rho c^2 + p\right)$$

- **Analiza modelu**

Wszechświat wypełniony jest tylko energią związaną z promieniowaniem: $p = \tfrac{1}{3}\rho c^2$

$$\rho L^4 = B = \text{const} > 0$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2 = \tfrac{1}{3}\kappa c^4 \rho L^4 = \tfrac{1}{3}\kappa c^4 B = \text{const} > 0$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t^2} = 0$$

$$L = L_0 + c^2\sqrt{\tfrac{1}{3}\kappa B}\, t, \qquad t \ge 0$$

$$R^1_{212} = R^1_{313} = R^2_{121} = R^2_{323} = R^3_{131} = R^3_{232} = \tfrac{1}{3}\kappa c^2 \rho L^2 = \tfrac{1}{3}\kappa c^2 B L^{-2}$$

$$R^1_{414} = R^2_{424} = R^3_{434} = R^4_{141} = R^4_{242} = R^4_{343} = -\tfrac{1}{3}\kappa c^2 \rho L^2 = -\tfrac{1}{3}\kappa c^2 B L^{-2}$$

Los wszechświata:
Liniowy wzrost w czasie czynnika skali i asymptotyczne zbliżanie się do stanu płaskiej czasoprzestrzeni.

Wszechświat wypełniony jest tylko materią: $p = 0$

$$\rho L^3 = A = \text{const} > 0$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t^2} = \tfrac{1}{6}\kappa c^4 \rho L^3 = \tfrac{1}{6}\kappa c^4 A = \text{const} > 0$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t^2} = \frac{1}{2L}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2$$

Ostatni wzór jest podobny do relacji $a = \dfrac{v^2}{2S}$, łączącej przyspieszenie, prędkość i drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym bez prędkości początkowej. W związku z tym

$$L = L_0 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{6}\kappa c^4 A\right)t^2, \qquad t \ge 0$$

$$R^1_{212} = R^1_{313} = R^2_{121} = R^2_{323} = R^3_{131} = R^3_{232} = \tfrac{1}{3}\kappa c^2 A L^{-1} = 4c^{-2}t^{-2}$$

$$R^1_{414} = R^2_{424} = R^3_{434} = R^4_{141} = R^4_{242} = R^4_{343} = -\tfrac{1}{6}\kappa c^2 A L^{-1} = -2c^{-2}t^{-2}$$

Los wszechświata:
Kwadratowy wzrost w czasie czynnika skali i asymptotyczne zbliżanie się do stanu płaskiej czasoprzestrzeni.

- **Prawo Hubble'a**

$$\hat{v}^\mu \overset{df}{=} \sqrt{\operatorname{sgn} ds^2}\, c \frac{d\hat{x}^\mu}{ds}$$

$$\operatorname{sgn} ds^2 = -1$$

$$\hat{v}^\mu = i\, c \frac{d\hat{x}^\mu}{ds}$$

$$\hat{x}^\mu = L x^\mu$$

$$\hat{v}^\mu = i\, c \left(L \frac{dx^\mu}{ds} + x^\mu \frac{dL}{ds} \right)$$

$$v^\alpha = ic \frac{dx^\alpha}{ds} \overset{\text{zał}}{=} 0, \qquad \frac{dx^\alpha}{ds} = 0, \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

$$\frac{dx^4}{ds} = \frac{1}{L}$$

$$\frac{dL}{ds} = \frac{\partial L}{\partial t}\frac{dt}{ds} = \frac{\partial L}{\partial t}\frac{1}{ic}\frac{dx^4}{ds} = \frac{1}{ic}\frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\hat{v}^\mu = x^\mu \frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial t} = L x^\mu \frac{1}{L^2}\frac{\partial L}{\partial t} \quad = \text{ pozorna prędkość ucieczki}$$

$$H \overset{df}{=} \frac{1}{L^2}\frac{\partial L}{\partial t} \quad = \text{ stała (parametr) Hubble'a}$$

$$\hat{x}^\mu = L\, x^\mu$$

$$\boxed{\hat{v}^\mu = H\, \hat{x}^\mu} \qquad \text{Prawo Hubble'a}$$

x^α = współrzędne względem układu sztywno związanego z Ziemią

$\hat{x}^\alpha$ = współrzędne przeskalowane

$L = L(t)$ = czasowy czynnik skali

UWAGA

Prawo Hubble'a głoszące, że galaktyki oddalają się od nas z pozorną prędkością wprost proporcjonalną do ich przeskalowanej odległości, jest równoważne ze stwierdzeniem, że czynnik skali wszechświata rośnie w czasie liniowo, gdy $p = \frac{1}{3}\rho c^2$ i kwadratowo, gdy $p = 0$.

12 MODEL WIRUJĄCEGO WSZECHŚWIATA GÖDLA

- **Rozwiązanie Gödla**

W 1949 Kurt Gödel [1)] znalazł rozwiązanie równań pola (z członem kosmologicznym różnym od zera)

$$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\kappa T_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu},$$

opisujące model wszechświata o stałym promieniu przestrzennym, w którym materia wiruje wokół osi przechodzącej przez środek masy (osią obrotu jest prosta X^3). Rozwiązanie zostało podane w układzie wirującym wraz z materią.

$$\boxed{ds^2 = -\left(dx^1\right)^2 + \tfrac{1}{2} e^{2bx^1} \left(dx^2\right)^2 - \left(dx^3\right)^2 + 2e^{bx^1} dx^2 dx^4 + \left(dx^4\right)^2}$$

$$ds^2 \geq 0,$$

$$x^4 = ct,$$

$$b = \frac{1}{R},$$

$$R = \frac{1}{c\sqrt{\kappa\rho}},$$

R = stały promień przestrzenny wszechświata,

$$\lambda = \frac{1}{2R^2},$$

$$T_{\mu\nu} = \rho v_\mu v_\nu,$$

$$v = \left(v^1, v^2, v^3, v^4\right) = (0,0,0,c),$$

$$v = \left(v_1, v_2, v_3, v_4\right) = \left(0, ce^{bx^1}, 0, c\right).$$

Rozwiązanie Gödla podaliśmy jako przykład ilustrujący możliwości OTW, która dopuszcza istnienie różnych wirtualnych modeli wszechświata. Fakt, że żyjemy we wszechświecie friedmanowskim wydaje się być jedynie dziełem przypadku.

- **Metryka Gödla we współrzędnych cylindrycznych**

Metrykę Godla zapiszemy również we współrzędnych cylindrycznych

$$x^1 = r\cos\varphi, \quad x^2 = r\sin\varphi, \quad x^3 = x^3, \quad x^4 = x^4.$$

$$\boxed{\begin{aligned} ds^2 = & -\left(\cos^2\varphi - \tfrac{1}{2} e^{2br\cos\varphi} \sin^2\varphi\right) dr^2 - r^2\left(\sin^2\varphi - \tfrac{1}{2} e^{2br\cos\varphi} \cos^2\varphi\right) d\varphi^2 - \left(dx^3\right)^2 + \left(dx^4\right)^2 + \\ & + 2r\sin\varphi\cos\varphi\left(1 + \tfrac{1}{2} e^{2br\cos\varphi}\right) dr d\varphi + 2e^{br\cos\varphi} \sin\varphi\, dr dx^4 + 2re^{br\cos\varphi} \cos\varphi\, d\varphi dx^4 \end{aligned}}$$

Dla $\varphi = 0$ oraz $\varphi = 2\pi$

$$ds^2 = -dr^2 + \tfrac{1}{2} r^2 e^{2br} d\varphi^2 - \left(dx^3\right)^2 + \left(dx^4\right)^2 + 2re^{br} d\varphi dx^4.$$

Po pełnym obrocie układu współrzędnych, przy ustalonym r, metryka pozostaje nie zmieniona.

Uwzględniając, że

$$T = \frac{2\pi R}{c} \quad \text{oraz} \quad R = \frac{1}{c\sqrt{\kappa\rho}},$$

dla okresu obrotu wszechświata otrzymujemy

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{c^2\sqrt{\kappa\rho}} \approx 1{,}5\cdot 10^5 [m^{-\frac{3}{2}}\cdot s\cdot kg^{\frac{1}{2}}]\frac{1}{\sqrt{\rho}}}$$

Czytelników zainteresowanych rozwiązaniem Gödla odsyłamy do jego drugiej pracy kosmologicznej opublikowanej w 1952 [2)].

[1)] Kurt Gödel: *An Example of a New Type of Cosmological Solutions of Einstein's Field Equations of Gravitaion.* Reviews of Modern Physics **21**, 3 (July, 1949) 447-450.
Przykład nowego typu kosmologicznych rozwiązań równań pola grawitacyjnego Einsteina.

[2)] Kurt Gödel: *Rotating Universes in General Relativity Theory.* Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Edited by L. M. Graves et al.. Cambridge, Mass. **1** (1952) 175-181.
Wirujące wszechświaty w ogólnej teorii względności.

NIEZBĘDNIK MATEMATYCZNY

1 MACIERZE

- **Podstawowe definicje**

Macierzą $\mathbf{A}^{m\times n} = \left[a_{\mu\nu}\right]^{m\times n}$, $(\mu = 1,\ldots,m;\ \nu = 1,\ldots,n)$, o wymiarach m na n nazywamy zbiór liczb lub funkcji, zwanych jej elementami, zestawionych w m wierszy i n kolumn. Element $a_{\mu\nu}$ znajduje się w μ-tym wierszu i ν-tej kolumnie.

- **Wyznacznik macierzy**

Wyznacznikiem stopnia n macierzy $\mathbf{A}^{n\times n} = \left[a_{\mu\nu}\right]^{n\times n}$, oznaczanym przez $\det \mathbf{A} = \left| a_{\mu\nu} \right|$, nazywamy liczbę lub funkcję utworzoną z elementów macierzy $\mathbf{A}$ według wzoru

$$\det \mathbf{A} \overset{df}{=} \sum_{\lambda=1}^{n!} (-1)^{k_\lambda} a_{1\lambda_1} a_{2\lambda_2} \cdots a_{n\lambda_n} .$$

Sumowanie przeprowadza się po wszystkich n! permutacjach $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ liczb 1,2,...,n, a k_λ jest ilością inwersji (nieporządków, przestawień) w danej permutacji drugich wskaźników.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Wyznacznik trzeciego stopnia wygodnie jest obliczać według reguły Sarrusa.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Przypomnijmy wybrane ogólne własności wyznaczników.

TWIERDZENIE

$$\det \mathbf{A}^{n\times n} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}\Delta^{\mu\nu} = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu\nu}\Delta^{\mu\nu}$$

TWIERDZENIE

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\alpha\nu}\Delta^{\beta\nu} = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu\alpha}\Delta^{\mu\beta} = \delta_{\alpha\beta} \det \mathbf{A}^{n\times n}, \qquad \delta_{\alpha\beta} = \delta_{\beta\alpha} = \delta^{\alpha}_{\beta} = \delta^{\beta}_{\alpha} = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow \alpha = \beta \\ 0 \Leftrightarrow \alpha \neq \beta \end{cases}$$

$\Delta^{\mu\nu}$ = dopełnienie algebraiczne elementu $a_{\mu\nu}$ wyznacznika $\det \mathbf{A}^{n\times n}$

$\Delta^{\mu\nu} = (-1)^{\mu+\nu} M^{\mu\nu}$

$M^{\mu\nu}$ = minor elementu $a_{\mu\nu}$ wyznacznika $\det \mathbf{A}$, czyli podwyznacznik utworzony z wyznacznika $\det \mathbf{A}$ poprzez skreślenie μ-tego wiersza i ν-tej kolumny

Na przykład

$$\Delta^{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} .$$

- **Dodawanie macierzy**

Sumą macierzy $\mathbf{A}=\left[a_{\mu\nu}\right]^{n\times m}$ i $\mathbf{B}=\left[b_{\mu\nu}\right]^{n\times m}$ nazywamy macierz $\mathbf{C}=\left[c_{\mu\nu}\right]^{n\times m}$, $\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$, której elementy dane są wzorem $c_{\mu\nu}=a_{\mu\nu}+b_{\mu\nu}$. Dodawanie macierzy jest przemienne, $\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$.

- **Mnożenie macierzy**

Iloczynem macierzy $\mathbf{A}=\left[a_{\mu\alpha}\right]^{p\times n}$ i $\mathbf{B}=\left[b_{\alpha\nu}\right]^{n\times q}$ nazywamy macierz $\mathbf{C}=\left[c_{\mu\nu}\right]^{p\times q}$, $\mathbf{C}=\mathbf{AB}$, której elementy dane są wzorem $c_{\mu\nu}=\sum_{\alpha=1}^{n} a_{\mu\alpha}b_{\alpha\nu}$. Element $c_{\mu\nu}$ jest sumą iloczynów odpowiadających sobie elementów μ-tego wiersza macierzy $\mathbf{A}$ i ν-tej kolumny macierzy $\mathbf{B}$. Mnożenie macierzy w ogólności nie jest przemienne.

TWIERDZENIE

$\det \mathbf{A}^{n\times n}\mathbf{B}^{n\times n} = \det \mathbf{A}^{n\times n} \det \mathbf{B}^{n\times n}$

- **Macierz transponowana**

Macierzą transponowaną (przestawioną) względem macierzy $\mathbf{A}^{n\times n}=\left[a_{\mu\nu}\right]^{n\times n}$ nazywamy macierz $\mathbf{A}^{T}=\left[a^{T}_{\mu\nu}\right]=\left[a_{\nu\mu}\right]$. Macierz $\mathbf{A}^{T}$ powstaje z macierzy $\mathbf{A}$ poprzez zamianę miejscami wierszy i kolumn.

- **Macierz symetryczna**

Macierz $\mathbf{A}^{n\times n}=\left[a_{\mu\nu}\right]^{n\times n}$ nazywamy macierzą symetryczną, jeżeli $\mathbf{A}=\left[a_{\mu\nu}\right]=\mathbf{A}^{T}=\left[a_{\nu\mu}\right]$.

TWIERDZENIE

$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^{T}$

- **Macierz odwrotna**

Macierzą odwrotną do macierzy kwadratowej $\mathbf{A}$ stopnia n nazywamy macierz oznaczaną przez $\mathbf{A}^{-1}$ lub $\mathbf{A}^{R}$ także stopnia n, spełniającą następującą własność:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\left[\delta_{\mu\nu}\right], \quad \delta_{\mu\nu}=\begin{cases}1 \Leftrightarrow \mu=\nu\\ 0 \Leftrightarrow \mu\neq\nu\end{cases}.$$

A oto niektóre własności macierzy odwrotnej.

$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1}=\mathbf{A}$

$\det \mathbf{A}\cdot\det \mathbf{A}^{-1}=1$

$\left(\mathbf{AB}\right)^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}$

Operacje transpozycji i odwrócenia są przemienne.

$\left(\mathbf{A}^{T}\right)^{-1}=\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{T}$

Jak mając macierz $\mathbf{A}^{n\times n}=\left[a_{\mu\nu}\right]^{n\times n}$ znaleźć macierz odwrotną $\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{R}=\left[a^{R}_{\mu\nu}\right]^{n\times n}$?

TWIERDZENIE

$$a^{R}_{\mu\nu}=\frac{\Delta^{\nu\mu}}{\det \mathbf{A}}$$

- **Równanie charakterystyczne, wartości własne i wektory własne macierzy**

Minorem głównym stopnia k macierzy kwadratowej **A** nazywamy podmacierz powstałą z elementów stojących na przecięciu k wierszy oraz k kolumn o tych samych indeksach. Jako przykład podamy wszystkie minory główne drugiego stopnia macierzy **A** czwartego stopnia.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Równaniem charakterystycznym macierzy $\mathbf{A} = \left[a_{\mu\nu} \right]^{4\times 4}$ nazywamy równanie

$$\det \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}-\lambda \end{bmatrix} = I_0\lambda^4 + I_1\lambda^3 + I_2\lambda^2 + I_3\lambda^1 + I_4\lambda^0 = 0$$

$I_\kappa = (-1)^{4-\kappa} S_\kappa , \quad (\kappa = 0,1,2,3,4)$

S_κ = suma wyznaczników wszystkich minorów głównych stopnia κ macierzy **A**

$I_0 = S_0 = 1$

Na przykład współczynniki I_1 i I_4 są odpowiednio śladem i wyznacznikiem macierzy **A** :

$$I_1 = -(a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44}) = -\mathrm{Tr}\,\mathbf{A} = -\mathrm{Tr}\left[a_{\mu\nu} \right]^{4\times 4},$$

$$I_4 = \det \mathbf{A} = \det \left[a_{\mu\nu} \right]^{4\times 4}.$$

Przy okazji odnotujmy, że

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} = \mathrm{Tr}\,\mathbf{A} = \mathrm{Tr}\left[a_{\mu\nu} \right]^{4\times 4},$$

$$\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3\,\lambda_4 = \det \mathbf{A} = \det \left[a_{\mu\nu} \right]^{4\times 4}.$$

Rozwiązania λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 równania charakterystycznego nazywamy wartościami własnymi macierzy $\mathbf{A} = \left[a_{\mu\nu} \right]^{4\times 4}$.

Wektorem własnym odpowiadającym danej wartości własnej λ_α macierzy **A** nazywamy macierz jednokolumnową $\mathbf{x}_\alpha$ spełniającą następujące równanie

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1\alpha} \\ x_{2\alpha} \\ x_{3\alpha} \\ x_{4\alpha} \end{bmatrix} = \lambda_\alpha \begin{bmatrix} x_{1\alpha} \\ x_{2\alpha} \\ x_{3\alpha} \\ x_{4\alpha} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_\alpha = \begin{bmatrix} x_{1\alpha} \\ x_{2\alpha} \\ x_{3\alpha} \\ x_{4\alpha} \end{bmatrix}.$$

Składowe wektora własnego $x_{1\alpha}$, $x_{2\alpha}$, $x_{3\alpha}$, $x_{4\alpha}$ odpowiadającego wartości własnej λ_α są rozwiązaniami jednorodnego układu równań liniowych

$$(a_{11} - \lambda_\alpha)x_{1\alpha} + a_{12}x_{2\alpha} + a_{13}x_{3\alpha} + a_{14}x_{4\alpha} = 0,$$
$$a_{21}x_{1\alpha} + (a_{22} - \lambda_\alpha)x_{2\alpha} + a_{23}x_{3\alpha} + a_{24}x_{4\alpha} = 0,$$
$$a_{31}x_{1\alpha} + a_{32}x_{2\alpha} + (a_{33} - \lambda_\alpha)x_{3\alpha} + a_{34}x_{4\alpha} = 0,$$
$$a_{41}x_{1\alpha} + a_{42}x_{2\alpha} + a_{43}x_{3\alpha} + (a_{44} - \lambda_\alpha)x_{4\alpha} = 0.$$

- **Transformacje ortogonalne**

DEFINICJA
Transformacje ortogonalne to liniowe transformacje przekształcające układ ortonormalny w inny układ ortonormalny.

$$x'_\mu = \sum_{\alpha=1}^{4} a_{\mu\alpha} x_\alpha, \quad a_{\mu\alpha} = \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha}, \quad \mathbf{A} = \left[a_{\mu\alpha}\right] = \left[\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha}\right], \quad (\mu = 1,2,3,4), \quad \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = \delta_{\mu\nu}$$

$$x_\alpha = \sum_{\nu=1}^{4} c_{\alpha\nu} x'_\nu, \quad c_{\alpha\nu} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\nu}, \quad \mathbf{C} = \left[c_{\alpha\nu}\right] = \left[\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\nu}\right], \quad (\alpha = 1,2,3,4), \quad \mathbf{e}'_\mu \cdot \mathbf{e}'_\nu = \delta_{\mu\nu}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{4} a_{\mu\alpha} c_{\alpha\nu} = \delta_{\mu\nu}, \quad \mathbf{AC} = \left[\delta_{\mu\nu}\right], \quad \mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}$$

TWIERDZENIE
Macierz transformacji ortogonalnej (macierz ortogonalna) spełnia następujące warunki:

$$\sum_{\alpha=1}^{4} a_{\alpha\mu} a_{\alpha\nu} = \delta_{\mu\nu} \quad \text{lub} \quad \sum_{\alpha=1}^{4} a_{\mu\alpha} a_{\nu\alpha} = \delta_{\mu\nu},$$

czyli suma kwadratów elementów każdej kolumny równa się jedności, a suma iloczynów odpowiednich elementów dwóch różnych kolumn równa się zeru lub suma kwadratów elementów każdego wiersza równa się jedności, a suma iloczynów odpowiednich elementów dwóch różnych wierszy równa się zeru.

TWIERDZENIE
Macierz kwadratowa reprezentuje przekształcenie ortogonalne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{E} = \left[\delta_{\alpha\beta}\right] \quad \text{albo} \quad \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{E} = \left[\delta_{\alpha\beta}\right],$$

gdzie $\mathbf{I}$ jest tzw. macierzą jednostkową, której wszystkie elementy są równe jedności a wszystkie pozostałe są zerami.

DEFINICJA
Macierz kwadratowa nazywa się ortogonalną, gdy

$$\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{E} = \left[\delta_{\alpha\beta}\right] \quad \text{albo} \quad \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{E} = \left[\delta_{\alpha\beta}\right].$$

TWIERDZENIE
Dla macierzy ortogonalnej macierz odwrotna jest równa macierzy przestawionej (transponowanej).

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}, \quad \left[a_{\mu\nu}\right]^{-1} = \left[a_{\mu\nu}\right]^{\mathrm{T}}, \quad \left[\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu}\right]^{-1} = \left[\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu}\right]^{\mathrm{T}} \quad \text{oraz} \quad \left[a_{\nu\mu}\right] = \left[\left[a_{\mu\nu}\right]^{-1}\right]^{\mathrm{T}}$$

DOWÓD

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\alpha=1}^{4} a_{\mu\alpha} c_{\alpha\nu} = \delta_{\mu\nu}, \ \mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1} \\ &\sum_{\alpha=1}^{4} a_{\mu\alpha} a_{\nu\alpha} = \delta_{\mu\nu} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} c_{\alpha\nu} = a_{\nu\alpha} \\ c_{\alpha\nu} = a^{\mathrm{T}}_{\alpha\nu} \\ \mathbf{C} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \end{cases}$$

TWIERDZENIE
Wyznaczniki macierzy ortogonalnych są równe ± 1.

WNIOSEK
Dla macierzy ortogonalnych

$$\left.\begin{aligned} &\left[a_{\mu\nu}\right]=\left[\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu}\right], \quad \left[a_{\mu\nu}\right]^{-1}=\left[\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\nu}\right] \\ &\left[a_{\mu\nu}\right]^{T}=\left[\frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\mu}\right], \quad \left[a_{\mu\nu}\right]^{-1}=\left[a_{\mu\nu}\right]^{T} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left[\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\nu}\right]=\left[\frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\mu}\right]$$

WNIOSEK
Dla macierzy ortogonalnych

$$\sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\mu}\frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\nu}=\delta_{\mu\nu}, \quad \sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\alpha}=\delta_{\mu\nu}, \quad \sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\alpha}\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\alpha}=\delta_{\mu\nu}, \quad \sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\nu}=\delta_{\mu\nu},$$

$$\sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\mu}\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\alpha}=\delta_{\mu\nu}, \quad \sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\alpha}\frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\nu}=\delta_{\mu\nu}, \quad \sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\nu}=\delta_{\mu\nu}, \quad \sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\alpha}=\delta_{\mu\nu}.$$

TWIERDZENIE
Macierz odwrotna macierzy ortogonalnej jest ortogonalna.

DOWÓD

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{T}\mathbf{A}^{-1}=\left(\mathbf{A}^{T}\right)^{T}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{E}.$$

TWIERDZENIE
Iloczyn dwóch macierzy ortogonalnych jest macierzą ortogonalną.

DEFINICJA
Niepusty zbiór **G** nieosobliwych przekształceń liniowych reprezentowanych przez ich macierze stanowi grupę, gdy

1. $\bigwedge_{\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathbf{G}}\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\right)\in\mathbf{G}$
2. $\bigwedge_{\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}\in\mathbf{G}}\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\right)\cdot\mathbf{C}=\mathbf{A}\cdot\left(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}\right)$
3. $\bigwedge_{\mathbf{A}\in\mathbf{G}}\bigvee_{\mathbf{A}^{-1}\in\mathbf{G}}\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{E}$
4. $\bigwedge_{\mathbf{A}\in\mathbf{G}}\bigvee_{\mathbf{E}\in\mathbf{G}}\mathbf{A}\cdot\mathbf{E}=\mathbf{E}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{A}$

TWIERDZENIE
Liniowe transformacje ortogonalne tworzą grupę. (Wszystkie macierze ortogonalne $\mathbf{A}^{n\times n}$ tworzą grupę.)

Przykładami przekształceń ortogonalnych są obroty i inwersje

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

WNIOSEK
Każde przekształcenie ortogonalne można przedstawić jako iloczyn obrotów i inwersji.

2 ALGEBRAICZNE FORMY KWADRATOWE

- **Forma kwadratowa**

  Formą kwadratową nazywamy funkcję n zmiennych $x_1, x_2, ..., x_n$ daną wzorem

$$A(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta, \quad a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}, \quad (\alpha,\beta = 1,2,...,n).$$

Jeżeli współczynniki $a_{\alpha\beta}$ i zmienne $x_1, x_2, ..., x_n$ są rzeczywiste (zespolone), to forma kwadratowa nazywa się rzeczywistą (zespoloną).

- **Macierz formy kwadratowej**

  Macierzą formy kwadratowej nazywamy macierz jej współczynników $\mathbf{A} = \left[a_{\alpha\beta}\right] = \left[a_{\beta\alpha}\right]$.

- **Rząd formy kwadratowej**

  Rzędem r formy kwadratowej nazywamy największy stopień różnych od zera minorów głównych jej macierzy.

- **Dodatnio określone formy kwadratowe**

  Rzeczywista forma kwadratowa $A(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta$ nazywa się dodatnio określoną, jeżeli $A(\mathbf{x},\mathbf{x}) > 0$ dla dowolnych wartości rzeczywistych zmiennych $x_1, x_2, ..., x_n$ nie równych jednocześnie zeru.

- **Kryteria dla dodatnio określonych form kwadratowych**

  Rzeczywista forma kwadratowa n zmiennych jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy:

1. Można ją sprowadzić do postaci $D(\mathbf{z},\mathbf{z}) = \sum_{\alpha=1}^{n} z_\alpha^2$.
2. Wyznaczniki wszystkich minorów głównych jej macierzy są dodatnie.
3. Wszystkie wartości własne jej macierzy są dodatnie.
4. Jej macierz można przedstawić w postaci $\mathbf{A} = \mathbf{C}^T\mathbf{C}$.

- **Sprowadzanie formy kwadratowej do postaci kanonicznej (diagonalnej)**

  Dowolną rzeczywistą formę kwadratową $A(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta$ można sprowadzić do postaci kanonicznej (diagonalnej) $C(\mathbf{y},\mathbf{y}) = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha y_\alpha^2$ za pomocą przekształcenia ortogonalnego o wyznaczniku równym 1, gdzie $\lambda_1, \lambda_1, ..., \lambda_n$ są wartościami własnymi macierzy formy wyjściowej.

- **Sygnatura formy kwadratowej**

  Sygnaturą formy kwadratowej nazywamy różnicę liczby p współczynników dodatnich i liczby q współczynników ujemnych w postaci kanonicznej tej formy, $s = p - q$.

- **Prawo bezwładności formy kwadratowej**

  W postaci kanonicznej formy kwadratowej liczba p współczynników dodatnich i liczba q współczynników ujemnych nie zależy od wyboru przekształcenia ortogonalnego, sprowadzającego daną formę do postaci kanonicznej.

  Suma liczby p współczynników dodatnich i liczby q współczynników ujemnych w postaci kanonicznej formy jest równa rzędowi formy wyjściowej $r = p + q$.

- **Niezmienniki liniowych przekształceń ortogonalnych formy kwadratowej**
  Niezmiennikami liniowych przekształceń ortogonalnych formy kwadratowej są:

1. Rząd macierzy formy kwadratowej.
2. Wyróżnik (wyznacznik) macierzy formy kwadratowej.
3. Współczynniki równania charakterystycznego macierzy formy kwadratowej.
4. Wartości własne macierzy formy kwadratowej.

TWIERDZENIE
Liniowe przekształcenie ortogonalne współrzędnych

$$x^{\mu} = b^{\mu}_{\alpha} x'^{\alpha}, \quad x^{\nu} = b^{\nu}_{\beta} x'^{\beta}, \quad dx^{\mu} = b^{\mu}_{\alpha} dx'^{\alpha}, \quad dx^{\nu} = b^{\nu}_{\beta} dx'^{\beta}, \quad b^{\mu}_{\alpha} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}}, \quad b^{\nu}_{\beta} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}}$$

sprowadza formę kwadratową $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$

do postaci diagonalnej $ds^2 = g_{\alpha\beta} \delta^{\beta}_{\alpha} dx'^{\alpha} dx'^{\beta}$

wtedy i tylko wtedy, gdy kolumny macierzy $\mathbf{B} = \left[b^{\kappa}_{\lambda} \right]$ są wektorami własnymi macierzy $\mathbf{G} = \left[g^{\kappa}_{\lambda} \right]$.

3 LINIOWE PRZEKSZTAŁCENIA ORTOGONALNE I RÓŻNICZKOWE FORMY KWADRATOWE W TEORII WZGLĘDNOŚCI

- **Czasoprzestrzeń**
  Czasoprzestrzeń jest czterowymiarową przestrzenią zdarzeń. Do jej opisu będą używane w tej książce układy współrzędnych $\left\{ x^1, x^2, x^3, x^4 = ict \right\}$ z czwartą współrzędną urojoną. Ponieważ prezentowane poprzednio definicje, twierdzenia i wnioski były sformułowane dla rzeczywistych zmiennych i współczynników, należy zbadać kiedy można je stosować w przypadku urojonych zmiennych i współczynników.
- **Transformacja przeprowadzająca formę metryczną urojoną w rzeczywistą**

$$\boxed{\begin{aligned} x^1 &= z^1 \\ x^2 &= z^2 \\ x^3 &= z^3 \\ x^4 &= i\, z^4 \end{aligned}}$$

$$ds^2_x = g^x_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}, \quad g^x_{\mu\nu} = g^x_{\nu\mu}$$

$$x^{\mu} = a^{\mu}_{\alpha} z^{\alpha}, \quad dx^{\mu} = a^{\mu}_{\alpha} dz^{\alpha}$$

$$x^{\nu} = a^{\nu}_{\beta} z^{\beta}, \quad dx^{\nu} = a^{\nu}_{\beta} dz^{\beta}$$

$$a^{\mu}_{\alpha} = \frac{\partial z^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{bmatrix}, \quad \det\left[a^{\mu}_{\alpha} \right] = i$$

$$ds^2_z = g^x_{\mu\nu} a^{\mu}_{\alpha} a^{\nu}_{\beta} dz^{\alpha} dz^{\beta} = g^z_{\alpha\beta} dz^{\alpha} dz^{\beta}, \quad g^z_{\alpha\beta} \overset{df}{=} g^x_{\mu\nu} a^{\mu}_{\alpha} a^{\nu}_{\alpha}$$

Badana transformacja
1. nie zmienia postaci formy metrycznej, $ds^2_x = ds^2_z$,
2. zmienia znak wyznacznika tensora metrycznego, $\det\left[g^x_{\mu\nu} \right] = -\det\left[g^z_{\alpha\beta} \right]$,
3. zmienia znak czwartej wartości własnej, $\lambda^x_4 = -\lambda^z_4$, przy czym w postaciach kanonicznych obu form urojonej i rzeczywistej analogiczne człony są sobie równe, w tym $\lambda^x_4 dx^4 dx^4 = \lambda^z_4 dz^4 dz^4$.

4 PROSTOLINIOWE UKŁADY WSPÓŁRZĘDNYCH

- **Dualny (sprzężony) układ współrzędnych**

Rozpatrzmy czterowymiarową przestrzeń zdarzeń, a w niej prostoliniowy układ współrzędnych $\{x^1, x^2, x^3, x^4 = ict\}$ z wektorami bazowym $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$. Rozpatrzmy także sprzężone z nimi (dualne do nich) układ współrzędnych $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ i wektory bazowe $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3, \mathbf{e}^4\}$. Z mocy definicji mamy $\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}^\nu \overset{\mathrm{df}}{=} |\mathbf{e}_\mu||\mathbf{e}^\nu|\cos(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}^\nu) = \delta^\nu_\mu = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow \mu = \nu \\ 0 \Leftrightarrow \mu \neq \nu \end{cases}$.

Wektory bazy $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ i bazy dualnej $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3, \mathbf{e}^4\}$ spełniają oczywiste zależności:

$$\mathbf{e}^\mu = g^{\mu\nu}\mathbf{e}_\nu,$$

$$\mathbf{e}_\mu = g_{\mu\nu}\mathbf{e}^\nu,$$

$$\left[g^{\mu\nu}\right] = \left[g_{\mu\nu}\right]^{-1},$$

$$\left[g_{\mu\nu}\right] = \left[g^{\mu\nu}\right]^{-1},$$

$$\left[g_{\mu\nu}\right]\left[g^{\mu\nu}\right] = \left[\delta^\mu_\nu\right], \quad \delta^\mu_\nu = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow \mu = \nu \\ 0 \Leftrightarrow \mu \neq \nu \end{cases}.$$

Pozostaje nam tylko wyznaczenie jawnej postaci macierzy $g^{\mu\nu}$ i $g_{\mu\nu}$.

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{e}^\mu = g^{\mu\nu}\mathbf{e}_\nu \\ \mathbf{e}_\nu \cdot \mathbf{e}^\nu \overset{\mathrm{df}}{=} 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{e}^\mu \cdot \mathbf{e}^\nu = g^{\mu\nu}\mathbf{e}_\nu \cdot \mathbf{e}^\nu = g^{\mu\nu} \Rightarrow g^{\mu\nu} = \mathbf{e}^\mu \cdot \mathbf{e}^\nu = \mathbf{e}^\nu \cdot \mathbf{e}^\mu = g^{\nu\mu} \Rightarrow g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{e}_\mu = g_{\mu\nu}\mathbf{e}^\nu \\ \mathbf{e}^\nu \cdot \mathbf{e}_\nu \overset{\mathrm{df}}{=} 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = g_{\mu\nu}\mathbf{e}^\nu \cdot \mathbf{e}_\nu = g_{\mu\nu} \Rightarrow g_{\mu\nu} = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = \mathbf{e}_\nu \cdot \mathbf{e}_\mu = g_{\nu\mu} \Rightarrow g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$$

Przypomnijmy jak wyznacza się macierz odwrotną:

$$\left.\begin{array}{l} g_{\mu\sigma} = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\sigma \\ g^{\sigma\nu} = \mathbf{e}^\sigma \cdot \mathbf{e}^\nu \\ \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}^\nu = \delta^\nu_\mu \end{array}\right\} \Rightarrow g_{\mu\sigma}g^{\sigma\nu} = (\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\sigma)(\mathbf{e}^\sigma \cdot \mathbf{e}^\nu) = (\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}^\nu)(\mathbf{e}_\sigma \cdot \mathbf{e}^\sigma) = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}^\nu = \delta^\nu_\mu,$$

$$\left.\begin{array}{l} g_{\mu\sigma}g^{\sigma\nu} = \delta^\nu_\mu \\ g_{\mu\sigma}\Delta^{\nu\sigma} = g\delta^\nu_\mu \end{array}\right\} \Rightarrow g^{\sigma\nu} = \frac{\Delta^{\nu\sigma}}{g},$$

gdzie

$g = \det\left[g_{\alpha\beta}\right]$ = wyznacznik macierzy utworzonej z elementów $g_{\alpha\beta}$,

$\Delta^{\nu\sigma}$ = dopełnienie algebraiczne elementu $g_{\nu\sigma}$ wyznacznika .

Podamy jeszcze wzory dla długości wektorów bazowych i kątów między nimi:

$$\left.\begin{array}{l} |\mathbf{e}^\mu| = \sqrt{\mathbf{e}^\mu \cdot \mathbf{e}^\mu} \\ \mathbf{e}^\mu \cdot \mathbf{e}^\mu = g^{\mu\mu} \end{array}\right\} \Rightarrow |\mathbf{e}^\mu| = \sqrt{g^{\mu\mu}},$$

$$\left.\begin{array}{l} |\mathbf{e}_\mu| = \sqrt{\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\mu} \\ \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\mu = g_{\mu\mu} \end{array}\right\} \Rightarrow |\mathbf{e}_\mu| = \sqrt{g_{\mu\mu}},$$

$$\left.\begin{array}{l} \left|\mathbf{e}^{\mu}\right| = \sqrt{g^{\mu\mu}}, \quad \left|\mathbf{e}^{\nu}\right| = \sqrt{g^{\nu\nu}} \\ \mathbf{e}^{\mu}\cdot\mathbf{e}^{\nu} = \left|\mathbf{e}^{\mu}\right|\left|\mathbf{e}^{\nu}\right|\cos\angle\left(\mathbf{e}^{\mu},\mathbf{e}^{\nu}\right) \\ \mathbf{e}^{\mu}\cdot\mathbf{e}^{\nu} = g^{\mu\nu} \end{array}\right\} \Rightarrow \cos\angle\left(\mathbf{e}^{\mu},\mathbf{e}^{\nu}\right) = \frac{g^{\mu\nu}}{\sqrt{g^{\mu\mu}}\sqrt{g^{\nu\nu}}},$$

$$\left.\begin{array}{l} \left|\mathbf{e}_{\mu}\right| = \sqrt{g_{\mu\mu}}, \quad \left|\mathbf{e}_{\nu}\right| = \sqrt{g_{\nu\nu}} \\ \mathbf{e}_{\mu}\cdot\mathbf{e}_{\nu} = \left|\mathbf{e}_{\mu}\right|\left|\mathbf{e}_{\nu}\right|\cos\angle\left(\mathbf{e}_{\mu},\mathbf{e}_{\nu}\right) \\ \mathbf{e}_{\mu}\cdot\mathbf{e}_{\nu} = g_{\mu\nu} \end{array}\right\} \Rightarrow \cos\angle\left(\mathbf{e}_{\mu},\mathbf{e}_{\nu}\right) = \frac{g_{\mu\nu}}{\sqrt{g_{\mu\mu}}\sqrt{g_{\nu\nu}}}.$$

- **Algorytm konstrukcji bazy dualnej (sprzężonej)**

1. Zadajemy wektory bazowe (bazę) $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4\}$.
2. Wyznaczamy macierz $g_{\mu\nu}$.

   $$g_{\mu\nu} = \mathbf{e}_{\mu}\cdot\mathbf{e}_{\nu} = \left|\mathbf{e}_{\mu}\right|\left|\mathbf{e}_{\nu}\right|\cos\angle\left(\mathbf{e}_{\mu},\mathbf{e}_{\nu}\right)$$

3. Wyznaczamy macierz $g^{\mu\nu}$

   $$g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu} = \frac{\Delta^{\nu\mu}}{g} = \frac{\Delta^{\mu\nu}}{g}, \qquad g = \det\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{bmatrix}.$$

4. Wyznaczamy dualne wektory bazowe $\{\mathbf{e}^1,\mathbf{e}^2,\mathbf{e}^3,\mathbf{e}^4\}$, wykorzystując wzory

   $$\mathbf{e}^{\mu} = \sum_{\alpha=1}^{4} g^{\mu\alpha}\mathbf{e}_{\alpha}.$$

   Ułatwimy sobie pracę posługując się relacjami

   $$\left|\mathbf{e}^{\mu}\right| = \sqrt{g^{\mu\mu}},$$

   $$\cos\angle\left(\mathbf{e}^{\mu},\mathbf{e}^{\nu}\right) = \frac{g^{\mu\nu}}{\sqrt{g^{\mu\mu}}\sqrt{g^{\nu\nu}}}.$$

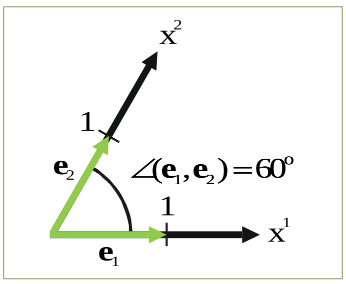
   Znajdujemy z nich długości wektorów bazy dualnej oraz kąty między nimi.
   Istotnym ułatwieniem jest również informacja zawarta w definicji bazy dualnej

   $$\mathbf{e}_{\mu}\cdot\mathbf{e}^{\nu} = \delta_{\mu}^{\nu},$$

   z której znajdujemy pary wektorów prostopadłych względem siebie, po jednym z każdej bazy.

PRZYKŁAD

Konstrukcja bazy dualnej w dwóch wymiarach.



$$\left|\mathbf{e}_1\right| = 1, \quad \left|\mathbf{e}_2\right| = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} g_{11} = \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1 = 1 \\ g_{12} = g_{21} = \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 = \\ = \left|\mathbf{e}_1\right|\left|\mathbf{e}_2\right|\cos\angle\left(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\right) = \frac{1}{2} \\ g_{22} = \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2 = 1 \end{array}\right\} \quad g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4}$$

Elementy macierzy $g^{\mu\nu}$:

$$\left.\begin{aligned} g^{11} &= \frac{(-1)^{1+1}\cdot 1}{\frac{3}{4}} = \tfrac{4}{3} \\ g^{12} = g^{21} &= \frac{(-1)^{1+2}\cdot \frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = -\tfrac{1}{2}\tfrac{4}{3} = -\tfrac{2}{3} \\ g^{22} &= \frac{(-1)^{2+2}\cdot 1}{\frac{3}{4}} = \tfrac{4}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}.$$

Wektory bazy dualnej:

$$\mathbf{e}^1 = g^{11}\mathbf{e}_1 + g^{12}\mathbf{e}_2 = \tfrac{4}{3}\mathbf{e}_1 - \tfrac{2}{3}\mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{e}^2 = g^{21}\mathbf{e}_1 + g^{22}\mathbf{e}_2 = -\tfrac{2}{3}\mathbf{e}_1 + \tfrac{4}{3}\mathbf{e}_2.$$

Relacja definicyjna między wektorami bazy i bazy dualnej:

$$\mathbf{e}^1\cdot\mathbf{e}_1 = \left(\tfrac{4}{3}\mathbf{e}_1 - \tfrac{2}{3}\mathbf{e}_2\right)\cdot\mathbf{e}_1 = \tfrac{4}{3}\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1 - \tfrac{2}{3}\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_1 = \tfrac{4}{3}g_{11} - \tfrac{2}{3}g_{21} = 1,$$

$$\mathbf{e}^1\cdot\mathbf{e}_2 = \left(\tfrac{4}{3}\mathbf{e}_1 - \tfrac{2}{3}\mathbf{e}_2\right)\cdot\mathbf{e}_2 = \tfrac{4}{3}\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 - \tfrac{2}{3}\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2 = \tfrac{4}{3}g_{12} - \tfrac{2}{3}g_{22} = 0,$$

$$\mathbf{e}^2\cdot\mathbf{e}_2 = \left(-\tfrac{2}{3}\mathbf{e}_1 + \tfrac{4}{3}\mathbf{e}_2\right)\cdot\mathbf{e}_2 = -\tfrac{2}{3}\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 + \tfrac{4}{3}\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2 = -\tfrac{2}{3}g_{12} + \tfrac{4}{3}g_{22} = 1.$$

Wartości wektorów bazy dualnej oraz kąt zawarty między nimi:

$$\left|\mathbf{e}^1\right| = \sqrt{\mathbf{e}^1\cdot\mathbf{e}^1} = \sqrt{g^{11}} = \tfrac{2}{\sqrt{3}},$$

$$\left|\mathbf{e}^2\right| = \sqrt{\mathbf{e}^2\cdot\mathbf{e}^2} = \sqrt{g^{22}} = \tfrac{2}{\sqrt{3}},$$

$$\cos\angle\left(\mathbf{e}^1,\mathbf{e}^2\right) = \frac{g^{12}}{\sqrt{g^{11}}\sqrt{g^{22}}} = -\tfrac{1}{2}, \quad \angle\left(\mathbf{e}^1,\mathbf{e}^2\right) = 120^\circ.$$

Zadany promień wodzący **R**:

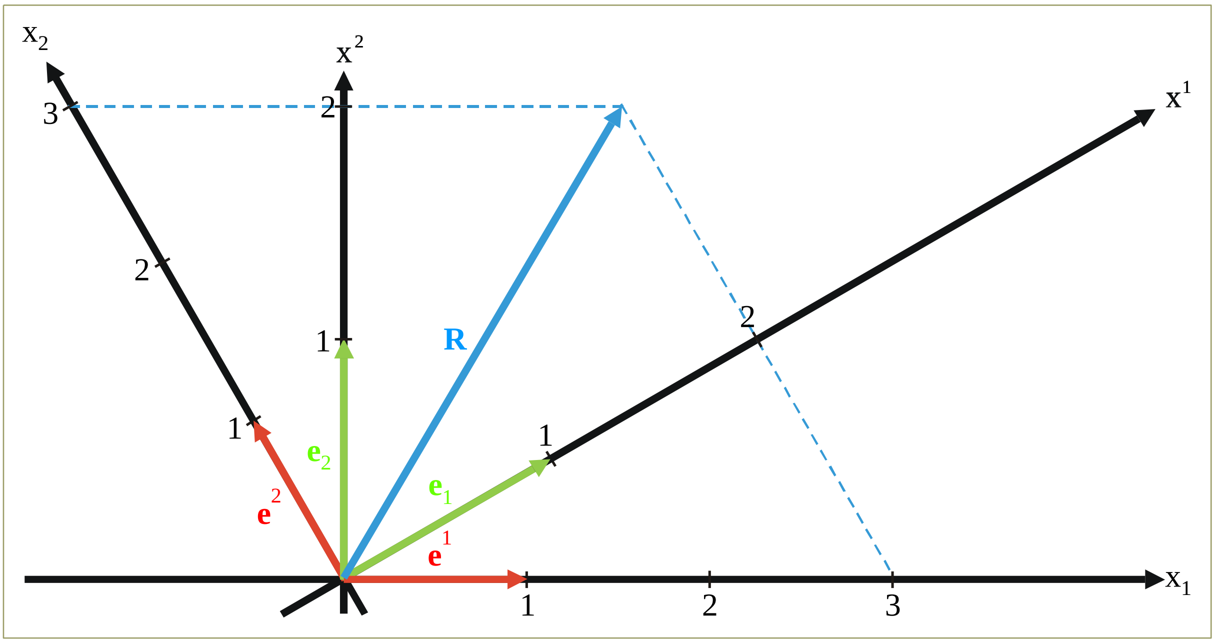
$$\mathbf{R} = \left(R^1, R^2\right) = (2,2) = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_1.$$

Współrzędne kowariantne promienia wodzącego:

$$R_1 = g_{11}R^1 + g_{12}R^2 = 3,$$

$$R_2 = g_{21}R^1 + g_{22}R^2 = 3,$$

$$\mathbf{R} = \left(R_1, R_2\right) = (3,3) = 3\mathbf{e}^1 + 3\mathbf{e}^2.$$



- **Transformacje wektorów bazowych**

Rozpatrzmy wszystkie możliwe transformacje między bazami $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4\}$, $\{\mathbf{e}^1,\mathbf{e}^2,\mathbf{e}^3,\mathbf{e}^4\}$, $\{\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_3,\mathbf{e}'_4\}$, $\{\mathbf{e}'^1,\mathbf{e}'^2,\mathbf{e}'^3,\mathbf{e}'^4\}$.

$$\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4\} \underset{\mathbf{e}_\mu = g_{\mu\nu}\mathbf{e}^\nu}{\overset{\mathbf{e}^\mu = g^{\mu\nu}\mathbf{e}_\nu}{\rightleftarrows}} \{\mathbf{e}^1,\mathbf{e}^2,\mathbf{e}^3,\mathbf{e}^4\} \qquad \left[g^{\mu\nu}\right]=\left[g_{\mu\nu}\right]^{-1}$$

$$\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4\} \underset{\mathbf{e}_\mu = b_{\mu\nu}\mathbf{e}'_\nu}{\overset{\mathbf{e}'_\mu = a_{\mu\nu}\mathbf{e}_\nu}{\rightleftarrows}} \{\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_3,\mathbf{e}'_4\} \qquad \left[b_{\mu\nu}\right]=\left[a_{\mu\nu}\right]^{-1}$$

$$\{\mathbf{e}^1,\mathbf{e}^2,\mathbf{e}^3,\mathbf{e}^4\} \underset{\mathbf{e}^\mu = d_{\mu\nu}\mathbf{e}'^\nu}{\overset{\mathbf{e}'^\mu = c_{\mu\nu}\mathbf{e}^\nu}{\rightleftarrows}} \{\mathbf{e}'^1,\mathbf{e}'^2,\mathbf{e}'^3,\mathbf{e}'^4\} \qquad \left[d_{\mu\nu}\right]=\left[c_{\mu\nu}\right]^{-1}$$

$$\{\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_3,\mathbf{e}'_4\} \underset{\mathbf{e}'_\mu = s_{\mu\nu}\mathbf{e}'^\nu}{\overset{\mathbf{e}'^\mu = r_{\mu\nu}\mathbf{e}'_\nu}{\rightleftarrows}} \{\mathbf{e}'^1,\mathbf{e}'^2,\mathbf{e}'^3,\mathbf{e}'^4\} \qquad \left[s_{\mu\nu}\right]=\left[r_{\mu\nu}\right]^{-1}$$

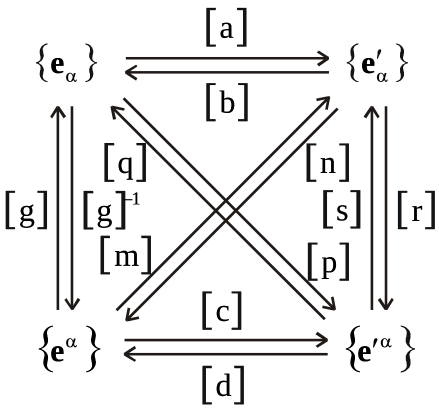
$$\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4\} \underset{\mathbf{e}_\mu = q_{\mu\nu}\mathbf{e}'^\nu}{\overset{\mathbf{e}'^\mu = p_{\mu\nu}\mathbf{e}_\nu}{\rightleftarrows}} \{\mathbf{e}'^1,\mathbf{e}'^2,\mathbf{e}'^3,\mathbf{e}'^4\} \qquad \left[q_{\mu\nu}\right]=\left[p_{\mu\nu}\right]^{-1}$$

$$\{\mathbf{e}^1,\mathbf{e}^2,\mathbf{e}^3,\mathbf{e}^4\} \underset{\mathbf{e}^\mu = n_{\mu\nu}\mathbf{e}'_\nu}{\overset{\mathbf{e}'_\mu = m_{\mu\nu}\mathbf{e}^\nu}{\rightleftarrows}} \{\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_3,\mathbf{e}'_4\} \qquad \left[n_{\mu\nu}\right]=\left[m_{\mu\nu}\right]^{-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{e}'_\mu = a_{\mu\nu}\mathbf{e}_\nu \\ \mathbf{e}^\nu = d_{\nu\mu}\mathbf{e}'^\mu \\ \mathbf{e}_\nu \cdot \mathbf{e}^\nu = 1 \\ \mathbf{e}'_\mu \cdot \mathbf{e}'^\mu = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathbf{e}'_\mu \cdot \mathbf{e}^\nu = a_{\mu\nu}\mathbf{e}_\nu \cdot \mathbf{e}^\nu = a_{\mu\nu}\delta^\nu_\nu = a_{\mu\nu} \\ \mathbf{e}'_\mu \cdot \mathbf{e}^\nu = \mathbf{e}'_\mu \cdot d_{\nu\mu}\mathbf{e}'^\mu = d_{\nu\mu}\mathbf{e}'_\mu \cdot \mathbf{e}'^\mu = d_{\nu\mu} \end{array}\right\} \Rightarrow d_{\nu\mu} = a_{\mu\nu} \Rightarrow \left[d_{\mu\nu}\right]=\left[a_{\mu\nu}\right]^T$$

$$\left.\begin{array}{l} \left[c_{\mu\nu}\right]=\left[d_{\mu\nu}\right]^{-1} \\ \left[d_{\mu\nu}\right]=\left[a_{\mu\nu}\right]^T \end{array}\right\} \Rightarrow \left[c_{\mu\nu}\right]=\left(\left[a_{\mu\nu}\right]^T\right)^{-1} \qquad \left[c_{\mu\nu}\right]=\left(\left[a_{\mu\nu}\right]^T\right)^{-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left[b_{\mu\nu}\right]=\left[a_{\mu\nu}\right]^{-1} \\ \left[a_{\mu\nu}\right]=\left(\left[c_{\mu\nu}\right]^T\right)^{-1} \\ \left(\left(\left[c_{\mu\nu}\right]^T\right)^{-1}\right)^{-1} = \left[c_{\mu\nu}\right]^T \end{array}\right\} \Rightarrow \left[b_{\mu\nu}\right]=\left[c_{\mu\nu}\right]^T \qquad \left[b_{\mu\nu}\right]=\left[c_{\mu\nu}\right]^T$$



Przedstawiony z lewej strony graf obrazuje transformacje między czterema bazami.

$$\{\mathbf{e}_\alpha\} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$$
$$\{\mathbf{e}'_\alpha\} = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3, \mathbf{e}'_4\}$$
$$\{\mathbf{e}^\alpha\} = \{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3, \mathbf{e}^4\}$$
$$\{\mathbf{e}'^\alpha\} = \{\mathbf{e}'^1, \mathbf{e}'^2, \mathbf{e}'^3, \mathbf{e}'^4\}$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{e}'^\mu &= r_{\mu\nu}\mathbf{e}'_\nu\\
\mathbf{e}'^\mu &= c_{\mu\alpha}\mathbf{e}^\alpha\\
\mathbf{e}^\alpha &= g^{\alpha\beta}\mathbf{e}_\beta\\
\mathbf{e}_\beta &= b_{\beta\nu}\mathbf{e}'_\nu\\
[b_{\beta\nu}] &= [c_{\beta\nu}]^T
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{e}'^\mu = c_{\mu\alpha}g^{\alpha\beta}b_{\beta\nu}\mathbf{e}'_\nu \Rightarrow r_{\mu\nu} = c_{\mu\alpha}g^{\alpha\beta}b_{\beta\nu} = c_{\mu\alpha}g^{\alpha\beta}c^T_{\beta\nu}$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{e}'_\mu &= s_{\mu\nu}\mathbf{e}'^\nu\\
\mathbf{e}'_\mu &= a_{\mu\alpha}\mathbf{e}_\alpha\\
\mathbf{e}_\alpha &= g_{\alpha\beta}\mathbf{e}^\beta\\
\mathbf{e}^\beta &= d_{\beta\nu}\mathbf{e}'^\nu\\
[d_{\mu\nu}] &= [a_{\mu\nu}]^T
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{e}'_\mu = a_{\mu\alpha}g_{\alpha\beta}d_{\beta\nu}\mathbf{e}'^\nu \Rightarrow s_{\mu\nu} = a_{\mu\alpha}g_{\alpha\beta}d_{\beta\nu} = a_{\mu\alpha}g_{\alpha\beta}a^T_{\beta\nu}$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{e}'^\mu &= p_{\mu\nu}\mathbf{e}_\nu\\
\mathbf{e}'^\mu &= c_{\mu\alpha}\mathbf{e}^\alpha\\
\mathbf{e}^\alpha &= g^{\alpha\nu}\mathbf{e}_\nu
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{e}'^\mu = c_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu}\mathbf{e}_\nu \Rightarrow p_{\mu\nu} = c_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu}$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{e}_\mu &= q_{\mu\nu}\mathbf{e}'^\nu\\
\mathbf{e}_\mu &= g_{\mu\alpha}\mathbf{e}^\alpha\\
\mathbf{e}^\alpha &= d_{\alpha\nu}\mathbf{e}'^\nu
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{e}_\mu = g_{\mu\alpha}d_{\alpha\nu}\mathbf{e}'^\nu \Rightarrow q_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}d_{\alpha\nu}$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{e}'_\mu &= m_{\mu\nu}\mathbf{e}^\nu\\
\mathbf{e}'_\mu &= a_{\mu\alpha}\mathbf{e}_\alpha\\
\mathbf{e}_\alpha &= g_{\alpha\nu}\mathbf{e}^\nu
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{e}'_\mu = a_{\mu\alpha}g_{\alpha\nu}\mathbf{e}^\nu \Rightarrow m_{\mu\nu} = a_{\mu\alpha}g_{\alpha\nu}$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{e}^\mu &= n_{\mu\nu}\mathbf{e}'_\nu\\
\mathbf{e}^\mu &= g^{\mu\alpha}\mathbf{e}_\alpha\\
\mathbf{e}_\alpha &= b_{\alpha\nu}\mathbf{e}'_\nu
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{e}^\mu = g^{\mu\alpha}b_{\alpha\nu}\mathbf{e}'_\nu \Rightarrow n_{\mu\nu} = g^{\mu\alpha}b_{\alpha\nu}$$

- **Współrzędne kontrawariantne i kowariantne**

Współrzędne kontrawariantne wektora $\mathbf{A}$ względem bazy $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4\}$ dane są przez $\mathbf{A}=\left(A^1,A^2,A^3,A^4\right)=A^1\mathbf{e}_1+A^2\mathbf{e}_2+A^3\mathbf{e}_3+A^4\mathbf{e}_4=A^\mu\mathbf{e}_\mu$.

Współrzędne kontrawariantne wektora **A** są równoległymi rzutami tego wektora na odpowiednie osie układu współrzędnych $\{x^1,x^2,x^3,x^4\}$.

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{A}&=A^\nu\mathbf{e}_\nu\\ \mathbf{e}_\nu\cdot\mathbf{e}^\mu&=\delta^\mu_\nu\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ \mathbf{A}\cdot\mathbf{e}^\mu=A^\nu\mathbf{e}_\nu\cdot\mathbf{e}^\mu=A^\nu\delta^\mu_\nu=A^\mu\ \Rightarrow\ \boxed{A^\mu=\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}^\mu}$$

Współrzędne kontrawariantne wektora **A** są prostokątnymi rzutami tego wektora na odpowiednie osie dualnego układu współrzędnych $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$.

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}^\nu&=A^\nu\\ \mathbf{A}\cdot\mathbf{e}'^\mu&=A'^\mu\\ \mathbf{e}'^\mu&=c_{\mu\nu}\mathbf{e}^\nu\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ \mathbf{A}\cdot\mathbf{e}'^\mu=\mathbf{A}\cdot c_{\mu\nu}\mathbf{e}^\nu=c_{\mu\nu}\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}^\nu\right)=c_{\mu\nu}A^\nu\ \Rightarrow\ \boxed{A'^\mu=c_{\mu\nu}A^\nu}$$

Współrzędne kontrawariantne $\left(A^1,A^2,A^3,A^4\right)$ wektora $\mathbf{A}$ względem bazy $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4\}$ przekształcają się według takich samych wzorów jak wektory bazy dualnej $\{\mathbf{e}^1,\mathbf{e}^2,\mathbf{e}^3,\mathbf{e}^4\}$.

Współrzędne kontrawariantne $\left(x^1,x^2,x^3,x^4\right)$ punktu P są współrzędnymi kontrawariantnymi promienia wodzącego $\mathbf{R}$, którego koniec wyznacza punkt P.

$\mathbf{R}=\left(x^1,x^2,x^3,x^4\right)=x^1\mathbf{e}_1+x^2\mathbf{e}_2+x^3\mathbf{e}_3+x^4\mathbf{e}_4=x^\mu\mathbf{e}_\mu$

Współrzędne kowariantne wektora $\mathbf{A}$ względem dualnej bazy $\{\mathbf{e}^1,\mathbf{e}^2,\mathbf{e}^3,\mathbf{e}^4\}$ dane są przez $\mathbf{A}=\left(A_1,A_2,A_3,A_4\right)=A_1\mathbf{e}^1+A_2\mathbf{e}^2+A_3\mathbf{e}^3+A_4\mathbf{e}^4=A_\mu\mathbf{e}^\mu$.

Współrzędne kowariantne wektora **A** są równoległymi rzutami tego wektora na odpowiednie osie dualnego układu współrzędnych $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$.

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{A}&=A_\nu\mathbf{e}^\nu\\ \mathbf{e}^\nu\cdot\mathbf{e}_\mu&=\delta^\nu_\mu\end{aligned}\right\}\Rightarrow\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_\mu=A_\nu\mathbf{e}^\nu\cdot\mathbf{e}_\mu=A_\nu\delta^\nu_\mu=A_\mu\ \Rightarrow\ \boxed{A_\mu=\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_\mu}$$

Współrzędne kowariantne wektora **A** są prostokątnymi rzutami tego wektora na odpowiednie osie układu współrzędnych $\{x^1,x^2,x^3,x^4\}$.

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_\nu&=A_\nu\\ \mathbf{A}\cdot\mathbf{e}'_\mu&=A'_\mu\\ \mathbf{e}'_\mu&=a_{\mu\nu}\mathbf{e}_\nu\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ \mathbf{A}\cdot\mathbf{e}'_\mu=\mathbf{A}\cdot a_{\mu\nu}\mathbf{e}_\nu=a_{\mu\nu}\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_\nu\right)=a_{\mu\nu}A_\nu\ \Rightarrow\ \boxed{A'_\mu=a_{\mu\nu}A_\nu}$$

Współrzędne kowariantne $\left(A_1,A_2,A_3,A_4\right)$ wektora $\mathbf{A}$ względem bazy dualnej $\{\mathbf{e}^1,\mathbf{e}^2,\mathbf{e}^3,\mathbf{e}^4\}$ przekształcają się według takich samych wzorów jak wektory bazy $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4\}$.

Współrzędne kowariantne $\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)$ punktu P są współrzędnymi kowariantnymi promienia wodzącego $\mathbf{R}$, którego koniec wyznacza punkt P.

$\mathbf{R}=\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=x_1\mathbf{e}^1+x_2\mathbf{e}^2+x_3\mathbf{e}^3+x_4\mathbf{e}^4=x_\nu\mathbf{e}^\nu$

Dla ortonormalnej bazy $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4\}$, $\mathbf{e}_\mu\cdot\mathbf{e}_\nu=\delta_{\mu\nu}=\delta^\mu_\nu$, tzn. w przypadku gdy wektory bazowe są wzajemnie prostopadłe oraz mają jednostkowe długości

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{e}_\mu\cdot\mathbf{e}_\nu&=\delta_{\mu\nu}=\delta^\mu_\nu\\ A_\mu&=A^\nu\mathbf{e}_\mu\cdot\mathbf{e}_\nu\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ A_\mu=A^\nu\delta^\mu_\nu=A^\mu,$$

nie ma różnicy między współrzędnymi kontrawariantnymi i kowariantnymi wektora $\mathbf{A}$.

- **Iloczyn skalarny dwóch wektorów**

W dowolnym układzie współrzędnych iloczyn skalarny dwóch wektorów **A** i **B** definiowany jest jako

$$\boxed{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \overset{\mathrm{df}}{=} |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|\cos(\mathbf{A},\mathbf{B})}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbf{A} = A^{\mu}\mathbf{e}_{\mu} = A_{\mu}\mathbf{e}^{\mu} \\ &\mathbf{B} = B^{\nu}\mathbf{e}_{\nu} = B_{\nu}\mathbf{e}^{\nu} \\ &g_{\mu\nu} = \mathbf{e}_{\mu}\cdot\mathbf{e}_{\nu} \\ &g^{\mu\nu} = \mathbf{e}^{\mu}\cdot\mathbf{e}^{\nu} \end{aligned}}$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \left(A^{\mu}\mathbf{e}_{\mu}\right)\cdot\left(B^{\nu}\mathbf{e}_{\nu}\right) = \left(\mathbf{e}_{\mu}\cdot\mathbf{e}_{\nu}\right)A^{\mu}B^{\nu} = g_{\mu\nu}A^{\mu}B^{\nu}$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \left(A_{\mu}\mathbf{e}^{\mu}\right)\cdot\left(B_{\nu}\mathbf{e}^{\nu}\right) = \left(\mathbf{e}^{\mu}\cdot\mathbf{e}^{\nu}\right)A_{\mu}B_{\nu} = g^{\mu\nu}A_{\mu}B_{\nu}$$

$$\boxed{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = g_{\mu\nu}A^{\mu}B^{\nu} = g^{\mu\nu}A_{\mu}B_{\nu}}$$

W ortogonalnym układzie współrzędnych:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{44} \end{bmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} g^{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g^{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g^{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g^{44} \end{bmatrix}, \quad g^{\alpha\alpha} = \frac{1}{g_{\alpha\alpha}},$$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} &= g_{11}A^{1}B^{1} + g_{22}A^{2}B^{2} + g_{33}A^{3}B^{3} + g_{44}A^{4}B^{4} = \\ &= g^{11}A_{1}B_{1} + g^{22}A_{2}B_{2} + g^{33}A_{3}B_{3} + g^{44}A_{4}B_{4} \end{aligned}}$$

W ortonormalnym układzie współrzędnych: $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$,

$$\boxed{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A^{1}B^{1} + A^{2}B^{2} + A^{3}B^{3} + A^{4}B^{4} = A_{1}B_{1} + A_{2}B_{2} + A_{3}B_{3} + A_{4}B_{4}}$$

- **Długość wektora**

W dowolnym układzie współrzędnych długości wektorów kontrawariantnego i kowariantnego dane są odpowiednio wzorami

$$|\mathbf{A}| \overset{\mathrm{df}}{=} \sqrt{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}} = \sqrt{A^{\mu}\mathbf{e}_{\mu}\cdot A^{\nu}\mathbf{e}_{\nu}} = \sqrt{\mathbf{e}_{\mu}\cdot\mathbf{e}_{\nu}A^{\mu}A^{\nu}} = \sqrt{g_{\mu\nu}A^{\mu}A^{\nu}},$$

$$|\mathbf{A}| \overset{\mathrm{df}}{=} \sqrt{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}} = \sqrt{A_{\mu}\mathbf{e}^{\mu}\cdot A_{\nu}\mathbf{e}^{\nu}} = \sqrt{\mathbf{e}^{\mu}\cdot\mathbf{e}^{\nu}A_{\mu}A_{\nu}} = \sqrt{g^{\mu\nu}A_{\mu}A_{\nu}},$$

$$\boxed{|\mathbf{A}| = \sqrt{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}} = \sqrt{g_{\mu\nu}A^{\mu}A^{\nu}} = \sqrt{g^{\mu\nu}A_{\mu}A_{\nu}}}$$

W ortogonalnym układzie współrzędnych

$$\boxed{\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= \sqrt{g_{11}\left(A^{1}\right)^{2} + g_{22}\left(A^{2}\right)^{2} + g_{33}\left(A^{3}\right)^{2} + g_{44}\left(A^{4}\right)^{2}} = \\ &= \sqrt{g^{11}\left(A_{1}\right)^{2} + g^{22}\left(A_{2}\right)^{2} + g^{33}\left(A_{3}\right)^{2} + g^{44}\left(A_{4}\right)^{2}} \end{aligned}}$$

W ortonormalnym układzie współrzędnych

$$\boxed{|\mathbf{A}| = \sqrt{\left(A^{1}\right)^{2} + \left(A^{2}\right)^{2} + \left(A^{3}\right)^{2} + \left(A^{4}\right)^{2}} = \sqrt{\left(A_{1}\right)^{2} + \left(A_{2}\right)^{2} + \left(A_{3}\right)^{2} + \left(A_{4}\right)^{2}}}$$

- **Iloczyn skalarny jako niezmiennik dowolnej transformacji liniowej**

$$\mathbf{A}' = \sum_{\mu=1} A'_\mu \mathbf{e}'^\mu$$

$$\mathbf{B}' = \sum_{\nu=1} B'_\nu \mathbf{e}'^\nu$$

$$A'_\mu = \sum_{\alpha=1} \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha} A_\alpha$$

$$B'_\nu = \sum_{\beta=1} \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\beta} B_\beta$$

$$\mathbf{e}'^\mu = \sum_{\kappa=1} \frac{\partial x_\kappa}{\partial x'_\mu} \mathbf{e}^\kappa$$

$$\mathbf{e}'^\nu = \sum_{\lambda=1} \frac{\partial x_\lambda}{\partial x'_\nu} \mathbf{e}^\lambda$$

$$\sum_{\mu=1} \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x_\kappa}{\partial x'_\mu} = \delta^\kappa_\alpha$$

$$\sum_{\nu=1} \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\beta} \frac{\partial x_\lambda}{\partial x'_\nu} = \delta^\lambda_\beta$$

$$\mathbf{e}^\kappa \cdot \mathbf{e}^\lambda = g^{\kappa\lambda}$$

$$\sum_{\kappa=1}\sum_{\lambda=1} \delta^\kappa_\alpha \delta^\lambda_\beta g^{\kappa\lambda} = g^{\alpha\beta}$$

$$\sum_{\alpha=1}\sum_{\beta=1} A_\alpha B_\beta g^{\alpha\beta} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$$

$$\mathbf{A}'\cdot\mathbf{B}' = \left(\sum_{\mu=1} A'_\mu \mathbf{e}'^\mu\right)\cdot\left(\sum_{\nu=1} B'_\nu \mathbf{e}'^\nu\right) =$$

$$= \sum_{\mu=1}\sum_{\nu=1} A'_\mu B'_\nu \left(\mathbf{e}'^\mu \cdot \mathbf{e}'^\nu\right) =$$

$$= \sum_{\mu=1}\sum_{\nu=1}\sum_{\kappa=1}\sum_{\lambda=1}\sum_{\alpha=1}\sum_{\beta=1} A_\alpha B_\beta \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_\kappa}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\beta}\frac{\partial x_\lambda}{\partial x'_\nu}\left(\mathbf{e}^\kappa\cdot\mathbf{e}^\lambda\right) =$$

$$= \sum_{\kappa=1}\sum_{\lambda=1}\sum_{\alpha=1}\sum_{\beta=1} A_\alpha B_\beta \delta^\kappa_\alpha \delta^\lambda_\beta g^{\kappa\lambda} =$$

$$= \sum_{\alpha=1}\sum_{\beta=1} A_\alpha B_\beta g^{\alpha\beta} =$$

$$= \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$$

$$\boxed{\mathbf{A}'\cdot\mathbf{B}' = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}$$

TWIERDZENIE
Iloczyn skalarny dwóch wektorów kowariantnych jest niezmiennikiem dowolnej transformacji liniowej.

Analogicznie udowadnia się twierdzenie, że iloczyn skalarny dwóch wektorów kontrawariantnych jest również niezmiennikiem dowolnej transformacji liniowej.

$$\mathbf{A}' = \sum_{\mu=1} A'^\mu \mathbf{e}'_\mu$$

$$\mathbf{B}' = \sum_{\nu=1} B'^\nu \mathbf{e}'_\nu$$

$$A'^\mu = \sum_{\alpha=1} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} A^\alpha$$

$$B'^\nu = \sum_{\beta=1} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} B^\beta$$

$$\mathbf{e}'_\mu = \sum_{\kappa=1} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\mu} \mathbf{e}_\kappa$$

$$\mathbf{e}'_\nu = \sum_{\lambda=1} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \mathbf{e}_\lambda$$

$$\sum_{\alpha=1}\sum_{\beta=1} A^\alpha B^\beta g_{\alpha\beta} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$$

$$\mathbf{A}'\cdot\mathbf{B}' = \left(\sum_{\mu=1} A'^\mu \mathbf{e}'_\mu\right)\cdot\left(\sum_{\nu=1} B'^\nu \mathbf{e}'_\nu\right) = \sum_{\mu=1}\sum_{\nu=1} A'^\mu B'^\nu \left(\mathbf{e}'_\mu \cdot \mathbf{e}'_\nu\right) =$$

$$= \sum_{\mu=1}\sum_{\nu=1}\sum_{\kappa=1}\sum_{\lambda=1}\sum_{\alpha=1}\sum_{\beta=1} A^\alpha B^\beta \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu}\left(\mathbf{e}_\kappa\cdot\mathbf{e}_\lambda\right) =$$

$$\sum_{\mu=1} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\mu} = \delta^\kappa_\alpha, \quad \sum_{\nu=1} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} = \delta^\lambda_\beta, \quad \mathbf{e}_\kappa\cdot\mathbf{e}_\lambda = g_{\kappa\lambda}$$

$$= \sum_{\kappa=1}\sum_{\lambda=1}\sum_{\alpha=1}\sum_{\beta=1} A^\alpha B^\beta \delta^\kappa_\alpha \delta^\lambda_\beta g_{\kappa\lambda} =$$

$$\sum_{\kappa=1}\sum_{\lambda=1} \delta^\kappa_\alpha \delta^\lambda_\beta g_{\kappa\lambda} = g_{\alpha\beta}$$

$$= \sum_{\alpha=1}\sum_{\beta=1} A^\alpha B^\beta g_{\alpha\beta} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$$

$$\boxed{\mathbf{A}'\cdot\mathbf{B}' = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}$$

5 TENSORY

- **Wektory kontrawariantne i kowariantne jako tensory pierwszego rzędu**

Czterowymiarowym **wektorem kontrawariantnym** (przeciwzmienniczym) lub wektorem o współrzędnych kontrawariantnych nazywamy zbiór czterech wielkości $\left(A^1, A^2, A^3, A^4\right)$, zwanych jego współrzędnymi względem bazy $\left\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\right\}$, które przy zmianie układu współrzędnych

$$x'^{\mu} = f^{\mu}\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right), \quad dx'^{\mu} = \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu}, \quad \mathbf{e}'_{\mu} = \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \mathbf{e}_{\nu}, \quad (\mu = 1,2,3,4)$$

i towarzyszącej im zmianie dualnego układu współrzędnych

$$x'_{\mu} = f_{\mu}\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right), \quad dx'_{\mu} = \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial x'_{\mu}}{\partial x_{\nu}} dx_{\nu}, \quad \mathbf{e}'^{\mu} = \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\mu}} \mathbf{e}^{\nu}, \quad (\mu = 1,2,3,4)$$

transformują się według wzorów

$$A'^{\mu} = \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} A^{\nu}, \quad (\mu = 1,2,3,4),$$

czyli tak jak różniczki współrzędnych kontrawariantnych lub

$$A'^{\mu} = \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\mu}} A^{\nu}, \quad (\mu = 1,2,3,4).$$

Czterowymiarowym **wektorem kowariantnym** (współzmienniczym) lub wektorem o współrzędnych kowariantnych nazywamy zbiór czterech wielkości $\left(A_1, A_2, A_3, A_4\right)$, zwanych jego współrzędnymi względem dualnej bazy $\left\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3, \mathbf{e}^4\right\}$, które przy zmianie układu współrzędnych

$$x'^{\mu} = f^{\mu}\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right), \quad dx'^{\mu} = \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu}, \quad \mathbf{e}'_{\mu} = \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \mathbf{e}_{\nu}, \quad (\mu = 1,2,3,4)$$

i towarzyszącej im zmianie dualnego układu współrzędnych

$$x'_{\mu} = f_{\mu}\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right), \quad dx'_{\mu} = \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial x'_{\mu}}{\partial x_{\nu}} dx_{\nu}, \quad \mathbf{e}'^{\mu} = \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\mu}} \mathbf{e}^{\nu}, \quad (\mu = 1,2,3,4)$$

transformują się według wzorów

$$A'_{\mu} = \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} A_{\nu}, \quad (\mu = 1,2,3,4)$$

lub

$$A'_{\mu} = \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial x'_{\mu}}{\partial x_{\nu}} A_{\nu}, \quad (\mu = 1,2,3,4),$$

czyli tak jak różniczki współrzędnych kowariantnych.

UWAGA

Wektory o współrzędnych kontrawariantnych nazywane są wektorami kontrawariantnymi, a wektory o współrzędnych kowariantnych wektorami kowariantnymi. Należy podkreślić, że wektor kontrawariantny i kowariantny jest jednym i tym samym obiektem niezależnie od układu współrzędnych.

$$\mathbf{A} = \left(A^1, A^2, A^3, A^4\right) = \left(A_1, A_2, A_3, A_4\right) = \left(A'^1, A'^2, A'^3, A'^4\right) = \left(A'_1, A'_2, A'_3, A'_4\right) = \mathbf{A}'$$

- **Tensory kontrawariantne, kowariantne i mieszane drugiego rzędu**

Czterowymiarowym **tensorem kontrawariantnym** (przeciwzmienniczym) drugiego rzędu nazywamy zbiór 16 wielkości, zwanych jego składowymi (współrzędnymi) względem bazy $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$, zestawianych w postaci macierzy

$$T^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} T^{11} & T^{12} & T^{13} & T^{14} \\ T^{21} & T^{22} & T^{23} & T^{24} \\ T^{31} & T^{32} & T^{33} & T^{34} \\ T^{41} & T^{42} & T^{43} & T^{44} \end{bmatrix},$$

które przy zmianie układu współrzędnych

$$x'^{\mu} = f^{\mu}\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right), \quad dx'^{\mu} = \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu}, \quad \mathbf{e}'_{\mu} = \sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \mathbf{e}_{\alpha}, \quad (\mu = 1,2,3,4)$$

i towarzyszącej im zmianie dualnego układu współrzędnych

$$x'_{\mu} = f_{\mu}\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right), \quad dx'_{\mu} = \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial x'_{\mu}}{\partial x_{\nu}} dx_{\nu}, \quad \mathbf{e}'^{\mu} = \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x'_{\mu}} \mathbf{e}^{\alpha}, \quad (\mu = 1,2,3,4)$$

transformują się według wzorów

$$T'^{\mu\nu} = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} T^{\alpha\beta}, \quad (\mu, \nu = 1,2,3,4),$$

czyli tak jak iloczyny odpowiednich różniczek współrzędnych kontrawariantnych lub

$$T'^{\mu\nu} = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4} \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x'_{\mu}} \frac{\partial x_{\beta}}{\partial x'_{\nu}} T^{\alpha\beta}, \quad (\mu, \nu = 1,2,3,4).$$

Czterowymiarowym **tensorem kowariantnym** (współzmienniczym) drugiego rzędu nazywamy zbiór 16 wielkości, zwanych jego składowymi (współrzędnymi) względem dualnej bazy $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3, \mathbf{e}^4\}$, zestawianych w postaci macierzy

$$T_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{bmatrix},$$

które przy zmianie układu współrzędnych

$$x'^{\mu} = f^{\mu}\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right), \quad dx'^{\mu} = \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu}, \quad \mathbf{e}'_{\mu} = \sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \mathbf{e}_{\alpha}, \quad (\mu = 1,2,3,4)$$

i towarzyszącej im zmianie dualnego układu współrzędnych

$$x'_{\mu} = f_{\mu}\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right), \quad dx'_{\mu} = \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial x'_{\mu}}{\partial x_{\nu}} dx_{\nu}, \quad \mathbf{e}'^{\mu} = \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x'_{\mu}} \mathbf{e}^{\alpha}, \quad (\mu = 1,2,3,4)$$

transformują się według wzorów

$$T'_{\mu\nu} = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} T_{\alpha\beta}, \quad (\mu, \nu = 1,2,3,4) \text{ lub}$$

$$T'_{\mu\nu} = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4} \frac{\partial x'_{\mu}}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial x'_{\nu}}{\partial x_{\beta}} T_{\alpha\beta}, \quad (\mu, \nu = 1,2,3,4),$$

czyli tak jak iloczyny odpowiednich różniczek współrzędnych kowariantnych.

Czterowymiarowym **tensorem mieszanym** drugiego rzędu nazywamy zbiór 16 wielkości, zwanych jego składowymi (współrzędnymi) względem bazy $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$, zestawianych w postaci macierzy

$$T^{\mu}_{\nu} = \begin{bmatrix} T^1_1 & T^1_2 & T^1_3 & T^1_4 \\ T^2_1 & T^2_2 & T^2_3 & T^2_4 \\ T^3_1 & T^3_2 & T^3_3 & T^3_4 \\ T^4_1 & T^4_2 & T^4_3 & T^4_4 \end{bmatrix},$$

które przy zmianie układu współrzędnych

$$x'^{\mu} = f^{\mu}\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right), \quad dx'^{\mu} = \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu}, \quad \mathbf{e}'_{\mu} = \sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \mathbf{e}_{\alpha}, \quad (\mu = 1,2,3,4)$$

i towarzyszącej im zmianie dualnego układu współrzędnych

$$x'_{\mu} = f_{\mu}\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right), \quad dx'_{\mu} = \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial x'_{\mu}}{\partial x_{\nu}} dx_{\nu}, \quad \mathbf{e}'^{\mu} = \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x'_{\mu}} \mathbf{e}^{\alpha}, \quad (\mu = 1,2,3,4)$$

transformują się według wzorów

$$T'^{\mu}_{\nu} = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} T^{\alpha}_{\beta}, \quad (\mu, \nu = 1,2,3,4) \text{ lub}$$

$$T'^{\mu}_{\nu} = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'_{\nu}}{\partial x_{\beta}} T^{\alpha}_{\beta}, \quad (\mu, \nu = 1,2,3,4) \text{ lub}$$

$$T'^{\mu}_{\nu} = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4} \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x'_{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} T^{\alpha}_{\beta}, \quad (\mu, \nu = 1,2,3,4) \text{ lub}$$

$$T'^{\mu}_{\nu} = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4} \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x'_{\mu}} \frac{\partial x'_{\nu}}{\partial x_{\beta}} T^{\alpha}_{\beta}, \quad (\mu, \nu = 1,2,3,4).$$

Tensory drugiego rzędu kowariantne i kontrawariantne nazywamy symetrycznymi, jeżeli odpowiednio $A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}$ i $A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu}$ oraz antysymetrycznymi (skośnosymetrycznymi), jeżeli odpowiednio $A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}$ i $A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}$. Wszystkie składowe diagonalne tensora antysymetrycznego są równe zeru.

Czterowymiarowym **tensorem g-krotnie kontrawariantnym i d-krotnie kowariantnym** $T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_g}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_d}$ nazywamy zbiór 4^{g+d} wielkości, zwanych jego składowymi (współrzędnymi) względem bazy $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$, które przy zmianie układu współrzędnych

$$x'^{\mu} = f^{\mu}\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right), \quad dx'^{\mu} = \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu}, \quad \mathbf{e}'_{\mu} = \sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \mathbf{e}_{\alpha}, \quad (\mu = 1,2,3,4)$$

i towarzyszącej im zmianie dualnego układu współrzędnych

$$x'_{\mu} = f_{\mu}\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right), \quad dx'_{\mu} = \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial x'_{\mu}}{\partial x_{\nu}} dx_{\nu}, \quad \mathbf{e}'^{\mu} = \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x'_{\mu}} \mathbf{e}^{\alpha}, \quad (\mu = 1,2,3,4)$$

transformują się według wzorów

$$T'^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_g}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_d} = \sum_{\alpha_1=1}^{4}\cdots\sum_{\alpha_g=1}^{4} \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\mu_g}}{\partial x^{\alpha_g}} \sum_{\beta_1=1}^{4}\cdots\sum_{\beta_d=1}^{4} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\beta_d}}{\partial x'^{\nu_d}} T^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_g}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_d} \text{ lub}$$

$$T'^{\mu_1\mu_2\mu_3\cdots\mu_g}_{\nu_1\nu_2\nu_3\cdots\nu_d} = \sum_{\alpha_1=1}^{4}\cdots\sum_{\alpha_g=1}^{4} \frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial x'_{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x_{\alpha_g}}{\partial x'_{\mu_g}} \sum_{\beta_1=1}^{4}\cdots\sum_{\beta_d=1}^{4} \frac{\partial x'_{\nu_1}}{\partial x_{\beta_1}} \cdots \frac{\partial x'_{\nu_d}}{\partial x_{\beta_d}} T^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_g}_{\beta_1\beta_2\beta_3\cdots\beta_d}.$$

Liczbę $(d+g)$ nazywamy rzędem tensora.

- **Delta Kroneckera jako tensor**
  Delta Kroneckera bywa zapisywana jako

$$\delta^{\mu}_{\nu}=\delta^{\nu}_{\mu}=\delta_{\mu\nu}=\delta^{\mu\nu}=\begin{Bmatrix}1\Leftrightarrow\mu=\nu\\0\Leftrightarrow\mu\neq\nu\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

TWIERDZENIE
Delta Kroneckera jest tensorem mieszanym drugiego rzędu względem dowolnych transformacji.
DOWÓD

$$\left.\begin{aligned}&dx'^{\mu}=\sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}dx^{\alpha}\\&dx^{\alpha}=\sum_{\nu=1}^{4}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu}}dx'^{\nu}\\&\left[\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\right]\left[\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu}}\right]=\left[\delta'^{\mu}_{\nu}\right]\\&\sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu}}=\delta'^{\mu}_{\nu}\end{aligned}\right\}\delta'^{\mu}_{\nu}=\sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}\delta^{\beta}_{\alpha}=\sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu}}\delta^{\alpha}_{\alpha}=\sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu}}=\delta'^{\mu}_{\nu}$$

TWIERDZENIE
Delta Kroneckera jest tensorem drugiego rzędu równocześnie dwukrotnie kontrawariantnym, dwukrotnie kowariantnym lub mieszanym tylko względem transformacji ortogonalnych,

$$\delta'^{\mu\nu}=\sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}}\delta^{\alpha\beta}=\sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\alpha}}\delta^{\alpha\alpha}=\sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\alpha}}=\delta'^{\mu\nu},$$

$$\delta'_{\mu\nu}=\sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}\delta_{\alpha\beta}=\sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu}}\delta_{\alpha\alpha}=\sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu}}=\delta'_{\mu\nu},$$

$$\delta'^{\mu}_{\nu}=\sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}\delta^{\beta}_{\alpha}=\sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu}}\delta^{\alpha}_{\alpha}=\sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu}}=\delta'^{\mu}_{\nu},$$

$$\delta'^{\nu}_{\mu}=\sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}}\delta^{\alpha}_{\beta}=\sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\alpha}}\delta^{\alpha}_{\alpha}=\sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\alpha}}=\delta'^{\nu}_{\mu},$$

gdyż tylko wtedy odpowiednio

$$\sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\alpha}}=\delta'^{\mu\nu},\quad\sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu}}=\delta'_{\mu\nu},\quad\sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu}}=\delta'^{\mu}_{\nu},\quad\sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\alpha}}=\delta'^{\nu}_{\mu}.$$

UWAGA
Wielu autorów udowadniając, że delta Kroneckera jest tensorem mieszanym drugiego rzędu względem dowolnych transformacji popełnia prosty błąd rachunkowy:

$$\delta'^{\mu}_{\nu}=\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}\delta^{\beta}_{\alpha}=\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu}}\delta^{\alpha}_{\alpha}=\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}=\delta'^{\mu}_{\nu}.$$

Tymczasem poprawne rachunki wyglądają jak następuje

$$\delta'^{\mu}_{\nu}=\sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}\delta^{\beta}_{\alpha}=\sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu}}\delta^{\alpha}_{\alpha}=\sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu}}=\delta'^{\mu}_{\nu}.$$

6 TENSOR METRYCZNY

- **Kowariantny tensor metryczny**

Niech będzie dany układ współrzędnych z bazą $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$. Symetryczny tensor drugiego rzędu

$$g_{\mu\nu} \stackrel{df}{=} \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = |\mathbf{e}_\mu||\mathbf{e}_\nu| \cos\angle(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu),$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{bmatrix}, \quad g_{\mu\nu} = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = \mathbf{e}_\nu \cdot \mathbf{e}_\mu = g_{\nu\mu}$$

nazywamy **kowariantnym tensorem metrycznym**. Składowe tensora metrycznego $g_{\mu\nu}$ są w ogólności dwukrotnie różniczkowalnymi funkcjami współrzędnych (x^1, x^2, x^3, x^4).

- **Kontrawariantny tensor metryczny**

Niech będzie dany dualny układ współrzędnych z bazą $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3, \mathbf{e}^4$. Symetryczny tensor kontrawariantny drugiego rzędu

$$g^{\mu\nu} \stackrel{df}{=} \mathbf{e}^\mu \cdot \mathbf{e}^\nu = |\mathbf{e}^\mu| \cdot |\mathbf{e}^\nu| \cos\angle(\mathbf{e}^\mu, \mathbf{e}^\nu),$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} & g^{14} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} & g^{24} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} & g^{34} \\ g^{41} & g^{41} & g^{41} & g^{41} \end{bmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \mathbf{e}^\mu \cdot \mathbf{e}^\nu = \mathbf{e}^\nu \cdot \mathbf{e}^\mu = g^{\nu\mu}$$

nazywamy **kontrawariantnym tensorem metrycznym**.

Pokażemy, że macierz $g^{\mu\nu}$ jest macierzą odwrotną do macierzy $g_{\mu\nu}$: $\sum_{\alpha=1}^{4} g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = \delta_\mu^\nu$.

$$\left.\begin{aligned} g_{\mu\alpha} &= g_{\alpha\mu} = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\alpha \\ g^{\alpha\nu} &= g^{\nu\alpha} = \mathbf{e}^\alpha \cdot \mathbf{e}^\nu \\ \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}^\nu &= \delta_\mu^\nu \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = (\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\alpha)(\mathbf{e}^\alpha \cdot \mathbf{e}^\nu) = (\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}^\nu)(\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}^\alpha) = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}^\nu = \delta_\mu^\nu$$

Przypomnijmy jak wyznaczyć elementy macierzy $g^{\mu\nu}$, znając elementy macierzy $g_{\mu\nu}$.

$$\left.\begin{aligned} g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} &= \delta_\mu^\nu \\ g_{\mu\alpha} \Delta^{\nu\alpha} &= g\delta_\mu^\nu \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \boxed{g^{\alpha\nu} = g^{\nu\alpha} = \frac{\Delta^{\nu\alpha}}{g}}$$

g = wyznacznik macierzy utworzonej ze składowych kowariantnego tensora metrycznego

$$g = \det[g_{\mu\nu}] = |g_{\mu\nu}| = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{vmatrix} \neq 0$$

$\Delta^{\mu\nu}$ = dopełnienie algebraiczne elementu $g_{\mu\nu}$ wyznacznika g

- **Własności tensorów metrycznych**
  Przypomnijmy wybrane ogólne własności wyznaczników.

TWIERDZENIE

$$g=\sum_{\nu=1}^{4} g_{\mu\nu}\Delta^{\mu\nu}=\sum_{\mu=1}^{4} g_{\mu\nu}\Delta^{\mu\nu}$$

TWIERDZENIE

$$\sum_{\nu=1}^{4} g_{\alpha\nu}\Delta^{\beta\nu}=\sum_{\mu=1}^{4} g_{\mu\alpha}\Delta^{\mu\beta}=g\delta_{\alpha}^{\beta},\qquad \delta_{\alpha}^{\beta}=\begin{cases}1\Leftrightarrow\alpha=\beta\\ 0\Leftrightarrow\alpha\neq\beta\end{cases}$$

Przy ich pomocy udowodnimy kilka praktycznych własności tensorów metrycznych.

TWIERDZENIE

$$g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu}=g_{\mu\alpha}g^{\nu\alpha}=g_{\alpha\mu}g^{\alpha\nu}=g_{\alpha\mu}g^{\nu\alpha}=\delta_{\mu}^{\nu}$$

DOWÓD

$$\left.\begin{aligned} g^{\alpha\nu}=g^{\nu\alpha}=\frac{\Delta^{\nu\alpha}}{g}\\ \sum_{\alpha=1}^{4} g_{\mu\alpha}\Delta^{\nu\alpha}=g\delta_{\mu}^{\nu}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad \sum_{\alpha=1}^{4} g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu}=\frac{1}{g}\sum_{\alpha=1}^{4} g_{\mu\alpha}\Delta^{\nu\alpha}=\frac{1}{g}g\delta_{\mu}^{\nu}=\delta_{\mu}^{\nu}$$

TWIERDZENIE

$$\sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4} g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}=4$$

DOWÓD

$$\sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4} g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}=\frac{1}{g}\sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4} g_{\mu\nu}\Delta^{\mu\nu}=\frac{1}{g}\sum_{\mu=1}^{4} g\delta_{\mu}^{\mu}=\sum_{\mu=1}^{4}\delta_{\mu}^{\mu}=4$$

TWIERDZENIE

$$\sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4} g^{\mu\nu}g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}=g_{\alpha\beta}$$

DOWÓD

$$\sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4} g^{\mu\nu}g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}=\frac{1}{g}\sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4}\Delta^{\mu\nu}g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}=\frac{1}{g}\left(\sum_{\mu=1}^{4} g_{\mu\alpha}\Delta^{\mu\nu}\right)\sum_{\nu=1}^{4} g_{\nu\beta}=\frac{1}{g}g\delta_{\alpha}^{\nu}\sum_{\nu=1}^{4} g_{\nu\beta}=\sum_{\nu=1}^{4}\delta_{\alpha}^{\nu}g_{\nu\beta}=g_{\alpha\beta}$$

Z rozwinięcia wyznacznika i definicji składowych kontrawariantnych tensora metrycznego otrzymamy wzór na pochodną z logarytmu wyznacznika tensora metrycznego.

$$\boxed{\begin{aligned} g&=\sum_{\nu=1}^{4} g_{\mu\nu}\Delta^{\mu\nu}\\ g^{\mu\nu}&=\frac{\Delta^{\mu\nu}}{g}\\ \frac{\partial\ln g}{\partial g}&=\frac{1}{g},\quad g>0\end{aligned}}$$

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}}=\Delta^{\mu\nu}=gg^{\mu\nu}$$

$$\frac{\partial\ln g}{\partial x^{\alpha}}=\frac{\partial\ln g}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}=g^{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}$$

$$\frac{\partial\ln g}{\partial x^{\alpha}}=\frac{2}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^{\alpha}}=\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x^{\alpha}}=g^{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}$$

- **Podstawowa forma metryczna (Kwadrat elementu liniowego)**

Rozpatrzmy czterowymiarową przestrzeń zdarzeń. Niech będzie dany układ współrzędnych $\{0,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4\}$. Czwarta współrzędna zdarzenia (x^1,x^2,x^3,x^4), czyli $x^4=ict$, jest liczbą urojoną. Określmy kwadrat różniczki odległości między dwoma blisko położonymi punktami (x^1,x^2,x^3,x^4) i $(x^1+dx^1,x^2+dx^2,x^3+dx^3,x^4+dx^4)$ o promieniach wodzących $\tilde{\mathbf{R}}$ i $\tilde{\mathbf{R}}+d\tilde{\mathbf{R}}$ jako

$$(ds)^2=(d\tilde{\mathbf{R}})^2=d\tilde{\mathbf{R}}\cdot d\tilde{\mathbf{R}}$$

$$d\tilde{\mathbf{R}}=\sum_{\mu=1}^{4}dx^\mu\mathbf{e}_\mu$$

$$d\tilde{\mathbf{R}}=\sum_{\nu=1}^{4}dx^\nu\mathbf{e}_\nu$$

$$(ds)^2=\sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4}dx^\mu dx^\nu\mathbf{e}_\mu\cdot\mathbf{e}_\nu$$

$$g_{\mu\nu}\overset{df}{=}\mathbf{e}_\mu\cdot\mathbf{e}_\nu=|\mathbf{e}_\mu||\mathbf{e}_\nu|\cos\angle(\mathbf{e}_\mu,\mathbf{e}_\nu)$$

$$\boxed{(ds)^2=\sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4}g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}$$

Pokażemy, że kwadrat różniczki odległości między dwoma blisko położonymi punktami, zwany też podstawową formą metryczną, różniczkową formą kwadratową lub kwadratem elementu liniowego, jest inwariantem: $(ds)^2=(ds')^2$.

$$(ds)^2=\sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4}g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

$$dx^\mu=\sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}dx'^\alpha$$

$$dx^\nu=\sum_{\beta=1}^{4}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}dx'^\beta$$

$$(ds)^2=\sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4}g_{\mu\nu}\sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}dx'^\alpha\sum_{\beta=1}^{4}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}dx'^\beta=\sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}\sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}g_{\mu\nu}dx'^\alpha dx'^\beta$$

$$g'_{\alpha\beta}=\sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}g_{\mu\nu}$$

$$(ds)^2=\sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}g'_{\alpha\beta}dx'^\alpha dx'^\beta$$

$$(ds')^2=\sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}g'_{\alpha\beta}dx'^\alpha dx'^\beta$$

$$(ds)^2=(ds')^2$$

Określmy ponownie kwadrat różniczki odległości między dwoma blisko położonymi punktami (x_1, x_2, x_3, x_4) i $(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3, x_4 + dx_4)$ o promieniach wodzących $\widetilde{\mathbf{R}}$ i $\widetilde{\mathbf{R}} + d\widetilde{\mathbf{R}}$ jako

$$(ds)^2 = (d\widetilde{\mathbf{R}})^2 = d\widetilde{\mathbf{R}} \cdot d\widetilde{\mathbf{R}}$$

$$d\widetilde{\mathbf{R}} = \sum_{\mu=1}^{4} dx_\mu \mathbf{e}^\mu$$

$$d\widetilde{\mathbf{R}} = \sum_{\nu=1}^{4} dx_\nu \mathbf{e}^\nu$$

$$(ds)^2 = \sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4} dx_\mu dx_\nu \mathbf{e}^\mu \cdot \mathbf{e}^\nu$$

$$g^{\mu\nu} \overset{df}{=} \mathbf{e}^\mu \cdot \mathbf{e}^\nu = |\mathbf{e}^\mu||\mathbf{e}^\nu| \cos\angle(\mathbf{e}^\mu, \mathbf{e}^\nu)$$

$$\boxed{(ds)^2 = \sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4} g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu}$$

Pokażemy, że obie definicje kwadratu różniczki odległości między dwoma blisko położonymi punktami są równoważne: $(ds)^2 = \sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4} g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4} g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$.

$$(ds)^2 = \sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4} g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$$

$$dx_\mu = \sum_{\alpha=1}^{4} g_{\mu\alpha} dx^\alpha$$

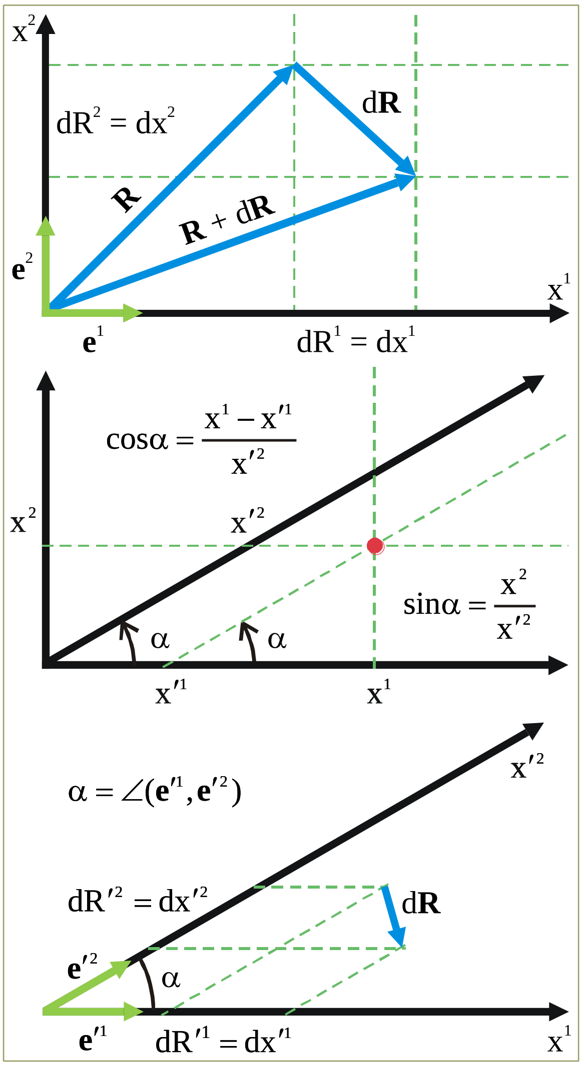
$$dx_\nu = \sum_{\beta=1}^{4} g_{\nu\beta} dx^\beta$$

$$(ds)^2 = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4} \left(\sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4} g^{\mu\nu} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \right) dx^\alpha dx^\beta$$

$$\sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4} g^{\mu\nu} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} = g_{\alpha\beta}$$

$$(ds)^2 = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4} g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta$$

PRZYKŁAD



$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(ds)^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2$$

$$x^1 = x'^1 + x'^2 \cos\angle(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$$

$$x^2 = x'^2 \sin\angle(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$$

$$g'_{11} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial x'^1}\right)^2 g_{11} + \left(\frac{\partial x^2}{\partial x'^1}\right)^2 g_{22} = 1$$

$$g'_{12} = \frac{\partial x^1}{\partial x'^1}\frac{\partial x^1}{\partial x'^2} g_{11} + \frac{\partial x^2}{\partial x'^1}\frac{\partial x^2}{\partial x'^2} g_{22} = \cos\angle(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$$

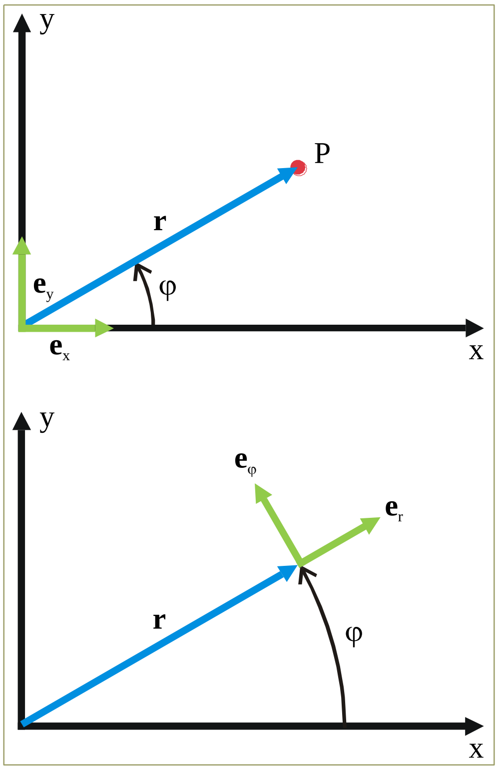
$$g'_{21} = \frac{\partial x^1}{\partial x'^2}\frac{\partial x^1}{\partial x'^1} g_{11} + \frac{\partial x^2}{\partial x'^2}\frac{\partial x^2}{\partial x'^1} g_{22} = \cos\angle(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$$

$$g'_{22} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial x'^2}\right)^2 g_{11} + \left(\frac{\partial x^2}{\partial x'^2}\right)^2 g_{22} = 1$$

$$g'_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & \cos\angle(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2) \\ \cos\angle(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2) & 1 \end{bmatrix}$$

$$(ds)^2 = (dx'^1)^2 + (dx'^2)^2 + dx'^1 dx'^2 \cos\angle(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$$

PRZYKŁAD



$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

$$dx = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi$$

$$dy = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi$$

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\varphi)^2$$

$$(ds)^2 = g_{rr}(dr)^2 + g_{\varphi\varphi}(d\varphi)^2$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g'_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}$$

- **Liniowe przekształcenie ortogonalne współrzędnych sprowadzające podstawową formę metryczną do postaci diagonalnej**

TWIERDZENIE
Liniowe przekształcenie ortogonalne współrzędnych
$x^\mu = b_{\mu\alpha} x'^\alpha, \quad x^\nu = b_{\nu\beta} x'^\beta, \quad dx^\mu = b_{\mu\alpha} dx'^\alpha, \quad dx^\nu = b_{\nu\beta} dx'^\beta$
sprowadza podstawową formę metryczną
$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$
do postaci diagonalnej
$ds = \lambda_\alpha dx'^\alpha dx'^\alpha$

wtedy i tylko wtedy, gdy kolumny macierzy $\mathbf{B} = \left[b_{\kappa\lambda} \right]$ są wektorami własnymi macierzy $\mathbf{G} = \left[g_{\kappa\lambda} \right]$.

Powyższe twierdzenie narzuca algorytm poszukiwania badanego przekształcenia.

1. Znajdujemy wartości własne macierzy $\mathbf{G} = \left[g_{\kappa\lambda} \right]$ jako pierwiastki jej równania charakterystycznego

$$\det \begin{bmatrix} g_{11} - \lambda & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} - \lambda & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} - \lambda & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} - \lambda \end{bmatrix} = I_0 \lambda^4 + I_1 \lambda^3 + I_2 \lambda^2 + I_3 \lambda^1 + I_4 = 0$$

$I_\kappa = (-1)^{4-\kappa} S_\kappa, \quad (\kappa = 0,1,2,3,4)$
S_κ = suma wyznaczników wszystkich minorów głównych stopnia κ macierzy $\mathbf{G}$
$I_0 = S_0 = 1$

W szczególności

$I_4 = \det \mathbf{G} = \det \left[g_{\alpha\beta} \right]$,

$I_1 = -\left(g_{11} + g_{22} + g_{33} + g_{44} \right) = -\mathrm{Tr}\, \mathbf{G} = -\mathrm{Tr} \left[g_{\alpha\beta} \right]$.

Przy okazji odnotujmy, że

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = \mathrm{Tr} \left[g_{\alpha\beta} \right], \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 = \det \left[g_{\alpha\beta} \right]$.

2. Składowe wektora własnego $\left(b_{1\alpha}, b_{2\alpha}, b_{3\alpha}, b_{4\alpha} \right)$, odpowiadającego wartości własnej λ_α

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1\alpha} \\ b_{2\alpha} \\ b_{3\alpha} \\ b_{4\alpha} \end{bmatrix} = \lambda_\alpha \begin{bmatrix} b_{1\alpha} \\ b_{2\alpha} \\ b_{3\alpha} \\ b_{4\alpha} \end{bmatrix},$$

są rozwiązaniami jednorodnego układu równań liniowych

$$\left(g_{11} - \lambda_\alpha \right) b_{1\alpha} + g_{12} b_{2\alpha} + g_{13} b_{3\alpha} + g_{14} b_{4\alpha} = 0,$$
$$g_{21} b_{1\alpha} + \left(g_{22} - \lambda_\alpha \right) b_{2\alpha} + g_{23} b_{3\alpha} + g_{24} b_{4\alpha} = 0,$$
$$g_{31} b_{1\alpha} + g_{32} b_{2\alpha} + \left(g_{33} - \lambda_\alpha \right) b_{3\alpha} + g_{34} b_{4\alpha} = 0,$$
$$g_{41} b_{1\alpha} + g_{42} b_{2\alpha} + g_{43} b_{3\alpha} + \left(g_{44} - \lambda_\alpha \right) b_{4\alpha} = 0.$$

7 WSPÓŁRZĘDNE KRZYWOLINIOWE

- **Współrzędne krzywoliniowe**

Mamy dany prostoliniowy układ współrzędnych

$$\{0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}.$$

Każdemu punktowi P o promieniu wodzącym **R** zostały przyporządkowane prostoliniowe współrzędne kontrawariantne (x^1, x^2, x^3, x^4)

$$\mathbf{R} = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + x^3\mathbf{e}_3 + x^4\mathbf{e}_4 .$$

Zmienne x'^1, x'^2, x'^3, x'^4 nazywamy współrzędnymi krzywoliniowymi, jeżeli są one związane ze współrzędnymi prostoliniowymi (x^1, x^2, x^3, x^4) za pomocą nieliniowego przekształcenia

$$x'^\mu = f_\mu(x^1, x^2, x^3, x^4), \quad (\mu = 1,2,3,4)$$

i jeżeli istnieje przekształcenie odwrotne

$$x^\nu = g_\nu(x'^1, x'^2, x'^3, x'^4), \quad (\nu = 1,2,3,4).$$

Wyznaczniki jakobianów obu tych transformacji są więc różne od zera

$$\det\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \det\frac{\partial f_\mu}{\partial x^\nu} \neq 0, \quad \det\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial g_\nu}{\partial x'^\mu} \neq 0.$$

Dana współrzędna przyjmuje stałą wartość na powierzchni tej współrzędnej. Punkt P znajdujący się na przecięciu powierzchni $x'^1 = \text{const}$, $x'^2 = \text{const}$, $x'^3 = \text{const}$, $x'^4 = \text{const}$, posiada współrzędne krzywoliniowe (x'^1, x'^2, x'^3, x'^4). Linie wzdłuż których przecinają się takie powierzchnie są liniami współrzędnych. Wzdłuż linii współrzędnej zmienia się tylko dana współrzędna a pozostałe są ustalone. Współrzędne krzywoliniowe dzielimy na ortogonalne i nieortogonalne. Wszystkie linie współrzędnych ortogonalnych przecinają się parami pod kątem prostym. W przypadku współrzędnych nieortogonalnych warunek ten nie jest spełniony.

- **Lokalne układy współrzędnych związane ze współrzędnymi krzywoliniowymi**

Promień wodzący **R** zaczepiony w początku układu $\{0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$

$$\mathbf{R} = x^\nu\mathbf{e}_\nu = g_\nu(x'^1, x'^2, x'^3, x'^4)\mathbf{e}_\nu$$

jest funkcją współrzędnych krzywoliniowych (x'^1, x'^2, x'^3, x'^4).

Pochodne cząstkowe $\dfrac{\partial \mathbf{R}}{\partial x'^\mu}$

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial g_\nu}{\partial x'^\mu}\mathbf{e}_\nu \stackrel{\text{df}}{=} \mathbf{e}'_\mu$$

są w każdym punkcie wektorami liniowo niezależnymi i stycznymi do odpowiednich linii współrzędnych. Wektory te w każdym punkcie P tworzą tzw. lokalny układ współrzędnych

$$\{P, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3, \mathbf{e}'_4\}.$$

W przypadku współrzędnych prostoliniowych

$$\mathbf{R} = x^\nu\mathbf{e}_\nu, \quad x'^\nu = x^\nu, \quad \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x^\mu} = \mathbf{e}_\mu$$

układ lokalny w każdym punkcie P

$$\{P, \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_2, \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_3, \mathbf{e}'_4 = \mathbf{e}_4\}$$

ma taką samą bazę jak układ wyjściowy

$$\{0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}.$$

- **Układy współrzędnych ze zmienną bazą**

Wprowadzenie współrzędnych krzywoliniowych pozwoliło każdemu punktowi przestrzeni przyporządkować w ogólności inny lokalny układ współrzędnych prostoliniowych z odpowiadającymi mu wektorami bazowymi. Założyliśmy, że wektory bazowe zmieniają się od punktu do punktu w ciągły sposób. Taki twór nazywamy układem współrzędnych o zmiennej bazie. Zmienna baza zadawana będzie w postaci tensora metrycznego.

- **Różniczka promienia wodzącego**

Różniczka promienia wodzącego $\mathbf{R}$ punktu P zaczepionego w początku układu $\{0,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4\}$ dana jest przez

$$\mathbf{R} = x^{\nu}\mathbf{e}_{\nu}$$
$$\mathbf{R} = g_{\nu}\left(x'^1, x'^2, x'^3, x'^4\right)\mathbf{e}_{\nu}$$
$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x^{\mu}} = \mathbf{e}_{\mu}$$
$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x'^{\mu}} = \mathbf{e}'_{\mu}$$

$$d\mathbf{R} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x^{\mu}}\,dx^{\mu} = dx^{\mu}\mathbf{e}_{\mu}$$
$$d\mathbf{R} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x'^{\mu}}\,dx'^{\mu} = dx'^{\mu}\mathbf{e}'_{\mu}$$
$$d\mathbf{R} \approx dx''^{\mu}\mathbf{e}'_{\mu}$$
$$d\mathbf{R} = dx^{\mu}\mathbf{e}_{\mu} = dx'^{\mu}\mathbf{e}'_{\mu} \approx dx''^{\mu}\mathbf{e}'_{\mu}$$

x^{μ} = współrzędne prostoliniowe względem układu $\{0,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4\}$

x'^{μ} = współrzędne krzywoliniowe

x''^{μ} = lokalne współrzędne prostoliniowe względem układu $\{P,\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_3,\mathbf{e}'_4\}$

Przyrosty współrzędnych krzywoliniowych dx'^{μ} w nieskończenie małym otoczeniu punktu P są w przybliżeniu równe przyrostom współrzędnych prostoliniowych w układzie lokalnym w punkcie P.

$$d\mathbf{R} = dx^{\mu}\mathbf{e}_{\mu} = dx'^{\mu}\mathbf{e}'_{\mu} \approx dx''^{\mu}\mathbf{e}'_{\mu}$$

- **Kwadrat różniczki promienia wodzącego**

$$(d\mathbf{R})^2 = d\mathbf{R}\cdot d\mathbf{R} = \left(dx'^{\mu}\,\mathbf{e}'_{\mu}\right)\cdot\left(dx'^{\nu}\,\mathbf{e}'_{\nu}\right) = \left(\mathbf{e}'_{\mu}\cdot\mathbf{e}'_{\nu}\right)dx'^{\mu}dx'^{\nu} \approx \left(\mathbf{e}'_{\mu}\cdot\mathbf{e}'_{\nu}\right)dx''^{\mu}dx''^{\nu}$$

$$\boxed{(d\mathbf{R})^2 = g'_{\mu\nu}dx'^{\mu}dx'^{\nu} \approx g'_{\mu\nu}dx''^{\mu}dx''^{\nu}, \quad g'_{\mu\nu} = \mathbf{e}'_{\mu}\cdot\mathbf{e}'_{\nu}}$$

- **Druga różniczka promienia wodzącego**

$$d^2\mathbf{R} = d(d\mathbf{R}) = d\left(dx'^{\mu}\,\mathbf{e}'_{\mu}\right) = d^2x'^{\mu}\,\mathbf{e}'_{\mu} + dx'^{\mu}\,d\mathbf{e}'_{\mu} \approx d^2x''^{\mu}\,\mathbf{e}'_{\mu} + dx''^{\mu}\,d\mathbf{e}'_{\mu}$$

$$d\mathbf{e}'_{\mu} = \frac{\partial \mathbf{e}'_{\mu}}{\partial x'^{\nu}}\,dx'^{\nu}$$

$$\boxed{d^2\mathbf{R} = d^2x'^{\mu}\,\mathbf{e}'_{\mu} + \frac{\partial \mathbf{e}'_{\mu}}{\partial x'^{\nu}}\,dx'^{\mu}dx'^{\nu} \approx d^2x''^{\mu}\,\mathbf{e}'_{\mu} + \frac{\partial \mathbf{e}'_{\mu}}{\partial x'^{\nu}}\,dx''^{\mu}dx''^{\nu}}$$

- **Ograniczenia dotyczące operacji wykonywanych na tensorach w układzie współrzędnych o zmiennej bazie**

W układzie współrzędnych krzywoliniowych, czyli w układzie o zmiennej bazie mają sens tylko operacje algebraiczne na tensorach określonych w danym punkcie przestrzeni.

PRZYKŁAD
Iloczyn skalarny
Utwórzmy w dowolnym układzie współrzędnych krzywoliniowych iloczyn wektorów

$$\mathbf{A} = A^{\alpha}\mathbf{e}_{\alpha} \ \text{ i } \ \mathbf{B} = B^{\beta}\left(\mathbf{e}_{\beta} + d\mathbf{e}_{\beta}\right)$$

zaczepionych w dwóch różnych punktach przestrzeni o współrzędnych określonych względem odpowiednich układów lokalnych

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A^{\alpha}\mathbf{e}_{\alpha}\cdot B^{\beta}\left(\mathbf{e}_{\beta} + d\mathbf{e}_{\beta}\right) = A^{\alpha}B^{\beta}\left[\left(\mathbf{e}_{\alpha}\cdot\mathbf{e}_{\beta}\right) + \left(\mathbf{e}_{\alpha}\cdot d\mathbf{e}_{\beta}\right)\right].$$

Otrzymane wyrażenie będzie iloczynem skalarnym wtedy i tylko wtedy, gdy

$$d\mathbf{e}_{\beta} = 0\,.$$

W krzywoliniowym układzie współrzędnych ma sens tylko iloczyn skalarny dwóch wektorów zaczepionych w tym samym punkcie będącym środkiem lokalnego układu.

- **Wyznaczanie tensora metrycznego**

Niech $\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right)$ będą współrzędnymi kartezjańskimi punktu P o promieniu wodzącym $\mathbf{R}$, a $\left(x'^1, x'^2, x'^3, x'^4\right)$ jego współrzędnymi krzywoliniowymi i niech

$$x^{\mu} = x^{\mu}\left(x'^1, x'^2, x'^3, x'^4\right), \quad \mu = 1,2,3,4.$$

Mamy wtedy

$$dx^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}}dx'^{\alpha}, \quad \mu = 1,2,3,4.$$

Kwadrat odległości między dwoma blisko położonymi punktami

$$\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right) \text{ i } \left(x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, x^3 + dx^3, x^4 + dx^4\right)$$

wynosi

$$ds^2 = d\mathbf{R}\cdot d\mathbf{R} = \mathbf{e}_{\mu}\cdot\mathbf{e}_{\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = \mathbf{e}'_{\alpha}\cdot\mathbf{e}'_{\beta}dx'^{\alpha}dx'^{\beta}$$

$$dx^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}}dx'^{\alpha}$$

$$dx^{\nu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}}dx'^{\beta}$$

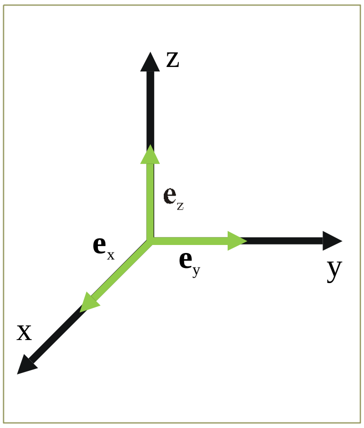
$\mathbf{e}_{\mu}\cdot\mathbf{e}_{\nu} = g_{\mu\nu}$ = tensor metryczny w prostoliniowym układzie wyjściowym

$\mathbf{e}'_{\alpha}\cdot\mathbf{e}'_{\beta} = g'_{\alpha\beta}$ = tensor metryczny w układzie krzywoliniowym

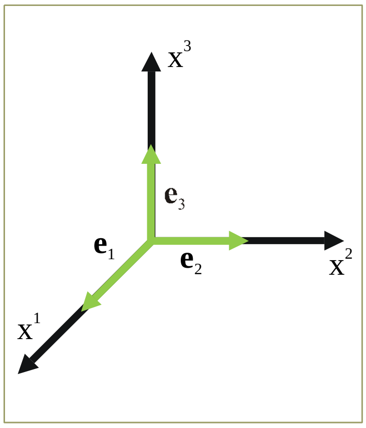
$$ds^2 = g_{\mu\nu}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}}dx'^{\alpha}dx'^{\beta} = g'_{\alpha\beta}dx'^{\alpha}dx'^{\beta}$$

$$\boxed{g'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}}g_{\mu\nu}}$$

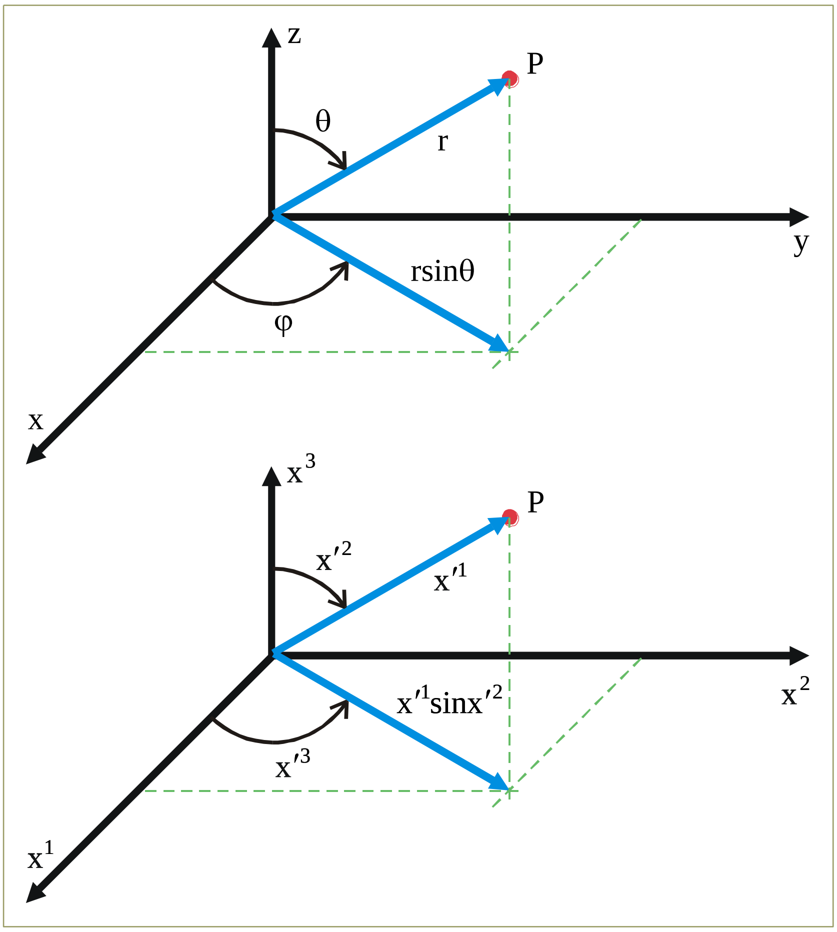
PRZYKŁAD - Współrzędne sferyczne



$$x^1 = x$$
$$x^2 = y$$
$$x^3 = z$$
$$x^4 = ict$$
$$g_{\mu\nu} = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$|\mathbf{e}_\alpha| = \sqrt{g_{\alpha\alpha}}$$
$$\mathbf{R} = \sum_{\alpha=1}^{4} x^\alpha \mathbf{e}_\alpha, \quad R^\alpha = |\mathbf{e}_\alpha| x^\alpha = \sqrt{g_{\alpha\alpha}}\, x^\alpha$$
$$d\mathbf{R} = \sum_{\alpha=1}^{4} dx^\alpha \mathbf{e}_\alpha, \quad dR^\alpha = |\mathbf{e}_\alpha| dx^\alpha = \sqrt{g_{\alpha\alpha}}\, dx^\alpha$$
$$\cos\angle(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu) = |\mathbf{e}_\mu|^{-1} |\mathbf{e}_\nu|^{-1} \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu$$
$$(ds)^2 = d\mathbf{R} \cdot d\mathbf{R} = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$
$$(ds)^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2$$



$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\theta$$
$$ict = ict'$$

$$x^1 = x$$
$$x^2 = y$$
$$x^3 = z$$
$$x^4 = ict$$

$$x'^1 = r$$
$$x'^2 = \theta$$
$$x'^3 = \varphi$$
$$x'^4 = ict'$$

$$x^1 = x'^1 \sin x'^2 \cos x'^3$$
$$x^2 = x'^1 \sin x'^2 \sin x'^3$$
$$x^3 = x'^1 \cos x'^2$$
$$x^4 = x'^4$$

$$(ds)^2 = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4} g'_{\alpha\beta} dx'^{\alpha} dx'^{\beta}$$

$$g'_{\alpha\beta} = \sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} g_{\mu\nu}$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow \mu = \nu \\ 0 \Leftrightarrow \mu \neq \nu \end{cases}$$

$$g'_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\beta}} g_{\mu\mu}, \qquad g'_{\alpha\alpha} = \sum_{\mu=1}^{4} \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \right)^2 g_{\mu\mu}$$

$$g'_{11} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial x'^1} \right)^2 g_{11} + \left(\frac{\partial x^2}{\partial x'^1} \right)^2 g_{22} + \left(\frac{\partial x^3}{\partial x'^1} \right)^2 g_{33} + \left(\frac{\partial x^4}{\partial x'^1} \right)^2 g_{44}$$

$$g'_{22} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial x'^2} \right)^2 g_{11} + \left(\frac{\partial x^2}{\partial x'^2} \right)^2 g_{22} + \left(\frac{\partial x^3}{\partial x'^2} \right)^2 g_{33} + \left(\frac{\partial x^4}{\partial x'^2} \right)^2 g_{44}$$

$$g'_{33} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial x'^3} \right)^2 g_{11} + \left(\frac{\partial x^2}{\partial x'^3} \right)^2 g_{22} + \left(\frac{\partial x^3}{\partial x'^3} \right)^2 g_{33} + \left(\frac{\partial x^4}{\partial x'^3} \right)^2 g_{44}$$

$$g'_{44} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial x'^4} \right)^2 g_{11} + \left(\frac{\partial x^2}{\partial x'^4} \right)^2 g_{22} + \left(\frac{\partial x^3}{\partial x'^4} \right)^2 g_{33} + \left(\frac{\partial x^4}{\partial x'^4} \right)^2 g_{44}$$

$$g'_{11} = \sin^2 x'^2 \cos^2 x'^3 g_{11} + \sin^2 x'^2 \sin^2 x'^3 g_{22} + \cos^2 x'^2 g_{33}$$

$$g'_{22} = (x'^1)^2 \cos^2 x'^2 \cos^2 x'^3 g_{11} + (x'^1)^2 \cos^2 x'^2 \sin^2 x'^3 g_{22} + (x'^1)^2 \sin^2 x'^2 g_{33}$$

$$g'_{33} = (x'^1)^2 \sin^2 x'^2 \sin^2 x'^3 g_{11} + (x'^1)^2 \sin^2 x'^2 \cos^2 x'^3 g_{22}$$

$$g'_{44} = g_{44}$$

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = g_{44} = 1$$

$$g'_{11} = 1$$

$$g'_{22} = (x'^1)^2 = r^2$$

$$g'_{33} = (x'^1)^2 \sin^2 x'^2 = r^2 \sin^2\theta$$

$$g'_{44} = 1$$

$$g'_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{g'} = r^2 \sin\theta$$

$$g'^{11} = \frac{1}{g'_{11}} = 1$$

$$g'^{22} = \frac{1}{g'_{22}} = \frac{1}{r^2}$$

$$g'^{33} = \frac{1}{g'_{33}} = \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}$$

$$g'^{44} = \frac{1}{g'_{44}} = 1$$

$$g'^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} \sin^{-2}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(ds)^2 = g'_{11}(dx'^1)^2 + g'_{22}(dx'^2)^2 + g'_{33}(dx'^3)^2 + g'_{44}(dx'^4)^2$$

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2 + r^2 \sin^2\theta (d\varphi)^2 + (dict)^2$$

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2 + r^2 \sin^2\theta (d\varphi)^2 - c^2 (dt)^2$$

- **Współrzędne sferyczne w przypadku trójwymiarowym**

Współrzędne sferyczne punktu P:

- Promień r sfery, na której leży punkt P, czyli długość jego promienia wodzącego.
- Kąt φ zawarty między półosią 0X a rzutem promienia wodzącego punktu P na płaszczyznę X,Y.
- Kąt θ zawarty między promieniem r a półosią 0Z.

Relacje między współrzędnymi sferycznymi i kartezjańskimi punktu P

- $x = r\cos\varphi\sin\theta$
  $y = r\sin\varphi\sin\theta$
  $z = r\cos\theta$
- $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
  $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$
  $\theta = \arccos\frac{z}{r}$

Powierzchnie stałych współrzędnych:

- r = const: Sfera o promieniu r i środku 0 w początku kartezjańskiego układu.
- φ = const: Półpłaszczyzna której brzegiem jest oś Z kartezjańskiego układu.
- θ = const: Stożek o wierzchołku w początku 0 i osi pokrywającej się z osią Z kartezjańskiego układu.

Linie współrzędnych:

- Linią współrzędnej r jest prosta będąca przecięciem stożka z półpłaszczyzną, której brzegiem jest oś Z, czyli linia pokrywająca się z promieniem wodzącym punktu P.
- Linią współrzędnej φ jest okrąg będący przecięciem stożka ze sferą o promieniu r.
- Linia współrzędnej θ jest okrąg będący przecięciem sfery o promieniu r z półpłaszczyzną, zawierającą punkt P, której brzegiem jest oś Z.

Promień wodzący punktu P:

$$\mathbf{R} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z = r\cos\varphi\sin\theta\mathbf{e}_x + r\sin\varphi\sin\theta\mathbf{e}_y + r\cos\theta\mathbf{e}_z$$

Wersory osi współrzędnych lokalnego układu:

- Wersor $\mathbf{e}_r$ jest styczny do linii współrzędnej r i ma zwrot promienia wodzącego punktu P.

$$\mathbf{e}_r = \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial r} = \cos\varphi\sin\theta\mathbf{e}_x + \sin\varphi\sin\theta\mathbf{e}_y + \cos\theta\mathbf{e}_z$$

- Wersor $\mathbf{e}_\varphi$ jest styczny do linii współrzędnej φ i ma zwrot określony przez wzrost kąta φ.

$$\mathbf{e}_\varphi = \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\varphi} = -r\sin\varphi\sin\theta\mathbf{e}_x + r\cos\varphi\sin\theta\mathbf{e}_y + 0$$

- Wersor $\mathbf{e}_\theta$ jest styczny do linii współrzędnej θ i ma zwrot określony przez wzrost kąta θ.

$$\mathbf{e}_\theta = \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\theta} = r\cos\varphi\cos\theta\mathbf{e}_x + r\sin\varphi\cos\theta\mathbf{e}_y - r\sin\theta\mathbf{e}_z$$

- Wersory osi współrzędnych są parami wzajemnie prostopadłe:

$$\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_\varphi = 0 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{e}_r\perp\mathbf{e}_\varphi,\quad \mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_\theta = 0 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{e}_r\perp\mathbf{e}_\theta,\quad \mathbf{e}_\varphi\cdot\mathbf{e}_\theta = 0 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{e}_\varphi\perp\mathbf{e}_\theta$$

Różniczka promienia wodzącego

$$\mathbf{R} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z = r\cos\varphi\sin\theta\mathbf{e}_x + r\sin\varphi\sin\theta\mathbf{e}_y + r\cos\theta\mathbf{e}_z = r\,\mathbf{e}_r$$

$$d\mathbf{R} = \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial x}dx + \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial y}dy + \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial z}dz = dx\,\mathbf{e}_x + dy\,\mathbf{e}_y + dz\,\mathbf{e}_z$$

$$d\mathbf{R} = \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial r}dr + \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\varphi}d\varphi = dr\,\mathbf{e}_r + d\theta\,\mathbf{e}_\theta + d\varphi\,\mathbf{e}_\varphi = dr\,\mathbf{e}_r + r\,d\mathbf{e}_r$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{R} = {} & dr\left(\cos\varphi\sin\theta\mathbf{e}_x + \sin\varphi\sin\theta\mathbf{e}_y + \cos\theta\mathbf{e}_z\right) + \\ & + d\theta\left(r\cos\varphi\cos\theta\mathbf{e}_x + r\sin\varphi\cos\theta\mathbf{e}_y - r\sin\theta\mathbf{e}_z\right) + \\ & + d\varphi\left(-r\sin\varphi\sin\theta\mathbf{e}_x + r\cos\varphi\sin\theta\mathbf{e}_y\right) \end{aligned}$$

Kwadrat różniczki promienia wodzącego

$$d\mathbf{R}\cdot d\mathbf{R} = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2$$

$$g_{rr} = 1, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2\sin^2\theta$$

$$d\mathbf{R}\cdot d\mathbf{R} = g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2$$

Druga różniczka promienia wodzącego

$$d^2\mathbf{R} = d\left(dr\cdot\mathbf{e}_r + d\theta\cdot\mathbf{e}_\theta + d\varphi\cdot\mathbf{e}_\varphi\right) = d^2r\cdot\mathbf{e}_r + dr\cdot d\mathbf{e}_r + d^2\theta\cdot\mathbf{e}_\theta + d\theta\cdot d\mathbf{e}_\theta + d^2\varphi\cdot\mathbf{e}_\varphi + d\varphi\cdot d\mathbf{e}_\varphi$$

$$d\mathbf{e}_r = \frac{\partial\mathbf{e}_r}{\partial r}dr + \frac{\partial\mathbf{e}_r}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial\mathbf{e}_r}{\partial\varphi}d\varphi$$

$$d\mathbf{e}_\theta = \frac{\partial\mathbf{e}_\theta}{\partial r}dr + \frac{\partial\mathbf{e}_\theta}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial\mathbf{e}_\theta}{\partial\varphi}d\varphi$$

$$d\mathbf{e}_\varphi = \frac{\partial\mathbf{e}_\varphi}{\partial r}dr + \frac{\partial\mathbf{e}_\varphi}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial\mathbf{e}_\varphi}{\partial\varphi}d\varphi$$

$$\frac{\partial\mathbf{e}_r}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial\mathbf{e}_r}{\partial\theta} = \frac{\partial\mathbf{e}_\theta}{\partial r} = \cos\varphi\cos\theta\cdot\mathbf{e}_x + \sin\varphi\cos\theta\cdot\mathbf{e}_y - \sin\theta\cdot\mathbf{e}_z = r^{-1}\cdot\mathbf{e}_\theta$$

$$\frac{\partial\mathbf{e}_r}{\partial\varphi} = \frac{\partial\mathbf{e}_\varphi}{\partial r} = -\sin\varphi\sin\theta\cdot\mathbf{e}_x + \cos\varphi\sin\theta\cdot\mathbf{e}_y = r^{-1}\cdot\mathbf{e}_\varphi$$

$$\frac{\partial\mathbf{e}_\theta}{\partial\theta} = -r\cos\varphi\sin\theta\cdot\mathbf{e}_x - r\sin\varphi\sin\theta\cdot\mathbf{e}_y - r\cos\theta\cdot\mathbf{e}_z = -r\cdot\mathbf{e}_r$$

$$\frac{\partial\mathbf{e}_\theta}{\partial\varphi} = \frac{\partial\mathbf{e}_\varphi}{\partial\theta} = -r\sin\varphi\cos\theta\cdot\mathbf{e}_x + r\cos\varphi\cos\theta\cdot\mathbf{e}_y = \operatorname{ctg}\theta\cdot\mathbf{e}_\varphi$$

$$\frac{\partial\mathbf{e}_\varphi}{\partial\varphi} = -r\cos\varphi\sin\theta\cdot\mathbf{e}_x - r\sin\varphi\sin\theta\cdot\mathbf{e}_y = -r\sin^2\theta\cdot\mathbf{e}_r - \sin\theta\cos\theta\cdot\mathbf{e}_\theta$$

$$\begin{aligned} d^2\mathbf{R} = {} & \left(d^2r - r d\theta\cdot d\theta - r\sin^2\theta d\varphi\cdot d\varphi\right)\mathbf{e}_r + \left(d^2\theta + 2r^{-1}dr\cdot d\theta - \sin\theta\cos\theta d\varphi\cdot d\varphi\right)\mathbf{e}_\theta + \\ & + \left(d^2\varphi + 2r^{-1}dr\cdot d\varphi + 2\operatorname{ctg}\theta d\theta\cdot d\varphi\right)\mathbf{e}_\varphi \end{aligned}$$

- **Ortogonalne układy współrzędnych krzywoliniowych**

Ortogonalnymi układami współrzędnych krzywoliniowych nazywamy takie układy, dla których:

$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = 0$, gdy $\mu \neq \nu$,

$$g_{\mu\mu} = |\mathbf{e}_\mu||\mathbf{e}_\mu| = e_\mu e_\mu = (e_\mu)^2, \quad g^{\mu\mu} = |\mathbf{e}^\mu||\mathbf{e}^\mu| = e^\mu e^\mu = (e^\mu)^2.$$

Mamy więc

$$g_{\mu\mu} = \frac{1}{g^{\mu\mu}}, \quad \mathbf{e}^\mu = g^{\mu\mu}\mathbf{e}_\mu, \quad \mathbf{e}_\mu = g_{\mu\mu}\mathbf{e}^\mu,$$

$$|\mathbf{e}_\mu| = e_\mu = \sqrt{g_{\mu\mu}} = \frac{1}{\sqrt{g^{\mu\mu}}} = g_{\mu\mu}^{\frac{1}{2}} = \left(g^{\mu\mu}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$|\mathbf{e}^\mu| = e^\mu = \sqrt{g^{\mu\mu}} = \frac{1}{\sqrt{g_{\mu\mu}}} = \left(g^{\mu\mu}\right)^{\frac{1}{2}} = g_{\mu\mu}^{-\frac{1}{2}},$$

$$e_\mu = \frac{1}{e^\mu},$$

$$g = g_{11}g_{22}g_{33}g_{44}, \quad \sqrt{g} = g^{\frac{1}{2}} = e_1e_2e_3e_4 = \prod_{\mu=1}^{4} e_\mu .$$

Składowe kontrawariantne i kowariantne wektora $\mathbf{A}$ spełniają relacje:

$$\mathbf{A} = \sum_{\mu=1}^{4} A^\mu \mathbf{e}_\mu = \sum_{\mu=1}^{4} A_\mu \mathbf{e}^\mu,$$

$$A^\mu = \sum_{\nu=1}^{4} g_{\mu\nu}A^\mu = g_{\mu\mu}A^\mu = e_\mu e_\mu A^\mu, \quad A_\mu = \sum_{\nu=1}^{4} g^{\mu\nu}A_\mu = g^{\mu\mu}A_\mu = e^\mu e^\mu A_\mu .$$

- **Fizyczne (prawdziwe) wartości składowych**

W układach krzywoliniowych na ogół $e_\mu \neq 1$. Ze względów praktycznych wygodnie jest używać tzw. prawdziwych wartości składowych A^μ oraz A_μ zdefiniowanych poniżej:

$$\mathbf{A} = \sum_{\mu=1}^{4} A^\mu \, \mathbf{e}_\mu = \sum_{\mu=1}^{4} e_\mu A^\mu \, \frac{\mathbf{e}_\mu}{e_\mu} = \sum_{\mu=1}^{4} A^\mu \, \mathbf{e}_\mu,$$

$$\hat{A}^\mu \overset{\text{df}}{=} e_\mu A^\mu = \sqrt{g_{\mu\mu}}A^\mu = \frac{1}{\sqrt{g^{\mu\mu}}} A^\mu = g_{\mu\mu}^{\frac{1}{2}}A^\mu = \left(g^{\mu\mu}\right)^{-\frac{1}{2}} A^\mu,$$

$$\hat{\mathbf{e}}_\mu \overset{\text{df}}{=} \frac{\mathbf{e}_\mu}{e_\mu} = \frac{\mathbf{e}_\mu}{\sqrt{g_{\mu\mu}}} = \sqrt{g^{\mu\mu}}\mathbf{e}_\mu = g_{\mu\mu}^{\frac{1}{2}}\mathbf{e}_\mu = \left(g^{\mu\mu}\right)^{-\frac{1}{2}} \mathbf{e}_\mu,$$

$$|\hat{\mathbf{e}}_\mu| = \hat{e}_\mu = 1,$$

$$\mathbf{A} = \sum_{\mu=1}^{4} A_\mu \mathbf{e}^\mu = \sum_{\mu=1}^{4} e^\mu A_\mu \frac{\mathbf{e}^\mu}{e^\mu} = \sum_{\mu=1}^{4} \hat{A}_\mu \hat{\mathbf{e}}^\mu,$$

$$\hat{A}_\mu \overset{\text{df}}{=} e^\mu A_\mu = \sqrt{g^{\mu\mu}}A_\mu = \frac{1}{\sqrt{g_{\mu\mu}}} A_\mu = \left(g^{\mu\mu}\right)^{\frac{1}{2}} A_\mu = g_{\mu\mu}^{-\frac{1}{2}}A_\mu,$$

$$\hat{\mathbf{e}}^\mu \overset{\text{df}}{=} \frac{\mathbf{e}^\mu}{e^\mu} = \frac{\mathbf{e}^\mu}{\sqrt{g^{\mu\mu}}} = \sqrt{g_{\mu\mu}}\mathbf{e}^\mu = \left(g^{\mu\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{e}^\mu = g_{\mu\mu}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{e}^\mu,$$

$$|\hat{\mathbf{e}}^\mu| = \hat{e}^\mu = 1.$$

Dywergencja względem bazy $\left(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4\right)$

$$\mathrm{div}\mathbf{A} = g^{-\frac{1}{2}}\sum_{\mu=1}^{4}\frac{\partial\left(g^{\frac{1}{2}}A^{\mu}\right)}{\partial x^{\mu}}, \quad \mathbf{A}=\sum_{\mu=1}^{4}A^{\mu}\mathbf{e}_{\mu}$$

Dywergencja względem bazy $\left(\hat{\mathbf{e}}_1,\hat{\mathbf{e}}_2,\hat{\mathbf{e}}_3,\hat{\mathbf{e}}_4\right)$

$$\mathrm{div}\mathbf{A} = g^{-\frac{1}{2}}\sum_{\mu=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(g^{\frac{1}{2}}g_{\mu\mu}^{-\frac{1}{2}}g_{\mu\mu}^{\frac{1}{2}}A^{\mu}\right)=g^{-\frac{1}{2}}\sum_{\mu=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(g^{\frac{1}{2}}g_{\mu\mu}^{-\frac{1}{2}}\hat{A}^{\mu}\right), \quad \mathbf{A}=\sum_{\mu=1}^{4}\hat{A}^{\mu}\hat{\mathbf{e}}_{\mu}$$

Gradient względem bazy $\left(\mathbf{e}^1,\mathbf{e}^2,\mathbf{e}^3,\mathbf{e}^4\right)$

$$\mathrm{grad}\,\phi = \sum_{\mu=1}^{4}\frac{\partial\phi}{\partial x^{\mu}}\,\mathbf{e}^{\mu}$$

Gradient względem bazy $\left(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4\right)$

$$\mathbf{e}^{\mu} = g^{\mu\mu}\mathbf{e}_{\mu} = g_{\mu\mu}^{-1}\mathbf{e}_{\mu}$$

$$\mathrm{grad}\,\phi = \sum_{\mu=1}^{4}g_{\mu\mu}^{-1}\frac{\partial\phi}{\partial x^{\mu}}\,\mathbf{e}_{\mu}$$

Gradient względem bazy $\left(\hat{\mathbf{e}}_1,\hat{\mathbf{e}}_2,\hat{\mathbf{e}}_3,\hat{\mathbf{e}}_4\right)$

$$g_{\mu\mu}^{-1} = g_{\mu\mu}^{-\frac{1}{2}}\,g_{\mu\mu}^{-\frac{1}{2}}$$

$$\mathrm{grad}\,\varphi = \sum_{\mu=1}^{4}g_{\mu\mu}^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\mu}}\,g_{\mu\mu}^{-\frac{1}{2}}\,\mathbf{e}_{\mu} = \sum_{\mu=1}^{4}g_{\mu\mu}^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\mu}}\,\hat{\mathbf{e}}_{\mu}$$

Laplasjan funkcji skalarnej Φ

$$\nabla^2\phi = g^{-\frac{1}{2}}\sum_{\mu=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(g_{\mu\mu}^{-1}g^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\phi}{\partial x^{\mu}}\right)$$

Rotacja względem bazy $\left(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\right)$ **w przypadku trójwymiarowym**

$$\mathrm{rot}\mathbf{A} = \sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3}\left(\mathbf{e}^{\mu}\times\mathbf{e}^{\nu}\right)\frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}}$$

$$A_{\nu} = e_{\nu}e_{\nu}A^{\nu} = e_{\nu}\hat{A}^{\nu} = g_{\nu\nu}^{\frac{1}{2}}\hat{A}^{\nu}, \quad \mathbf{e}^{\mu} = e^{\mu}e^{\mu}\mathbf{e}_{\mu} = \frac{\mathbf{e}_{\mu}}{e_{\mu}e_{\mu}} = \frac{\hat{\mathbf{e}}_{\mu}}{e_{\mu}} = g_{\mu\mu}^{-\frac{1}{2}}\hat{\mathbf{e}}_{\mu}, \quad \mathbf{e}^{\nu} = g_{\nu\nu}^{-\frac{1}{2}}\hat{\mathbf{e}}_{\nu}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_2\times\hat{\mathbf{e}}_3 = -\left(\hat{\mathbf{e}}_3\times\hat{\mathbf{e}}_2\right) = \hat{\mathbf{e}}_1, \quad \hat{\mathbf{e}}_3\times\hat{\mathbf{e}}_1 = -\left(\hat{\mathbf{e}}_1\times\hat{\mathbf{e}}_3\right) = \hat{\mathbf{e}}_2, \quad \hat{\mathbf{e}}_1\times\hat{\mathbf{e}}_2 = -\left(\hat{\mathbf{e}}_2\times\hat{\mathbf{e}}_1\right) = \hat{\mathbf{e}}_3$$

$$\hat{\mathbf{e}}_1\times\hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{e}}_2\times\hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{e}}_3\times\hat{\mathbf{e}}_3 = 0$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{A} = g_{\mu\mu}^{-\frac{1}{2}}g_{\nu\nu}^{-\frac{1}{2}}\left(\hat{\mathbf{e}}_{\mu}\times\hat{\mathbf{e}}_{\nu}\right)\frac{\partial\left(g_{\nu\nu}^{\frac{1}{2}}\hat{A}^{\nu}\right)}{\partial x^{\mu}}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{A} = g_{22}^{-\frac{1}{2}}g_{33}^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{\partial\left(g_{33}^{\frac{1}{2}}\hat{A}^3\right)}{\partial x^2}-\frac{\partial\left(g_{22}^{\frac{1}{2}}\hat{A}^2\right)}{\partial x^3}\right]\hat{\mathbf{e}}_1 + g_{33}^{-\frac{1}{2}}g_{11}^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{\partial\left(g_{11}^{\frac{1}{2}}\hat{A}^1\right)}{\partial x^3}-\frac{\partial\left(g_{33}^{\frac{1}{2}}\hat{A}^3\right)}{\partial x^1}\right]\hat{\mathbf{e}}_2 + g_{11}^{-\frac{1}{2}}g_{22}^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{\partial\left(g_{22}^{\frac{1}{2}}\hat{A}^2\right)}{\partial x^1}-\frac{\partial\left(g_{11}^{\frac{1}{2}}\hat{A}^1\right)}{\partial x^2}\right]\hat{\mathbf{e}}_3$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} g_{22}^{-\frac{1}{2}}g_{33}^{-\frac{1}{2}}\hat{\mathbf{e}}_1 & g_{33}^{-\frac{1}{2}}g_{11}^{-\frac{1}{2}}\hat{\mathbf{e}}_2 & g_{11}^{-\frac{1}{2}}g_{22}^{-\frac{1}{2}}\hat{\mathbf{e}}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ g_{11}^{\frac{1}{2}}\hat{A}^1 & g_{22}^{\frac{1}{2}}\hat{A}^2 & g_{33}^{\frac{1}{2}}\hat{A}^3 \end{bmatrix}$$

PRZYKŁAD

W układzie współrzędnych sferycznych

$x^1 = r, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = \varphi, \quad x^4 = x^4$

$g_{11} = g_{rr} = 1, \quad g_{22} = g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{33} = g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2\theta, \quad g_{44} = g_{44} = 1, \quad g^{\frac{1}{2}} = r^2 \sin\theta$

$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{e}_4 = \mathbf{e}_4, \quad A^1 = A^r, \quad A^2 = A^\theta, \quad A^3 = A^\varphi, \quad A^4 = A^4$

$\hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{e}}_r, \quad \hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{e}}_\theta, \quad \hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_\varphi, \quad \hat{\mathbf{e}}_4 = \hat{\mathbf{e}}_4, \quad \hat{A}^1 = \hat{A}^r, \quad \hat{A}^2 = \hat{A}^\theta, \quad \hat{A}^3 = \hat{A}^\varphi, \quad \hat{A}^4 = \hat{A}^4$

Dywergencja wektora kontrawariantnego względem bazy $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_4)$

$$\mathrm{div}\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A^r)}{\partial r} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A^\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial A^\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A^4}{\partial x^4}, \quad \mathbf{A} = A^r\mathbf{e}_r + A^\theta\mathbf{e}_\theta + A^\varphi\mathbf{e}_\varphi + A^4\mathbf{e}_4$$

Dywergencja wektora kontrawariantnego względem bazy $(\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_\theta, \hat{\mathbf{e}}_\varphi, \hat{\mathbf{e}}_4)$

$$\mathrm{div}\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 \hat{A}^r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta \hat{A}^\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \hat{A}^\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial \hat{A}^4}{\partial x^4}, \quad \mathbf{A} = \hat{A}^r\hat{\mathbf{e}}_r + \hat{A}^\theta\hat{\mathbf{e}}_\theta + \hat{A}^\varphi\hat{\mathbf{e}}_\varphi + \hat{A}^4\hat{\mathbf{e}}_4$$

Gradient funkcji skalarnej ϕ **względem bazy** $(\mathbf{e}^r, \mathbf{e}^\theta, \mathbf{e}^\varphi, \mathbf{e}^4)$

$$\mathrm{grad}\,\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\mathbf{e}^r + \frac{\partial\phi}{\partial\theta}\mathbf{e}^\theta + \frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\mathbf{e}^\varphi + \frac{\partial\phi}{\partial x^4}\mathbf{e}^4$$

Gradient funkcji skalarnej ϕ **względem bazy** $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_4)$

$$\mathrm{grad}\,\phi = g_{rr}^{-1}\frac{\partial\phi}{\partial r}\mathbf{e}_r + g_{\theta\theta}^{-1}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + g_{\varphi\varphi}^{-1}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi + g_{44}^{-1}\frac{\partial\phi}{\partial x^4}\mathbf{e}_4$$

$$\mathrm{grad}\,\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial\phi}{\partial x^4}\mathbf{e}_4$$

Gradient funkcji skalarnej ϕ **względem bazy** $(\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_\theta, \hat{\mathbf{e}}_\varphi, \hat{\mathbf{e}}_4)$

$$\mathrm{grad}\,\varphi = g_{rr}^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\hat{\mathbf{e}}_r + g_{\theta\theta}^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta + g_{\varphi\varphi}^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi}\hat{e}_\varphi + \hat{g}_{44}^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial\varphi}{\partial x^4}\hat{\mathbf{e}}_4$$

$$\mathrm{grad}\,\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi}\hat{\mathbf{e}}_\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial x^4}\hat{\mathbf{e}}_4$$

Laplasjan funkcji skalarnej ϕ

$$\nabla^2\phi = g^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial r}\left(g_{rr}^{-1}g^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + g^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(g_{\theta\theta}^{-1}g^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + g^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(g_{\varphi\varphi}^{-1}g^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\right) + g^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial x^4}\left(g_{44}^{-1}g^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\phi}{\partial x^4}\right)$$

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{\mathrm{ctg}\,\theta}{r^2}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + r^2\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial x^4}$$

Rotacja wektora kontrawariantnego względem bazy $(\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_\theta, \hat{\mathbf{e}}_\varphi)$

$$\mathrm{rot}\mathbf{A} = \left[\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\hat{A}^\varphi\sin\theta) - \frac{\partial\hat{A}^\theta}{\partial\varphi}\right)\right]\hat{\mathbf{e}}_r + \left[\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial\hat{A}^r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial r}(r\hat{A}^\varphi)\right)\right]\hat{\mathbf{e}}_\theta +$$

$$+\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial(r\hat{A}^\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\hat{A}^r}{\partial\theta}\right]\hat{\mathbf{e}}_\varphi$$

$$\mathbf{A} = \hat{A}^r\hat{\mathbf{e}}_r + \hat{A}^\theta\hat{\mathbf{e}}_\theta + \hat{A}^\varphi\hat{\mathbf{e}}_\varphi$$

8 ALGEBRA TENSORÓW

- **Dodawanie tensorów**

Dodawać można tensory tego samego typu i rzędu. Sumą tensorów kowariantnych drugiego rzędu $A_{\mu\nu}$ i $B_{\mu\nu}$ nazywamy tensor kowariantny drugiego rzędu $C_{\mu\nu}$

$$C_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} + B_{\mu\nu}.$$

DOWÓD

$$C'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} C_{\alpha\beta}$$

$$A'_{\mu\nu} + B'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} A_{\alpha\beta} + \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} B_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} \left(A_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta}\right)$$

Tensory $C_{\alpha\beta}$ i $\left(A_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta}\right)$ są identyczne.

Sumą tensorów kontrawariantnych drugiego rzędu $A^{\mu\nu}$ i $B^{\mu\nu}$ nazywamy tensor kontrawariantny drugiego rzędu $C^{\mu\nu}$

$$C^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} + B^{\mu\nu}.$$

Sumą tensorów mieszanych drugiego rzędu A^{μ}_{ν} i B^{μ}_{ν} nazywamy tensor mieszany drugiego rzędu C^{μ}_{ν}

$$C^{\mu}_{\nu} = A^{\mu}_{\nu} + B^{\mu}_{\nu}.$$

Sumy tensorów innych typów i rzędów definiuje się analogicznie.

- **Mnożenie tensorów**

Iloczynem tensorów $A_{\alpha_1\alpha_2}$ i $B_{\alpha_3\alpha_4}$ nazywamy tensor $C_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}$

$$C_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} = A_{\alpha_1\alpha_2} B_{\alpha_3\alpha_4}.$$

DOWÓD

$$C'_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} = \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\alpha_1}} \frac{\partial x^{\beta_2}}{\partial x'^{\alpha_2}} \frac{\partial x^{\beta_3}}{\partial x'^{\alpha_3}} \frac{\partial x^{\beta_4}}{\partial x'^{\alpha_4}} C_{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4}$$

$$A'_{\alpha_1\alpha_2} B'_{\alpha_3\alpha_4} = \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\alpha_1}} \frac{\partial x^{\beta_2}}{\partial x'^{\alpha_2}} A_{\beta_1\beta_2} \frac{\partial x^{\beta_3}}{\partial x'^{\alpha_3}} \frac{\partial x^{\beta_4}}{\partial x'^{\alpha_4}} B_{\beta_3\beta_4} = \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\alpha_1}} \frac{\partial x^{\beta_2}}{\partial x'^{\alpha_2}} \frac{\partial x^{\beta_3}}{\partial x'^{\alpha_3}} \frac{\partial x^{\beta_4}}{\partial x'^{\alpha_4}} A_{\beta_1\beta_2} B_{\beta_3\beta_4}$$

Tensor $C_{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4}$ jest identyczny z tensorem $A_{\beta_1\beta_2} B_{\beta_3\beta_4}$.

A oto inne przykłady iloczynów tensorów.

$$C^{\alpha_3\alpha_4}_{\alpha_1\alpha_2} = A_{\alpha_1\alpha_2} B^{\alpha_3\alpha_4}$$

$$C^{\alpha_1\alpha_3}_{\alpha_2\alpha_4} = A^{\alpha_1}_{\alpha_2} B^{\alpha_3}_{\alpha_4}$$

- **Zwężanie (kontrakcja) tensorów**

Zwężanie (kontrakcja) tensorów jest operacją wykonywaną na tensorach mieszanych rzędu niemniejszego niż dwa polegającą na przyrównaniu dwóch wskaźników jednego górnego i jednego dolnego, co prowadzi do obniżenia rzędu zwężanego tensora o dwa. Poniżej zilustrowaliśmy kontrakcję tensora mieszanego czwartego rzędu.

$$T^{\alpha}_{\beta\mu\nu} \xrightarrow{\alpha=\beta} T^{\alpha}_{\alpha\mu\nu} = T_{\mu\nu}$$

$$T'^{\mu_1}_{\nu_1\nu_2\nu_3}=\frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}}\frac{\partial x^{\beta_2}}{\partial x'^{\nu_2}}\frac{\partial x^{\beta_3}}{\partial x'^{\nu_3}}T^{\alpha_1}_{\beta_1\beta_2\beta_3}$$

$$\mu_1=\nu_1$$

$$T'^{\nu_1}_{\nu_1\nu_2\nu_3}=\frac{\partial x'^{\nu_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}}\frac{\partial x^{\beta_2}}{\partial x'^{\nu_2}}\frac{\partial x^{\beta_3}}{\partial x'^{\nu_3}}T^{\alpha_1}_{\beta_1\beta_2\beta_3}$$

$$\frac{\partial x'^{\nu_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}}=\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x^{\alpha_1}}=\delta^{\beta_1}_{\alpha_1}$$

$$T'^{\nu_1}_{\nu_1\nu_2\nu_3}=\delta^{\beta_1}_{\alpha_1}\frac{\partial x^{\beta_2}}{\partial x'^{\nu_2}}\frac{\partial x^{\beta_3}}{\partial x'^{\nu_3}}T^{\alpha_1}_{\beta_1\beta_2\beta_3}=\frac{\partial x^{\beta_2}}{\partial x'^{\nu_2}}\frac{\partial x^{\beta_3}}{\partial x'^{\nu_3}}T^{\beta_1}_{\beta_1\beta_2\beta_3}$$

$$T'^{\nu_1}_{\nu_1\nu_2\nu_3}=\frac{\partial x^{\beta_2}}{\partial x'^{\nu_2}}\frac{\partial x^{\beta_3}}{\partial x'^{\nu_3}}T^{\beta_1}_{\beta_1\beta_2\beta_3}$$

Tensory $T'^{\nu_1}_{\nu_1\nu_2\nu_3}$ i $T^{\beta_1}_{\beta_1\beta_2\beta_3}$ formalnie są identyczne z tensorami odpowiednio $T'_{\nu_2\nu_3}$ i $T_{\beta_2\beta_3}$.

$$\boxed{T'_{\nu_2\nu_3}=\frac{\partial x^{\beta_2}}{\partial x'^{\nu_2}}\frac{\partial x^{\beta_3}}{\partial x'^{\nu_3}}T_{\beta_2\beta_3}}$$

PRZYKŁAD

Kontrakcja tensora mieszanego drugiego rzędu T^{μ}_{ν} daje ślad tego tensora $\sum_{\mu=1}^{4}T^{\mu}_{\mu}$.

- **Obniżanie i podnoszenie wskaźników**

Obniżanie wskaźników jest operacją umożliwiającą zmianę typu składowych tensora zawierającego co najmniej jeden wskaźnik górny poprzez kontrakcję iloczynu kowariantnego tensora metrycznego z danym tensorem.

$$\boxed{g_{\nu_1\mu_1}T^{\mu_1}_{\nu_2\nu_3}=T^{\mu_1}_{\nu_1\mu_1\nu_2\nu_3}=T_{\nu_1\nu_2\nu_3}}$$

DOWÓD

$$g'_{\nu_1\mu_1}T'^{\mu_1}_{\nu_2\nu_3}=\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}}\frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial x'^{\mu_1}}g_{\beta_1\alpha_1}\frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\frac{\partial x^{\beta_2}}{\partial x'^{\nu_2}}\frac{\partial x^{\beta_3}}{\partial x'^{\nu_3}}T^{\alpha_1}_{\beta_2\beta_3}=\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}}\frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x'^{\mu_1}}\frac{\partial x^{\beta_2}}{\partial x'^{\nu_2}}\frac{\partial x^{\beta_3}}{\partial x'^{\nu_3}}g_{\beta_1\alpha_1}T^{\alpha_1}_{\beta_2\beta_3}=$$

$$=\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}}\frac{\partial x^{\beta_2}}{\partial x'^{\nu_2}}\frac{\partial x^{\beta_3}}{\partial x'^{\nu_3}}g_{\beta_1\alpha_1}T^{\alpha_1}_{\beta_2\beta_3}$$

$T'_{\nu_1\nu_2\nu_3}=\dfrac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}}\dfrac{\partial x^{\beta_2}}{\partial x'^{\nu_2}}\dfrac{\partial x^{\beta_3}}{\partial x'^{\nu_3}}T_{\beta_1\beta_2\beta_3}$. Tensor $T_{\beta_1\beta_2\beta_3}$ jest identyczny z tensorem $g_{\beta_1\alpha_1}T^{\alpha_1}_{\beta_2\beta_3}$.

Podnoszenie wskaźników jest operacją umożliwiającą zmianę typu składowych tensora zawierającego co najmniej jeden wskaźnik dolny poprzez kontrakcję iloczynu kontrawariantnego tensora metrycznego z danym tensorem.

$$\boxed{g^{\nu_1\mu_1}T_{\nu_1\nu_2\nu_3}=T^{\nu_1\mu_1}_{\nu_1\nu_2\nu_3}=T^{\mu_1}_{\nu_2\nu_3}}$$

DOWÓD

$$g'^{\nu_1\mu_1}T'_{\nu_1\nu_2\nu_3}=\frac{\partial x'^{\nu_1}}{\partial x^{\beta_1}}\frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}}g^{\beta_1\alpha_1}\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}}\frac{\partial x^{\beta_2}}{\partial x'^{\nu_2}}\frac{\partial x^{\beta_3}}{\partial x'^{\nu_3}}T_{\beta_1\beta_2\beta_3}=\frac{\partial x'^{\nu_1}}{\partial x'^{\nu_1}}\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x^{\beta_1}}\frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\frac{\partial x^{\beta_2}}{\partial x'^{\nu_2}}\frac{\partial x^{\beta_3}}{\partial x'^{\nu_3}}g^{\beta_1\alpha_1}T_{\beta_1\beta_2\beta_3}=$$

$$=\frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\frac{\partial x^{\beta_2}}{\partial x'^{\nu_2}}\frac{\partial x^{\beta_3}}{\partial x'^{\nu_3}}g^{\beta_1\alpha_1}T_{\beta_1\beta_2\beta_3}$$

$T'^{\mu_1}_{\nu_2\nu_3}=\dfrac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\dfrac{\partial x^{\beta_2}}{\partial x'^{\nu_2}}\dfrac{\partial x^{\beta_3}}{\partial x'^{\nu_3}}T^{\alpha_1}_{\beta_2\beta_3}$. Tensor $g^{\beta_1\alpha_1}T_{\beta_1\beta_2\beta_3}$ jest identyczny z tensorem $T^{\alpha_1}_{\beta_2\beta_3}$.

A oto przykłady operacji zmiany położenia wskaźników.

$$g_{\mu\nu}T^{\nu} = T_{\mu\nu}^{\nu} = T_{\mu}$$
$$g^{\mu\nu}T_{\nu} = T_{\nu}^{\mu\nu} = T^{\mu}$$
$$g_{\sigma\nu}T^{\mu\nu} = T_{\sigma\nu}^{\mu\nu} = T_{\sigma}^{\mu}$$
$$g^{\sigma\nu}T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{\sigma\nu} = T_{\mu}^{\sigma}$$
$$g_{\alpha\sigma}T_{\beta}^{\sigma} = T_{\alpha\sigma\beta}^{\sigma} = T_{\alpha\beta}$$
$$g^{\alpha\sigma}T_{\sigma}^{\beta} = T_{\sigma}^{\alpha\sigma\beta} = T^{\alpha\beta}$$
$$g^{\alpha\lambda}T_{\lambda\beta\mu\nu} = T_{\beta\mu\nu}^{\alpha}$$

- **Zamiana składowych kontrawariantnych na kowariantne i vice versa**

Poznane wcześniej relacje pozwalają na zamianę składowych kontrawariantnych na kowariantne i vice versa.

$$A_{\mu} = \sum_{\nu=1}^{4} g_{\mu\nu}A^{\nu}$$
$$A^{\mu} = \sum_{\nu=1}^{4} g^{\mu\nu}A_{\nu}$$
$$g_{\mu\alpha}g_{\beta\nu}T^{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}T_{\beta\nu}^{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}T_{\beta}^{\mu} = T_{\mu\alpha\beta}^{\mu} = T_{\alpha\beta}$$
$$g^{\mu\alpha}g^{\beta\nu}T_{\mu\nu} = g^{\mu\alpha}T_{\mu\nu}^{\beta\nu} = g^{\mu\alpha}T_{\mu}^{\beta} = T_{\mu}^{\mu\alpha\beta} = T^{\alpha\beta}$$

W ortogonalnym układzie współrzędnych

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{44} \end{bmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} g^{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g^{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g^{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g^{44} \end{bmatrix}$$

$$g^{11} = \frac{1}{g_{11}}, \quad g^{22} = \frac{1}{g_{22}}, \quad g^{33} = \frac{1}{g_{33}}, \quad g^{44} = \frac{1}{g_{44}}$$
$$A_1 = g_{11}A^1, \quad A_2 = g_{22}A^2, \quad A_3 = g_{33}A^3, \quad A_4 = g_{44}A^4$$
$$A^1 = g^{11}A_1, \quad A^2 = g^{22}A_2, \quad A^3 = g^{33}A_3, \quad A^4 = g^{44}A_4$$

W ortonormalnym układzie współrzędnych

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = A^1, \quad A_2 = A^2, \quad A_3 = A^3, \quad A_4 = A^4$$

nie ma różnicy między składowymi kowariantnymi i kontrawariantnymi wektora.

- **Operacja symetryzowania**

Tensor otrzymany wskutek symetryzowania będziemy oznaczali przez $T_{(\alpha_1 \dots \alpha_m)}$. Każdą składową $T_{(\alpha_1 \dots \alpha_m)}$ tworzymy, sumując $m!$ składowych uzyskanych z wyjściowego tensora $T_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}$ poprzez permutacje indeksów $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$.

$$T_{(\alpha_1 \dots \alpha_m)} = \frac{1}{m!}\left(T_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m} + \dots + T_{\alpha_m \dots \alpha_2 \alpha_1}\right).$$

Tensor $T_{(\alpha_1 \dots \alpha_m)}$ jest tensorem symetrycznym. Operacja symetryzowania może być stosowana tylko do indeksów jednego rodzaju.

PRZYKŁAD

$$T_{(\alpha_1 \alpha_2)} = \frac{1}{2!}\left(T_{\alpha_1 \alpha_2} + T_{\alpha_2 \alpha_1}\right)$$

$$T_{(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)} = \frac{1}{3!}\left(T_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} + T_{\alpha_1 \alpha_3 \alpha_2} + T_{\alpha_2 \alpha_1 \alpha_3} + T_{\alpha_2 \alpha_3 \alpha_1} + T_{\alpha_3 \alpha_1 \alpha_2} + T_{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}\right)$$

$$T_{(\alpha_1 \alpha_2)\alpha_3} = \frac{1}{2!}\left(T_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} + T_{\alpha_2 \alpha_1 \alpha_3}\right)$$

$$T_{\alpha_1(\alpha_2 \alpha_3)} = \frac{1}{2!}\left(T_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} + T_{\alpha_1 \alpha_3 \alpha_2}\right)$$

$$T_{(\alpha_1|\alpha_2|\alpha_3)} = \frac{1}{2!}\left(T_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} + T_{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}\right)$$

Symbol $(\alpha_1|\alpha_2|\alpha_3)$ oznacza, że operacja symetryzowowania nie dotyczy indeksu α_2.

- **Operacja alternowania**

Tensor powstały przez alternowanie oznaczany jest jako $T_{[\alpha_1 \dots \alpha_m]}$. Konstruujemy go tak jak poprzednio, z tą różnicą, że składowe o parzystej permutacji indeksów opatrujemy znakiem plus, a składowe o nieparzystej permutacji indeksów poprzedzamy znakiem minus.

$$T_{[\alpha_1 \dots \alpha_m]} = \frac{1}{m!}\left(T_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m} - T_{\alpha_2 \alpha_1 \dots \alpha_m} + \dots\right)$$

Tensor $T_{[\alpha_1 \dots \alpha_m]}$ jest tensorem antysymetrycznym.

Dzielenie przez $m!$ nie jest konieczne, ale wygodne.

PRZYKŁAD

$$T_{[\alpha_1 \alpha_2]} = \frac{1}{2!}\left(T_{\alpha_1 \alpha_2} - T_{\alpha_2 \alpha_1}\right)$$

$$T_{[\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3]} = \frac{1}{3!}\left(T_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} - T_{\alpha_1 \alpha_3 \alpha_2} - T_{\alpha_2 \alpha_1 \alpha_3} + T_{\alpha_2 \alpha_3 \alpha_1} + T_{\alpha_3 \alpha_1 \alpha_2} - T_{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}\right)$$

$$T_{[\alpha_1 \alpha_2]\alpha_3} = \frac{1}{2!}\left(T_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} - T_{\alpha_2 \alpha_1 \alpha_3}\right)$$

$$T_{\alpha_1[\alpha_2 \alpha_3]} = \frac{1}{2!}\left(T_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} - T_{\alpha_1 \alpha_3 \alpha_2}\right)$$

$$T_{[\alpha_1|\alpha_2|\alpha_3]} = \frac{1}{2!}\left(T_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} - T_{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}\right)$$

Symbol $[\alpha_1|\alpha_2|\alpha_3]$ oznacza, że operacja alternowania nie dotyczy indeksu α_2.

9 ANALIZA TENSORÓW

- **Symbole Christoffela pierwszego i drugiego rodzaju**

Symbole Christoffela pierwszego i drugiego rodzaju oznaczane odpowiednio przez $\left[{\mu\,\nu \atop \alpha}\right]$ i $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ są trójskładnikowymi symbolami niezwykle przydatnymi przy definiowaniu tensora krzywizny. Symbole Cristoffela pierwszego rodzaju wyrazimy przez pochodne składowych tensora metrycznego, a symbole Christoffela drugiego rodzaju przez składowe tensora metrycznego i jego pochodne. Z definicji mamy

$$\boxed{\left[{\mu\,\nu \atop \alpha}\right] \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\right)}$$

Symbole Christoffela pierwszego rodzaju

$$\boxed{\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{4} g^{\sigma\alpha}\left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\right)}$$

Symbole Christoffela drugiego rodzaju

Używane są także inne oznaczenia symboli Christoffela.

$$\left[{\mu\,\nu \atop \alpha}\right] = [\mu\,\nu,\alpha] = \Gamma_{\mu\,\nu,\alpha}$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \{\mu\nu,\alpha\} = \left\{{\alpha \atop \mu\,\nu}\right\} = \left\{{\mu\,\nu \atop \alpha}\right\}$$

Symbole Christoffela posiadają następujące własności:

$$\left[{\mu\,\nu \atop \alpha}\right] = \left[{\nu\,\mu \atop \alpha}\right]$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}$$

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \sum_{\alpha=1}^{4} g^{\sigma\alpha}\left[{\mu\,\nu \atop \alpha}\right]$$

$$\left[{\mu\,\nu \atop \beta}\right] = \sum_{\sigma=1}^{4} g_{\beta\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$$

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\beta}} = \left[{\nu\,\beta \atop \mu}\right] + \left[{\mu\,\beta \atop \nu}\right] = \sum_{\alpha} g_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} + \sum_{\alpha} g_{\nu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}$$

Powyższe własności wynikają z definicji symboli Christoffela, symetryczności tensora metrycznego $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ oraz relacji $\sum_{\sigma=1}^{4} g_{\beta\sigma}g^{\sigma\alpha} = \delta^{\alpha}_{\beta}$.

TWIERDZENIE

W układzie współrzędnych krzywoliniowych x^1, x^2, x^3, x^4 różniczki wektorów bazowych lokalnych układów

$$\mathbf{e}_{\mu} = \mathbf{e}_{\mu}(x^1, x^2, x^3, x^4), \quad \mu = 1,2,3,4$$

dane są przez

$$\boxed{d\mathbf{e}_{\mu} = \sum_{\beta=1}^{4} \frac{\partial \mathbf{e}_{\mu}}{\partial x^{\beta}} dx^{\beta} = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4} \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} dx^{\beta} \mathbf{e}_{\alpha}}$$

DOWÓD

Dla dowodu należy wykazać, że $\sum_{\alpha=1}^{4}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\mathbf{e}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{e}_\mu}{\partial x^\beta}$.

$$\sum_{\alpha=1}^{4}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\mathbf{e}_\alpha =$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{4} g^{\alpha\nu}\left(\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\nu}\right)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{4}\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{4} g^{\alpha\nu}\left(\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\nu}\right)\mathbf{e}_\alpha =$$

$$g^{\alpha\nu} = \mathbf{e}^\alpha\cdot\mathbf{e}^\nu,\quad g_{\beta\nu} = \mathbf{e}_\beta\cdot\mathbf{e}_\nu,\quad g_{\nu\mu} = \mathbf{e}_\nu\cdot\mathbf{e}_\mu,\quad g_{\mu\beta} = \mathbf{e}_\mu\cdot\mathbf{e}_\beta$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4}\left(\mathbf{e}^\alpha\cdot\mathbf{e}^\nu\right)\left[\frac{\partial(\mathbf{e}_\beta\cdot\mathbf{e}_\nu)}{\partial x^\mu} + \frac{\partial(\mathbf{e}_\nu\cdot\mathbf{e}_\mu)}{\partial x^\beta} - \frac{\partial(\mathbf{e}_\mu\cdot\mathbf{e}_\beta)}{\partial x^\nu}\right]\mathbf{e}_\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4}\left(\mathbf{e}^\alpha\cdot\mathbf{e}^\nu\right)\left[\frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^\mu}\cdot\mathbf{e}_\nu + \frac{\partial \mathbf{e}_\nu}{\partial x^\mu}\cdot\mathbf{e}_\beta + \frac{\partial \mathbf{e}_\nu}{\partial x^\beta}\cdot\mathbf{e}_\mu + \frac{\partial \mathbf{e}_\mu}{\partial x^\beta}\cdot\mathbf{e}_\nu - \frac{\partial \mathbf{e}_\mu}{\partial x^\nu}\cdot\mathbf{e}_\beta - \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^\nu}\cdot\mathbf{e}_\mu\right]\mathbf{e}_\alpha =$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \mathbf{e}_\mu}{\partial x^\beta},\quad \frac{\partial \mathbf{e}_\nu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \mathbf{e}_\mu}{\partial x^\nu},\quad \frac{\partial \mathbf{e}_\nu}{\partial x^\beta} = \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^\nu}$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4}\left(\mathbf{e}^\alpha\cdot\mathbf{e}^\nu\right)\left(\frac{\partial \mathbf{e}_\mu}{\partial x^\beta}\cdot\mathbf{e}_\nu\right)\mathbf{e}_\alpha =$$

Dalszą część dowodu pozostawiamy czytelnikowi.

$$= \frac{\partial \mathbf{e}_\mu}{\partial x^\beta}$$

WNIOSEK

W prostoliniowych układach współrzędnych, czyli układach dla których $d\mathbf{e}_\mu = 0 \ (\mu = 1,2,3,4)$, symbole Christoffela pierwszego i drugiego rodzaju są równe zeru.

- **Kontrakcja symboli Christoffela drugiego rodzaju**

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{4} g^{\sigma\alpha}\left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right)$$

$$\sum_\nu\sum_\alpha g^{\nu\alpha}\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} = \sum_\nu\sum_\alpha g^{\alpha\nu}\frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^\alpha}$$

zamieniliśmy rolami ślepe wskaźniki

$$g^{\nu\alpha} = g^{\alpha\nu}$$

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$$

$$\sum_\nu\sum_\alpha g^{\nu\alpha}\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \ln g}{\partial x^\mu}$$

$$g = \det\left[g_{\mu\nu}\right]$$

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{4} g^{\sigma\alpha}\left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right)$$

$$\sigma = \nu$$

$$\sum_{\nu=1}^{4}\Gamma^{\nu}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sum_\nu\sum_\alpha g^{\nu\alpha}\left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right)$$

$$\sum_{\nu=1}^{4}\Gamma^{\nu}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sum_\nu\sum_\alpha g^{\nu\alpha}\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} = \frac{1}{2}\frac{\partial \ln g}{\partial x^\mu} =$$

$$= \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \frac{1}{2}\ln g}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \ln g^{\frac{1}{2}}}{\partial x^\mu} = g^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial g^{\frac{1}{2}}}{\partial x^\mu}$$

- **Własności transformacyjne symboli Christoffela pierwszego rodzaju**

$$\left[{\mu\,\nu \atop \alpha}\right]' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g'_{\nu\alpha}}{\partial x'^{\mu}} + \frac{\partial g'_{\alpha\mu}}{\partial x'^{\nu}} - \frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x'^{\alpha}}\right)$$

$$g'_{\nu\alpha} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}} g_{\lambda\beta}\,, \quad g'_{\alpha\mu} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\mu}} g_{\beta\kappa}\,, \quad g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}} g_{\kappa\lambda}$$

$$\frac{\partial g'_{\nu\alpha}}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial^2 x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}} g_{\lambda\beta} + \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}\partial x'^{\mu}} g_{\lambda\beta} + \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x^{\kappa}}\frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\mu}} =$$

$$\frac{\partial g'_{\alpha\mu}}{\partial x'^{\nu}} = \frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\mu}} g_{\beta\kappa} + \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial^2 x^{\kappa}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}} g_{\beta\kappa} + \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial g'_{\beta\kappa}}{\partial x^{\lambda}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}} =$$

$$= \frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\mu}} g_{\beta\kappa} + \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial^2 x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}} g_{\beta\lambda} + \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial g'_{\beta\kappa}}{\partial x^{\lambda}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}}$$

$$\frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x'^{\alpha}} = \frac{\partial^2 x^{\kappa}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}} g_{\kappa\lambda} + \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial^2 x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}\partial x'^{\alpha}} g_{\kappa\lambda} + \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial g_{\kappa\lambda}}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}} =$$

$$= \frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}} g_{\beta\lambda} + \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}\partial x'^{\alpha}} g_{\kappa\beta} + \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial g_{\kappa\lambda}}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}}$$

$$g_{\lambda\beta} = g_{\beta\lambda}\,, \quad g_{\beta\kappa} = g_{\kappa\beta}$$

$$\left[{\mu\,\nu \atop \alpha}\right]' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x^{\kappa}} + \frac{\partial g_{\beta\kappa}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial g_{\kappa\lambda}}{\partial x^{\beta}}\right)\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}} + g_{\lambda\beta}\frac{\partial^2 x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}}$$

$$\left[{\kappa\,\lambda \atop \beta}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x^{\kappa}} + \frac{\partial g_{\beta\kappa}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial g_{\kappa\lambda}}{\partial x^{\beta}}\right)$$

$$\boxed{\left[{\mu\,\nu \atop \alpha}\right]' = \left[{\kappa\,\lambda \atop \beta}\right]\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}} + g_{\lambda\beta}\frac{\partial^2 x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}}}$$

Symbole Christoffela pierwszego rodzaju nie są składowymi tensora.

- **Własności transformacyjne symboli Christoffela drugiego rodzaju**

$$\Gamma'^{\sigma}_{\mu\nu} = g'^{\sigma\alpha}\left[{\mu\,\nu \atop \alpha}\right]'$$

$$g'^{\sigma\alpha} = \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\omega}}\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} g^{\omega\beta}, \quad g_{\lambda\beta} = g_{\beta\lambda}\,, \quad g^{\omega\beta} g_{\beta\lambda} = g^{\omega}_{\lambda} = \delta^{\omega}_{\lambda}$$

$$\Gamma'^{\sigma}_{\mu\nu} = g^{\omega\beta}\left[{\kappa\,\lambda \atop \beta}\right]\frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\omega}} + \frac{\partial^2 x^{\omega}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\omega}}$$

$$\Gamma^{\omega}_{\kappa\lambda} = g^{\omega\beta}\left[{\kappa\,\lambda \atop \beta}\right]$$

$$\boxed{\Gamma'^{\sigma}_{\mu\nu} = \Gamma^{\omega}_{\kappa\lambda}\frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\omega}} + \frac{\partial^2 x^{\omega}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\omega}}}$$

Symbole Christoffela drugiego rodzaju nie są składowymi tensora.

Jeżeli układ współrzędnych $\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right)$ jest prostoliniowy, to $\left[{\kappa\,\lambda \atop \beta}\right] = 0$ i $\Gamma^{\omega}_{\kappa\lambda} = 0$. Wzory transformacyjne wtedy znacznie się upraszczają.

$$g^{\nu\alpha} = \mathbf{e}^{\nu}\mathbf{e}^{\alpha}$$
$$g_{\nu\alpha} = \mathbf{e}_{\nu}\mathbf{e}_{\alpha}$$
$$\mathbf{e}^{\alpha}\mathbf{e}_{\nu} = \delta^{\alpha}_{\nu}$$
$$\mathbf{e}^{\nu}\mathbf{e}_{\alpha} = \delta^{\nu}_{\alpha}$$
$$\frac{\partial \mathbf{e}_{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial \mathbf{e}_{\nu}}{\partial x^{\mu}}$$

$$\sum_{\nu=1}^{4}\Gamma^{\nu}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{4}\sum_{\alpha=1}^{4} g^{\nu\alpha}\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{4}\sum_{\alpha=1}^{4}\mathbf{e}^{\nu}\mathbf{e}^{\alpha}\frac{\partial(\mathbf{e}_{\nu}\mathbf{e}_{\alpha})}{\partial x^{\mu}} = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{4}\sum_{\alpha=1}^{4}\left(\mathbf{e}^{\nu}\mathbf{e}^{\alpha}\mathbf{e}_{\nu}\frac{\partial \mathbf{e}_{\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \mathbf{e}^{\nu}\mathbf{e}^{\alpha}\mathbf{e}_{\alpha}\frac{\partial \mathbf{e}_{\nu}}{\partial x^{\mu}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{4}\sum_{\alpha=1}^{4}\left(\delta^{\alpha}_{\nu}\mathbf{e}^{\nu}\frac{\partial \mathbf{e}_{\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \delta^{\nu}_{\alpha}\mathbf{e}^{\alpha}\frac{\partial \mathbf{e}_{\nu}}{\partial x^{\mu}}\right) = \sum_{\nu=1}^{4}\mathbf{e}^{\nu}\frac{\partial \mathbf{e}_{\nu}}{\partial x^{\mu}}$$

$$\boxed{\sum_{\nu=1}^{4}\Gamma^{\nu}_{\mu\nu} = \sum_{\nu=1}^{4}\mathbf{e}^{\nu}\frac{\partial \mathbf{e}_{\nu}}{\partial x^{\mu}} \quad = \quad \sum_{\nu=1}^{4}\mathbf{e}^{\nu}\frac{\partial \mathbf{e}_{\mu}}{\partial x^{\nu}}}$$

Wyznaczymy teraz wielkość $\sum_{\alpha=1}^{4}\Gamma^{\beta}_{\alpha\alpha}$.

$$\Gamma^{\beta}_{\alpha\lambda} = \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{4} g^{\beta\mu}\left(\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\mu}}\right)$$

$$\alpha = \lambda$$

$$\sum_{\alpha=1}^{4}\Gamma^{\beta}_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\mu=1}^{4} g^{\beta\mu}\left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x^{\mu}}\right)$$

$$g_{\alpha\mu} = g_{\mu\alpha}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{4}\Gamma^{\beta}_{\alpha\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\mu=1}^{4} g^{\beta\mu}\left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x^{\mu}}\right)$$

$$g_{\alpha\mu} = \mathbf{e}_{\alpha}\cdot\mathbf{e}_{\mu}, \quad g_{\alpha\alpha} = \mathbf{e}_{\alpha}\cdot\mathbf{e}_{\alpha}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{4}\Gamma^{\beta}_{\alpha\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\mu=1}^{4} g^{\beta\mu}\left(\frac{\partial(\mathbf{e}_{\alpha}\cdot\mathbf{e}_{\mu})}{\partial x^{\alpha}} - \frac{1}{2}\frac{\partial(\mathbf{e}_{\alpha}\cdot\mathbf{e}_{\alpha})}{\partial x^{\mu}}\right)$$

$$\sum_{\alpha=1}^{4}\Gamma^{\beta}_{\alpha\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\mu=1}^{4} g^{\beta\mu}\left(\mathbf{e}_{\mu}\frac{\partial \mathbf{e}_{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \mathbf{e}_{\alpha}\frac{\partial \mathbf{e}_{\mu}}{\partial x^{\alpha}} - \mathbf{e}_{\alpha}\frac{\partial \mathbf{e}_{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\right)$$

$$g^{\beta\mu} = \mathbf{e}^{\beta}\mathbf{e}^{\mu}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{4}\Gamma^{\beta}_{\alpha\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\mu=1}^{4}\left(\mathbf{e}^{\beta}\mathbf{e}^{\mu}\mathbf{e}_{\mu}\frac{\partial \mathbf{e}_{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \mathbf{e}^{\beta}\mathbf{e}^{\mu}\mathbf{e}_{\alpha}\frac{\partial \mathbf{e}_{\mu}}{\partial x^{\alpha}} - \mathbf{e}^{\beta}\mathbf{e}^{\mu}\mathbf{e}_{\alpha}\frac{\partial \mathbf{e}_{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\right) =$$

$$\mathbf{e}^{\mu}\cdot\mathbf{e}_{\mu} = 1, \quad \mathbf{e}^{\mu}\cdot\mathbf{e}_{\alpha} = \delta^{\mu}_{\alpha}$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\mu=1}^{4}\left(\mathbf{e}^{\beta}\frac{\partial \mathbf{e}_{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \mathbf{e}^{\beta}\delta^{\mu}_{\alpha}\frac{\partial \mathbf{e}_{\mu}}{\partial x^{\alpha}} - \mathbf{e}^{\beta}\delta^{\mu}_{\alpha}\frac{\partial \mathbf{e}_{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\right)$$

$$\sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\mu=1}^{4}\left(\mathbf{e}^{\beta}\delta^{\mu}_{\alpha}\frac{\partial \mathbf{e}_{\mu}}{\partial x^{\alpha}} - \mathbf{e}^{\beta}\delta^{\mu}_{\alpha}\frac{\partial \mathbf{e}_{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\right) = 0$$

$$\boxed{\sum_{\alpha=1}^{4}\Gamma^{\beta}_{\alpha\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\mu=1}^{4}\mathbf{e}^{\beta}\frac{\partial \mathbf{e}_{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}}$$

PRZYKŁAD
Druga różniczka promienia wodzącego w trójwymiarowym lokalnym układzie odpowiadającym współrzędnym sferycznym

$$x = r\cos\varphi\sin\theta\,,\quad y = r\sin\varphi\sin\theta\,,\quad z = r\cos\theta$$

$$\mathbf{R} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z = r\cos\varphi\sin\theta\mathbf{e}_x + r\sin\varphi\sin\theta\mathbf{e}_y + r\cos\theta\mathbf{e}_z$$

$$x^1 = r\,,\quad x^2 = \theta\,,\quad x^3 = \varphi$$

W dalszych rachunkach potrzebne będą: różniczka promienia wodzącego i jej kwadrat, składowe kowariantne i kontrawariantne tensora metrycznego oraz symbole Christoffela pierwszego i drugiego rodzaju.

$$d\mathbf{R} = \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial x}dx + \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial y}dy + \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial z}dz = dx\,\mathbf{e}_x + dy\,\mathbf{e}_y + dz\,\mathbf{e}_z$$

$$d\mathbf{R} = \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial r}dr + \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\varphi}d\varphi = dr\,\mathbf{e}_r + d\theta\,\mathbf{e}_\theta + d\varphi\,\mathbf{e}_\varphi$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{R} = {} & dr\left(\cos\varphi\sin\theta\mathbf{e}_x + \sin\varphi\sin\theta\mathbf{e}_y + \cos\theta\mathbf{e}_z\right) + \\ & + d\theta\left(r\cos\varphi\cos\theta\mathbf{e}_x + r\sin\varphi\cos\theta\mathbf{e}_y - r\sin\theta\mathbf{e}_z\right) + \\ & + d\varphi\left(-r\sin\varphi\sin\theta\mathbf{e}_x + r\cos\varphi\sin\theta\mathbf{e}_y\right) \end{aligned}$$

$$d\mathbf{R}\cdot d\mathbf{R} = dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2 = g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2$$

$$g_{11} = g_{rr} = 1\,,\quad g_{22} = g_{\theta\theta} = r^2\,,\quad g_{33} = g_{\varphi\varphi} = r^2\sin^2\theta$$

$$g^{11} = g^{rr} = 1\,,\quad g^{22} = g^{\theta\theta} = r^{-2}\,,\quad g^{33} = g^{\varphi\varphi} = r^{-2}\sin^{-2}\theta$$

$$\left[{2\,2 \atop 1}\right] = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = -r\,,\quad \left[{3\,3 \atop 1}\right] = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} = -r\sin^2\theta\,,\quad \left[{3\,3 \atop 2}\right] = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} = -r^2\sin\theta\cos\theta$$

$$\left[{1\,2 \atop 2}\right] = \left[{2\,1 \atop 2}\right] = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = r\,,\quad \left[{1\,3 \atop 3}\right] = \left[{3\,1 \atop 3}\right] = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} = r\sin^2\theta\,,\quad \left[{2\,3 \atop 3}\right] = \left[{3\,2 \atop 3}\right] = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} = r^2\sin\theta\cos\theta$$

$$\Gamma^1_{22} = g^{11}\left[{2\,2 \atop 1}\right] = -r\,,\quad \Gamma^1_{33} = g^{11}\left[{3\,3 \atop 1}\right] = -r\sin^2\theta\,,\quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = g^{22}\left[{1\,2 \atop 2}\right] = r^{-1}$$

$$\Gamma^2_{33} = g^{22}\left[{3\,3 \atop 2}\right] = -\sin\theta\cos\theta\,,\quad \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = g^{33}\left[{1\,3 \atop 3}\right] = r^{-1}\,,\quad \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = g^{33}\left[{2\,3 \atop 3}\right] = \operatorname{ctg}\theta$$

$$d^2\mathbf{R} = d\left(dr\cdot\mathbf{e}_r + d\theta\cdot\mathbf{e}_\theta + d\varphi\cdot\mathbf{e}_\varphi\right) = d^2r\cdot\mathbf{e}_r + dr\cdot d\mathbf{e}_r + d^2\theta\cdot\mathbf{e}_\theta + d\theta\cdot d\mathbf{e}_\theta + d^2\varphi\cdot\mathbf{e}_\varphi + d\varphi\cdot d\mathbf{e}_\varphi$$

$$d\mathbf{e}_\mu = \Gamma^\alpha_{\mu\nu}dx^\nu\mathbf{e}_\alpha$$

$$d\mathbf{e}_r = d\mathbf{e}_1 = 2\Gamma^2_{12}dx^2\mathbf{e}_2 + 2\Gamma^3_{13}dx^3\mathbf{e}_3 = 2r^{-1}d\theta\mathbf{e}_\theta + 2r^{-1}d\varphi\mathbf{e}_\varphi$$

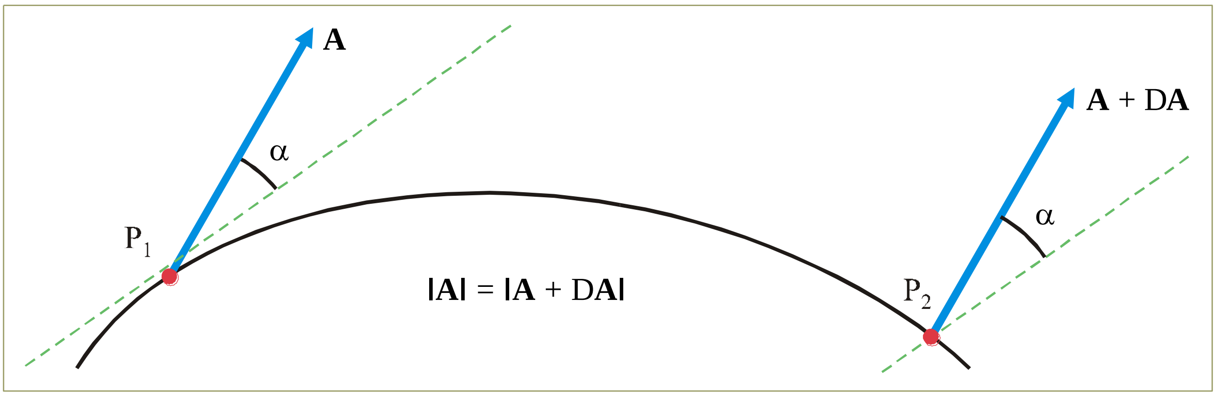
$$d\mathbf{e}_\theta = d\mathbf{e}_2 = 2\Gamma^1_{22}dx^2\mathbf{e}_1 + 2\Gamma^3_{23}dx^3\mathbf{e}_3 = -rd\theta\mathbf{e}_r + 2\operatorname{ctg}\theta d\varphi\mathbf{e}_\varphi$$

$$d\mathbf{e}_\varphi = d\mathbf{e}_3 = \Gamma^1_{33}dx^3\mathbf{e}_1 + \Gamma^2_{33}dx^3\mathbf{e}_2 = -r\sin^2\theta d\varphi\mathbf{e}_r - \sin\theta\cos\theta d\varphi\mathbf{e}_\theta$$

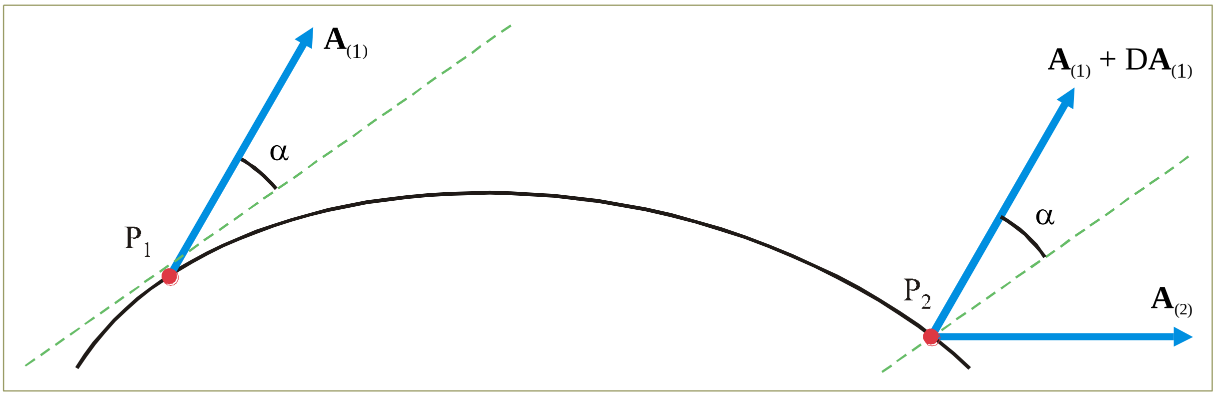
$$\begin{aligned} d^2\mathbf{R} = {} & \left(d^2r - rd\theta\cdot d\theta - r\sin^2\theta d\varphi\cdot d\varphi\right)\mathbf{e}_r + \left(d^2\theta + 2r^{-1}dr\cdot d\theta - \sin\theta\cos\theta d\varphi\cdot d\varphi\right)\mathbf{e}_\theta + \\ & + \left(d^2\varphi + 2r^{-1}dr\cdot d\varphi + 2\operatorname{ctg}\theta d\theta\cdot d\varphi\right)\mathbf{e}_\varphi \end{aligned}$$

- **Przesunięcie równoległe wektora**

Przesunięcie równoległe polega na przeniesieniu danego wektora z punktu pierwszego do punktu drugiego zadanej linii bez zmiany długości wektora oraz kąta zawartego między nim a styczną do linii wystawioną w punkcie pierwszym.



- **Różnica wektorów określonych wzdłuż zadanej linii**



Określmy pole wektorowe wzdłuż zadanej linii. Na linii tej obierzmy dwa punkty

$$P_1 = \left(x^1_{(1)}, x^2_{(1)}, x^3_{(1)}, x^4_{(1)}\right) \text{ i } P_2 = \left(x^1_{(2)}, x^2_{(2)}, x^3_{(2)}, x^4_{(2)}\right)$$

oraz związane z nimi lokalne układy współrzędnych.

Przy definiowaniu różnicy wektorów zaczepionych w dwóch różnych punktach zadanej linii należy pamiętać o przeniesieniu równoległym pierwszego wektora do punktu zaczepienia drugiego wektora oraz o ustaleniu (wybraniu) lokalnego układu współrzędnych, który może być związany z dowolnym z dwóch punktów.

$$dA^\alpha = A^\alpha_{(2)} - A^\alpha_{(1)}$$

$$\delta A^\alpha = A^\alpha_{(2)} - \left(A^\alpha_{(1)} + DA^\alpha_{(1)}\right) = A^\alpha_{(2)} - A^\alpha_{(1)} - DA^\alpha_{(1)} = dA^\alpha - DA^\alpha_{(1)}$$

dA^α = różnica współrzędnych kontrawariantnych wektorów drugiego i pierwszego względem lokalnego układu współrzędnych związanego z punktem pierwszym (drugim)

$DA^\alpha_{(1)}$ = różnica współrzędnych kontrawariantnych wektora pierwszego spowodowana przesunięciem równoległym tego wektora z punktu pierwszego do punktu drugiego liczona względem lokalnego układu współrzędnych związanego z punktem pierwszym (drugim)

δA^α = różnica współrzędnych kontrawariantnych wektorów drugiego i pierwszego po przesunięciu równoległym wektora pierwszego do punktu w którym zaczepiony jest wektor drugi liczona względem lokalnego układu współrzędnych związanego z punktem pierwszym (drugim).

$$\mathbf{A} = A^{\mu}\mathbf{e}_{\mu}$$
$$d\mathbf{e}_{\mu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} dx^{\beta}\mathbf{e}_{\alpha}$$
$$d\mathbf{A} = \delta A^{\alpha}\mathbf{e}_{\alpha}$$
$$\delta A^{\alpha} = dA^{\alpha} - DA^{\alpha}$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{A} &= dA^{\mu}\,\mathbf{e}_{\mu} + A^{\mu} d\mathbf{e}_{\mu} = \\ &= dA^{\mu}\,\mathbf{e}_{\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}A^{\mu}dx^{\beta}\mathbf{e}_{\alpha} = \\ &= dA^{\alpha}\mathbf{e}_{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}A^{\mu}dx^{\beta}\mathbf{e}_{\alpha} = \\ &= \left(dA^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}A^{\mu}dx^{\beta}\right)\mathbf{e}_{\alpha} \end{aligned}$$

$$\delta A^{\alpha} = dA^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}A^{\mu}dx^{\beta}$$

$$DA^{\alpha} = -\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}A^{\mu}dx^{\beta}$$

A = wektor zadany wzdłuż linii o równaniu parametrycznym $x^{\mu} = x^{\mu}(s)$, $(\mu = 1,2,3,4)$
s = parametr
d**A** = różniczka wektora **A**
$d\mathbf{e}_{\mu}$ = różniczka wektora bazowego $\mathbf{e}_{\mu}$
dA^{μ} = różniczka współrzędnych kontrawariantnych wektora **A**
δA^{μ} = różniczka absolutna współrzędnych kontrawariantnych A^{μ} wektora **A**
DA^{μ} = różniczka współrzędnych kontrawariantnych wektora **A** związana z przesunięciem równoległym
$\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}$ = trójskładnikowe symbole Christoffela drugiego rodzaju

DEFINICJA

Pochodną absolutną wektora kontrawariantnego $\mathbf{A} = \left(A^1, A^2, A^3, A^4\right) = \sum_{\alpha=1}^{4} A^{\alpha}\mathbf{e}_{\alpha}$ określonego wzdłuż linii o równaniu parametrycznym $x^{\mu} = x^{\mu}(s)$, $(\mu = 1,2,3,4)$, oznaczaną przez $\frac{\delta\mathbf{A}}{\delta s}$, nazywamy

$$\frac{\delta\mathbf{A}}{\delta s} = \sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\delta A^{\alpha}}{\delta s}\mathbf{e}_{\alpha}\,, \qquad \frac{\delta A^{\alpha}}{\delta s} \stackrel{df}{=} \frac{dA^{\alpha}}{ds} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}A^{\mu}\frac{dx^{\beta}}{ds}\,, \quad (\alpha = 1,2,3,4).$$

TWIERDZENIE

Jeżeli wektor $\mathbf{A} = \left(A^1, A^2, A^3, A^4\right) = \sum_{\alpha=1}^{4} A^{\alpha}\mathbf{e}_{\alpha}$ jest przesuwany równolegle wzdłuż linii o równaniu parametrycznym $x^{\mu} = x^{\mu}(s)$, $(\mu = 1,2,3,4)$, to spełnia wzdłuż tej linii równanie różniczkowe

$$\frac{\delta A^{\alpha}}{\delta s} = \frac{dA^{\alpha}}{ds} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}A^{\mu}\frac{dx^{\beta}}{ds} = 0\,, \quad (\alpha = 1,2,3,4),$$

lub

$$\delta A^{\alpha} = dA^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}A^{\mu}dx^{\beta} = 0\,, \quad (\alpha = 1,2,3,4).$$

- **Pochodna absolutna wektora kowariantnego zadanego wzdłuż linii**

$\mathbf{A} = A_\mu \mathbf{e}^\mu$
$d\mathbf{e}^\mu = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta} dx^\beta \mathbf{e}^\alpha$
$d\mathbf{A} = \delta A_\alpha \mathbf{e}^\alpha$
$\delta A_\alpha = dA_\alpha - DA_\alpha$

$$d\mathbf{A} = dA_\mu \mathbf{e}^\mu + A_\mu d\mathbf{e}^\mu =$$
$$= dA_\mu \mathbf{e}^\mu - \Gamma^\mu_{\alpha\beta} A_\mu dx^\beta \mathbf{e}^\alpha =$$
$$= dA_\alpha \mathbf{e}^\alpha - \Gamma^\mu_{\alpha\beta} A_\mu dx^\beta \mathbf{e}^\alpha =$$
$$= \left(dA_\alpha - \Gamma^\mu_{\alpha\beta} A_\mu dx^\beta\right)\mathbf{e}^\alpha$$

$$\delta A_\alpha = dA_\alpha - \Gamma^\mu_{\alpha\beta} A_\mu dx^\beta$$

$$DA_\alpha = \Gamma^\mu_{\alpha\beta} A_\mu dx^\beta$$

A = wektor zadany wzdłuż linii o równaniu parametrycznym $x^\mu = x^\mu(s)$, $(\mu = 1,2,3,4)$
s = parametr
d**A** = różniczka wektora **A**
d$\mathbf{e}^\mu$ = różniczka wektora bazowego $\mathbf{e}^\mu$
dA_μ = różniczka współrzędnych kowariantnych wektora **A**
δA_μ = różniczka absolutna współrzędnych kowariantnych A_μ wektora **A**
DA_μ = różniczka współrzędnych kowariantnych wektora **A** związana z przesunięciem równoległym
$\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ = trójskładnikowe symbole Christoffela drugiego rodzaju

DEFINICJA

Pochodną absolutną wektora kowariantnego $\mathbf{A} = \left(A_1, A_2, A_3, A_4\right) = \sum_{\alpha=1}^{4} A_\alpha \mathbf{e}^\alpha$ określonego wzdłuż linii o równaniu parametrycznym $x^\mu = x^\mu(s)$, $(\mu = 1,2,3,4)$, oznaczaną przez $\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta s}$, nazywamy

$$\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta s} = \sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\delta A_\alpha}{\delta s}\mathbf{e}^\alpha, \quad \frac{\delta A_\alpha}{\delta s} \stackrel{df}{=} \frac{dA_\alpha}{ds} - \Gamma^\mu_{\alpha\beta} A_\mu \frac{dx^\beta}{ds}, \quad (\alpha = 1,2,3,4).$$

TWIERDZENIE

Jeżeli wektor $\mathbf{A} = \left(A_1, A_2, A_3, A_4\right) = \sum_{\alpha=1}^{4} A_\alpha \mathbf{e}^\alpha$ jest przesuwany równolegle wzdłuż linii o równaniu parametrycznym $x^\mu = x^\mu(s)$, $(\mu = 1,2,3,4)$, to spełnia wzdłuż tej linii równanie różniczkowe

$$\frac{\delta A_\alpha}{\delta s} \stackrel{df}{=} \frac{dA_\alpha}{ds} - \Gamma^\mu_{\alpha\beta} A_\mu \frac{dx^\beta}{ds} = 0, \quad (\alpha = 1,2,3,4),$$

lub

$$\delta A_\alpha = dA_\beta - \Gamma^\mu_{\alpha\beta} A_\mu dx^\beta = 0, \quad (\alpha = 1,2,3,4).$$

- **Pochodna kowariantna i kontrawariantna wektora**

Pochodna kowariantna wektora kontrawariantnego

$$\delta A^{\alpha} = dA^{\alpha} - DA^{\alpha}$$
$$DA^{\alpha} = -\Gamma^{\alpha}_{\beta\lambda} A^{\beta} dx^{\lambda}$$
$$dA^{\alpha} = \frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\lambda}} dx^{\lambda}$$

$$\delta A^{\alpha} = \left(\frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\lambda} A^{\beta} \right) dx^{\lambda} = A^{\alpha}_{;\lambda} dx^{\lambda}$$

$$A^{\alpha}_{;\lambda} = \nabla_{\lambda} A^{\alpha} = \frac{\delta A^{\alpha}}{\delta x^{\lambda}} \overset{df}{=} \frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\lambda} A^{\beta}$$

Pochodna kowariantna wektora kontrawariantnego jest tensorem mieszanym drugiego rzędu.

Pochodna kontrawariantna wektora kowariantnego

$$\delta A_{\alpha} = dA_{\alpha} - \delta A_{\alpha}$$
$$DA_{\alpha} = \overline{\Gamma}^{\beta}_{\alpha\lambda} A_{\beta} dx_{\lambda}$$
$$dA_{\alpha} = \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x_{\lambda}} dx_{\lambda}$$

$$\delta A_{\alpha} = \left(\frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x_{\lambda}} - \overline{\Gamma}^{\beta}_{\alpha\lambda} A_{\beta} \right) dx_{\lambda} = A^{;\lambda}_{\alpha} dx_{\lambda}$$

$$A^{;\lambda}_{\alpha} = \nabla^{\lambda} A_{\alpha} = \frac{\delta A_{\alpha}}{\delta x_{\lambda}} \overset{df}{=} \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x_{\lambda}} - \overline{\Gamma}^{\beta}_{\alpha\lambda} A_{\beta}$$

Pochodna kontrawariantna wektora kowariantnego jest tensorem mieszanym drugiego rzędu.

- **Pochodna kowariantna tensora drugiego rzędu**

$$T^{\alpha\beta}_{;\lambda} = \nabla_{\lambda} T^{\alpha\beta} \overset{df}{=} \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda} T^{\mu\beta} + \Gamma^{\beta}_{\mu\lambda} T^{\alpha\mu}$$

$$T^{\alpha}_{\beta;\lambda} = \nabla_{\lambda} T^{\alpha}_{\beta} \overset{df}{=} \frac{\partial T^{\alpha}_{\beta}}{\partial x^{\lambda}} - \Gamma^{\mu}_{\beta\lambda} T^{\alpha}_{\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda} T^{\mu}_{\beta}$$

$$T_{\alpha\beta;\lambda} = \nabla_{\lambda} T_{\alpha\beta} \overset{df}{=} \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x^{\lambda}} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\lambda} T_{\mu\beta} - \Gamma^{\mu}_{\beta\lambda} T_{\alpha\mu}$$

PRZYKŁAD
Pochodne tensorów metrycznych

$$g^{\alpha\beta} = \mathbf{e}^{\alpha} \cdot \mathbf{e}^{\beta}$$
$$d\mathbf{e}^{\alpha} = -\Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda} dx^{\lambda} \mathbf{e}^{\mu}$$
$$d\mathbf{e}^{\beta} = -\Gamma^{\beta}_{\mu\lambda} dx^{\lambda} \mathbf{e}^{\mu}$$
$$dg^{\alpha\beta} = \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^{\lambda}} dx^{\lambda}$$

$$\Rightarrow$$

$$dg^{\alpha\beta} = \mathbf{e}^{\alpha} \cdot d\mathbf{e}^{\beta} + \mathbf{e}^{\beta} \cdot d\mathbf{e}^{\alpha} =$$
$$= -\mathbf{e}^{\alpha} \cdot \mathbf{e}^{\mu} \Gamma^{\beta}_{\mu\lambda} dx^{\lambda} - \mathbf{e}^{\beta} \cdot \mathbf{e}^{\mu} \Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda} dx^{\lambda} =$$
$$= -g^{\alpha\mu} \Gamma^{\beta}_{\mu\lambda} dx^{\lambda} - g^{\beta\mu} \Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda} dx^{\lambda} =$$
$$= -\left(g^{\alpha\mu} \Gamma^{\beta}_{\mu\lambda} + g^{\beta\mu} \Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda} \right) dx^{\lambda}$$
$$\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^{\lambda}} = -g^{\alpha\mu} \Gamma^{\beta}_{\mu\lambda} - g^{\beta\mu} \Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda}, \quad g^{\beta\mu} = g^{\mu\beta}$$

$$g_{\alpha\beta;\lambda} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\lambda}} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\lambda} g_{\mu\beta} - \Gamma^{\mu}_{\beta\lambda} g_{\alpha\mu}$$
$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\lambda}} = \Gamma^{\mu}_{\alpha\lambda} g_{\mu\beta} + \Gamma^{\mu}_{\beta\lambda} g_{\alpha\mu}$$
$$\downarrow$$
$$g_{\alpha\beta;\lambda} = 0$$

$$g^{\alpha\beta}_{;\lambda} = \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda} g^{\mu\beta} + \Gamma^{\beta}_{\mu\lambda} g^{\alpha\mu}$$
$$\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^{\lambda}} = -\Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda} g^{\mu\beta} - \Gamma^{\beta}_{\mu\lambda} g^{\alpha\mu}$$
$$\downarrow$$
$$g^{\alpha\beta}_{;\lambda} = 0$$

- **Dywergencja wektora kontrawariantnego**

$$\mathrm{div}\mathbf{A} \overset{\mathrm{df}}{=} \nabla \cdot \mathbf{A}$$
$$\nabla = \mathbf{e}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}$$
$$\mathbf{A} = A^{\beta}\mathbf{e}_{\beta}$$
$$\mathbf{e}^{\alpha}\cdot\mathbf{e}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}$$
$$\sum_{\alpha=1}^{4}\mathbf{e}^{\alpha}\frac{\partial \mathbf{e}_{\beta}}{\partial x^{\alpha}} = \sum_{\alpha=1}^{4}\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^{\beta}}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{A} = \mathbf{e}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(A^{\beta}\mathbf{e}_{\beta}\right) =$$
$$= \mathbf{e}^{\alpha}\cdot\mathbf{e}_{\beta}\frac{\partial A^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} + A^{\beta}\mathbf{e}^{\alpha}\frac{\partial \mathbf{e}_{\beta}}{\partial x^{\alpha}} = \delta^{\alpha}_{\beta}\frac{\partial A^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} + A^{\beta}\mathbf{e}^{\alpha}\frac{\partial \mathbf{e}_{\beta}}{\partial x^{\alpha}} =$$
$$= \frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + A^{\beta}\mathbf{e}^{\alpha}\frac{\partial \mathbf{e}_{\beta}}{\partial x^{\alpha}}$$
$$\boxed{\mathrm{div}\mathbf{A} = \frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}A^{\beta}} =$$
$$= \frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^{\beta}}\right)A^{\beta} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g}}\frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^{\alpha}}\right)A^{\alpha}$$
$$\boxed{\mathrm{div}\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial\left(\sqrt{g}A^{\alpha}\right)}{\partial x^{\alpha}}}$$

TWIERDZENIE

Dywergencja wektora jest śladem pochodnej kowariantnej ze składowych kontrawariantnych tego wektora: $\mathrm{div}\mathbf{A} = A^{\alpha}_{;\alpha}$.

DOWÓD

$$A^{\alpha}_{;\lambda} = \frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\lambda}} + \sum_{\beta=1}^{4}\Gamma^{\alpha}_{\beta\lambda}A^{\beta} \xrightarrow{\alpha=\lambda} \sum_{\alpha=1}^{4}A^{\alpha}_{;\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}A^{\beta}$$

- **Dywergencja wektora kowariantnego**

$$\mathbf{e}^{\alpha} = \mathbf{e}_{\mu}g^{\alpha\mu}$$
$$A^{\beta} = A_{\kappa}g^{\kappa\beta}$$
$$\mathbf{e}_{\beta} = g_{\beta\nu}\mathbf{e}^{\nu}$$
$$g^{\kappa\beta}g_{\beta\nu}\mathbf{e}^{\nu} = \delta^{\kappa}_{\nu}\mathbf{e}^{\nu} = \mathbf{e}^{\kappa}$$
$$g^{\alpha\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial x_{\mu}}$$
$$\mathbf{e}_{\mu}\mathbf{e}^{\kappa} = \delta^{\kappa}_{\mu}$$
$$\mathbf{e}_{\mu}\frac{\partial \mathbf{e}^{\kappa}}{\partial x_{\mu}} = -\mathbf{e}^{\kappa}\frac{\partial \mathbf{e}_{\mu}}{\partial x_{\mu}}$$
$$\mathbf{e}^{\kappa}\frac{\partial \mathbf{e}_{\mu}}{\partial x_{\mu}} = \overline{\Gamma}^{k}_{\mu\mu}$$
$$\overline{\Gamma}^{\beta}_{\alpha\alpha} = g^{\beta\mu}\left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x_{\alpha}} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x_{\mu}}\right)$$

$$\mathrm{div}\mathbf{A} = \mathbf{e}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(A^{\beta}\mathbf{e}_{\beta}\right) = \mathbf{e}_{\mu}g^{\alpha\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(A_{\kappa}g^{\kappa\beta}g_{\beta\nu}\mathbf{e}^{\nu}\right)$$
$$\boxed{\mathrm{div}\mathbf{A} = \mathbf{e}_{\mu}g^{\alpha\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(A_{\kappa}\mathbf{e}^{\kappa}\right)}$$
$$\boxed{\mathrm{div}\mathbf{A} = \mathbf{e}_{\mu}\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\left(A_{\kappa}\mathbf{e}^{\kappa}\right)} =$$
$$= \mathbf{e}_{\mu}\mathbf{e}^{\kappa}\frac{\partial A_{\kappa}}{\partial x_{\mu}} + \mathbf{e}_{\mu}\frac{\partial \mathbf{e}^{\kappa}}{\partial x_{\mu}}A_{\kappa} = \delta^{\kappa}_{\mu}\frac{\partial A_{\kappa}}{\partial x_{\mu}} - \mathbf{e}^{\kappa}\frac{\partial \mathbf{e}_{\mu}}{\partial x_{\mu}}A_{\kappa}$$
$$\boxed{\mathrm{div}\mathbf{A} = \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x_{\mu}} - \overline{\Gamma}^{k}_{\mu\mu}A_{\kappa}}$$

TWIERDZENIE
Dywergencja wektora jest śladem pochodnej kontrawariantnej ze składowych kowariantnych tego wektora: $\mathrm{div}\mathbf{A} = A_{\alpha}^{;\alpha}$.

DOWÓD

$$A_{\alpha}^{;\lambda} = \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x_{\lambda}} - \sum_{\beta=1}^{4} \overline{\Gamma}_{\alpha\lambda}^{\beta} A_{\beta} \xrightarrow{\alpha=\lambda} \sum_{\alpha=1}^{4} A_{\alpha}^{;\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} - \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4} \overline{\Gamma}_{\alpha\alpha}^{\beta} A_{\beta}$$

- **Dywergencja tensora kontrawariantnego drugiego rzędu**

$$T_{;\lambda}^{\alpha\beta} = \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\beta} T^{\alpha\mu} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\alpha} T^{\mu\beta}$$

$$\Big\downarrow \ \beta = \lambda$$

$$T_{;\beta}^{\alpha\beta} = \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma_{\mu\beta}^{\beta} T^{\alpha\mu} + \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} T^{\mu\beta}$$

$$\Gamma_{\mu\beta}^{\beta} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^{\mu}}$$

$$\left(\mathrm{div}T^{\bullet\bullet}\right)^{\alpha} \overset{df}{=} \sum_{\beta=1}^{4} T_{;\beta}^{\alpha\beta} =$$

$$= \sum_{\beta=1}^{4} \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} + \sum_{\mu=1}^{4} \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^{\mu}} \right) T^{\alpha\mu} + \sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} T^{\mu\beta} =$$

$$= \sum_{\beta=1}^{4} \left[\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g}} \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} + \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^{\beta}} \right) T^{\alpha\beta} \right] + \sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} T^{\mu\beta}$$

$$\boxed{\left(\mathrm{div}T^{\bullet\bullet}\right)^{\alpha} \overset{df}{=} \sum_{\beta=1}^{4} T_{;\beta}^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{\beta=1}^{4} \left(\frac{\partial \sqrt{g} T^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} \right) + \sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} T^{\mu\beta}}$$

- **Dywergencja antysymetrycznego (skośniesymetrycznego) tensora kontrawariantnego drugiego rzędu**

$$\left(\mathrm{div}T^{\bullet\bullet}\right)^{\alpha} \overset{df}{=} \sum_{\beta=1}^{4} T_{;\beta}^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{\beta=1}^{4} \frac{\partial\left(\sqrt{g} T^{\alpha\beta}\right)}{\partial x^{\beta}} + \sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} T^{\mu\beta}$$

$$T^{\mu\beta} = -T^{\beta\mu}, \quad \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} = \Gamma_{\beta\mu}^{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} T^{\mu\beta} = 0$$

$$\boxed{\left(\mathrm{div}T^{\bullet\bullet}\right)^{\alpha} \overset{df}{=} \sum_{\beta=1}^{4} T_{;\beta}^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{\beta=1}^{4} \frac{\partial\left(\sqrt{g} T^{\alpha\beta}\right)}{\partial x^{\beta}}}$$

- **Dywergencja tensora kowariantnego drugiego rzędu**

$$\left(\mathrm{div}T_{\bullet\bullet}\right)_{\alpha} \overset{df}{=} \sum_{\beta=1}^{4} T_{\alpha\beta;\beta}$$

$$T_{\alpha\beta;\lambda} = \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x^{\lambda}} - \sum_{\mu=1}^{4} \Gamma_{\alpha\lambda}^{\mu} T_{\mu\beta} - \sum_{\mu=1}^{4} \Gamma_{\beta\lambda}^{\mu} T_{\alpha\mu}$$

$$\Big\downarrow \ \beta = \lambda$$

$$\sum_{\beta=1}^{4} T_{\alpha\beta;\beta} = \sum_{\beta=1}^{4} \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} - \sum_{\beta=1}^{4}\sum_{\mu=1}^{4} \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} T_{\mu\beta} - \sum_{\beta=1}^{4}\sum_{\mu=1}^{4} \Gamma_{\beta\beta}^{\mu} T_{\alpha\mu}$$

$$\boxed{\left(\mathrm{div}T_{\bullet\bullet}\right)_{\alpha} \overset{df}{=} \sum_{\beta=1}^{4} T_{\alpha\beta;\beta} = \sum_{\beta=1}^{4} \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} - \sum_{\beta=1}^{4}\sum_{\mu=1}^{4} \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} T_{\mu\beta} - \sum_{\beta=1}^{4}\sum_{\mu=1}^{4} \Gamma_{\beta\beta}^{\mu} T_{\alpha\mu}}$$

- **Dywergencja tensora mieszanego drugiego rzędu**

$$T^{\alpha}_{\beta;\lambda} = \frac{\partial T^{\alpha}_{\beta}}{\partial x^{\lambda}} - \Gamma^{\mu}_{\beta\lambda} T^{\alpha}_{\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda} T^{\mu}_{\beta}$$

$$\alpha = \lambda$$

$$T^{\alpha}_{\beta;\alpha} = \frac{\partial T^{\alpha}_{\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \Gamma^{\mu}_{\beta\alpha} T^{\alpha}_{\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} T^{\mu}_{\beta}$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^{\mu}}$$

$$\left(\mathrm{div}T\right)_{\beta} \overset{df}{=} T^{\alpha}_{\beta;\alpha} = \frac{\partial T^{\alpha}_{\beta}}{\partial x^{\alpha}} + \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^{\mu}}\right) T^{\mu}_{\beta} - \Gamma^{\mu}_{\beta\alpha} T^{\alpha}_{\mu} =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{4} \left[\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g}} \frac{\partial T^{\alpha}_{\beta}}{\partial x^{\alpha}} + \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^{\alpha}}\right) T^{\alpha}_{\beta} \right] - \sum_{\mu=1}^{4} \sum_{\alpha=1}^{4} \Gamma^{\mu}_{\beta\alpha} T^{\alpha}_{\mu}$$

$$\boxed{\left(\mathrm{div}T\right)_{\beta} \overset{df}{=} \sum_{\beta=1}^{4} T^{\alpha}_{\beta;\alpha} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\partial\left(\sqrt{g}\, T^{\alpha}_{\beta}\right)}{\partial x^{\alpha}} - \sum_{\mu=1}^{4} \sum_{\alpha=1}^{4} \Gamma^{\mu}_{\beta\alpha} T^{\alpha}_{\mu}}$$

- **Dywergencja symetrycznego mieszanego tensora drugiego rzędu**

$$T^{\alpha}_{\beta;\alpha} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial\left(\sqrt{g}\, T^{\alpha}_{\beta}\right)}{\partial x^{\alpha}} - \Gamma^{\mu}_{\beta\alpha} T^{\alpha}_{\mu}$$

$$\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha} = \tfrac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left(\frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^{\lambda}} \right), \quad g^{\mu\lambda} T^{\alpha}_{\mu} = T^{\lambda\alpha}$$

$$T^{\alpha}_{\beta;\alpha} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial\left(\sqrt{g}\, T^{\alpha}_{\beta}\right)}{\partial x^{\alpha}} - \tfrac{1}{2} T^{\lambda\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^{\lambda}} \right)$$

$$T^{\lambda\alpha} = T^{\alpha\lambda} \quad \Rightarrow \quad T^{\lambda\alpha} \left(\frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^{\lambda}} \right) = 0$$

$$\boxed{T^{\alpha}_{\beta;\alpha} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial\left(\sqrt{g}\, T^{\alpha}_{\beta}\right)}{\partial x^{\alpha}} - \tfrac{1}{2} T^{\lambda\alpha} \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\beta}}}$$

$$T^{\lambda\alpha} = T^{\alpha}_{\mu} g^{\mu\lambda}$$

$$\boxed{T^{\alpha}_{\beta;\alpha} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial\left(\sqrt{g}\, T^{\alpha}_{\beta}\right)}{\partial x^{\alpha}} - \tfrac{1}{2} T^{\alpha}_{\mu} g^{\mu\lambda} \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\beta}}}$$

$$g^{\mu\lambda} \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\beta}} = -g_{\alpha\lambda} \frac{\partial g^{\mu\lambda}}{\partial x^{\beta}}$$

$$\boxed{T^{\alpha}_{\beta;\alpha} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial\left(\sqrt{g}\, T^{\alpha}_{\beta}\right)}{\partial x^{\alpha}} + \tfrac{1}{2} T^{\alpha}_{\mu} g_{\alpha\lambda} \frac{\partial g^{\mu\lambda}}{\partial x^{\beta}}}$$

$$T^{\alpha}_{\mu} g_{\alpha\lambda} = T_{\mu\lambda}$$

$$\boxed{T^{\alpha}_{\beta;\alpha} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial\left(\sqrt{g}\, T^{\alpha}_{\beta}\right)}{\partial x^{\alpha}} + \tfrac{1}{2} T_{\mu\lambda} \frac{\partial g^{\mu\lambda}}{\partial x^{\beta}}}$$

- **Związki między dywergencjami tensorów drugiego rzędu**

$$\left(\mathrm{div}T^{\bullet}_{\bullet}\right)_\sigma = T^{\nu}_{\sigma;\nu}$$

$$\Big\downarrow \quad T^{\nu}_{\sigma} = g_{\mu\sigma}T^{\mu\nu}$$

$$T^{\nu}_{\sigma;\nu} = \left(g_{\mu\sigma}T^{\mu\nu}\right)_{;\nu}$$

$$\Big\downarrow \quad g_{\mu\sigma;\nu} = 0$$

$$T^{\nu}_{\sigma;\nu} = g_{\mu\sigma}T^{\mu\nu}_{;\nu}$$

$$\Big\downarrow \quad T^{\mu\nu}_{;\nu} = \left(\mathrm{div}T^{\bullet\bullet}\right)^\mu$$

$$\boxed{\left(\mathrm{div}T^{\bullet}_{\bullet}\right)_\sigma = g_{\mu\sigma}\left(\mathrm{div}T^{\bullet\bullet}\right)^\mu}$$

$$\left(\mathrm{div}T^{\bullet\bullet}\right)^\mu = T^{\mu\nu}_{;\nu}$$

$$\Big\downarrow \quad T^{\mu\nu} = g^{\mu\beta}T^{\nu}_{\beta}$$

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = \left(g^{\mu\beta}T^{\nu}_{\beta}\right)_{;\nu}$$

$$\Big\downarrow \quad g^{\mu\beta}_{;\nu} = 0$$

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = g^{\mu\beta}T^{\nu}_{\beta;\nu}$$

$$\Big\downarrow \quad T^{\nu}_{\beta;\nu} = \left(\mathrm{div}T^{\bullet}_{\bullet}\right)_\beta$$

$$\boxed{\left(\mathrm{div}T^{\bullet\bullet}\right)^\mu = g^{\mu\beta}\left(\mathrm{div}T^{\bullet}_{\bullet}\right)_\beta}$$

$$\left(\mathrm{div}T_{\bullet\bullet}\right)_\mu = T_{\mu\nu;\nu}$$

$$\Big\downarrow \quad T_{\mu\nu} = g_{\mu\beta}T^{\beta}_{\nu}$$

$$T_{\mu\nu;\nu} = \left(g_{\mu\beta}T^{\beta}_{\nu}\right)_{;\nu}$$

$$\Big\downarrow \quad g_{\mu\beta;\nu} = 0$$

$$T_{\mu\nu;\nu} = g_{\mu\beta}T^{\beta}_{\nu;\nu}$$

$$\Big\downarrow \quad T^{\beta}_{\nu;\nu} = \left(\mathrm{div}T^{\bullet}_{\bullet}\right)^\beta$$

$$\boxed{\left(\mathrm{div}T_{\bullet\bullet}\right)_\mu = g_{\mu\beta}\left(\mathrm{div}T^{\bullet}_{\bullet}\right)^\beta}$$

$$\left(\mathrm{div}T^{\bullet}_{\bullet}\right)^\nu = T^{\nu}_{\sigma;\sigma}$$

$$\Big\downarrow \quad T^{\nu}_{\sigma} = g^{\mu\nu}T_{\mu\sigma}$$

$$T^{\nu}_{\sigma;\sigma} = \left(g^{\mu\nu}T_{\mu\sigma}\right)_{;\sigma}$$

$$\Big\downarrow \quad g^{\mu\nu}_{;\sigma} = 0$$

$$T^{\nu}_{\sigma;\sigma} = g^{\mu\nu}T_{\mu\sigma;\sigma}$$

$$\Big\downarrow \quad T_{\mu\sigma;\sigma} = \left(\mathrm{div}T_{\bullet\bullet}\right)_\mu$$

$$\boxed{\left(\mathrm{div}T^{\bullet}_{\bullet}\right)^\nu = g^{\mu\nu}\left(\mathrm{div}T_{\bullet\bullet}\right)_\mu}$$

- **Gradient funkcji skalarnej**

$$\boxed{\mathrm{grad}\,\varphi \overset{\mathrm{df}}{=} \nabla\varphi = \sum_{\alpha=1}^{4}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha}\right)\mathbf{e}^\alpha}$$

$$\Big\downarrow \quad \mathbf{e}^\alpha = \sum_{\beta=1}^{4}\mathbf{e}_\beta g^{\alpha\beta}, \qquad \sum_{\alpha=1}^{4} g^{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\beta}$$

$$\boxed{\mathrm{grad}\,\varphi = \sum_{\beta=1}^{4}\left(\sum_{\alpha=1}^{4} g^{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha}\right)\mathbf{e}_\beta = \sum_{\beta=1}^{4}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\beta}\mathbf{e}_\beta}$$

Gradient funkcji skalarnej φ jest wektorem.

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha}$ = składowa kowariantna gradientu

$\displaystyle\sum_{\alpha=1}^{4} g^{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\beta}$ = składowa kontrawariantna gradientu

- **Laplasjan funkcji skalarnej**

$$\mathrm{div}\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{\beta=1}^{4}\frac{\partial\left(\sqrt{g}A^{\beta}\right)}{\partial x^{\beta}}$$

$$\mathbf{A} = \mathrm{grad}\,\varphi = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}\mathbf{e}_{\beta}g^{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\alpha}}$$

$$A^{\beta} = \mathrm{grad}^{\beta}\varphi = \sum_{\alpha=1}^{4}g^{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\alpha}}$$

$$\nabla^2\varphi = \Delta\varphi \overset{\mathrm{df}}{=} \nabla\cdot\nabla\varphi = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\varphi =$$

$$= \mathrm{div}\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{\beta=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left(\sqrt{g}\sum_{\alpha=1}^{4}g^{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\alpha}}\right)$$

$$\boxed{\nabla^2\varphi = \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left(g^{\alpha\beta}\sqrt{g}\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\alpha}}\right)}$$

$$\nabla^2\varphi = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\varphi$$

$$\mathrm{div}\mathbf{A} = A^{\alpha}_{;\alpha} = \frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}A^{\beta}$$

$$\mathbf{A} = \mathrm{grad}\,\varphi$$

$$A^{\alpha} = g^{\beta\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\beta}}, \qquad A^{\beta} = g^{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\alpha}}$$

$$g^{\alpha\beta} = g^{\beta\alpha}$$

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(g^{\beta\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\beta}}\right) - \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}g^{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\alpha}}$$

$$\boxed{\nabla^2\varphi = g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\beta}} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}g^{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\alpha}}}$$

- **Rotacja jako kowariantny tensor antysymetryczny drugiego rzędu**

$$r_{\mu\nu} \overset{\mathrm{df}}{=} A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu}$$

$$A_{\mu;\nu} = \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}A_{\alpha}, \qquad A_{\nu;\mu} = \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}A_{\alpha}, \qquad \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}$$

$$\boxed{r_{\mu\nu} = \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}}}$$

W przestrzeni n-wymiarowej antysymetryczny tensor $r_{\mu\nu}$ posiada $\frac{1}{2}\left(n^2 - n\right)$ niezależnych składowych.

W przypadku trójwymiarowym składowe tensora $r_{\mu\nu}$ można interpretować jako składowe rotacji wektora kowariantnego w układzie ortonormalnym.

$$\mathrm{rot}\mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3}\right)\mathbf{e}^1 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^1}\right)\mathbf{e}^2 + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2}\right)\mathbf{e}^3 = r_{23}\mathbf{e}^1 + r_{31}\mathbf{e}^2 + r_{12}\mathbf{e}^3$$

- **Twierdzenie Gaussa**

Całka z czterowektora po hiperpowierzchni S jest równa całce z dywergencji tego wektora po czteroobjętości V.

$$\boxed{\oint_S A^{\alpha}\sqrt{g}\,dS_{\alpha} = \int_V A^{\alpha}_{;\alpha}\sqrt{g}\,dV}$$

- **Pochodna kowariantna dowolnego tensora**

Pochodną kowariantna dowolnego tensora lub rozszerzeniem kowariantnym tensora nazywamy wyrażenie

$$T^{s_1s_2\ldots s_n}_{r_1r_2\ldots r_m;\lambda}=\nabla_\lambda T^{s_1s_2\ldots s_n}_{r_1r_2\ldots r_m}=\frac{\delta T^{s_1s_2\ldots s_n}_{r_1r_2\ldots r_m}}{\delta x^\lambda}=$$

$$\overset{df}{=}\frac{\partial T^{s_1s_2\ldots s_n}_{r_1r_2\ldots r_m}}{\partial x^\lambda}-\left[\Gamma^q_{r_1\lambda}T^{s_1s_2\ldots s_n}_{qr_2\ldots r_m}+\Gamma^q_{r_2\lambda}T^{s_1s_2\ldots s_n}_{r_1qr_3\ldots r_m}+\ldots\right]+\left[\Gamma^{s_1}_{q\lambda}T^{qs_2\ldots s_n}+\Gamma^{s_2}_{q\lambda}T^{s_1qs_3\ldots s_n}+\ldots\right].$$

TWIERDZENIE

Pochodna kowariantna dowolnego tensora jest tensorem, którego rząd i kowariantność są o jeden wyższe od rzędu i kowariantności tensora wyjściowego

$$T^{s_1s_2\ldots s_n}_{r_1r_2\ldots r_m;\lambda}=\nabla_\lambda T^{s_1s_2\ldots s_n}_{r_1r_2\ldots r_m}=\frac{\delta T^{s_1s_2\ldots s_n}_{r_1r_2\ldots r_m}}{\delta x^\lambda}\overset{tw}{=}T^{s_1s_2\ldots s_n}_{r_1r_2\ldots r_m\,\lambda}.$$

Dowód tego twierdzenia dla przypadku pochodnej kowariantnej tensora kowariantnego został podany przez E. B. Christoffela w pracy:
Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades.
Journal für die reine und angewandte Mathematik **70** (1869) 46-70.
Rok 1869 można uważać za datę powstania rachunku tensorowego.

PRZYKŁADY

Pochodna kowariantna tensora zerowego rzędu (skalara) T

$$T_\lambda=T_{;\lambda}=\nabla_\lambda T=\frac{\delta T}{\delta x^\lambda}\overset{df}{=}\frac{\partial T}{\partial x^\lambda}=T_{,\lambda}.$$

Pochodna kowariantna tensora kowariantnego pierwszego rzędu (wektora kowariantnego) T_α

$$T_{\alpha\lambda}=T_{\alpha;\lambda}=\nabla_\lambda T_\alpha=\frac{\delta T_\alpha}{\delta x^\lambda}\overset{df}{=}\frac{\partial T_\alpha}{\partial x^\lambda}-\Gamma^q_{\alpha\lambda}T_q.$$

Pochodna kowariantna tensora kowariantnego drugiego rzędu $T_{\alpha\beta}$

$$T_{\alpha\beta\lambda}=T_{\alpha\beta;\lambda}=\nabla_\lambda T_{\alpha\beta}=\frac{\delta T_{\alpha\beta}}{\delta x^\lambda}\overset{df}{=}\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda}-\Gamma^q_{\alpha\lambda}T_{q\beta}-\Gamma^q_{\beta\lambda}T_{\alpha q}.$$

Pochodna kowariantna tensora kowariantnego trzeciego rzędu $T_{\alpha\beta\mu}$

$$T_{\alpha\beta\mu\lambda}=T_{\alpha\beta\mu;\lambda}=\nabla_\lambda T_{\alpha\beta\mu}=\frac{\delta T_{\alpha\beta\mu}}{\delta x^\lambda}\overset{df}{=}\frac{\partial T_{\alpha\beta\mu}}{\partial x^\lambda}-\Gamma^q_{\alpha\lambda}T_{q\beta\mu}-\Gamma^q_{\beta\lambda}T_{\alpha q\mu}-\Gamma^q_{\mu\lambda}T_{\alpha\beta q}.$$

Pochodna kowariantna tensora kowariantnego czwartego rzędu $T_{\alpha\beta\mu\nu}$

$$T_{\alpha\beta\mu\nu\lambda}=T_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda}=\nabla_\lambda T_{\alpha\beta\mu\nu}=\frac{\delta T_{\alpha\beta\mu\nu}}{\delta x^\lambda}\overset{df}{=}\frac{\partial T_{\alpha\beta\mu\nu}}{\partial x^\lambda}-\Gamma^q_{\alpha\lambda}T_{q\beta\mu\nu}-\Gamma^q_{\beta\lambda}T_{\alpha q\mu\nu}-\Gamma^q_{\mu\lambda}T_{\alpha\beta q\nu}-\Gamma^q_{\nu\lambda}T_{\alpha\beta\mu q}.$$

Pochodna kowariantna tensora kontrawariantnego pierwszego rzędu (wektora kontrawariantnego) T^α

$$T^{\alpha\lambda}=T^{\alpha;\lambda}=\nabla^\lambda T^\alpha=\frac{\delta T^\alpha}{\delta x^\lambda}\overset{df}{=}\frac{\partial T^\alpha}{\partial x^\lambda}+\Gamma^\alpha_{q\lambda}T^q.$$

Pochodna kowariantna tensora kontrawariantnego drugiego rzędu $T^{\alpha\beta}$

$$T^{\alpha\beta}_\lambda=T^{\alpha\beta}_{;\lambda}=\nabla_\lambda T^{\alpha\beta}=\frac{\delta T^{\alpha\beta}}{\delta x^\lambda}\overset{df}{=}\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda}+\Gamma^\alpha_{q\lambda}T^{q\beta}+\Gamma^\beta_{q\lambda}T^{\alpha q}.$$

Pochodna kowariantna tensora kontrawariantnego trzeciego rzędu $T^{\alpha\beta\mu}$

$$T^{\alpha\beta\mu}_{\lambda} = T^{\alpha\beta\mu}_{;\lambda} = \nabla_{\lambda} T^{\alpha\beta\mu} = \frac{\delta T^{\alpha\beta\mu}}{\delta x^{\lambda}} \overset{df}{=} \frac{\partial T^{\alpha\beta\mu}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\alpha}_{q\lambda} T^{q\beta\mu} + \Gamma^{\beta}_{q\lambda} T^{\alpha q\mu} + \Gamma^{\mu}_{q\lambda} T^{\alpha\beta q}.$$

Pochodna kowariantna tensora kontrawariantnego czwartego rzędu $T^{\alpha\beta\mu\nu}$

$$T^{\alpha\beta\mu\nu}_{\lambda} = T^{\alpha\beta\mu\nu}_{;\lambda} = \nabla_{\lambda} T^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{\delta T^{\alpha\beta\mu\nu}}{\delta x^{\lambda}} \overset{df}{=} \frac{\partial T^{\alpha\beta\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\alpha}_{q\lambda} T^{q\beta\mu\nu} + \Gamma^{\beta}_{q\lambda} T^{\alpha q\mu\nu} + \Gamma^{\mu}_{q\lambda} T^{\alpha\beta q\nu} + \Gamma^{\nu}_{q\lambda} T^{\alpha\beta\mu q}.$$

Pochodna kowariantna tensora mieszanego drugiego rzędu jednokrotnie kowariantnego i jednokrotnie kontrawariantnego T^{α}_{β}

$$T^{\alpha}_{\beta\lambda} = T^{\alpha}_{\beta;\lambda} = \nabla_{\lambda} T^{\alpha}_{\beta} = \frac{\delta T^{\alpha}_{\beta}}{\delta x^{\lambda}} \overset{df}{=} \frac{\partial T^{\alpha}_{\beta}}{\partial x^{\lambda}} - \Gamma^{q}_{\beta\lambda} T^{\alpha}_{q} + \Gamma^{\alpha}_{q\lambda} T^{q}_{\beta}.$$

Pochodna kowariantna tensora mieszanego trzeciego rzędu jednokrotnie kontrawariantnego i dwukrotnie kowariantnego $T^{\alpha}_{\beta\mu}$

$$T^{\alpha}_{\beta\mu\lambda} = T^{\alpha}_{\beta\mu;\lambda} = \nabla_{\lambda} T^{\alpha}_{\beta\mu} = \frac{\delta T^{\alpha}_{\beta\mu}}{\delta x^{\lambda}} \overset{df}{=} \frac{\partial T^{\alpha}_{\beta\mu}}{\partial x^{\lambda}} - \Gamma^{q}_{\beta\lambda} T^{\alpha}_{q\mu} - \Gamma^{q}_{\mu\lambda} T^{\alpha}_{\beta q} + \Gamma^{\alpha}_{q\lambda} T^{q}_{\beta\mu}.$$

- **Pochodna kontrawariantna dowolnego tensora**

Na bazie definicji pochodnej kowariantnej podamy definicję pochodnej kontrawariantnej dowolnego tensora.

$$T^{s_1 s_2 \ldots s_n}_{r_1 r_2 \ldots r_m \lambda} = T^{s_1 s_2 \ldots s_n}_{r_1 r_2 \ldots r_m ;\lambda} = \nabla_{\lambda} T^{s_1 s_2 \ldots s_n}_{r_1 r_2 \ldots r_m} = \frac{\delta T^{s_1 s_2 \ldots s_n}_{r_1 r_2 \ldots r_m}}{\delta x^{\lambda}} =$$

$$\overset{df}{=} \frac{\partial T^{s_1 s_2 \ldots s_n}_{r_1 r_2 \ldots r_m}}{\partial x^{\lambda}} - \left[\Gamma^{q}_{r_1 \lambda} T^{s_1 s_2 \ldots s_n}_{q r_2 \ldots r_m} + \Gamma^{q}_{r_2 \lambda} T^{s_1 s_2 \ldots s_n}_{r_1 q r_3 \ldots r_m} + \ldots\right] + \left[\Gamma^{s_1}_{q\lambda} T^{q s_2 \ldots s_n} + \Gamma^{s_2}_{q\lambda} T^{s_1 q s_3 \ldots s_n} + \ldots\right]$$

$$T^{s_1 s_2 \ldots s_n}_{r_1 r_2 \ldots r_m \lambda} = g_{\lambda\omega} T^{s_1 s_2 \ldots s_n \omega}_{r_1 r_2 \ldots r_m}$$

$$g^{\lambda\kappa} g_{\lambda\omega} = \delta^{\kappa}_{\omega}$$

$$g^{\lambda\kappa} g_{\lambda\omega} T^{s_1 s_2 \ldots s_n \omega}_{r_1 r_2 \ldots r_m} = \delta^{\kappa}_{\omega} T^{s_1 s_2 \ldots s_n \omega}_{r_1 r_2 \ldots r_m} = T^{s_1 s_2 \ldots s_n \kappa}_{r_1 r_2 \ldots r_m}$$

Pochodną kontrawariantną lub rozszerzeniem kontrawariantnym dowolnego tensora nazywamy wyrażenie

$$T^{s_1 s_2 \ldots s_n \kappa}_{r_1 r_2 \ldots r_m} = T^{s_1 s_2 \ldots s_n ;\kappa}_{r_1 r_2 \ldots r_m} = g^{\lambda\kappa} \nabla_{\lambda} T^{s_1 s_2 \ldots s_n}_{r_1 r_2 \ldots r_m} = g^{\lambda\kappa} \frac{\delta T^{s_1 s_2 \ldots s_n}_{r_1 r_2 \ldots r_m}}{\delta x^{\lambda}} =$$

$$\overset{df}{=} g^{\lambda\kappa} \left\{ \frac{\partial T^{s_1 s_2 \ldots s_n}_{r_1 r_2 \ldots r_m}}{\partial x^{\lambda}} - \left[\Gamma^{q}_{r_1 \lambda} T^{s_1 s_2 \ldots s_n}_{q r_2 \ldots r_m} + \Gamma^{q}_{r_2 \lambda} T^{s_1 s_2 \ldots s_n}_{r_1 q r_3 \ldots r_m} + \ldots\right] + \left[\Gamma^{s_1}_{q\lambda} T^{q s_2 \ldots s_n} + \Gamma^{s_2}_{q\lambda} T^{s_1 q s_3 \ldots s_n} + \ldots\right] \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{\kappa}} \overset{df}{=} \sum_{\lambda=1}^{N} g^{\lambda\kappa} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}, \quad \frac{\delta}{\delta x_{\kappa}} \overset{df}{=} \sum_{\lambda=1}^{N} g^{\lambda\kappa} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}, \quad \nabla^{\kappa} \overset{df}{=} \sum_{\lambda=1}^{N} g^{\lambda\kappa} \nabla_{\lambda}$$

$$\overline{\Gamma}^{q}_{r_1 \kappa} \overset{df}{=} \sum_{\lambda=1}^{N} g^{\lambda\kappa} \Gamma^{q}_{r_1 \lambda}, \quad \overline{\Gamma}^{s_1}_{r_1 \kappa} \overset{df}{=} \sum_{\lambda=1}^{N} g^{\lambda\kappa} \Gamma^{s_1}_{q\lambda}$$

$$T^{s_1 s_2 \ldots s_n \kappa}_{r_1 r_2 \ldots r_m} = T^{s_1 s_2 \ldots s_n ;\kappa}_{r_1 r_2 \ldots r_m} = \nabla^{\kappa} T^{s_1 s_2 \ldots s_n}_{r_1 r_2 \ldots r_m} = \frac{\delta T^{s_1 s_2 \ldots s_n}_{r_1 r_2 \ldots r_m}}{\delta x_{\kappa}} =$$

$$\overset{df}{=} \frac{\partial T^{s_1 s_2 \ldots s_n}_{r_1 r_2 \ldots r_m}}{\partial x_{\kappa}} - \left[\overline{\Gamma}^{q}_{r_1 \kappa} T^{s_1 s_2 \ldots s_n}_{q r_2 \ldots r_m} + \overline{\Gamma}^{q}_{r_2 \kappa} T^{s_1 s_2 \ldots s_n}_{r_1 q r_3 \ldots r_m} + \ldots\right] + \left[\overline{\Gamma}^{s_1}_{q\kappa} T^{q s_2 \ldots s_n} + \overline{\Gamma}^{s_2}_{q\kappa} T^{s_1 q s_3 \ldots s_n} + \ldots\right]$$

TWIERDZENIE
Pochodna kontrawariantna dowolnego tensora jest tensorem, którego rząd i kontrawariantność są o jeden wyższe od rzędu i kontrawariantności tensora wyjściowego

$$T^{s_1 s_2 .. s_n ;\kappa}_{r_1 r_2 ... r_m} = \nabla^{\kappa} T^{s_1 s_2 .. s_n}_{r_1 r_2 ... r_m} = \frac{\delta T^{s_1 s_2 .. s_n}_{r_1 r_2 ... r_m}}{\delta x_{\kappa}} \overset{tw}{=} T^{s_1 s_2 .. s_n \kappa}_{r_1 r_2 ... r_m} .$$

Twierdzenie to w przypadku pochodnej kontrawariantnej tensora kontrawariantnego zostało sformułowane przez G. Riciiego i T. Levi-Civitę w pracy:
Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications.
Mathematische Annalen **54** (1901) 125-201.

PRZYKŁADY
Pochodna kontrawariantna tensora zerowego rzędu (skalara) T

$$T^{\kappa} = T^{;\kappa} = \nabla^{\kappa} T = \frac{\delta T}{\delta x_{\kappa}} \overset{df}{=} g^{\lambda\kappa} \frac{\partial T}{\partial x^{\lambda}} = g^{\lambda\kappa} T_{,\lambda} = \frac{\partial T}{\partial x_{\kappa}} = T^{,\kappa} .$$

Pochodna kontrawariantna tensora kowariantnego pierwszego rzędu (wektora kowariantnego) T_{α}

$$T^{;\kappa}_{\alpha} = \nabla^{\kappa} T_{\alpha} = \frac{\delta T_{\alpha}}{\delta x_{\kappa}} \overset{df}{=} g^{\lambda\kappa} \left(\frac{\partial T_{\alpha}}{\partial x^{\lambda}} - \Gamma^{q}_{\alpha\lambda} T_{q} \right) = \frac{\partial T_{\alpha}}{\partial x_{\kappa}} - \overline{\Gamma}^{q}_{\alpha\kappa} T_{q} .$$

Pochodna kontrawariantna tensora kowariantnego drugiego rzędu $T_{\alpha\beta}$

$$T^{\kappa}_{\alpha\beta} = T^{;\kappa}_{\alpha\beta} = \nabla^{\kappa} T_{\alpha\beta} = \frac{\delta T_{\alpha\beta}}{\delta x_{\kappa}} \overset{df}{=} g^{\lambda\kappa} \left(\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x^{\lambda}} - \Gamma^{q}_{\alpha\lambda} T_{q\beta} - \Gamma^{q}_{\beta\lambda} T_{\alpha q} \right) = \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_{\kappa}} - \overline{\Gamma}^{q}_{\alpha\kappa} T_{q\beta} - \overline{\Gamma}^{q}_{\beta\kappa} T_{\alpha q} .$$

Pochodna kontrawariantna tensora kowariantnego trzeciego rzędu $T_{\alpha\beta\mu}$

$$T^{\kappa}_{\alpha\beta\mu} = T^{;\kappa}_{\alpha\beta\mu} = \nabla^{\kappa} T_{\alpha\beta\mu} = \frac{\delta T_{\alpha\beta\mu}}{\delta x_{\kappa}} \overset{df}{=} g^{\lambda\kappa} \left(\frac{\partial T_{\alpha\beta\mu}}{\partial x^{\lambda}} - \Gamma^{q}_{\alpha\lambda} T_{q\beta\mu} - \Gamma^{q}_{\beta\lambda} T_{\alpha q\mu} - \Gamma^{q}_{\mu\lambda} T_{\alpha\beta q} \right) =$$

$$= \frac{\partial T_{\alpha\beta\mu}}{\partial x_{\kappa}} - \overline{\Gamma}^{q}_{\alpha\kappa} T_{q\beta\mu} - \overline{\Gamma}^{q}_{\beta\kappa} T_{\alpha q\mu} - \overline{\Gamma}^{q}_{\mu\kappa} T_{\alpha\beta q} .$$

Pochodna kontrawariantna tensora kowariantnego czwartego rzędu $T_{\alpha\beta\mu\nu}$

$$T^{\kappa}_{\alpha\beta\mu\nu} = T^{;\kappa}_{\alpha\beta\mu\nu} = \nabla^{\kappa} T_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{\delta T_{\alpha\beta\mu\nu}}{\delta x^{\kappa}} \overset{df}{=} g^{\lambda\kappa} \left(\frac{\partial T_{\alpha\beta\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} - \Gamma^{q}_{\alpha\lambda} T_{q\beta\mu\nu} - \Gamma^{q}_{\beta\lambda} T_{\alpha q\mu\nu} - \Gamma^{q}_{\mu\lambda} T_{\alpha\beta q\nu} - \Gamma^{q}_{\nu\lambda} T_{\alpha\beta\mu q} \right) =$$

$$= \frac{\partial T_{\alpha\beta\mu\nu}}{\partial x_{\kappa}} - \overline{\Gamma}^{q}_{\alpha\kappa} T_{q\beta\mu\nu} - \overline{\Gamma}^{q}_{\beta\kappa} T_{\alpha q\mu\nu} - \overline{\Gamma}^{q}_{\mu\kappa} T_{\alpha\beta q\nu} - \overline{\Gamma}^{q}_{\nu\kappa} T_{\alpha\beta\mu q} .$$

Pochodna kontrawariantna tensora kontrawariantnego pierwszego rzędu (wektora kontrawariantnego) T^{α}

$$T^{\alpha\kappa} = T^{\alpha;\kappa} = \nabla^{\kappa} T^{\alpha} = \frac{\delta T^{\alpha}}{\delta x^{\kappa}} \overset{df}{=} g^{\lambda\kappa} \left(\frac{\partial T^{\alpha}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\alpha}_{q\lambda} T^{q} \right) = \frac{\partial T^{\alpha}}{\partial x_{\kappa}} + \overline{\Gamma}^{\alpha}_{q\kappa} T^{q} .$$

Pochodna kontrawariantna tensora kontrawariantnego drugiego rzędu $T^{\alpha\beta}$

$$T^{\alpha\beta\kappa} = T^{\alpha\beta;\kappa} = \nabla^{\kappa} T^{\alpha\beta} = \frac{\delta T^{\alpha\beta}}{\delta x_{\kappa}} \overset{df}{=} g^{\lambda\kappa} \left(\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\alpha}_{q\lambda} T^{q\beta} + \Gamma^{\beta}_{q\lambda} T^{\alpha q} \right) = \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x_{\kappa}} + \overline{\Gamma}^{\alpha}_{q\kappa} T^{q\beta} + \overline{\Gamma}^{\beta}_{q\kappa} T^{\alpha q} .$$

Pochodna kontrawariantna tensora kontrawariantnego trzeciego rzędu $T^{\alpha\beta\mu}$

$$T^{\alpha\beta\mu\kappa} = T^{\alpha\beta\mu;\kappa} = \nabla^{\kappa} T^{\alpha\beta\mu} = \frac{\delta T^{\alpha\beta\mu}}{\delta x_{\kappa}} \overset{\mathrm{df}}{=} g^{\lambda\kappa}\left(\frac{\partial T^{\alpha\beta\mu}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\alpha}_{q\lambda} T^{q\beta\beta} + \Gamma^{\beta}_{q\lambda} T^{\alpha q\mu} + \Gamma^{\mu}_{q\lambda} T^{\alpha\beta q}\right) =$$

$$= \frac{\partial T^{\alpha\beta\mu}}{\partial x_{\kappa}} + \overline{\Gamma}^{\alpha}_{q\kappa} T^{q\beta\beta} + \overline{\Gamma}^{\beta}_{q\kappa} T^{\alpha q\mu} + \overline{\Gamma}^{\mu}_{q\kappa} T^{\alpha\beta q}.$$

Pochodna kontrawariantna tensora kontrawariantnego czwartego rzędu $T^{\alpha\beta\mu\nu}$

$$T^{\alpha\beta\mu\nu\kappa} = T^{\alpha\beta\mu\nu;\kappa} = \nabla^{\kappa} T^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{\delta T^{\alpha\beta\mu\nu}}{\delta x_{\kappa}} \overset{\mathrm{df}}{=}$$

$$= g^{\lambda\kappa}\left(\frac{\partial T^{\alpha\beta\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\alpha}_{q\lambda} T^{q\beta\beta\mu} + \Gamma^{\beta}_{q\lambda} T^{\alpha q\mu\nu} + \Gamma^{\mu}_{q\lambda} T^{\alpha\beta q\nu} + \Gamma^{\nu}_{q\lambda} T^{\alpha\beta\mu q}\right) =$$

$$= \frac{\partial T^{\alpha\beta\mu\nu}}{\partial x_{\kappa}} + \overline{\Gamma}^{\alpha}_{q\kappa} T^{q\beta\beta\mu} + \overline{\Gamma}^{\beta}_{q\kappa} T^{\alpha q\mu\nu} + \overline{\Gamma}^{\mu}_{q\kappa} T^{\alpha\beta q\nu} + \overline{\Gamma}^{\nu}_{q\kappa} T^{\alpha\beta\mu q}.$$

Pochodna kontrawariantna tensora mieszanego drugiego rzędu jednokrotnie kowariantnego i jednokrotnie kontrawariantnego T^{α}_{β}

$$T^{\alpha\kappa}_{\beta} = T^{\alpha;\kappa}_{\beta} = \nabla^{\kappa} T^{\alpha}_{\beta} = \frac{\delta T^{\alpha}_{\beta}}{\delta x_{\kappa}} \overset{\mathrm{df}}{=} g^{\lambda\kappa}\left(\frac{\partial T^{\alpha}_{\beta}}{\partial x^{\lambda}} - \Gamma^{q}_{\beta\lambda} T^{\alpha}_{q} + \Gamma^{\alpha}_{q\lambda} T^{q}_{\beta}\right) = \frac{\partial T^{\alpha}_{\beta}}{\partial x_{\kappa}} - \overline{\Gamma}^{q}_{\beta\kappa} T^{\alpha}_{q} + \overline{\Gamma}^{\alpha}_{q\kappa} T^{q}_{\beta}.$$

Pochodna kontrawariantna tensora mieszanego trzeciego rzędu jednokrotnie kowariantnego i dwukrotnie kontrawariantnego $T^{\alpha}_{\beta\mu}$

$$T^{\alpha\kappa}_{\beta\mu} = T^{\alpha;\kappa}_{\beta\mu} = \nabla^{\kappa} T^{\alpha}_{\beta\mu} = \frac{\delta T^{\alpha}_{\beta\mu}}{\delta x_{\kappa}} \overset{\mathrm{df}}{=} g^{\lambda\kappa}\left(\frac{\partial T^{\alpha}_{\beta\mu}}{\partial x^{\lambda}} - \Gamma^{q}_{\beta\lambda} T^{\alpha}_{q\mu} - \Gamma^{q}_{\mu\lambda} T^{\alpha}_{\beta q} + \Gamma^{\alpha}_{q\lambda} T^{q}_{\beta\mu}\right) =$$

$$= \frac{\partial T^{\alpha}_{\beta\mu}}{\partial x_{\kappa}} - \overline{\Gamma}^{q}_{\beta\kappa} T^{\alpha}_{q\mu} - \overline{\Gamma}^{q}_{\mu\kappa} T^{\alpha}_{\beta q} + \overline{\Gamma}^{\alpha}_{q\kappa} T^{q}_{\beta\mu}.$$

Pochodna kontrawariantna tensora mieszanego trzeciego rzędu dwukrotnie kowariantnego i jednokrotnie kontrawariantnego $T^{\alpha\beta}_{\mu}$

$$T^{\alpha\beta\kappa}_{\mu} = T^{\alpha\beta;\kappa}_{\mu} = \nabla^{\kappa} T^{\alpha\beta}_{\mu} = \frac{\delta T^{\alpha\beta}_{\mu}}{\delta x_{\kappa}} \overset{\mathrm{df}}{=} g^{\lambda\kappa}\left(\frac{\partial T^{\alpha\beta}_{\mu}}{\partial x^{\lambda}} - \Gamma^{q}_{\mu\lambda} T^{\alpha\beta}_{q} + \Gamma^{\alpha}_{q\lambda} T^{q\beta}_{\mu} + \Gamma^{\beta}_{q\lambda} T^{\alpha q}_{\mu}\right) =$$

$$= \frac{\partial T^{\alpha\beta}_{\mu}}{\partial x_{\kappa}} - \overline{\Gamma}^{q}_{\mu\kappa} T^{\alpha\beta}_{q} + \overline{\Gamma}^{\alpha}_{q\kappa} T^{q\beta}_{\mu} + \overline{\Gamma}^{\beta}_{q\kappa} T^{\alpha q}_{\mu}.$$

Pochodna kontrawariantna tensora mieszanego czwartego rzędu jednokrotnie kontrawariantnego i trójkrotnie kowariantnego $T^{\alpha}_{\beta\mu\nu}$

$$T^{\alpha\kappa}_{\beta\mu\nu} = T^{\alpha;\kappa}_{\beta\mu\nu} = \nabla^{\kappa} T^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \frac{\delta T^{\alpha}_{\beta\mu\nu}}{\delta x_{\kappa}} \overset{\mathrm{df}}{=} g^{\lambda\kappa}\left(\frac{\partial T^{\alpha}_{\beta\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} - \Gamma^{q}_{\beta\lambda} T^{\alpha}_{q\mu\mu} - \Gamma^{q}_{\mu\lambda} T^{\alpha}_{\beta q\nu} - \Gamma^{q}_{\nu\lambda} T^{\alpha}_{\beta\mu q} + \Gamma^{\alpha}_{q\lambda} T^{q}_{\beta\mu\nu}\right) =$$

$$= \frac{\partial T^{\alpha}_{\beta\mu\nu}}{\partial x_{\kappa}} - \overline{\Gamma}^{q}_{\beta\kappa} T^{\alpha}_{q\mu\mu} - \overline{\Gamma}^{q}_{\mu\kappa} T^{\alpha}_{\beta q\nu} - \overline{\Gamma}^{q}_{\nu\kappa} T^{\alpha}_{\beta\mu q} + \overline{\Gamma}^{\alpha}_{q\kappa} T^{q}_{\beta\mu\nu}.$$

- **Pochodna kowariantna (kontrawariantna) sumy i iloczynu tensorów**

Pochodna kowariantna (kontrawariantna) sumy tensorów tego samego rzędu i typu jest sumą pochodnych kowariantnych (kontrawariantnych) tych tensorów.

Pochodna kowariantna (kontrawariantna) iloczynu dowolnych dwóch tensorów jest sumą, składającą się z iloczynu pierwszego tensora i pochodnej kowariantnej (kontrawariantnej) drugiego tensora oraz iloczynu drugiego tensora i pochodnej kowariantnej (kontrawariantnej) pierwszego tensora.

Należy pamiętać, że pochodna kowariantna (kontrawariantna) kowariantnego oraz kontrawariantnego tensora metrycznego jest równa zeru

$$\frac{\delta g^{\mu\nu}}{\delta x^{\lambda}} = \frac{\delta g_{\mu\nu}}{\delta x^{\lambda}} = \frac{\delta g^{\mu\nu}}{\delta x_{\kappa}} = \frac{\delta g_{\mu\nu}}{\delta x_{\kappa}} = 0 .$$

- **Pochodne wyższych rzędów**

Zacytujmy odpowiedni fragment z pracy G. Riciiego i T. Levi-Civity:
Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications.
Mathematische Annalen **54** (1901) 125-201.

„Jeżeli litera o m wskaźnikach przedstawia tensor kowariantny, to przyjmować będziemy ogólnie, że ta sama litera z jednym wskaźnikiem więcej przedstawia jego pierwszą pochodną kowariantną względem przyjętej formy zasadniczej.

Na przykład, wychodząc z tensora rzędu 0, tj. z funkcji T i stosując kolejno odpowiednie wzory, można otrzymać pierwszy, drugi itd. tensor pochodny. Rozciągając na rzędy wyższe nazwy, będące w użyciu dla rzędu pierwszego, nazywamy niekiedy tensory T_{rs}, T_{rst} itd. pochodnymi kowariantnym rzędu drugiego, trzeciego itd. funkcji T."

Procedurę tę można rozszerzyć na pochodne kowariantne i kontrawariantne dowolnego tensora.

PRZYKŁAD

Startując od skalara T można utworzyć 24 tensory mieszane czwartego rzędu jednokrotnie kontrawariantne i trzykrotnie kowariantne:

$$T^{\alpha}_{\bullet\beta\mu\nu},\quad T^{\alpha}_{\bullet\beta\nu\mu},\quad T^{\alpha}_{\bullet\mu\beta\nu},\quad T^{\alpha}_{\bullet\mu\nu\beta}\quad T^{\alpha}_{\bullet\nu\beta\mu},\quad T^{\alpha}_{\bullet\nu\mu\beta},$$

$$T^{\bullet\alpha}_{\beta\bullet\mu\nu},\quad T^{\bullet\alpha}_{\beta\bullet\nu\mu},\quad T^{\bullet\alpha}_{\mu\bullet\beta\nu},\quad T^{\bullet\alpha}_{\mu\bullet\nu\beta},\quad T^{\bullet\alpha}_{\nu\bullet\beta\mu},\quad T^{\bullet\alpha}_{\nu\bullet\mu\beta},$$

$$T^{\bullet\bullet\alpha}_{\beta\mu\bullet\nu},\quad T^{\bullet\bullet\alpha}_{\beta\nu\bullet\mu},\quad T^{\bullet\bullet\alpha}_{\mu\beta\bullet\nu},\quad T^{\bullet\bullet\alpha}_{\mu\nu\bullet\beta},\quad T^{\bullet\bullet\alpha}_{\nu\beta\bullet\mu},\quad T^{\bullet\bullet\alpha}_{\nu\mu\bullet\beta},$$

$$T^{\bullet\bullet\bullet\alpha}_{\beta\mu\nu},\quad T^{\bullet\bullet\bullet\alpha}_{\beta\nu\mu},\quad T^{\bullet\bullet\bullet\alpha}_{\mu\beta\nu},\quad T^{\bullet\bullet\bullet\alpha}_{\mu\nu\beta},\quad T^{\bullet\bullet\bullet\alpha}_{\nu\beta\mu},\quad T^{\bullet\bullet\bullet\alpha}_{\nu\mu\beta}.$$

Pierwszy z nich skonstruowaliśmy następująco:

$$T^{\alpha} = \frac{\delta T}{\delta x_{\alpha}},$$

$$T^{\alpha}_{\bullet\beta} = \frac{\delta}{\delta x^{\beta}}\left(\frac{\delta T}{\delta x_{\alpha}}\right) = \frac{\delta^{2} T}{\delta x^{\beta}\delta x_{\alpha}},$$

$$T^{\alpha}_{\bullet\beta\mu} = \frac{\delta}{\delta x^{\mu}}\left[\frac{\delta}{\delta x^{\beta}}\left(\frac{\delta T}{\delta x_{\alpha}}\right)\right] = \frac{\delta}{\delta x^{\mu}}\left(\frac{\delta^{2} T}{\delta x^{\beta}\delta x_{\alpha}}\right) = \frac{\delta^{3} T}{\delta x^{\mu}\delta x^{\beta}\delta x_{\alpha}},$$

$$T^{\alpha}_{\bullet\beta\mu\nu} = \frac{\delta}{\delta x^{\nu}}\left\{\frac{\delta}{\delta x^{\mu}}\left[\frac{\delta}{\delta x^{\beta}}\left(\frac{\delta T}{\delta x_{\alpha}}\right)\right]\right\} = \frac{\delta}{\delta x^{\nu}}\left(\frac{\delta^{3} T}{\delta x^{\mu}\delta x^{\beta}\delta x_{\alpha}}\right) = \frac{\delta^{4} T}{\delta x^{\nu}\delta x^{\mu}\delta x^{\beta}\delta x_{\alpha}}.$$

- **Dywergencja tensora metrycznego**

$$g_{\alpha\beta;\beta} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} g_{\mu\beta} - \Gamma^{\mu}_{\beta\beta} g_{\alpha\mu}$$

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} = \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} g_{\mu\beta} + \Gamma^{\mu}_{\beta\beta} g_{\alpha\mu}$$

$$g_{\alpha\beta;\beta} = 0$$

$$g^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} g^{\mu\beta} + \Gamma^{\beta}_{\mu\lambda} g^{\alpha\mu}$$

$$\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} = -\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} g^{\mu\beta} - \Gamma^{\beta}_{\mu\beta} g^{\alpha\mu}$$

$$g^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$$

- **Dalsze własności tensora metrycznego**
  Różniczkowanie wyrażenia

$$g_{\mu\sigma} g^{\nu\sigma} = \delta^{\nu}_{\mu}$$

daje

$$g^{\nu\sigma} \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\alpha}} = -g_{\mu\sigma} \frac{\partial g^{\nu\sigma}}{\partial x^{\alpha}} .$$

Po przemnożeniu obu stron tej równości przez $g_{\nu\tau}$ i zsumowaniu po ν (w pierwszym przypadku) lub przemnożeniu przez $g^{\mu\tau}$ i zsumowaniu po μ (w drugim przypadku), otrzymujemy

$$g_{\nu\tau} g^{\nu\sigma} \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\alpha}} = -g_{\nu\tau} g_{\mu\sigma} \frac{\partial g^{\nu\sigma}}{\partial x^{\alpha}}$$

$$g_{\nu\tau} g^{\nu\sigma} = \delta^{\sigma}_{\tau}$$

$$\delta^{\sigma}_{\tau} \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\alpha}} = -g_{\nu\tau} g_{\mu\sigma} \frac{\partial g^{\nu\sigma}}{\partial x^{\alpha}}$$

$$\boxed{\frac{\partial g_{\mu\tau}}{\partial x^{\alpha}} = -g_{\nu\tau} g_{\mu\sigma} \frac{\partial g^{\nu\sigma}}{\partial x^{\alpha}}}$$

lub

$$g^{\mu\tau} g^{\nu\sigma} \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\alpha}} = -g^{\mu\tau} g_{\mu\sigma} \frac{\partial g^{\nu\sigma}}{\partial x^{\alpha}}$$

$$g^{\mu\tau} g_{\mu\sigma} = \delta^{\tau}_{\sigma}$$

$$g^{\mu\tau} g^{\nu\sigma} \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\alpha}} = -\delta^{\tau}_{\sigma} \frac{\partial g^{\nu\sigma}}{\partial x^{\alpha}}$$

$$\boxed{\frac{\partial g^{\nu\tau}}{\partial x^{\alpha}} = -g^{\mu\tau} g^{\nu\sigma} \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\alpha}}}$$

10 PRZESTRZEŃ RIEMANNA

- **Płaskie przestrzenie z metryką**

Badane poprzednio przestrzenie były płaskie, istniał ortonormalny układ współrzędnych $\{0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$, względem którego różniczka odległości ds między każdymi dwoma blisko położonymi punktami spełniała zależność $(ds)^2 = \sum_{\mu=1}^{n} (dx^\mu)^2$. Układ ten był wyjściowym układem współrzędnych z tensorem metrycznym $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$. Wprowadzenie współrzędnych krzywoliniowych $x'^\mu = f_\mu(x^1, x^2, x^3, x^4)$ pozwalało na określenie w każdym punkcie przestrzeni tensora metrycznego $g'_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}$. Różniczkę odległości między dwoma blisko położonymi punktami x'^α i $x'^\alpha + dx'^\alpha$ można było wyznaczyć ze wzoru $ds^2 = g'_{\alpha\beta} dx'^\alpha dx'^\beta$.

- **Przestrzeń Riemanna jako przestrzeń zakrzywiona z metryką**

Wyjściowym układem współrzędnych niech będzie dowolny prostoliniowy lub krzywoliniowy układ współrzędnych X^1, X^2, X^3, X^4. Niech (x^1, x^2, x^3, x^4) będą kontrawariantnymi współrzędnymi punktu P, które przy zmianie układu $x'^\mu = f^\mu(x^1, x^2, x^3, x^4)$ transformują się według wzorów $dx'^\mu = \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu$, $\quad (\mu = 1,2,3,4)$.

Czterowymiarowym **tensorem g-krotnie kontrawariantnym i d-krotnie kowariantnym** $T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_g}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_d}$ będziemy nazywali zbiór 4^{g+d} wielkości, zwanych jego składowymi (współrzędnymi), które przy zmianie układu współrzędnych

$$x'^\mu = f^\mu(x^1, x^2, x^3, x^4), \quad dx'^\mu = \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu, \quad (\mu = 1,2,3,4)$$

transformują się według wzorów

$$T'^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_g}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_d} = \sum_{\alpha_1=1}^{4} \cdots \sum_{\alpha_g=1}^{4} \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\mu_g}}{\partial x^{\alpha_g}} \sum_{\beta_1=1}^{4} \cdots \sum_{\beta_d=1}^{4} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\beta_d}}{\partial x'^{\nu_d}} T^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_g}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_d}, \text{ lub}$$

$$T'^{\mu_1\mu_2\mu_3\cdots\mu_g}_{\nu_1\nu_2\nu_3\cdots\nu_d} = \sum_{\alpha_1=1}^{4} \cdots \sum_{\alpha_g=1}^{4} \frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial x'_{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x_{\alpha_g}}{\partial x'_{\mu_g}} \sum_{\beta_1=1}^{4} \cdots \sum_{\beta_d=1}^{4} \frac{\partial x'_{\nu_1}}{\partial x_{\beta_1}} \cdots \frac{\partial x'_{\nu_d}}{\partial x_{\beta_d}} T^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_g}_{\beta_1\beta_2\beta_3\cdots\beta_d}.$$

Liczbę $(d + g)$ jest rzędem tensora.

Przestrzenią Riemanna nazywamy przestrzeń z zadanym w każdym jej punkcie tensorem metrycznym $g_{\mu\nu}$, kowariantnym, symetrycznym, drugiego rzędu. Przy pomocy tego tensora określany jest kwadrat różniczki odległości dwóch blisko siebie położonych punktów (forma metryczna) $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. Tensor metryczny przestrzeni Riemanna można przedstawić w postaci sumy dwóch składników. Pierwszy składnik związany jest z przyjętym wyjściowym układem współrzędnych. Drugi składnik opisuje deformacje przestrzeni.

- **Kowariantny tensor metryczny i kowariantne wektory bazowe**

$$\cos\angle(\mathbf{e}_\mu,\mathbf{e}_\nu) \overset{df}{=} \frac{g_{\mu\nu}}{\sqrt{g_{\mu\mu}}\sqrt{g_{\nu\nu}}}$$

$$\mathbf{e}_\mu\cdot\mathbf{e}_\nu \overset{df}{=} e_\mu e_\nu \cos\angle(\mathbf{e}_\mu,\mathbf{e}_\nu)$$

$$\mathbf{e}_\mu\cdot\mathbf{e}_\nu \overset{df}{=} g_{\mu\nu}$$

$$g_{\mu\nu} = g^0_{\mu\nu} + g^G_{\mu\nu}$$

$$\cos\angle(\mathbf{e}^0_\mu,\mathbf{e}^0_\nu) \overset{df}{=} \frac{g^0_{\mu\nu}}{\sqrt{g^0_{\mu\mu}}\sqrt{g^0_{\nu\nu}}}$$

$$\mathbf{e}^0_\mu\cdot\mathbf{e}^0_\nu \overset{df}{=} e^0_\mu e^0_\nu \cos\angle(\mathbf{e}^0_\mu,\mathbf{e}^0_\nu)$$

$$\mathbf{e}^0_\mu\cdot\mathbf{e}^0_\nu \overset{df}{=} g^0_{\mu\nu}$$

$$\cos\angle(\mathbf{e}_\mu,\mathbf{e}_\mu) = 1$$

$$e_\mu = \sqrt{g_{\mu\mu}}$$

$$\mathbf{e}_\mu\cdot\mathbf{e}_\nu = g^0_{\mu\nu} + g^G_{\mu\nu} = \mathbf{e}^0_\mu\cdot\mathbf{e}^0_\nu + g^G_{\mu\nu}$$

$$\cos\angle(\mathbf{e}_\mu,\mathbf{e}_\nu) = \frac{g^0_{\mu\nu}+g^G_{\mu\nu}}{\sqrt{g^0_{\mu\mu}+g^G_{\mu\mu}}\sqrt{g^0_{\nu\nu}+g^G_{\nu\nu}}}$$

$\mathbf{e}^0_\mu$ = wektory bazowe wyjściowego układu współrzędnych

$\mathbf{e}_\mu$ = lokalne wektory bazowe przestrzeni Riemanna

$g^0_{\mu\nu}$ = składnik tensora metrycznego przestrzeni Riemanna związany z wyjściowym układem współrzędnych

$g^G_{\mu\nu}$ = składnik tensora metrycznego przestrzeni Riemanna opisujący deformacje przestrzeni

- **Kontrawariantny tensor metryczny** $g^{\mu\nu}$

$$g^{\mu\nu} \overset{df}{=} \frac{\Delta^{\nu\mu}}{g} = \frac{\Delta^{\mu\nu}}{g} = g^{\nu\mu}, \qquad g = \det\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{bmatrix} \neq 0$$

$$\Delta^{\mu\beta} = g g^{\mu\beta}$$

$$g_{\mu\alpha}\Delta^{\mu\beta} = g\delta^\beta_\alpha \quad\longrightarrow\quad \boxed{g_{\mu\alpha}g^{\mu\beta} = \delta^\beta_\alpha}$$

Analogiczne relacje zachodzą między kontrawariantnym tensorem metrycznym przestrzeni Riemanna i kontrawariantnymi wektorami bazowymi.

- **Lokalny układ współrzędnych i styczna przestrzeń**

Tensor metryczny przestrzeni Riemanna pozwala wprowadzić w każdym punkcie tzw. lokalny prostoliniowy układ współrzędnych oraz związaną z nim tzw. styczną przestrzeń. Wykorzystując fakt, że w danym punkcie P składowe tensora metrycznego są stałe, można jednoznacznie skonstruować lokalny prostoliniowy układ współrzędnych
$\{P,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4\}$, $\quad g_{\mu\nu} = \mathbf{e}_\mu\cdot\mathbf{e}_\nu$.

- **Iloczyn skalarny wektorów kontrawariantnych**
  Iloczynem skalarnym wektorów kontrawariantnych

$\mathbf{A} = \left(A^1, A^2, A^3, A^4\right) = A^\mu \mathbf{e}_\mu$ oraz $\mathbf{B} = \left(B^1, B^2, B^3, B^4\right) = B^\nu \mathbf{e}_\nu$,
zaczepionych w tym samym punkcie, nazwamy skalar

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \overset{\mathrm{df}}{=} AB\cos\angle\left(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu\right) = A^\mu B^\nu \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = A^\mu B^\nu g_{\mu\nu}}$$

- **Iloczyn skalarny wektorów kowariantnych**
  Iloczynem skalarnym wektorów kowariantnych

$\mathbf{A} = \left(A^1, A^2, A^3, A^4\right) = A^\mu \mathbf{e}_\mu$ oraz $\mathbf{B} = \left(B^1, B^2, B^3, B^4\right) = B^\nu \mathbf{e}_\nu$,
zaczepionych w tym samym punkcie, nazwamy skalar

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \overset{\mathrm{df}}{=} AB\cos\angle\left(\mathbf{e}^\mu, \mathbf{e}^\nu\right) = A_\mu B_\nu \mathbf{e}^\mu \cdot \mathbf{e}^\nu = A_\mu B_\nu g^{\mu\nu}}$$

- **Rzeczywista wartość wektora kontrawariantnego**

$$\boxed{A \overset{\mathrm{df}}{=} \sqrt{\varepsilon\, g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu}}$$

ε = liczba znakowa przyjmująca wartości $+1$ lub -1, aby A było liczbą rzeczywistą

- **Rzeczywista wartość wektora kowariantnego**

$$\boxed{A \overset{\mathrm{df}}{=} \sqrt{\varepsilon\, g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu}}$$

- **Warunek prostopadłości (ortogonalności) wektorów**
  Dwa wektory A^μ i B^ν zaczepione w tym samym punkcie będziemy nazywali prostopadłymi (ortogonalnymi), jeżeli

$g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = 0$.

- **Operacje na tensorach w przestrzeni Riemanna**
  Wszystkie omówione wcześniej w niezbędniku operacje na tensorach można wykonywać również w przestrzeni Riemanna. Działaniami algebraicznymi, które można przeprowadzać jedynie na tensorach określonych w danym punkcie, są:

  Dodawanie tensorów
  Mnożenie tensorów
  Zwężanie (kontrakcja) tensorów
  Podnoszenie i obniżanie wskaźników

Operacjami w zakresie analizy tensorów są:

  Pochodna tensora
  Pochodna absolutna tensora
  Dywergencja tensora
  Gradient funkcji skalarnej
  Laplasjan funkcji skalarnej

- **Równania geodetyki**

Geodetyką (linią geodezyjną) nazywamy najkrótszą linię łączącą dwa blisko siebie położone punkty. Wzdłuż linii geodezyjnej wersory stycznych do niej są względem siebie przesunięte równolegle.

Niech będzie dana linia o równaniu parametrycznym $x^\alpha = x^\alpha(s), \quad (\alpha = 1,2,3,4)$.

Wektor $\mathbf{A} = \sum_{\alpha=1}^{4} \frac{dx^\alpha}{ds}\mathbf{e}_\alpha, \quad |\mathbf{A}| = \sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}} = 1$ jest jednostkowym wektorem stycznym do danej linii. Będzie ona geodetyką wtedy i tylko wtedy, gdy pochodna absolutna z wektora stycznego do niej będzie równa zeru.

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\delta A^\alpha}{\delta s} = \frac{dA^\alpha}{ds} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} A^\mu \frac{dx^\nu}{ds} = 0 \\ &A^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds} \\ &\alpha = 1,2,3,4 \end{aligned}}$$

$$\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{dx^\alpha}{ds}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{dx^\alpha}{ds}\right) + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0}$$

Równanie geodetyki

Aby jednoznacznie rozwiązać układ tych równań różniczkowych, należy zadać warunki początkowe:

$x^\alpha(0)$ = początkowy punkt geodetyki,

$\left(\frac{dx^\alpha}{ds}\right)_0$ = wektor styczny do geodetyki w punkcie początkowym.

- **Geodetyka zerowa**.

Geodetyką zerową nazywamy geodetykę, dla której $ds = 0$. Po takich liniach porusza się światło. Zwróćmy uwagę na to, że w czasoprzestrzeni odległość między dwoma różnymi punktami może być równa zeru, pomimo że punkty te nie pokrywają się.

TWIERDZENIE

Geodetyka zerowa jest linią

$x^\alpha = x^\alpha(u), \quad (\alpha = 1,2,3,4),$

spełniającą równania różniczkowe

$$\frac{d^2x^\alpha}{du^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{du}\frac{dx^\nu}{du} = 0,$$

których całką pierwszą jest

$$g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{du}\frac{dx^\nu}{du} = 0.$$

Aby jednoznacznie rozwiązać układ tych równań różniczkowych, należy zadać warunki początkowe:

$x^\alpha(0)$ = początkowy punkt geodetyki zerowej,

$\left(\frac{dx^\alpha}{du}\right)_0$ = wektor styczny do geodetyki zerowej w punkcie początkowym.

11 TENSOR KRZYWIZNY

- **Mieszany tensor krzywizny Grossmanna czwartego rzędu**

Przestrzeń n-wymiarową nazywamy zakrzywioną, jeżeli nie istnieje ortonormalny układ współrzędnych względem którego różniczka odległości ds między każdymi dwoma blisko położonymi punktami spełnia zależność $(ds)^2 = \sum_{\mu=1}^{n} (dx^\mu)^2$.

Miarą krzywizny przestrzeni zdarzeń (czasoprzestrzeni) jest przyrost współrzędnej kontrawariantnej wektora związany z przesunięciem równoległym wzdłuż zamkniętego konturu.

$$\Delta A^\alpha = -\oint \Gamma^\alpha_{\beta\mu} A^\beta dx^\mu$$

Twierdzenie Stokesa

$$\oint B^\mu dx^\mu = \tfrac{1}{2}\int \left(\frac{\partial B^\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial B^\mu}{\partial x^\nu} \right) dS^{\mu\nu}$$

$$dS^{\mu\nu} = d_1 x^\mu d_2 x^\nu - d_1 x^\nu d_2 x^\mu$$

$$dS^{\mu\nu} = -dS^{\nu\mu}$$

$$B^\mu = \Gamma^\alpha_{\beta\mu} A^\beta$$

$$B^\nu = \Gamma^\alpha_{\beta\nu} A^\beta$$

$$\frac{\partial A^\beta}{\partial x^\mu} = -\Gamma^\beta_{\sigma\mu} A^\sigma$$

$$\frac{\partial A^\beta}{\partial x^\nu} = -\Gamma^\beta_{\sigma\nu} A^\sigma$$

$$-\Delta A^\alpha = \oint \Gamma^\alpha_{\beta\mu} A^\beta dx^\mu =$$

$$= \tfrac{1}{2}\int \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \Gamma^\alpha_{\beta\nu} A^\beta - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Gamma^\alpha_{\beta\mu} A^\beta \right) dS^{\mu\nu}$$

$$= \tfrac{1}{2}\int \left(\frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} A^\beta + \Gamma^\alpha_{\beta\nu} \frac{\partial A^\beta}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} A^\beta - \Gamma^\alpha_{\beta\mu} \frac{\partial A^\beta}{\partial x^\nu} \right) dS^{\mu\nu} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\int \left(\frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} A^\beta - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} A^\beta - \Gamma^\alpha_{\beta\nu}\Gamma^\beta_{\sigma\mu} A^\sigma + \Gamma^\alpha_{\beta\mu}\Gamma^\beta_{\sigma\nu} A^\sigma \right) dS^{\mu\nu} =$$

W ostatnich dwóch członach zamienimy między sobą wskaźniki β i σ.

$$= \tfrac{1}{2}\int \left(\frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} A^\beta - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} A^\beta - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\beta\mu} A^\beta + \Gamma^\alpha_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma_{\beta\nu} A^\beta \right) dS^{\mu\nu} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\int \left(\frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\beta\mu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma_{\beta\nu} \right) A^\beta dS^{\mu\nu} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\int R^\alpha_{\beta\mu\nu} A^\beta dS^{\mu\nu} =$$

Dla nieskończenie małego konturu zamkniętego mamy

$$= \tfrac{1}{2} R^\alpha_{\beta\mu\nu} A^\beta \int dS^{\mu\nu}$$

$$\Delta A^\alpha = -\tfrac{1}{2} R^\alpha_{\beta\mu\nu} A^\beta \int dS^{\mu\nu}$$

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\beta\mu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma_{\beta\nu}$$

ΔA^α = infinitezymalny przyrost współrzędnej kontrawariantnej wektora związany z przesunięciem równoległym wzdłuż infinitezymalnego zamkniętego konturu będącego infinitezymalnym równoległobokiem o infinitezymalnych bokach $d_1 x^\mu$ i $d_2 x^\nu$

$dS^{\mu\nu}$ = antysymetryczny tensor drugiego rzędu, którego składowe są rzutami infinitezymalnego elementu powierzchni na płaszczyzny wyznaczone przez osie układu współrzędnych x^μ, x^ν

$R^\alpha_{\beta\mu\nu}$ = mieszany tensor krzywizny Grossmanna czwartego rzędu

- **Własności tensora krzywizny Grossmanna**

$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = -R^{\alpha}_{\beta\nu\mu}$ Tensor $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}$ jest antysymetryczny ze względu na wskaźniki μ i ν.
Suma wszystkich jego składowych jest równa zeru.

$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu = \nu$

$$\sum_{\alpha=1}^{4} R^{\alpha}_{\alpha\mu\nu} = 0$$

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} + R^{\alpha}_{\nu\beta\mu} + R^{\alpha}_{\mu\nu\beta} = 0$$

$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu;\sigma} + R^{\alpha}_{\beta\sigma\mu;\nu} + R^{\alpha}_{\beta\nu\sigma;\mu} = 0$ Tożsamości Bianchiego

Tensor $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}$ posiada w przestrzeni n-wymiarowej $\left(n^4 - n^3\right)$ niezerowych składowych.

Przestrzeń jest płaska (euklidesowa) wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie składowe $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = 0$.

- **Kowariantny tensor krzywizny Riemanna-Christoffela czwartego rzędu**

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} \overset{\mathrm{df}}{=} g_{\alpha\sigma} R^{\sigma}_{\beta\mu\nu}, \quad R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{\partial \begin{bmatrix} \beta\,\nu \\ \alpha \end{bmatrix}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \begin{bmatrix} \beta\,\mu \\ \alpha \end{bmatrix}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{\sigma}_{\beta\nu} \begin{bmatrix} \alpha\,\mu \\ \tau \end{bmatrix} + \Gamma^{\sigma}_{\beta\mu} \begin{bmatrix} \alpha\,\nu \\ \tau \end{bmatrix}$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\mu}} + \frac{\partial^2 g_{\beta\mu}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 g_{\beta\nu}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\mu}} \right) + g_{\sigma\tau}\left(\Gamma^{\sigma}_{\beta\mu}\Gamma^{\tau}_{\alpha\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\beta\nu}\Gamma^{\tau}_{\alpha\mu} \right)$$

- **Własności tensora krzywizny Riemanna-Christoffela** $R_{\alpha\beta\mu\nu}$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu}, \quad R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu}$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu = \nu, \quad R_{\alpha\beta\mu\nu} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \beta$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0$$

Kowariantny tensor krzywizny $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ czwartego rzędu posiada w przestrzeni n wymiarowej $\frac{1}{12} n^2 \left(n^2 - 1\right)$ niezerowych niezależnych składowych. W czterowymiarowej przestrzeni tensor $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ posiada dwadzieścia niezerowych niezależnych składowych.

$$R^{\lambda}_{\beta\mu\nu} = g^{\alpha\lambda} R_{\alpha\beta\mu\nu}$$

$R_{\alpha\beta\mu\nu;\gamma} + R_{\alpha\beta\nu\gamma;\mu} + R_{\alpha\beta\gamma\mu;\nu} = 0$ Tożsamości Bianchiego

- **Podstawowe kryterium zakrzywienia przestrzeni**

Przestrzeń jest zakrzywiona wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jedna ze składowych tensora $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}$ jest różna od zera.

$$\Delta A^{\alpha} = -\frac{1}{2}\int R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} A^{\beta} dS^{\mu\nu}$$

$$\begin{aligned}\Delta A^{\alpha} = -\frac{1}{2}\int \big(& R^{\alpha}_{\beta 11} A^{\beta} dS^{11} + R^{\alpha}_{\beta 12} A^{\beta} dS^{12} + R^{\alpha}_{\beta 13} A^{\beta} dS^{13} + R^{\alpha}_{\beta 14} A^{\beta} dS^{14} + \\ &+ R^{\alpha}_{\beta 21} A^{\beta} dS^{21} + R^{\alpha}_{\beta 22} A^{\beta} dS^{22} + R^{\alpha}_{\beta 23} A^{\beta} dS^{23} + R^{\alpha}_{\beta 24} A^{\beta} dS^{24} + \\ &+ R^{\alpha}_{\beta 31} A^{\beta} dS^{31} + R^{\alpha}_{\beta 32} A^{\beta} dS^{32} + R^{\alpha}_{\beta 33} A^{\beta} dS^{33} + R^{\alpha}_{\beta 34} A^{\beta} dS^{34} + \\ &+ R^{\alpha}_{\beta 41} A^{\beta} dS^{41} + R^{\alpha}_{\beta 42} A^{\beta} dS^{42} + R^{\alpha}_{\beta 43} A^{\beta} dS^{43} + R^{\alpha}_{\beta 44} A^{\beta} dS^{44}\big)\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} R^{\alpha}_{\beta 11} & R^{\alpha}_{\beta 12} & R^{\alpha}_{\beta 13} & R^{\alpha}_{\beta 14} \\ R^{\alpha}_{\beta 21} & R^{\alpha}_{\beta 22} & R^{\alpha}_{\beta 23} & R^{\alpha}_{\beta 24} \\ R^{\alpha}_{\beta 31} & R^{\alpha}_{\beta 32} & R^{\alpha}_{\beta 33} & R^{\alpha}_{\beta 34} \\ R^{\alpha}_{\beta 41} & R^{\alpha}_{\beta 42} & R^{\alpha}_{\beta 43} & R^{\alpha}_{\beta 44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & R^{\alpha}_{\beta 12} & R^{\alpha}_{\beta 13} & R^{\alpha}_{\beta 14} \\ -R^{\alpha}_{\beta 12} & 0 & R^{\alpha}_{\beta 23} & R^{\alpha}_{\beta 24} \\ -R^{\alpha}_{\beta 13} & -R^{\alpha}_{\beta 23} & 0 & R^{\alpha}_{\beta 34} \\ -R^{\alpha}_{\beta 14} & -R^{\alpha}_{\beta 24} & -R^{\alpha}_{\beta 34} & 0 \end{bmatrix}$$

$$dS^{\mu\nu} = -dS^{\nu\mu}$$

$$\begin{aligned}\Delta A^{\alpha} = &-R^{\alpha}_{\beta 12} A^{\beta}\int dS^{12} - R^{\alpha}_{\beta 13} A^{\beta}\int dS^{13} - R^{\alpha}_{\beta 14} A^{\beta}\int dS^{14} - \\ &- R^{\alpha}_{\beta 23} A^{\beta}\int dS^{23} - R^{\alpha}_{\beta 24} A^{\beta}\int dS^{24} - R^{\alpha}_{\beta 34} A^{\beta}\int dS^{34}\end{aligned}$$

- **Różnica pochodnych drugiego rzędu wektora kontrawariantnego**

$$\frac{\delta^2}{\delta x^{\nu}\delta x^{\mu}} = \frac{\delta}{\delta x^{\nu}}\left(\frac{\delta}{\delta x^{\mu}}\right)$$

$$\frac{\delta^2}{\delta x^{\mu}\delta x^{\nu}} = \frac{\delta}{\delta x^{\mu}}\left(\frac{\delta}{\delta x^{\nu}}\right)$$

$$\frac{\delta A^{\alpha}}{\delta x^{\mu}} = \frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} A^{\beta}$$

$$\frac{\partial^2 A^{\alpha}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\mu}} = \frac{\partial^2 A^{\alpha}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu}\frac{\partial A^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} = \Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}\frac{\partial A^{\lambda}}{\partial x^{\nu}}$$

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu}\Gamma^{\lambda}_{\beta\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}\Gamma^{\lambda}_{\beta\nu}$$

$$\frac{\delta}{\delta x^{\nu}}\left(\frac{\delta A^{\alpha}}{\delta x^{\mu}}\right) = \frac{\delta}{\delta x^{\nu}}\left(\frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} A^{\beta}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} A^{\beta}\right) + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu}\left(\frac{\partial A^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\lambda}_{\beta\mu} A^{\beta}\right)$$

$$\frac{\delta}{\delta x^{\mu}}\left(\frac{\delta A^{\alpha}}{\delta x^{\nu}}\right) = \frac{\delta}{\delta x^{\mu}}\left(\frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} A^{\beta}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} A^{\beta}\right) + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}\left(\frac{\partial A^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\lambda}_{\beta\nu} A^{\beta}\right)$$

$$\boxed{\frac{\delta^2 A^{\alpha}}{\delta x^{\nu}\delta x^{\mu}} - \frac{\delta^2 A^{\alpha}}{\delta x^{\mu}\delta x^{\nu}} = -R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} A^{\beta}}$$

- **Różnica pochodnych drugiego rzędu wektora kowariantnego**

$$\boxed{\frac{\delta^2 A_{\alpha}}{\delta x^{\nu}\delta x^{\mu}} - \frac{\delta^2 A_{\alpha}}{\delta x^{\mu}\delta x^{\nu}} = R^{\beta}_{\alpha\mu\nu} A_{\beta}}$$

- **Kowariantny tensor krzywizny Ricciego drugiego rzędu**

Zwężając mieszany tensor krzywizny $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}$ względem wskaźników α i ν otrzymamy kowariantny tensor drugiego rzędu, zwany tensorem Ricciego.

$$\boxed{R_{\beta\mu} \overset{df}{=} R^{\nu}_{\beta\mu\nu} \quad \text{lub} \quad R_{\beta\mu} \overset{df}{=} g^{\alpha\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu}}$$

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\nu}$$

$$\alpha = \nu$$

$$\Gamma^{\nu}_{\beta\nu} = \frac{1}{2}\frac{\partial \ln g}{\partial x^{\beta}}$$

$$\boxed{R_{\beta\mu} = \frac{\partial \Gamma^{\nu}_{\beta\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \Gamma^{\nu}_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{\nu}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\mu} + \Gamma^{\nu}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\nu}}$$

$$R_{\beta\mu} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \ln g}{\partial x^{\beta}\partial x^{\mu}} - \frac{1}{2}\Gamma^{\sigma}_{\beta\mu}\frac{\partial \ln g}{\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial \Gamma^{\nu}_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\nu}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\nu}$$

Jeżeli $g = \text{const}$, to $R_{\beta\mu} = -\dfrac{\partial \Gamma^{\nu}_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\nu}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\nu}$.

- **Własności tensora Ricciego**

$$R_{\beta\mu} \overset{df}{=} R^{\nu}_{\beta\mu\nu}$$
$$R^{\nu}_{\beta\mu\nu} = g^{\sigma\nu} R_{\sigma\beta\mu\nu}$$
$$R_{\sigma\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\sigma\beta}$$
$$R_{\mu\nu\sigma\beta} = -R_{\mu\nu\beta\sigma}$$
$$R_{\mu\nu\beta\sigma} = -R_{\nu\mu\beta\sigma}$$
$$g^{\sigma\nu} = g^{\nu\sigma}$$
$$R_{\mu\beta} = g^{\nu\sigma} R_{\nu\mu\beta\sigma}$$

$$R_{\beta\mu} = R^{\nu}_{\beta\mu\nu} = g^{\sigma\nu}R_{\sigma\beta\mu\nu} = g^{\sigma\nu}R_{\mu\nu\sigma\beta} = -g^{\sigma\nu}R_{\mu\nu\beta\sigma} = g^{\nu\sigma}R_{\nu\mu\beta\sigma} = R_{\mu\beta}$$

$$R_{\beta\mu} = R_{\mu\beta}$$

Kowariantny tensor drugiego rzędu $R_{\beta\mu}$ jest tensorem symetrycznym.

Tensor krzywizny Ricciego w przestrzeni n wymiarowej jako tensor symetryczny posiada $\frac{1}{2}\left(n^2 + n\right)$ niezależnych składowych. W przestrzeni czterowymiarowej tensor $R_{\beta\mu}$ posiada dziesięć niezależnych składowych.

UWAGA

Tensor Ricciego bywa też definiowany jako

$$R^{*}_{\beta\nu} \overset{df}{=} R^{\mu}_{\beta\mu\nu} \text{ lub } R^{*}_{\beta\nu} \overset{df}{=} g^{\alpha\mu}R_{\alpha\beta\mu\nu},$$

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\nu} \xrightarrow{\alpha=\mu} R^{*}_{\beta\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\beta\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{\mu}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\mu} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\nu}.$$

Zamieniając rolami w ostatnim równaniu wskaźniki ν i μ , otrzymujemy:

$$R^{*}_{\beta\mu} = \frac{\partial \Gamma^{\nu}_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}}{\partial x^{\mu}} - \Gamma^{\nu}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\nu} + \Gamma^{\nu}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\mu} = -R_{\beta\mu}.$$

Zwężenie tensora $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}$ względem wskaźników α i β daje zero

$$R^{**}_{\mu\nu} \overset{df}{=} R^{\beta}_{\beta\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\beta}_{\beta\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \Gamma^{\beta}_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{\beta}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\mu} + \Gamma^{\beta}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\beta}_{\beta\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \Gamma^{\beta}_{\beta\nu}}{\partial x^{\mu}} - \Gamma^{\beta}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\mu} + \Gamma^{\beta}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\mu} = 0 .$$

- **Mieszany tensor krzywizny Einsteina**

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} \overset{\mathrm{df}}{=} g_{\alpha\sigma} R^{\sigma}_{\beta\mu\nu}$$

Tożsamość Bianchiego:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\omega} + R_{\alpha\beta\nu\omega;\mu} + R_{\alpha\beta\omega\mu;\nu} = 0$$

$$R_{\alpha\beta\nu\omega;\mu} = -R_{\beta\alpha\nu\omega;\mu}$$
$$R_{\alpha\beta\omega\mu;\nu} = -R_{\alpha\beta\mu\omega;\nu}$$
$$g^{\alpha\mu}_{;\omega} = 0$$
$$g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\beta\nu}$$
$$g^{\beta\nu}_{;\mu} = 0$$
$$g^{\beta\nu} R_{\beta\alpha\nu\omega} = R_{\alpha\omega}$$
$$g^{\alpha\mu}_{;\nu} = 0$$
$$g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\mu\omega} = R_{\beta\omega}$$
$$g^{\beta\nu}_{;\omega} = 0$$
$$g^{\beta\nu} R_{\beta\nu} = R$$
$$g^{\alpha\mu}_{;\mu} = 0$$
$$g^{\alpha\mu} R_{\alpha\omega} = R^{\mu}_{\omega}$$
$$g^{\beta\nu}_{;\nu} = 0$$
$$g^{\beta\nu} R_{\beta\omega} = R^{\nu}_{\omega}$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\omega} - R_{\beta\alpha\nu\omega;\mu} - R_{\alpha\beta\mu\omega;\nu} = 0$$

Przeprowadzimy zwężanie w każdym członie po pierwszym i trzecim wskaźniku.

$$g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \left(R_{\alpha\beta\mu\nu;\omega} - R_{\beta\alpha\nu\omega;\mu} - R_{\alpha\beta\mu\omega;\nu} \right) = 0$$

$$\left(g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\mu\nu} \right)_{;\omega} = g^{\alpha\mu}_{;\omega} R_{\alpha\beta\mu\nu} + g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\mu\nu;\omega}$$
$$g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\mu\nu;\omega} = R_{\beta\nu;\omega}$$
$$\left(g^{\beta\nu} R_{\beta\alpha\nu\omega} \right)_{;\mu} = g^{\beta\nu}_{;\mu} R_{\beta\alpha\nu\omega} + g^{\beta\nu} R_{\beta\alpha\nu\omega;\mu}$$
$$g^{\beta\nu} R_{\beta\alpha\nu\omega;\mu} = R_{\alpha\omega;\mu}$$
$$\left(g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\mu\omega} \right)_{;\nu} = g^{\alpha\mu}_{;\nu} R_{\alpha\beta\mu\omega} + g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\mu\omega;\nu}$$
$$g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\mu\omega;\nu} = R_{\beta\omega;\nu}$$

$$g^{\beta\nu} R_{\beta\nu;\omega} - g^{\alpha\mu} R_{\alpha\omega;\mu} - g^{\beta\nu} R_{\beta\omega;\nu} = 0$$

$$\left(g^{\beta\nu} R_{\beta\nu} \right)_{;\omega} = g^{\beta\nu}_{;\omega} R_{\beta\nu} + g^{\beta\nu} R_{\beta\nu;\omega}$$
$$g^{\beta\nu} R_{\beta\nu;\omega} = R_{;\omega}$$
$$\left(g^{\alpha\mu} R_{\alpha\omega} \right)_{;\mu} = g^{\alpha\mu}_{;\mu} R_{\alpha\omega} + g^{\alpha\mu} R_{\alpha\omega;\mu}$$
$$g^{\alpha\mu} R_{\alpha\omega;\mu} = R^{\mu}_{\omega;\mu}$$
$$\left(g^{\beta\nu} R_{\beta\omega} \right)_{;\nu} = g^{\beta\nu}_{;\nu} R_{\beta\omega} + g^{\beta\nu} R_{\beta\omega;\nu}$$
$$g^{\beta\nu} R_{\beta\omega;\nu} = R^{\nu}_{\omega;\nu}$$

$$R_{;\omega} - R^{\mu}_{\omega;\mu} - R^{\nu}_{\omega;\nu} = 0$$
$$R_{;\omega} - R^{\mu}_{\omega;\mu} - R^{\mu}_{\omega;\mu} = 0$$
$$\delta^{\mu}_{\omega} R_{;\mu} - 2R^{\mu}_{\omega;\mu} = 0$$
$$R^{\mu}_{\omega;\mu} - \tfrac{1}{2}\delta^{\mu}_{\omega} R_{;\mu} = 0$$

$$\boxed{\left(R^{\mu}_{\omega} - \tfrac{1}{2}\delta^{\mu}_{\omega} R \right)_{;\mu} = 0}$$

Mieszanym tensorem krzywizny Einsteina nazywamy tensor

$$\boxed{G^{\mu}_{\omega} \overset{\mathrm{df}}{=} R^{\mu}_{\omega} - \tfrac{1}{2}\delta^{\mu}_{\omega} R}$$

a skalar

$$\boxed{R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}}$$

skalarem krzywizny.

UWAGA

Dywergencja mieszanego tensora Einsteina jest równa zeru.

$$\boxed{G^{\mu}_{\omega;\mu} = 0}$$

- **Kontrawariantny tensor krzywizny Einsteina**

$$\left(R^{\mu}_{\omega}-\tfrac{1}{2}\delta^{\mu}_{\omega}R\right)_{;\mu}=0$$

$$\Big\downarrow\quad R^{\mu}_{\omega}=g_{\omega\lambda}R^{\lambda\mu},\quad \delta^{\mu}_{\omega}=g^{\mu\lambda}g_{\lambda\omega}$$

$$\left(g_{\omega\lambda}R^{\lambda\mu}-\tfrac{1}{2}g^{\mu\lambda}g_{\lambda\omega}R\right)_{;\mu}=0$$

$$\left[g_{\omega\lambda}\left(R^{\lambda\mu}-\tfrac{1}{2}g^{\lambda\mu}R\right)\right]_{;\mu}=0$$

$$\left(R^{\lambda\mu}-\tfrac{1}{2}g^{\lambda\mu}R\right)g_{\omega\lambda;\mu}+g_{\omega\lambda}\left(R^{\lambda\mu}-\tfrac{1}{2}g^{\lambda\mu}R\right)_{;\mu}=0$$

$$\Big\downarrow\quad g_{\omega\lambda;\mu}=0$$

$$g_{\omega\lambda}\left(R^{\lambda\mu}-\tfrac{1}{2}g^{\lambda\mu}R\right)_{;\mu}=0$$

$$\Big\Updownarrow\quad \det g_{\bullet\bullet}\neq 0$$

$$\left(R^{\lambda\mu}-\tfrac{1}{2}g^{\lambda\mu}R\right)_{;\mu}=0$$

Kontrawariantnym tensorem krzywizny Einsteina nazywamy tensor

$$\boxed{G^{\lambda\mu}\overset{df}{=}R^{\lambda\mu}-\tfrac{1}{2}g^{\lambda\mu}R}$$

UWAGA
Dywergencja kontrawariantnego tensora Einsteina jest równa zeru.

$$\boxed{G^{\lambda\mu}_{;\mu}=0}$$

- **Kowariantny tensor krzywizny Einsteina**

$$\left(R^{\mu}_{\omega}-\tfrac{1}{2}\delta^{\mu}_{\omega}R\right)_{;\mu}=\left(R^{\omega}_{\mu}-\tfrac{1}{2}\delta^{\omega}_{\mu}R\right)_{;\mu}=0$$

$$\Big\downarrow\quad R^{\omega}_{\mu}=g^{\omega\lambda}R_{\lambda\mu},\quad \delta^{\omega}_{\mu}=g^{\omega\lambda}g_{\lambda\mu}$$

$$\left(g^{\omega\lambda}R_{\lambda\mu}-\tfrac{1}{2}g^{\omega\lambda}g_{\lambda\mu}R\right)_{;\mu}=0$$

$$\left[g^{\omega\lambda}\left(R_{\lambda\mu}-\tfrac{1}{2}g_{\lambda\mu}R\right)\right]_{;\mu}=0$$

$$\left(R_{\lambda\mu}-\tfrac{1}{2}g_{\lambda\mu}R\right)g^{\omega\lambda}_{;\mu}+\left(R_{\lambda\mu}-\tfrac{1}{2}g_{\lambda\mu}R\right)_{;\mu}=0$$

$$\Big\downarrow\quad g^{\omega\lambda}_{;\mu}=0$$

$$g^{\omega\lambda}\left(R_{\lambda\mu}-\tfrac{1}{2}g_{\lambda\mu}R\right)_{;\mu}=0$$

$$\Big\Updownarrow\quad \det g^{\bullet\bullet}\neq 0$$

$$\left(R_{\lambda\mu}-\tfrac{1}{2}g_{\lambda\mu}R\right)_{;\mu}=0$$

Kowariantnym tensorem krzywizny Einsteina nazywamy tensor

$$\boxed{G_{\lambda\mu}\overset{df}{=}R_{\lambda\mu}-\tfrac{1}{2}g_{\lambda\mu}R}$$

UWAGA
Dywergencja kowariantnego tensora Einsteina jest równa zeru.

$$\boxed{G_{\lambda\mu;\mu}=0}$$

- **Konforemne przekształcenie metryki**

Przekształcenie konforemne (wiernokątne) to przekształcenie zachowujące kąt przecięcia dwóch krzywych oraz kształty nieskończenie małych figur.

Konforemna zmiana metryki polega na przejściu w każdym punkcie przestrzeni od metryki $g_{\alpha\beta}$ do metryki $\overline{g}_{\alpha\beta}=e^{2\sigma}g_{\alpha\beta}$, $\sigma=\sigma\left(x^1,x^2,x^3,x^4\right)$. Przy czym,

$$d\overline{s}^2=\overline{g}_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta=e^{2\sigma}g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta=e^{2\sigma}ds^2,\quad e^{2\sigma}>0,$$

czyli forma kwadratowa $d\overline{s}^2$ różni się od formy kwadratowej ds^2 czynnikiem $e^{2\sigma}$ zależnym od położenia punktu $P\left(x^1,x^2,x^3,x^4\right)$, a nie zależnym od nieskończenie małych przyrostów dx^1, dx^2, dx^3, dx^4.

Mówimy, że przestrzenie Riemanna V_4 z tensorem metrycznym $g_{\alpha\beta}$ i $\overline{V}_4$ z tensorem $\overline{g}_{\alpha\beta}$ są konforemne.

Niech **A** i **B** będą dwoma wektorami zaczepionymi w tym samym punkcie, mamy wtedy

$$\cos(\mathbf{A},\mathbf{B})=\frac{\overline{g}_{\mu\nu}A^\mu B^\nu}{\sqrt{\overline{g}_{\mu\nu}A^\mu A^\nu}\sqrt{\overline{g}_{\mu\nu}B^\mu B^\nu}}=\frac{e^{2\sigma}g_{\mu\nu}A^\mu B^\nu}{\sqrt{e^{2\sigma}g_{\mu\nu}A^\mu A^\nu}\sqrt{e^{2\sigma}g_{\mu\nu}B^\mu B^\nu}}=\frac{g_{\mu\nu}A^\mu B^\nu}{\sqrt{g_{\mu\nu}A^\mu A^\nu}\sqrt{g_{\mu\nu}B^\mu B^\nu}}.$$

Tym samym wykazaliśmy, że konforemna zmiana metryki zachowuje kąty.

TWIERDZENIE

Jeżeli $\overline{g}_{\alpha\beta}=e^{2\sigma}g_{\alpha\beta}$, $\sigma=\sigma\left(x^1,x^2,x^3,x^4\right)$, to

$$\overline{g}^{\alpha\beta}=e^{-2\sigma}g^{\alpha\beta},$$

$$\overline{\left[{\alpha \atop \mu\nu}\right]}=e^{2\sigma}\left[{\alpha \atop \mu\nu}\right]+e^{2\sigma}\left(g_{\alpha\nu}\frac{\partial\sigma}{\partial x^\mu}+g_{\alpha\mu}\frac{\partial\sigma}{\partial x^\nu}-g_{\mu\nu}\frac{\partial\sigma}{\partial x^\alpha}\right),$$

$$\overline{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}=\Gamma^\alpha_{\mu\nu}+\delta^\alpha_\nu\frac{\partial\sigma}{\partial x^\mu}+\delta^\alpha_\mu\frac{\partial\sigma}{\partial x^\nu}-g_{\mu\nu}g^{\alpha\lambda}\frac{\partial\sigma}{\partial x^\lambda},$$

$$\overline{R}_{\alpha\beta\mu\nu}=e^{2\sigma}\left(R_{\alpha\beta\mu\nu}+g_{\alpha\nu}S_{\beta\mu}+g_{\beta\mu}S_{\alpha\nu}-g_{\alpha\mu}S_{\beta\nu}-g_{\beta\nu}S_{\alpha\mu}\right),$$

$$S_{\beta\mu}=\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^\beta\partial x^\mu}-\frac{\partial\sigma}{\partial x^\beta}\frac{\partial\sigma}{\partial x^\mu}+\frac{1}{2}g_{\beta\mu}g^{\kappa\lambda}\frac{\partial\sigma}{\partial x^\kappa}\frac{\partial\sigma}{\partial x^\lambda}.$$

- **Kowariantny tensor krzywizny konforemnej Weyla**

TWIERDZENIE

Tensor $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ można konforemnie przekształcić w tensor $\overline{R}_{\alpha\beta\mu\nu}$, którego wszystkie składowe są równe zeru wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie składowe **tensora krzywizny konforemnej** Weyla $C_{\alpha\beta\mu\nu}$

$$\boxed{C_{\alpha\beta\mu\nu}\overset{df}{=}R_{\alpha\beta\mu\nu}+\frac{1}{n-2}\left(g_{\alpha\mu}R_{\beta\nu}+g_{\beta\nu}R_{\alpha\mu}-g_{\alpha\nu}R_{\beta\mu}-g_{\beta\mu}R_{\alpha\nu}\right)+\frac{g^{\kappa\lambda}R_{\kappa\lambda}}{(n-1)(n-2)}\left(g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}-g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\right)}$$

są równe zeru.

$R\overset{df}{=}g^{\kappa\lambda}R_{\kappa\lambda}$, $\quad n$ = wymiar przestrzeni, $\quad n>2$

Przestrzeń Riemanna, którą można odwzorować na przestrzeń euklidesową, nazywamy przestrzenią konforemnie-euklidesową.

TWIERDZENIE
Jeżeli przestrzeń Riemanna ma stałą krzywiznę K, to tensor krzywizny konforemnej Weyla $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ tej przestrzeni jest tożsamościowo równy zeru. Inaczej mówiąc, przestrzeń Riemanna o stałej krzywiźnie jest konforemnie-euklidesowa.
DOWÓD

$$C_{\alpha\beta\mu\nu} \overset{df}{=} R_{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{1}{n-2}\left(g_{\alpha\mu}R_{\beta\nu} + g_{\beta\nu}R_{\alpha\mu} - g_{\alpha\nu}R_{\beta\mu} - g_{\beta\mu}R_{\alpha\nu}\right) + \frac{g^{\kappa\lambda}R_{\kappa\lambda}}{(n-1)(n-2)}\left(g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu} - g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\right)$$

$$n = 4$$
$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = K\left(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}\right)$$
$$R_{\beta\nu} = g^{\alpha\mu}R_{\alpha\beta\nu\mu} = -g^{\alpha\mu}R_{\alpha\beta\mu\nu} = -3Kg_{\beta\nu}$$
$$R_{\alpha\mu} = g^{\beta\nu}R_{\beta\alpha\mu\nu} = -g^{\beta\nu}R_{\alpha\beta\mu\nu} = -3Kg_{\alpha\mu}$$
$$R_{\beta\mu} = g^{\alpha\nu}R_{\alpha\beta\mu\nu} = -3Kg_{\beta\mu}$$
$$R_{\alpha\nu} = g^{\beta\mu}R_{\beta\alpha\nu\mu} = g^{\beta\mu}R_{\alpha\beta\mu\nu} = -3Kg_{\alpha\nu}$$
$$R = g^{\kappa\lambda}R_{\kappa\lambda} = -3Kg_{\kappa\lambda}g^{\kappa\lambda} = -12K$$

$$C_{\alpha\beta\mu\nu} = K\left(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}\right) + \frac{3}{2}K\left(-2g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} + 2g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}\right) - 2K\left(g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu} - g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\right) = 0$$

- **Własności tensora krzywizny konforemnej Weyla** $C_{\alpha\beta\mu\nu}$

Tensor krzywizny konforemnej $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ określony został dla przestrzeni o wymiarze nie mniejszym od trzech. Przy czym, w przypadku trójwymiarowym wszystkie jego składowe są równe zeru.

$$C_{\alpha\beta\mu\nu} = -C_{\beta\alpha\mu\nu}, \quad C_{\alpha\beta\mu\nu} = -C_{\alpha\beta\nu\mu}$$
$$C_{\alpha\beta\mu\nu} = C_{\mu\nu\alpha\beta}$$
$$C_{\alpha\beta\mu\nu} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu = \nu, \quad C_{\alpha\beta\mu\nu} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \beta$$
$$C_{\alpha\beta\mu\nu} + C_{\alpha\nu\beta\mu} + C_{\alpha\mu\nu\beta} = 0$$
$$C^{\lambda}_{\beta\mu\nu} = g^{\alpha\lambda}C_{\alpha\beta\mu\nu}$$

W czterowymiarowej przestrzeni tensor $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ posiada dwadzieścia niezerowych niezależnych składowych. Dla przykładu podajmy jedną z nich

$$C_{1212} \overset{df}{=} R_{1212} + \frac{1}{2}\left(g_{11}R_{22} + g_{22}R_{11} - 2g_{12}R_{12}\right) + \frac{R}{6}\left(g_{12}g_{12} - g_{22}g_{11}\right).$$

- **Mieszany tensor krzywizny konforemnej Weyla**

Mnożąc kowariantny tensor Weyla przez $g^{\alpha\kappa}$, otrzymamy jego postać mieszaną.

$$g^{\alpha\kappa}C_{\alpha\lambda\mu\nu} = g^{\alpha\kappa}R_{\alpha\lambda\mu\nu} + \frac{g^{\alpha\kappa}}{n-2}\left(g_{\alpha\mu}R_{\lambda\nu} + g_{\lambda\nu}R_{\alpha\mu} - g_{\alpha\nu}R_{\lambda\mu} - g_{\lambda\mu}R_{\alpha\nu}\right) + \frac{g^{\alpha\kappa}R\left(g_{\alpha\nu}g_{\lambda\mu} - g_{\alpha\mu}g_{\lambda\nu}\right)}{(n-1)(n-2)}$$

$$g^{\alpha\kappa}C_{\alpha\lambda\mu\nu} = C^{\kappa}_{\lambda\mu\nu}, \quad g^{\alpha\kappa}R_{\alpha\lambda\mu\nu} = R^{\kappa}_{\lambda\mu\nu}, \quad g^{\alpha\kappa}g_{\alpha\mu} = \delta^{\kappa}_{\mu},$$
$$g^{\alpha\kappa}R_{\alpha\mu} = R^{\kappa}_{\mu}, \quad g^{\alpha\kappa}g_{\alpha\nu} = g^{\kappa}_{\nu}, \quad g^{\alpha\kappa}R_{\alpha\nu} = R^{\kappa}_{\nu}$$

$$\boxed{C^{\kappa}_{\lambda\mu\nu} = R^{\kappa}_{\lambda\mu\nu} + \frac{1}{n-2}\left(\delta^{\kappa}_{\mu}R_{\lambda\nu} + g_{\lambda\nu}R^{\kappa}_{\mu} - g^{\kappa}_{\nu}R_{\lambda\mu} - g_{\lambda\mu}R^{\kappa}_{\nu}\right) + \frac{R}{(n-1)(n-2)}\left(g^{\kappa}_{\nu}g_{\lambda\mu} - \delta^{\kappa}_{\mu}g_{\lambda\nu}\right)}$$

- **Twierdzenia o płaskości i zakrzywieniu przestrzeni**

Przestrzeń jest płaska wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie składowe tensora $R^{\lambda}_{\beta\mu\nu}$ są równe zeru.

Jeżeli przestrzeń jest płaska, to wszystkie składowe tensora $R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\lambda} R^{\lambda}_{\beta\mu\nu}$ są równe zeru.

Zerowanie się wszystkich składowych tensora $R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\lambda} R^{\lambda}_{\beta\mu\nu}$ jest warunkiem koniecznym ale nie wystarczającym na to by przestrzeń była płaska.

Jeżeli przestrzeń jest płaska, to wszystkie składowe tensora $R_{\beta\mu} = R^{\nu}_{\beta\mu\nu}$ są równe zeru.

Zerowanie się wszystkich składowych tensora $R_{\beta\mu} = R^{\nu}_{\beta\mu\nu}$ jest warunkiem koniecznym ale nie wystarczającym na to, by przestrzeń była płaska.

Przestrzeń jest zakrzywiona wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jedna składowa tensora $R^{\lambda}_{\beta\mu\nu}$ jest różna od zera.

Jeżeli co najmniej jedna składowa tensora $R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\lambda} R^{\lambda}_{\beta\mu\nu}$ jest różna od zera, to przestrzeń jest zakrzywiona.

Istnienie co najmniej jednej różnej od zera składowej tensora $R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\lambda} R^{\lambda}_{\beta\mu\nu}$ jest warunkiem wystarczającym ale nie koniecznym na to, by przestrzeń była zakrzywiona.

Jeżeli co najmniej jedna składowa tensora $R_{\beta\mu} = R^{\nu}_{\beta\mu\nu}$ jest różna od zera, to przestrzeń jest zakrzywiona.

Istnienie co najmniej jednej różnej od zera składowej tensora $R_{\beta\mu} = R^{\nu}_{\beta\mu\nu}$ jest warunkiem wystarczającym ale nie koniecznym na to, by przestrzeń była zakrzywiona.

- **Równania dewiacji geodezyjnej**

Badając przebieg dwóch blisko siebie położonych linii geodezyjnych, możemy uzyskać informacje o krzywiźnie czasoprzestrzeni. Miarą odległości między tymi liniami jest dewiacja geodezyjna.

$$\boxed{\frac{\delta^2 \eta^{\alpha}}{\delta s^2} + R^{\alpha}_{\mu\beta\nu} p^{\mu} \eta^{\beta} p^{\nu} = 0}$$ Równania dewiacji geodezyjnej

η^{α} = dewiacja geodezyjna, infinitezymalny wektor łączący punkty położone na dwóch sąsiednich liniach geodezyjnych prostopadły do jednej z nich, $g_{\kappa\lambda} p^{\kappa} \eta^{\lambda} = 0$

$p^{\alpha} = \frac{dx^{\alpha}}{ds}$ = jednostkowy wektor styczny do linii geodezyjnej $g_{\mu\nu} p^{\mu} p^{\nu} = g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{ds} \frac{dx^{\nu}}{ds} = 1$, równoległy do prędkości swobodnie spadającej cząstki w polu grawitacyjnym

12 SKŁADOWE KONTRAWARIANTNE TENSORA METRYCZNEGO I JEGO WYZNACZNIK, DWU-, TRÓJ- I CZTERO-SKŁADNIKOWE SYMBOLE RICCIEGO, SYMBOLE CHRISTOFFELA PIERWSZEGO I DRUGIEGO RODZAJU, SKŁADOWE TENSORÓW KRZYWIZNY

- **Składowe kontrawariantne symetrycznego tensora metrycznego i jego wyznacznik**

$$
\begin{aligned}
g^{11} &= g^{-1}\left(g_{22}g_{33}g_{44}+g_{23}g_{24}g_{34}+g_{23}g_{24}g_{34}-g_{24}g_{24}g_{33}-g_{22}g_{34}g_{34}-g_{23}g_{23}g_{44}\right)\\
g^{22} &= g^{-1}\left(g_{11}g_{33}g_{44}+g_{13}g_{14}g_{34}+g_{13}g_{14}g_{34}-g_{14}g_{14}g_{33}-g_{11}g_{34}g_{34}-g_{13}g_{13}g_{44}\right)\\
g^{33} &= g^{-1}\left(g_{11}g_{22}g_{44}+g_{12}g_{14}g_{24}+g_{12}g_{14}g_{24}-g_{14}g_{14}g_{22}-g_{11}g_{24}g_{24}-g_{12}g_{12}g_{44}\right)\\
g^{44} &= g^{-1}\left(g_{11}g_{22}g_{33}+g_{12}g_{13}g_{23}+g_{12}g_{13}g_{23}-g_{13}g_{13}g_{22}-g_{11}g_{23}g_{23}-g_{12}g_{12}g_{33}\right)\\
g^{12} &= g^{-1}\left(g_{14}g_{24}g_{33}+g_{12}g_{34}g_{34}+g_{13}g_{23}g_{44}-g_{12}g_{33}g_{44}-g_{14}g_{23}g_{34}-g_{13}g_{24}g_{34}\right)\\
g^{13} &= g^{-1}\left(g_{12}g_{23}g_{44}+g_{14}g_{22}g_{34}+g_{13}g_{24}g_{24}-g_{14}g_{23}g_{24}-g_{12}g_{24}g_{34}-g_{13}g_{22}g_{44}\right)\\
g^{14} &= g^{-1}\left(g_{14}g_{23}g_{23}+g_{12}g_{24}g_{33}+g_{13}g_{22}g_{34}-g_{12}g_{23}g_{34}-g_{14}g_{22}g_{33}-g_{13}g_{23}g_{24}\right)\\
g^{23} &= g^{-1}\left(g_{11}g_{23}g_{44}+g_{12}g_{14}g_{34}+g_{13}g_{14}g_{24}-g_{11}g_{23}g_{44}-g_{12}g_{14}g_{34}-g_{13}g_{14}g_{24}\right)\\
g^{24} &= g^{-1}\left(g_{11}g_{23}g_{34}+g_{12}g_{14}g_{33}+g_{13}g_{13}g_{24}-g_{13}g_{14}g_{23}-g_{11}g_{24}g_{33}-g_{12}g_{13}g_{34}\right)\\
g^{34} &= g^{-1}\left(g_{13}g_{14}g_{22}+g_{11}g_{23}g_{24}+g_{12}g_{12}g_{34}-g_{11}g_{22}g_{34}-g_{12}g_{14}g_{23}-g_{12}g_{13}g_{24}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g = {} & g_{11}\left(g_{22}g_{33}g_{44}+g_{23}g_{24}g_{34}+g_{23}g_{24}g_{34}-g_{24}g_{24}g_{33}-g_{22}g_{34}g_{34}-g_{23}g_{23}g_{44}\right)+\\
&+g_{12}\left(g_{14}g_{24}g_{33}+g_{12}g_{34}g_{34}+g_{13}g_{23}g_{44}-g_{12}g_{33}g_{44}-g_{14}g_{23}g_{34}-g_{13}g_{24}g_{34}\right)+\\
&+g_{13}\left(g_{12}g_{23}g_{44}+g_{14}g_{22}g_{34}+g_{13}g_{24}g_{24}-g_{14}g_{23}g_{24}-g_{12}g_{24}g_{34}-g_{13}g_{22}g_{44}\right)+\\
&+g_{14}\left(g_{14}g_{23}g_{23}+g_{12}g_{24}g_{33}+g_{13}g_{22}g_{34}-g_{12}g_{23}g_{34}-g_{14}g_{22}g_{33}-g_{13}g_{23}g_{24}\right)
\end{aligned}
$$

- **Niezerowe dwuskładnikowe, trójskładnikowe i czteroskładnikowe symbole Ricciego**

$$
\begin{aligned}
e_{12} &= +1\\
e_{21} &= -1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e_{123} &= +1\\
e_{132} &= -1\\
e_{213} &= -1\\
e_{231} &= +1\\
e_{312} &= -1\\
e_{321} &= +1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e_{1234} &= +1\\
e_{1243} &= -1\\
e_{2134} &= -1\\
e_{2143} &= +1\\
e_{1324} &= -1\\
e_{1342} &= +1\\
e_{3124} &= -1\\
e_{3142} &= +1\\
e_{1423} &= -1\\
e_{1432} &= +1\\
e_{4123} &= -1\\
e_{4132} &= +1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e_{2314} &= -1\\
e_{2341} &= +1\\
e_{3214} &= +1\\
e_{3241} &= -1\\
e_{2413} &= +1\\
e_{2431} &= -1\\
e_{4213} &= +1\\
e_{4231} &= -1\\
e_{3412} &= +1\\
e_{3421} &= -1\\
e_{4312} &= +1\\
e_{4321} &= -1
\end{aligned}
$$

Pozostałe symbole Ricciego są równe zeru.

- **Jawna postać symboli Christoffela pierwszego rodzaju**

$$\left[\begin{smallmatrix}\mu\;\nu\\ \alpha\end{smallmatrix}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}}+\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\right)$$ Ogólna postać symboli Christoffela pierwszego rodzaju

$$\left[\begin{smallmatrix}1\;1\\1\end{smallmatrix}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}$$

$$\left[\begin{smallmatrix}1\;1\\2\end{smallmatrix}\right]=\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}$$

$$\left[\begin{smallmatrix}1\;1\\3\end{smallmatrix}\right]=\frac{\partial g_{13}}{\partial x^1}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^3}$$

$$\left[\begin{smallmatrix}1\;1\\4\end{smallmatrix}\right]=\frac{\partial g_{14}}{\partial x^1}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^4}$$

$$\left[\begin{smallmatrix}2\;2\\1\end{smallmatrix}\right]=\frac{\partial g_{21}}{\partial x^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}$$

$$\left[\begin{smallmatrix}2\;2\\2\end{smallmatrix}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}$$

$$\left[\begin{smallmatrix}2\;2\\3\end{smallmatrix}\right]=\frac{\partial g_{23}}{\partial x^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^3}$$

$$\left[\begin{smallmatrix}2\;2\\4\end{smallmatrix}\right]=\frac{\partial g_{24}}{\partial x^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^4}$$

$$\left[\begin{smallmatrix}3\;3\\1\end{smallmatrix}\right]=\frac{\partial g_{31}}{\partial x^3}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}$$

$$\left[\begin{smallmatrix}3\;3\\2\end{smallmatrix}\right]=\frac{\partial g_{32}}{\partial x^3}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}$$

$$\left[\begin{smallmatrix}3\;3\\3\end{smallmatrix}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^3}$$

$$\left[\begin{smallmatrix}3\;3\\4\end{smallmatrix}\right]=\frac{\partial g_{34}}{\partial x^3}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^4}$$

$$\left[\begin{smallmatrix}4\;4\\1\end{smallmatrix}\right]=\frac{\partial g_{41}}{\partial x^4}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^1}$$

$$\left[\begin{smallmatrix}4\;4\\2\end{smallmatrix}\right]=\frac{\partial g_{42}}{\partial x^4}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^2}$$

$$\left[\begin{smallmatrix}4\;4\\3\end{smallmatrix}\right]=\frac{\partial g_{43}}{\partial x^4}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^3}$$

$$\left[\begin{smallmatrix}4\;4\\4\end{smallmatrix}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^4}$$

$$\left[\begin{smallmatrix}1\;2\\1\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix}2\;1\\1\end{smallmatrix}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}$$

$$\left[\begin{smallmatrix}1\;2\\2\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix}2\;1\\2\end{smallmatrix}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}$$

$$\left[\begin{smallmatrix}1\;2\\3\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix}2\;1\\3\end{smallmatrix}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{13}}{\partial x^2}+\frac{\partial g_{23}}{\partial x^1}-\frac{\partial g_{12}}{\partial x^3}\right)$$

$$\left[\begin{smallmatrix}1\;2\\4\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix}2\;1\\4\end{smallmatrix}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{14}}{\partial x^2}+\frac{\partial g_{24}}{\partial x^1}-\frac{\partial g_{12}}{\partial x^4}\right)$$

$$\left[\begin{smallmatrix}1\;3\\1\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix}3\;1\\1\end{smallmatrix}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^3}$$

$$\left[\begin{smallmatrix}1\;3\\2\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix}3\;1\\2\end{smallmatrix}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^3}+\frac{\partial g_{32}}{\partial x^1}-\frac{\partial g_{13}}{\partial x^2}\right)$$

$$\left[\begin{smallmatrix}1\;3\\3\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix}3\;1\\3\end{smallmatrix}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}$$

$$\left[\begin{smallmatrix}1\;3\\4\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix}3\;1\\4\end{smallmatrix}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{14}}{\partial x^3}+\frac{\partial g_{34}}{\partial x^1}-\frac{\partial g_{13}}{\partial x^4}\right)$$

$$\left[\begin{smallmatrix}1\;4\\1\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix}4\;1\\1\end{smallmatrix}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^4}$$

$$\left[\begin{smallmatrix}1\;4\\2\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix}4\;1\\2\end{smallmatrix}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^4}+\frac{\partial g_{42}}{\partial x^1}-\frac{\partial g_{14}}{\partial x^2}\right)$$

$$\left[\begin{smallmatrix}1\;4\\3\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix}4\;1\\3\end{smallmatrix}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{13}}{\partial x^4}+\frac{\partial g_{43}}{\partial x^1}-\frac{\partial g_{14}}{\partial x^3}\right)$$

$$\left[\begin{smallmatrix}1\;4\\4\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix}4\;1\\4\end{smallmatrix}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^1}$$

$$\left[\begin{smallmatrix}2\;3\\1\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix}3\;2\\1\end{smallmatrix}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial x^3}+\frac{\partial g_{31}}{\partial x^2}-\frac{\partial g_{23}}{\partial x^1}\right)$$

$$\left[\begin{smallmatrix}2\;3\\2\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix}3\;2\\2\end{smallmatrix}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^3}$$

$$\left[\begin{smallmatrix}2\;3\\3\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix}3\;2\\3\end{smallmatrix}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}$$

$$\left[\begin{smallmatrix}2\;3\\4\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix}3\;2\\4\end{smallmatrix}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{24}}{\partial x^3}+\frac{\partial g_{34}}{\partial x^2}-\frac{\partial g_{23}}{\partial x^4}\right)$$

$$\left[{2\;4 \atop 1}\right]=\left[{4\;2 \atop 1}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial x^4}+\frac{\partial g_{41}}{\partial x^2}-\frac{\partial g_{24}}{\partial x^1}\right)$$

$$\left[{2\;4 \atop 2}\right]=\left[{4\;2 \atop 2}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^4}$$

$$\left[{2\;4 \atop 3}\right]=\left[{4\;2 \atop 3}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{23}}{\partial x^4}+\frac{\partial g_{43}}{\partial x^2}-\frac{\partial g_{24}}{\partial x^3}\right)$$

$$\left[{2\;4 \atop 4}\right]=\left[{4\;2 \atop 4}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^2}$$

$$\left[{3\;4 \atop 1}\right]=\left[{4\;3 \atop 1}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{31}}{\partial x^4}+\frac{\partial g_{41}}{\partial x^3}-\frac{\partial g_{34}}{\partial x^1}\right)$$

$$\left[{3\;4 \atop 2}\right]=\left[{4\;3 \atop 2}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{32}}{\partial x^4}+\frac{\partial g_{42}}{\partial x^3}-\frac{\partial g_{34}}{\partial x^2}\right)$$

$$\left[{3\;4 \atop 3}\right]=\left[{4\;3 \atop 3}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^4}$$

$$\left[{3\;4 \atop 4}\right]=\left[{4\;3 \atop 4}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^3}$$

- **Jawna postać symboli Christoffela drugiego rodzaju**

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}=g^{\sigma\alpha}\left[{\mu\;\nu \atop \alpha}\right]=\sum_{\alpha=1}^{4}g^{\sigma\alpha}\left[{\mu\;\nu \atop \alpha}\right]$$ Ogólna postać symboli Christoffela drugiego rodzaju

$$\Gamma^{1}_{11}=g^{11}\left[{1\;1 \atop 1}\right]+g^{12}\left[{1\;1 \atop 2}\right]+g^{13}\left[{1\;1 \atop 3}\right]+g^{14}\left[{1\;1 \atop 4}\right]$$

$$\Gamma^{1}_{12}=\Gamma^{1}_{21}=g^{11}\left[{1\;2 \atop 1}\right]+g^{12}\left[{1\;2 \atop 2}\right]+g^{13}\left[{1\;2 \atop 3}\right]+g^{14}\left[{1\;2 \atop 4}\right]$$

$$\Gamma^{1}_{13}=\Gamma^{1}_{31}=g^{11}\left[{1\;3 \atop 1}\right]+g^{12}\left[{1\;3 \atop 2}\right]+g^{13}\left[{1\;3 \atop 3}\right]+g^{14}\left[{1\;3 \atop 4}\right]$$

$$\Gamma^{1}_{14}=\Gamma^{1}_{41}=g^{11}\left[{1\;4 \atop 1}\right]+g^{12}\left[{1\;4 \atop 2}\right]+g^{13}\left[{1\;4 \atop 3}\right]+g^{14}\left[{1\;4 \atop 4}\right]$$

$$\Gamma^{1}_{22}=g^{11}\left[{2\;2 \atop 1}\right]+g^{12}\left[{2\;2 \atop 2}\right]+g^{13}\left[{2\;2 \atop 3}\right]+g^{14}\left[{2\;2 \atop 4}\right]$$

$$\Gamma^{1}_{23}=\Gamma^{1}_{32}=g^{11}\left[{2\;3 \atop 1}\right]+g^{12}\left[{2\;3 \atop 2}\right]+g^{13}\left[{2\;3 \atop 3}\right]+g^{14}\left[{2\;3 \atop 4}\right]$$

$$\Gamma^{1}_{24}=\Gamma^{1}_{42}=g^{11}\left[{2\;4 \atop 1}\right]+g^{12}\left[{2\;4 \atop 2}\right]+g^{13}\left[{2\;4 \atop 3}\right]+g^{14}\left[{2\;4 \atop 4}\right]$$

$$\Gamma^{1}_{33}=g^{11}\left[{3\;3 \atop 1}\right]+g^{12}\left[{3\;3 \atop 2}\right]+g^{13}\left[{3\;3 \atop 3}\right]+g^{14}\left[{3\;3 \atop 4}\right]$$

$$\Gamma^{1}_{34}=\Gamma^{1}_{43}=g^{11}\left[{3\;4 \atop 1}\right]+g^{12}\left[{3\;4 \atop 2}\right]+g^{13}\left[{3\;4 \atop 3}\right]+g^{14}\left[{3\;4 \atop 4}\right]$$

$$\Gamma^{1}_{44}=g^{11}\left[{4\;4 \atop 1}\right]+g^{12}\left[{4\;4 \atop 2}\right]+g^{13}\left[{4\;4 \atop 3}\right]+g^{14}\left[{4\;4 \atop 4}\right]$$

$$\Gamma^{2}_{11}=g^{21}\left[{1\;1 \atop 1}\right]+g^{22}\left[{1\;1 \atop 2}\right]+g^{23}\left[{1\;1 \atop 3}\right]+g^{24}\left[{1\;1 \atop 4}\right]$$

$$\Gamma^{2}_{12}=\Gamma^{2}_{21}=g^{21}\left[{1\;2 \atop 1}\right]+g^{22}\left[{1\;2 \atop 2}\right]+g^{23}\left[{1\;2 \atop 3}\right]+g^{24}\left[{1\;2 \atop 4}\right]$$

$$\Gamma^{2}_{13}=\Gamma^{2}_{31}=g^{21}\left[{1\;3 \atop 1}\right]+g^{22}\left[{1\;3 \atop 2}\right]+g^{23}\left[{1\;3 \atop 3}\right]+g^{24}\left[{1\;3 \atop 4}\right]$$

$$\Gamma^{2}_{14}=\Gamma^{2}_{41}=g^{21}\left[{1\;4 \atop 1}\right]+g^{22}\left[{1\;4 \atop 2}\right]+g^{23}\left[{1\;4 \atop 3}\right]+g^{24}\left[{1\;4 \atop 4}\right]$$

$$\Gamma^{2}_{22}=g^{21}\left[{2\;2 \atop 1}\right]+g^{22}\left[{2\;2 \atop 2}\right]+g^{23}\left[{2\;2 \atop 3}\right]+g^{24}\left[{2\;2 \atop 4}\right]$$

$$\Gamma^{2}_{23}=\Gamma^{2}_{32}=g^{21}\left[{2\;3 \atop 1}\right]+g^{22}\left[{2\;3 \atop 2}\right]+g^{23}\left[{2\;3 \atop 3}\right]+g^{24}\left[{2\;3 \atop 4}\right]$$

$$\Gamma^2_{24}=\Gamma^2_{42}=g^{21}\begin{bmatrix}2\;4\\1\end{bmatrix}+g^{22}\begin{bmatrix}2\;4\\2\end{bmatrix}+g^{23}\begin{bmatrix}2\;4\\3\end{bmatrix}+g^{24}\begin{bmatrix}2\;4\\4\end{bmatrix}$$

$$\Gamma^2_{33}=g^{21}\begin{bmatrix}3\;3\\1\end{bmatrix}+g^{22}\begin{bmatrix}3\;3\\2\end{bmatrix}+g^{23}\begin{bmatrix}3\;3\\3\end{bmatrix}+g^{24}\begin{bmatrix}3\;3\\4\end{bmatrix}$$

$$\Gamma^2_{34}=\Gamma^2_{43}=g^{21}\begin{bmatrix}3\;4\\1\end{bmatrix}+g^{22}\begin{bmatrix}3\;4\\2\end{bmatrix}+g^{23}\begin{bmatrix}3\;4\\3\end{bmatrix}+g^{24}\begin{bmatrix}3\;4\\4\end{bmatrix}$$

$$\Gamma^2_{44}=g^{21}\begin{bmatrix}4\;4\\1\end{bmatrix}+g^{22}\begin{bmatrix}4\;4\\2\end{bmatrix}+g^{23}\begin{bmatrix}4\;4\\3\end{bmatrix}+g^{24}\begin{bmatrix}4\;4\\4\end{bmatrix}$$

$$\Gamma^3_{11}=g^{31}\begin{bmatrix}1\;1\\1\end{bmatrix}+g^{32}\begin{bmatrix}1\;1\\2\end{bmatrix}+g^{33}\begin{bmatrix}1\;1\\3\end{bmatrix}+g^{34}\begin{bmatrix}1\;1\\4\end{bmatrix}$$

$$\Gamma^3_{12}=\Gamma^3_{21}=g^{31}\begin{bmatrix}1\;2\\1\end{bmatrix}+g^{32}\begin{bmatrix}1\;2\\2\end{bmatrix}+g^{33}\begin{bmatrix}1\;2\\3\end{bmatrix}+g^{34}\begin{bmatrix}1\;2\\4\end{bmatrix}$$

$$\Gamma^3_{13}=\Gamma^3_{31}=g^{31}\begin{bmatrix}1\;3\\1\end{bmatrix}+g^{32}\begin{bmatrix}1\;3\\2\end{bmatrix}+g^{33}\begin{bmatrix}1\;3\\3\end{bmatrix}+g^{34}\begin{bmatrix}1\;3\\4\end{bmatrix}$$

$$\Gamma^3_{14}=\Gamma^3_{41}=g^{31}\begin{bmatrix}1\;4\\1\end{bmatrix}+g^{32}\begin{bmatrix}1\;4\\2\end{bmatrix}+g^{33}\begin{bmatrix}1\;4\\3\end{bmatrix}+g^{34}\begin{bmatrix}1\;4\\4\end{bmatrix}$$

$$\Gamma^3_{22}=g^{31}\begin{bmatrix}2\;2\\1\end{bmatrix}+g^{32}\begin{bmatrix}2\;2\\2\end{bmatrix}+g^{33}\begin{bmatrix}2\;2\\3\end{bmatrix}+g^{34}\begin{bmatrix}2\;2\\4\end{bmatrix}$$

$$\Gamma^3_{23}=\Gamma^3_{32}=g^{31}\begin{bmatrix}2\;3\\1\end{bmatrix}+g^{32}\begin{bmatrix}2\;3\\2\end{bmatrix}+g^{33}\begin{bmatrix}2\;3\\3\end{bmatrix}+g^{34}\begin{bmatrix}2\;3\\4\end{bmatrix}$$

$$\Gamma^3_{24}=\Gamma^3_{42}=g^{31}\begin{bmatrix}2\;4\\1\end{bmatrix}+g^{32}\begin{bmatrix}2\;4\\2\end{bmatrix}+g^{33}\begin{bmatrix}2\;4\\3\end{bmatrix}+g^{34}\begin{bmatrix}2\;4\\4\end{bmatrix}$$

$$\Gamma^3_{33}=g^{31}\begin{bmatrix}3\;3\\1\end{bmatrix}+g^{32}\begin{bmatrix}3\;3\\2\end{bmatrix}+g^{33}\begin{bmatrix}3\;3\\3\end{bmatrix}+g^{34}\begin{bmatrix}3\;3\\4\end{bmatrix}$$

$$\Gamma^3_{34}=\Gamma^3_{43}=g^{31}\begin{bmatrix}3\;4\\1\end{bmatrix}+g^{32}\begin{bmatrix}3\;4\\2\end{bmatrix}+g^{33}\begin{bmatrix}3\;4\\3\end{bmatrix}+g^{34}\begin{bmatrix}3\;4\\4\end{bmatrix}$$

$$\Gamma^3_{44}=g^{31}\begin{bmatrix}4\;4\\1\end{bmatrix}+g^{32}\begin{bmatrix}4\;4\\2\end{bmatrix}+g^{33}\begin{bmatrix}4\;4\\3\end{bmatrix}+g^{34}\begin{bmatrix}4\;4\\4\end{bmatrix}$$

$$\Gamma^4_{11}=g^{41}\begin{bmatrix}1\;1\\1\end{bmatrix}+g^{42}\begin{bmatrix}1\;1\\2\end{bmatrix}+g^{43}\begin{bmatrix}1\;1\\3\end{bmatrix}+g^{44}\begin{bmatrix}1\;1\\4\end{bmatrix}$$

$$\Gamma^4_{12}=\Gamma^4_{21}=g^{41}\begin{bmatrix}1\;2\\1\end{bmatrix}+g^{42}\begin{bmatrix}1\;2\\2\end{bmatrix}+g^{43}\begin{bmatrix}1\;2\\3\end{bmatrix}+g^{44}\begin{bmatrix}1\;2\\4\end{bmatrix}$$

$$\Gamma^4_{13}=\Gamma^4_{31}=g^{41}\begin{bmatrix}1\;3\\1\end{bmatrix}+g^{42}\begin{bmatrix}1\;3\\2\end{bmatrix}+g^{43}\begin{bmatrix}1\;3\\3\end{bmatrix}+g^{44}\begin{bmatrix}1\;3\\4\end{bmatrix}$$

$$\Gamma^4_{14}=\Gamma^4_{41}=g^{41}\begin{bmatrix}1\;4\\1\end{bmatrix}+g^{42}\begin{bmatrix}1\;4\\2\end{bmatrix}+g^{43}\begin{bmatrix}1\;4\\3\end{bmatrix}+g^{44}\begin{bmatrix}1\;4\\4\end{bmatrix}$$

$$\Gamma^4_{22}=g^{41}\begin{bmatrix}2\;2\\1\end{bmatrix}+g^{42}\begin{bmatrix}2\;2\\2\end{bmatrix}+g^{43}\begin{bmatrix}2\;2\\3\end{bmatrix}+g^{44}\begin{bmatrix}2\;2\\4\end{bmatrix}$$

$$\Gamma^4_{23}=\Gamma^4_{32}=g^{41}\begin{bmatrix}2\;3\\1\end{bmatrix}+g^{42}\begin{bmatrix}2\;3\\2\end{bmatrix}+g^{43}\begin{bmatrix}2\;3\\3\end{bmatrix}+g^{44}\begin{bmatrix}2\;3\\4\end{bmatrix}$$

$$\Gamma^4_{24}=\Gamma^4_{42}=g^{41}\begin{bmatrix}2\;4\\1\end{bmatrix}+g^{42}\begin{bmatrix}2\;4\\2\end{bmatrix}+g^{43}\begin{bmatrix}2\;4\\3\end{bmatrix}+g^{44}\begin{bmatrix}2\;4\\4\end{bmatrix}$$

$$\Gamma^4_{33}=g^{41}\begin{bmatrix}3\;3\\1\end{bmatrix}+g^{42}\begin{bmatrix}3\;3\\2\end{bmatrix}+g^{43}\begin{bmatrix}3\;3\\3\end{bmatrix}+g^{44}\begin{bmatrix}3\;3\\4\end{bmatrix}$$

$$\Gamma^4_{34}=\Gamma^4_{43}=g^{41}\begin{bmatrix}3\;4\\1\end{bmatrix}+g^{42}\begin{bmatrix}3\;4\\2\end{bmatrix}+g^{43}\begin{bmatrix}3\;4\\3\end{bmatrix}+g^{44}\begin{bmatrix}3\;4\\4\end{bmatrix}$$

$$\Gamma^4_{44}=g^{41}\begin{bmatrix}4\;4\\1\end{bmatrix}+g^{42}\begin{bmatrix}4\;4\\2\end{bmatrix}+g^{43}\begin{bmatrix}4\;4\\3\end{bmatrix}+g^{44}\begin{bmatrix}4\;4\\4\end{bmatrix}$$

- **Jawna postać kowariannego tensora krzywizny Ricciego**

Składowe tensora Ricciego

$$R_{\mu\nu}=\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}+\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}-\Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}, \quad \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}}+\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}\right), \quad \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}=\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}$$

przedstawimy poprzez składowe tensorów metrycznych.

$$\begin{aligned}R_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\Bigg[&\frac{\partial g^{\alpha\sigma}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^{\mu}}+g^{\alpha\sigma}\frac{\partial^2 g_{\alpha\sigma}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}-\frac{\partial g^{\alpha\sigma}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\sigma}}-g^{\alpha\sigma}\frac{\partial^2 g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\sigma}\partial x^{\nu}}+\\ &-\frac{\partial g^{\alpha\sigma}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}}-g^{\alpha\sigma}\frac{\partial^2 g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\alpha}}+\frac{\partial g^{\alpha\sigma}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}}+g^{\alpha\sigma}\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}\partial x^{\alpha}}\Bigg]+\\ &+\frac{1}{4}g^{\beta\sigma}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\alpha}}+\frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\sigma}}\right)g^{\alpha\lambda}\left(\frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^{\nu}}+\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\beta}}-\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\lambda}}\right)+\\ &-\frac{1}{4}g^{\beta\sigma}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}}+\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}\right)g^{\alpha\lambda}\left(\frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^{\alpha}}+\frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\beta}}-\frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^{\lambda}}\right)\end{aligned}$$

$$g^{\mu\nu}=g^{-1}\Delta^{\mu\nu}, \quad \Delta^{\mu\nu}=(-1)^{\mu+\nu}M^{\mu\nu}.$$

Dziesięć niezależnych składowych tensora Ricciego wyrazimy w rozwiniętej postaci poprzez symbole Christoffela drugiego rodzaju.

$$R_{11}=\frac{\partial\Gamma^{2}_{12}}{\partial x^{1}}+\frac{\partial\Gamma^{3}_{13}}{\partial x^{1}}+\frac{\partial\Gamma^{4}_{14}}{\partial x^{1}}-\frac{\partial\Gamma^{2}_{11}}{\partial x^{2}}-\frac{\partial\Gamma^{3}_{11}}{\partial x^{3}}-\frac{\partial\Gamma^{4}_{11}}{\partial x^{4}}+$$

$$+\Gamma^{1}_{12}\Gamma^{2}_{11}+\Gamma^{2}_{12}\Gamma^{2}_{12}+2\Gamma^{3}_{12}\Gamma^{2}_{13}+2\Gamma^{4}_{12}\Gamma^{2}_{14}+\Gamma^{1}_{13}\Gamma^{3}_{11}+\Gamma^{3}_{13}\Gamma^{3}_{13}+2\Gamma^{4}_{13}\Gamma^{3}_{14}+\Gamma^{1}_{14}\Gamma^{4}_{11}+\Gamma^{4}_{14}\Gamma^{4}_{14}+$$

$$-\Gamma^{1}_{11}\Gamma^{2}_{12}-\Gamma^{2}_{11}\Gamma^{2}_{22}-\Gamma^{3}_{11}\Gamma^{2}_{23}-\Gamma^{4}_{11}\Gamma^{2}_{24}-\Gamma^{1}_{11}\Gamma^{3}_{13}-\Gamma^{2}_{11}\Gamma^{3}_{23}-\Gamma^{3}_{11}\Gamma^{3}_{33}-\Gamma^{4}_{11}\Gamma^{3}_{34}-\Gamma^{1}_{11}\Gamma^{4}_{14}-$$

$$-\Gamma^{2}_{11}\Gamma^{4}_{24}-\Gamma^{3}_{11}\Gamma^{4}_{34}-\Gamma^{4}_{11}\Gamma^{4}_{44}$$

$$R_{22}=\frac{\partial\Gamma^{1}_{12}}{\partial x^{2}}+\frac{\partial\Gamma^{3}_{23}}{\partial x^{2}}+\frac{\partial\Gamma^{4}_{24}}{\partial x^{2}}-\frac{\partial\Gamma^{1}_{22}}{\partial x^{1}}-\frac{\partial\Gamma^{3}_{22}}{\partial x^{3}}-\frac{\partial\Gamma^{4}_{22}}{\partial x^{4}}+$$

$$+\Gamma^{1}_{12}\Gamma^{1}_{12}+\Gamma^{2}_{12}\Gamma^{1}_{22}+2\Gamma^{3}_{12}\Gamma^{1}_{23}+2\Gamma^{4}_{12}\Gamma^{1}_{24}+\Gamma^{2}_{23}\Gamma^{3}_{22}+\Gamma^{3}_{23}\Gamma^{3}_{23}+2\Gamma^{4}_{23}\Gamma^{3}_{24}+\Gamma^{2}_{24}\Gamma^{4}_{22}+\Gamma^{4}_{24}\Gamma^{4}_{24}$$

$$-\Gamma^{1}_{22}\Gamma^{1}_{11}-\Gamma^{2}_{22}\Gamma^{1}_{12}-\Gamma^{3}_{22}\Gamma^{1}_{13}-\Gamma^{4}_{22}\Gamma^{1}_{14}-\Gamma^{1}_{22}\Gamma^{3}_{13}-\Gamma^{2}_{22}\Gamma^{3}_{23}-\Gamma^{3}_{22}\Gamma^{3}_{33}-\Gamma^{4}_{22}\Gamma^{3}_{34}-\Gamma^{1}_{22}\Gamma^{4}_{14}-$$

$$-\Gamma^{2}_{22}\Gamma^{4}_{24}-\Gamma^{3}_{22}\Gamma^{4}_{34}-\Gamma^{4}_{22}\Gamma^{4}_{44}$$

$$R_{33}=\frac{\partial\Gamma^{1}_{13}}{\partial x^{3}}+\frac{\partial\Gamma^{2}_{23}}{\partial x^{3}}+\frac{\partial\Gamma^{4}_{34}}{\partial x^{3}}-\frac{\partial\Gamma^{1}_{33}}{\partial x^{1}}-\frac{\partial\Gamma^{2}_{33}}{\partial x^{2}}-\frac{\partial\Gamma^{4}_{33}}{\partial x^{4}}+$$

$$+\Gamma^{1}_{13}\Gamma^{1}_{13}+2\Gamma^{2}_{13}\Gamma^{1}_{23}+\Gamma^{3}_{13}\Gamma^{1}_{33}+2\Gamma^{4}_{13}\Gamma^{1}_{34}+\Gamma^{2}_{23}\Gamma^{2}_{23}+\Gamma^{3}_{23}\Gamma^{2}_{33}+2\Gamma^{4}_{23}\Gamma^{2}_{34}+\Gamma^{3}_{34}\Gamma^{4}_{33}+\Gamma^{4}_{34}\Gamma^{4}_{34}+$$

$$-\Gamma^{1}_{33}\Gamma^{1}_{11}-\Gamma^{2}_{33}\Gamma^{1}_{12}-\Gamma^{3}_{33}\Gamma^{1}_{13}-\Gamma^{4}_{33}\Gamma^{1}_{14}-\Gamma^{1}_{33}\Gamma^{2}_{12}-\Gamma^{2}_{33}\Gamma^{2}_{22}-\Gamma^{3}_{33}\Gamma^{2}_{23}-\Gamma^{4}_{33}\Gamma^{2}_{24}-\Gamma^{1}_{33}\Gamma^{4}_{14}-$$

$$-\Gamma^{2}_{33}\Gamma^{4}_{24}-\Gamma^{3}_{33}\Gamma^{4}_{34}-\Gamma^{4}_{33}\Gamma^{4}_{44}$$

$$R_{44}=\frac{\partial\Gamma^{1}_{14}}{\partial x^{4}}+\frac{\partial\Gamma^{2}_{24}}{\partial x^{4}}+\frac{\partial\Gamma^{3}_{34}}{\partial x^{4}}-\frac{\partial\Gamma^{1}_{44}}{\partial x^{1}}-\frac{\partial\Gamma^{2}_{44}}{\partial x^{2}}-\frac{\partial\Gamma^{3}_{44}}{\partial x^{3}}+$$

$$+\Gamma^{1}_{14}\Gamma^{1}_{14}+2\Gamma^{2}_{14}\Gamma^{1}_{24}+2\Gamma^{3}_{14}\Gamma^{1}_{34}+\Gamma^{4}_{14}\Gamma^{1}_{44}+\Gamma^{2}_{24}\Gamma^{2}_{24}+2\Gamma^{3}_{24}\Gamma^{2}_{34}+\Gamma^{4}_{24}\Gamma^{2}_{44}+\Gamma^{3}_{34}\Gamma^{3}_{34}+\Gamma^{4}_{34}\Gamma^{3}_{44}+$$

$$-\Gamma^{1}_{44}\Gamma^{1}_{11}-\Gamma^{2}_{44}\Gamma^{1}_{12}-\Gamma^{3}_{44}\Gamma^{1}_{13}-\Gamma^{4}_{44}\Gamma^{1}_{14}-\Gamma^{1}_{44}\Gamma^{2}_{12}-\Gamma^{2}_{44}\Gamma^{2}_{22}-\Gamma^{3}_{44}\Gamma^{2}_{23}-\Gamma^{4}_{44}\Gamma^{2}_{24}-\Gamma^{1}_{44}\Gamma^{3}_{13}-$$

$$-\Gamma^{2}_{44}\Gamma^{3}_{23}-\Gamma^{3}_{44}\Gamma^{3}_{33}-\Gamma^{4}_{44}\Gamma^{3}_{34}$$

$$R_{12} = R_{21} = \frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma^3_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma^4_{14}}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma^1_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma^3_{12}}{\partial x^3} - \frac{\partial \Gamma^4_{12}}{\partial x^4} +$$

$$+\Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22} + \Gamma^3_{11}\Gamma^1_{23} + \Gamma^4_{11}\Gamma^1_{24} + \Gamma^2_{13}\Gamma^3_{22} + \Gamma^3_{13}\Gamma^3_{23} + \Gamma^4_{13}\Gamma^3_{24} + \Gamma^2_{14}\Gamma^4_{22} + \Gamma^3_{14}\Gamma^4_{23} + \Gamma^4_{14}\Gamma^4_{24} +$$

$$-\Gamma^2_{12}\Gamma^1_{12} - \Gamma^1_{12}\Gamma^3_{13} - \Gamma^2_{12}\Gamma^3_{23} - \Gamma^3_{12}\Gamma^3_{33} - \Gamma^4_{12}\Gamma^3_{34} - \Gamma^1_{12}\Gamma^4_{14} - \Gamma^2_{12}\Gamma^4_{24} - \Gamma^3_{12}\Gamma^4_{34} - \Gamma^4_{12}\Gamma^4_{44}$$

$$R_{13} = R_{31} = \frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial x^3} + \frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial x^3} + \frac{\partial \Gamma^4_{14}}{\partial x^3} - \frac{\partial \Gamma^1_{13}}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma^2_{13}}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma^4_{13}}{\partial x^4} +$$

$$+\Gamma^2_{11}\Gamma^1_{23} + \Gamma^3_{11}\Gamma^1_{33} + \Gamma^4_{11}\Gamma^1_{34} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{23} + \Gamma^3_{12}\Gamma^2_{33} + \Gamma^4_{12}\Gamma^2_{34} + \Gamma^2_{14}\Gamma^4_{23} + \Gamma^3_{14}\Gamma^4_{33} + \Gamma^4_{14}\Gamma^4_{34} +$$

$$-\Gamma^3_{13}\Gamma^1_{13} - \Gamma^1_{13}\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{13}\Gamma^2_{22} - \Gamma^3_{13}\Gamma^2_{23} - \Gamma^4_{13}\Gamma^2_{24} - \Gamma^1_{13}\Gamma^4_{14} - \Gamma^2_{13}\Gamma^4_{24} - \Gamma^3_{13}\Gamma^4_{34} - \Gamma^4_{13}\Gamma^4_{44}$$

$$R_{14} = R_{41} = \frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial x^4} + \frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial x^4} + \frac{\partial \Gamma^3_{13}}{\partial x^4} - \frac{\partial \Gamma^1_{14}}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma^2_{14}}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma^3_{14}}{\partial x^3} +$$

$$+\Gamma^2_{11}\Gamma^1_{24} + \Gamma^3_{11}\Gamma^1_{34} + \Gamma^4_{11}\Gamma^1_{44} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{24} + \Gamma^3_{12}\Gamma^2_{34} + \Gamma^4_{12}\Gamma^2_{44} + \Gamma^2_{13}\Gamma^3_{24} + \Gamma^3_{13}\Gamma^3_{34} + \Gamma^4_{13}\Gamma^3_{44} +$$

$$-\Gamma^4_{14}\Gamma^1_{14} - \Gamma^1_{14}\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{14}\Gamma^2_{22} - \Gamma^3_{14}\Gamma^2_{23} - \Gamma^4_{14}\Gamma^2_{24} - \Gamma^1_{14}\Gamma^3_{13} - \Gamma^2_{14}\Gamma^3_{23} - \Gamma^3_{14}\Gamma^3_{33} - \Gamma^4_{14}\Gamma^3_{34}$$

$$R_{23} = R_{32} = \frac{\partial \Gamma^1_{12}}{\partial x^3} + \frac{\partial \Gamma^2_{22}}{\partial x^3} + \frac{\partial \Gamma^4_{24}}{\partial x^3} - \frac{\partial \Gamma^1_{23}}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma^2_{23}}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma^4_{23}}{\partial x^4}$$

$$+\Gamma^1_{12}\Gamma^1_{13} + \Gamma^3_{12}\Gamma^1_{33} + \Gamma^4_{12}\Gamma^1_{34} + \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{13} + \Gamma^3_{22}\Gamma^2_{33} + \Gamma^4_{22}\Gamma^2_{34} + \Gamma^1_{24}\Gamma^4_{13} + \Gamma^3_{24}\Gamma^4_{33} + \Gamma^4_{24}\Gamma^4_{34} +$$

$$-\Gamma^1_{23}\Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{23}\Gamma^1_{12} - \Gamma^3_{23}\Gamma^1_{13} - \Gamma^4_{23}\Gamma^1_{14} - \Gamma^3_{23}\Gamma^2_{23} - \Gamma^1_{23}\Gamma^4_{14} - \Gamma^2_{23}\Gamma^4_{24} - \Gamma^3_{23}\Gamma^4_{34} - \Gamma^4_{23}\Gamma^4_{44}$$

$$R_{24} = R_{42} = \frac{\partial \Gamma^1_{12}}{\partial x^4} + \frac{\partial \Gamma^2_{22}}{\partial x^4} + \frac{\partial \Gamma^3_{23}}{\partial x^4} - \frac{\partial \Gamma^1_{24}}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma^2_{24}}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma^3_{24}}{\partial x^3} +$$

$$+\Gamma^1_{12}\Gamma^1_{14} + \Gamma^3_{12}\Gamma^1_{34} + \Gamma^4_{12}\Gamma^1_{44} + \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{14} + \Gamma^3_{22}\Gamma^2_{34} + \Gamma^4_{22}\Gamma^2_{44} + \Gamma^1_{23}\Gamma^3_{14} + \Gamma^3_{23}\Gamma^3_{34} + \Gamma^4_{23}\Gamma^3_{44} +$$

$$-\Gamma^1_{24}\Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{24}\Gamma^1_{12} - \Gamma^3_{24}\Gamma^1_{13} - \Gamma^4_{24}\Gamma^1_{14} - \Gamma^4_{24}\Gamma^2_{24} - \Gamma^1_{24}\Gamma^3_{13} - \Gamma^2_{24}\Gamma^3_{23} - \Gamma^3_{24}\Gamma^3_{33} - \Gamma^4_{24}\Gamma^3_{34}$$

$$R_{34} = R_{43} = \frac{\partial \Gamma^1_{13}}{\partial x^4} + \frac{\partial \Gamma^2_{23}}{\partial x^4} + \frac{\partial \Gamma^3_{33}}{\partial x^4} - \frac{\partial \Gamma^1_{34}}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma^2_{34}}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma^3_{34}}{\partial x^3} +$$

$$+\Gamma^1_{13}\Gamma^1_{14} + \Gamma^2_{13}\Gamma^1_{24} + \Gamma^4_{13}\Gamma^1_{44} + \Gamma^1_{23}\Gamma^2_{14} + \Gamma^2_{23}\Gamma^2_{24} + \Gamma^4_{23}\Gamma^2_{44} + \Gamma^1_{33}\Gamma^3_{14} + \Gamma^2_{33}\Gamma^3_{24} + \Gamma^4_{33}\Gamma^3_{44} +$$

$$-\Gamma^1_{34}\Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{34}\Gamma^1_{12} - \Gamma^3_{34}\Gamma^1_{13} - \Gamma^4_{34}\Gamma^1_{14} - \Gamma^1_{34}\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{34}\Gamma^2_{22} - \Gamma^3_{34}\Gamma^2_{23} - \Gamma^4_{34}\Gamma^2_{24} - \Gamma^4_{34}\Gamma^3_{34}$$

UWAGA

Tensor Ricciego

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\beta_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha_{\beta\nu} - \Gamma^\beta_{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\beta\alpha}$$

po zamianie rolami wskaźników α i β w ostatnich dwóch członach ostatniego równania przedstawimy w postaci używanej przez Einsteina.

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\alpha\beta}$$

- **Niezależne składowe mieszanego tensora krzywizny Grossmanna** $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}$

Tensor $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}$ posiada w przestrzeni czterowymiarowej 256 składowych spełniających następujące relacje:

$$
\begin{aligned}
&R^1_{111}=R^1_{122}=R^1_{133}=R^1_{144}=R^1_{211}=R^1_{222}=R^1_{233}=R^1_{244}=R^1_{311}=R^1_{322}=R^1_{333}=R^1_{344}=\\
&=R^1_{411}=R^1_{422}=R^1_{433}=R^1_{444}=R^2_{111}=R^2_{122}=R^2_{133}=R^2_{144}=R^2_{211}=R^2_{222}=R^2_{233}=R^2_{244}=\\
&=R^2_{311}=R^2_{322}=R^2_{333}=R^2_{344}=R^2_{411}=R^2_{422}=R^2_{433}=R^2_{444}=R^3_{111}=R^3_{122}=R^3_{133}=R^3_{144}=\\
&=R^3_{211}=R^3_{222}=R^3_{233}=R^3_{244}=R^3_{311}=R^3_{322}=R^3_{333}=R^3_{344}=R^3_{411}=R^3_{422}=R^3_{433}=R^3_{444}=\\
&=R^4_{111}=R^4_{122}=R^4_{133}=R^4_{144}=R^4_{211}=R^4_{222}=R^4_{233}=R^4_{244}=R^4_{311}=R^4_{322}=R^4_{333}=R^4_{344}=\\
&=R^4_{411}=R^4_{422}=R^4_{433}=R^4_{444}=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
R^1_{112}=-R^1_{121}, & R^1_{113}=-R^1_{131}, & R^1_{114}=-R^1_{141}, & R^1_{123}=-R^1_{132}, & R^1_{124}=-R^1_{142},\\
R^1_{134}=-R^1_{143}, & R^1_{212}=-R^1_{221}, & R^1_{213}=-R^1_{231}, & R^1_{214}=-R^1_{241}, & R^1_{223}=-R^1_{232},\\
R^1_{224}=-R^1_{242}, & R^1_{234}=-R^1_{243}, & R^1_{312}=-R^1_{321}, & R^1_{313}=-R^1_{331}, & R^1_{314}=-R^1_{341},\\
R^1_{323}=-R^1_{332}, & R^1_{324}=-R^1_{342}, & R^1_{334}=-R^1_{343}, & R^1_{412}=-R^1_{421}, & R^1_{413}=-R^1_{431},\\
R^1_{414}=-R^1_{441}, & R^1_{423}=-R^1_{432}, & R^1_{424}=-R^1_{442}, & R^1_{434}=-R^1_{443}, & \\
R^2_{112}=-R^2_{121}, & R^2_{113}=-R^2_{131}, & R^2_{114}=-R^2_{141}, & R^2_{123}=-R^2_{132}, & R^2_{124}=-R^2_{142},\\
R^2_{134}=-R^2_{143}, & R^2_{212}=-R^2_{221}, & R^2_{213}=-R^2_{231}, & R^2_{214}=-R^2_{241}, & R^2_{223}=-R^2_{232},\\
R^2_{224}=-R^2_{242}, & R^2_{234}=-R^2_{243}, & R^2_{312}=-R^2_{321}, & R^2_{313}=-R^2_{331}, & R^2_{314}=-R^2_{341},\\
R^2_{323}=-R^2_{332}, & R^2_{324}=-R^2_{342}, & R^2_{334}=-R^2_{343}, & R^2_{412}=-R^2_{421}, & R^2_{413}=-R^2_{431},\\
R^2_{414}=-R^2_{441}, & R^2_{423}=-R^2_{432}, & R^2_{424}=-R^2_{442}, & R^2_{434}=-R^2_{443}, & \\
R^3_{112}=-R^3_{121}, & R^3_{113}=-R^3_{131}, & R^3_{114}=-R^3_{141}, & R^3_{123}=-R^3_{132}, & R^3_{124}=-R^3_{142},\\
R^3_{134}=-R^3_{143}, & R^3_{212}=-R^3_{221}, & R^3_{213}=-R^3_{231}, & R^3_{214}=-R^3_{241}, & R^3_{223}=-R^3_{232},\\
R^3_{224}=-R^3_{242}, & R^3_{234}=-R^3_{243}, & R^3_{312}=-R^3_{321}, & R^3_{313}=-R^3_{331}, & R^3_{314}=-R^3_{341},\\
R^3_{323}=-R^3_{332}, & R^3_{324}=-R^3_{342}, & R^3_{334}=-R^3_{343}, & R^3_{412}=-R^3_{421}, & R^3_{413}=-R^3_{431},\\
R^3_{414}=-R^3_{441}, & R^3_{423}=-R^3_{432}, & R^3_{424}=-R^3_{442}, & R^3_{434}=-R^3_{443}, & \\
R^4_{112}=-R^4_{121}, & R^4_{113}=-R^4_{131}, & R^4_{114}=-R^4_{141}, & R^4_{123}=-R^4_{132}, & R^4_{124}=-R^4_{142},\\
R^4_{134}=-R^4_{143}, & R^4_{212}=-R^4_{221}, & R^4_{213}=-R^4_{231}, & R^4_{214}=-R^4_{241}, & R^4_{223}=-R^4_{232},\\
R^4_{224}=-R^4_{242}, & R^4_{234}=-R^4_{243}, & R^4_{312}=-R^4_{321}, & R^4_{313}=-R^4_{331}, & R^4_{314}=-R^4_{341},\\
R^4_{323}=-R^4_{332}, & R^4_{324}=-R^4_{342}, & R^4_{334}=-R^4_{343}, & R^4_{412}=-R^4_{421}, & R^4_{413}=-R^4_{431},\\
R^4_{414}=-R^4_{441}, & R^4_{423}=-R^4_{432}, & R^4_{424}=-R^4_{442}, & R^4_{434}=-R^4_{443}. &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&R^1_{234}+R^1_{423}-R^1_{324}=0, \quad R^2_{134}+R^2_{413}-R^2_{314}=0,\\
&R^3_{124}+R^3_{412}-R^3_{214}=0, \quad R^4_{123}+R^4_{312}-R^4_{213}=0,\\
&R^1_{112}+R^2_{212}+R^3_{312}+R^4_{412}=0, \quad R^1_{113}+R^2_{213}+R^3_{313}+R^4_{413}=0, \quad R^1_{114}+R^2_{214}+R^3_{314}+R^4_{414}=0,\\
&R^1_{123}+R^2_{223}+R^3_{323}+R^4_{423}=0, \quad R^1_{124}+R^2_{224}+R^3_{324}+R^4_{424}=0, \quad R^1_{134}+R^2_{234}+R^3_{334}+R^4_{434}=0.
\end{aligned}
$$

Wśród 192 niezerowych składowych tylko 86 jest niezależnych względem powyższych warunków.

- **Jawna postać niezerowych składowych mieszanego tensora krzywizny Grossmanna**

$$R^1_{112}=\frac{\partial\Gamma^1_{12}}{\partial x^1}-\frac{\partial\Gamma^1_{11}}{\partial x^2}-\Gamma^1_{22}\Gamma^2_{11}-\Gamma^1_{32}\Gamma^3_{11}-\Gamma^1_{42}\Gamma^4_{11}+\Gamma^1_{21}\Gamma^2_{12}+\Gamma^1_{31}\Gamma^3_{12}+\Gamma^1_{41}\Gamma^4_{12}$$

$$R^1_{113}=\frac{\partial\Gamma^1_{13}}{\partial x^1}-\frac{\partial\Gamma^1_{11}}{\partial x^3}-\Gamma^1_{23}\Gamma^2_{11}-\Gamma^1_{33}\Gamma^3_{11}-\Gamma^1_{43}\Gamma^4_{11}+\Gamma^1_{21}\Gamma^2_{13}+\Gamma^1_{31}\Gamma^3_{13}+\Gamma^1_{41}\Gamma^4_{13}$$

$$R^1_{114}=\frac{\partial\Gamma^1_{14}}{\partial x^1}-\frac{\partial\Gamma^1_{11}}{\partial x^4}-\Gamma^1_{24}\Gamma^2_{11}-\Gamma^1_{34}\Gamma^3_{11}-\Gamma^1_{44}\Gamma^4_{11}+\Gamma^1_{21}\Gamma^2_{14}+\Gamma^1_{31}\Gamma^3_{14}+\Gamma^1_{41}\Gamma^4_{14}$$

$$R^1_{123}=\frac{\partial\Gamma^1_{13}}{\partial x^2}-\frac{\partial\Gamma^1_{12}}{\partial x^3}-\Gamma^1_{23}\Gamma^2_{12}-\Gamma^1_{33}\Gamma^3_{12}-\Gamma^1_{43}\Gamma^4_{12}+\Gamma^1_{22}\Gamma^2_{13}+\Gamma^1_{32}\Gamma^3_{13}+\Gamma^1_{42}\Gamma^4_{13}$$

$$R^1_{124}=\frac{\partial\Gamma^1_{14}}{\partial x^2}-\frac{\partial\Gamma^1_{12}}{\partial x^4}-\Gamma^1_{24}\Gamma^2_{12}-\Gamma^1_{34}\Gamma^3_{12}-\Gamma^1_{44}\Gamma^4_{12}+\Gamma^1_{22}\Gamma^2_{14}+\Gamma^1_{32}\Gamma^3_{14}+\Gamma^1_{42}\Gamma^4_{14}$$

$$R^1_{134}=\frac{\partial\Gamma^1_{14}}{\partial x^3}-\frac{\partial\Gamma^1_{13}}{\partial x^4}-\Gamma^1_{24}\Gamma^2_{13}-\Gamma^1_{34}\Gamma^3_{13}-\Gamma^1_{44}\Gamma^4_{13}+\Gamma^1_{23}\Gamma^2_{14}+\Gamma^1_{33}\Gamma^3_{14}+\Gamma^1_{43}\Gamma^4_{14}$$

$$R^1_{212}=\frac{\partial\Gamma^1_{22}}{\partial x^1}-\frac{\partial\Gamma^1_{21}}{\partial x^2}-\Gamma^1_{12}\Gamma^1_{21}-\Gamma^1_{22}\Gamma^2_{21}-\Gamma^1_{32}\Gamma^3_{21}-\Gamma^1_{42}\Gamma^4_{21}+\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{22}+\Gamma^1_{21}\Gamma^2_{22}+\Gamma^1_{31}\Gamma^3_{22}+\Gamma^1_{41}\Gamma^4_{22}$$

$$R^1_{213}=\frac{\partial\Gamma^1_{23}}{\partial x^1}-\frac{\partial\Gamma^1_{21}}{\partial x^3}-\Gamma^1_{13}\Gamma^1_{21}-\Gamma^1_{23}\Gamma^2_{21}-\Gamma^1_{33}\Gamma^3_{21}-\Gamma^1_{43}\Gamma^4_{21}+\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{23}+\Gamma^1_{21}\Gamma^2_{23}+\Gamma^1_{31}\Gamma^3_{23}+\Gamma^1_{41}\Gamma^4_{23}$$

$$R^1_{214}=\frac{\partial\Gamma^1_{24}}{\partial x^1}-\frac{\partial\Gamma^1_{21}}{\partial x^4}-\Gamma^1_{14}\Gamma^1_{21}-\Gamma^1_{24}\Gamma^2_{21}-\Gamma^1_{34}\Gamma^3_{21}-\Gamma^1_{44}\Gamma^4_{21}+\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{24}+\Gamma^1_{21}\Gamma^2_{24}+\Gamma^1_{31}\Gamma^3_{24}+\Gamma^1_{41}\Gamma^4_{24}$$

$$R^1_{223}=\frac{\partial\Gamma^1_{23}}{\partial x^2}-\frac{\partial\Gamma^1_{22}}{\partial x^3}-\Gamma^1_{13}\Gamma^1_{22}-\Gamma^1_{23}\Gamma^2_{22}-\Gamma^1_{33}\Gamma^3_{22}-\Gamma^1_{43}\Gamma^4_{22}+\Gamma^1_{12}\Gamma^1_{23}+\Gamma^1_{22}\Gamma^2_{23}+\Gamma^1_{32}\Gamma^3_{23}+\Gamma^1_{42}\Gamma^4_{23}$$

$$R^1_{224}=\frac{\partial\Gamma^1_{24}}{\partial x^2}-\frac{\partial\Gamma^1_{22}}{\partial x^4}-\Gamma^1_{14}\Gamma^1_{22}-\Gamma^1_{24}\Gamma^2_{22}-\Gamma^1_{34}\Gamma^3_{22}-\Gamma^1_{44}\Gamma^4_{22}+\Gamma^1_{12}\Gamma^1_{24}+\Gamma^1_{22}\Gamma^2_{24}+\Gamma^1_{32}\Gamma^3_{24}+\Gamma^1_{42}\Gamma^4_{24}$$

$$R^1_{234}=\frac{\partial\Gamma^1_{24}}{\partial x^3}-\frac{\partial\Gamma^1_{23}}{\partial x^4}-\Gamma^1_{14}\Gamma^1_{23}-\Gamma^1_{24}\Gamma^2_{23}-\Gamma^1_{34}\Gamma^3_{23}-\Gamma^1_{44}\Gamma^4_{23}+\Gamma^1_{13}\Gamma^1_{24}+\Gamma^1_{23}\Gamma^2_{24}+\Gamma^1_{33}\Gamma^3_{24}+\Gamma^1_{43}\Gamma^4_{24}$$

$$R^1_{312}=\frac{\partial\Gamma^1_{32}}{\partial x^1}-\frac{\partial\Gamma^1_{31}}{\partial x^2}-\Gamma^1_{12}\Gamma^1_{31}-\Gamma^1_{22}\Gamma^2_{31}-\Gamma^1_{32}\Gamma^3_{31}-\Gamma^1_{42}\Gamma^4_{31}+\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{32}+\Gamma^1_{21}\Gamma^2_{32}+\Gamma^1_{31}\Gamma^3_{32}+\Gamma^1_{41}\Gamma^4_{32}$$

$$R^1_{313}=\frac{\partial\Gamma^1_{33}}{\partial x^1}-\frac{\partial\Gamma^1_{31}}{\partial x^3}-\Gamma^1_{13}\Gamma^1_{31}-\Gamma^1_{23}\Gamma^2_{31}-\Gamma^1_{33}\Gamma^3_{31}-\Gamma^1_{43}\Gamma^4_{31}+\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{33}+\Gamma^1_{21}\Gamma^2_{33}+\Gamma^1_{31}\Gamma^3_{33}+\Gamma^1_{41}\Gamma^4_{33}$$

$$R^1_{314}=\frac{\partial\Gamma^1_{34}}{\partial x^1}-\frac{\partial\Gamma^1_{31}}{\partial x^4}-\Gamma^1_{14}\Gamma^1_{31}-\Gamma^1_{24}\Gamma^2_{31}-\Gamma^1_{34}\Gamma^3_{31}-\Gamma^1_{44}\Gamma^4_{31}+\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{34}+\Gamma^1_{21}\Gamma^2_{34}+\Gamma^1_{31}\Gamma^3_{34}+\Gamma^1_{41}\Gamma^4_{34}$$

$$R^1_{323}=\frac{\partial\Gamma^1_{33}}{\partial x^2}-\frac{\partial\Gamma^1_{32}}{\partial x^3}-\Gamma^1_{13}\Gamma^1_{32}-\Gamma^1_{23}\Gamma^2_{32}-\Gamma^1_{33}\Gamma^3_{32}-\Gamma^1_{43}\Gamma^4_{32}+\Gamma^1_{12}\Gamma^1_{33}+\Gamma^1_{22}\Gamma^2_{33}+\Gamma^1_{32}\Gamma^3_{33}+\Gamma^1_{42}\Gamma^4_{33}$$

$$R^1_{324}=\frac{\partial\Gamma^1_{34}}{\partial x^2}-\frac{\partial\Gamma^1_{32}}{\partial x^4}-\Gamma^1_{14}\Gamma^1_{32}-\Gamma^1_{24}\Gamma^2_{32}-\Gamma^1_{34}\Gamma^3_{32}-\Gamma^1_{44}\Gamma^4_{32}+\Gamma^1_{12}\Gamma^1_{34}+\Gamma^1_{22}\Gamma^2_{34}+\Gamma^1_{32}\Gamma^3_{34}+\Gamma^1_{42}\Gamma^4_{34}$$

$$R^{1}_{334} = \frac{\partial \Gamma^{1}_{34}}{\partial x^{3}} - \frac{\partial \Gamma^{1}_{33}}{\partial x^{4}} - \Gamma^{1}_{14}\Gamma^{1}_{33} - \Gamma^{1}_{24}\Gamma^{2}_{33} - \Gamma^{1}_{34}\Gamma^{3}_{33} - \Gamma^{1}_{44}\Gamma^{4}_{33} + \Gamma^{1}_{13}\Gamma^{1}_{34} + \Gamma^{1}_{23}\Gamma^{2}_{34} + \Gamma^{1}_{33}\Gamma^{3}_{34} + \Gamma^{1}_{43}\Gamma^{4}_{34}$$

$$R^{1}_{412} = \frac{\partial \Gamma^{1}_{42}}{\partial x^{1}} - \frac{\partial \Gamma^{1}_{41}}{\partial x^{2}} - \Gamma^{1}_{12}\Gamma^{1}_{41} - \Gamma^{1}_{22}\Gamma^{2}_{41} - \Gamma^{1}_{32}\Gamma^{3}_{41} - \Gamma^{1}_{42}\Gamma^{4}_{41} + \Gamma^{1}_{11}\Gamma^{1}_{42} + \Gamma^{1}_{21}\Gamma^{2}_{42} + \Gamma^{1}_{31}\Gamma^{3}_{42} + \Gamma^{1}_{41}\Gamma^{4}_{42}$$

$$R^{1}_{413} = \frac{\partial \Gamma^{1}_{43}}{\partial x^{1}} - \frac{\partial \Gamma^{1}_{41}}{\partial x^{3}} - \Gamma^{1}_{13}\Gamma^{1}_{41} - \Gamma^{1}_{23}\Gamma^{2}_{41} - \Gamma^{1}_{33}\Gamma^{3}_{41} - \Gamma^{1}_{43}\Gamma^{4}_{41} + \Gamma^{1}_{11}\Gamma^{1}_{43} + \Gamma^{1}_{21}\Gamma^{2}_{43} + \Gamma^{1}_{31}\Gamma^{3}_{43} + \Gamma^{1}_{41}\Gamma^{4}_{43}$$

$$R^{1}_{414} = \frac{\partial \Gamma^{1}_{44}}{\partial x^{1}} - \frac{\partial \Gamma^{1}_{41}}{\partial x^{4}} - \Gamma^{1}_{14}\Gamma^{1}_{41} - \Gamma^{1}_{24}\Gamma^{2}_{41} - \Gamma^{1}_{34}\Gamma^{3}_{41} - \Gamma^{1}_{44}\Gamma^{4}_{41} + \Gamma^{1}_{11}\Gamma^{1}_{44} + \Gamma^{1}_{21}\Gamma^{2}_{44} + \Gamma^{1}_{31}\Gamma^{3}_{44} + \Gamma^{1}_{41}\Gamma^{4}_{44}$$

$$R^{1}_{423} = \frac{\partial \Gamma^{1}_{43}}{\partial x^{2}} - \frac{\partial \Gamma^{1}_{42}}{\partial x^{3}} - \Gamma^{1}_{13}\Gamma^{1}_{42} - \Gamma^{1}_{23}\Gamma^{2}_{42} - \Gamma^{1}_{33}\Gamma^{3}_{42} - \Gamma^{1}_{43}\Gamma^{4}_{42} + \Gamma^{1}_{12}\Gamma^{1}_{43} + \Gamma^{1}_{22}\Gamma^{2}_{43} + \Gamma^{1}_{32}\Gamma^{3}_{43} + \Gamma^{1}_{42}\Gamma^{4}_{43}$$

$$R^{1}_{424} = \frac{\partial \Gamma^{1}_{44}}{\partial x^{2}} - \frac{\partial \Gamma^{1}_{42}}{\partial x^{4}} - \Gamma^{1}_{14}\Gamma^{1}_{42} - \Gamma^{1}_{24}\Gamma^{2}_{42} - \Gamma^{1}_{34}\Gamma^{3}_{42} - \Gamma^{1}_{44}\Gamma^{4}_{42} + \Gamma^{1}_{12}\Gamma^{1}_{44} + \Gamma^{1}_{22}\Gamma^{2}_{44} + \Gamma^{1}_{32}\Gamma^{3}_{44} + \Gamma^{1}_{42}\Gamma^{4}_{44}$$

$$R^{1}_{434} = \frac{\partial \Gamma^{1}_{44}}{\partial x^{3}} - \frac{\partial \Gamma^{1}_{43}}{\partial x^{4}} - \Gamma^{1}_{14}\Gamma^{1}_{43} - \Gamma^{1}_{24}\Gamma^{2}_{43} - \Gamma^{1}_{34}\Gamma^{3}_{43} - \Gamma^{1}_{44}\Gamma^{4}_{43} + \Gamma^{1}_{13}\Gamma^{1}_{44} + \Gamma^{1}_{23}\Gamma^{2}_{44} + \Gamma^{1}_{33}\Gamma^{3}_{44} + \Gamma^{1}_{43}\Gamma^{4}_{44}$$

$$R^{2}_{112} = \frac{\partial \Gamma^{2}_{12}}{\partial x^{1}} - \frac{\partial \Gamma^{2}_{11}}{\partial x^{2}} - \Gamma^{2}_{12}\Gamma^{1}_{11} - \Gamma^{2}_{22}\Gamma^{2}_{11} - \Gamma^{2}_{32}\Gamma^{3}_{11} - \Gamma^{2}_{42}\Gamma^{4}_{11} + \Gamma^{2}_{11}\Gamma^{1}_{12} + \Gamma^{2}_{21}\Gamma^{2}_{12} + \Gamma^{2}_{31}\Gamma^{3}_{12} + \Gamma^{2}_{41}\Gamma^{4}_{12}$$

$$R^{2}_{113} = \frac{\partial \Gamma^{2}_{13}}{\partial x^{1}} - \frac{\partial \Gamma^{2}_{11}}{\partial x^{3}} - \Gamma^{2}_{13}\Gamma^{1}_{11} - \Gamma^{2}_{23}\Gamma^{2}_{11} - \Gamma^{2}_{33}\Gamma^{3}_{11} - \Gamma^{2}_{43}\Gamma^{4}_{11} + \Gamma^{2}_{11}\Gamma^{1}_{13} + \Gamma^{2}_{21}\Gamma^{2}_{13} + \Gamma^{2}_{31}\Gamma^{3}_{13} + \Gamma^{2}_{41}\Gamma^{4}_{13}$$

$$R^{2}_{114} = \frac{\partial \Gamma^{2}_{14}}{\partial x^{1}} - \frac{\partial \Gamma^{2}_{11}}{\partial x^{4}} - \Gamma^{2}_{14}\Gamma^{1}_{11} - \Gamma^{2}_{24}\Gamma^{2}_{11} - \Gamma^{2}_{34}\Gamma^{3}_{11} - \Gamma^{2}_{44}\Gamma^{4}_{11} + \Gamma^{2}_{11}\Gamma^{1}_{14} + \Gamma^{2}_{21}\Gamma^{2}_{14} + \Gamma^{2}_{31}\Gamma^{3}_{14} + \Gamma^{2}_{41}\Gamma^{4}_{14}$$

$$R^{2}_{123} = \frac{\partial \Gamma^{2}_{13}}{\partial x^{2}} - \frac{\partial \Gamma^{2}_{12}}{\partial x^{3}} - \Gamma^{2}_{13}\Gamma^{1}_{12} - \Gamma^{2}_{23}\Gamma^{2}_{12} - \Gamma^{2}_{33}\Gamma^{3}_{12} - \Gamma^{2}_{43}\Gamma^{4}_{12} + \Gamma^{2}_{12}\Gamma^{1}_{13} + \Gamma^{2}_{22}\Gamma^{2}_{13} + \Gamma^{2}_{32}\Gamma^{3}_{13} + \Gamma^{2}_{42}\Gamma^{4}_{13}$$

$$R^{2}_{124} = \frac{\partial \Gamma^{2}_{14}}{\partial x^{2}} - \frac{\partial \Gamma^{2}_{12}}{\partial x^{4}} - \Gamma^{2}_{14}\Gamma^{1}_{12} - \Gamma^{2}_{24}\Gamma^{2}_{12} - \Gamma^{2}_{34}\Gamma^{3}_{12} - \Gamma^{2}_{44}\Gamma^{4}_{12} + \Gamma^{2}_{12}\Gamma^{1}_{14} + \Gamma^{2}_{22}\Gamma^{2}_{14} + \Gamma^{2}_{32}\Gamma^{3}_{14} + \Gamma^{2}_{42}\Gamma^{4}_{14}$$

$$R^{2}_{134} = \frac{\partial \Gamma^{2}_{14}}{\partial x^{3}} - \frac{\partial \Gamma^{2}_{13}}{\partial x^{4}} - \Gamma^{2}_{14}\Gamma^{1}_{13} - \Gamma^{2}_{24}\Gamma^{2}_{13} - \Gamma^{2}_{34}\Gamma^{3}_{13} - \Gamma^{2}_{44}\Gamma^{4}_{13} + \Gamma^{2}_{13}\Gamma^{1}_{14} + \Gamma^{2}_{23}\Gamma^{2}_{14} + \Gamma^{2}_{33}\Gamma^{3}_{14} + \Gamma^{2}_{43}\Gamma^{4}_{14}$$

$$R^{2}_{212} = \frac{\partial \Gamma^{2}_{22}}{\partial x^{1}} - \frac{\partial \Gamma^{2}_{21}}{\partial x^{2}} - \Gamma^{2}_{12}\Gamma^{1}_{21} - \Gamma^{2}_{32}\Gamma^{3}_{21} - \Gamma^{2}_{42}\Gamma^{4}_{21} + \Gamma^{2}_{11}\Gamma^{1}_{22} + \Gamma^{2}_{31}\Gamma^{3}_{22} + \Gamma^{2}_{41}\Gamma^{4}_{22}$$

$$R^{2}_{213} = \frac{\partial \Gamma^{2}_{23}}{\partial x^{1}} - \frac{\partial \Gamma^{2}_{21}}{\partial x^{3}} - \Gamma^{2}_{13}\Gamma^{1}_{21} - \Gamma^{2}_{33}\Gamma^{3}_{21} - \Gamma^{2}_{43}\Gamma^{4}_{21} + \Gamma^{2}_{11}\Gamma^{1}_{23} + \Gamma^{2}_{31}\Gamma^{3}_{23} + \Gamma^{2}_{41}\Gamma^{4}_{23}$$

$$R^{2}_{214} = \frac{\partial \Gamma^{2}_{24}}{\partial x^{1}} - \frac{\partial \Gamma^{2}_{21}}{\partial x^{4}} - \Gamma^{2}_{14}\Gamma^{1}_{21} - \Gamma^{2}_{34}\Gamma^{3}_{21} - \Gamma^{2}_{44}\Gamma^{4}_{21} + \Gamma^{2}_{11}\Gamma^{1}_{24} + \Gamma^{2}_{31}\Gamma^{3}_{24} + \Gamma^{2}_{41}\Gamma^{4}_{24}$$

$$R^{2}_{223} = \frac{\partial \Gamma^{2}_{23}}{\partial x^{2}} - \frac{\partial \Gamma^{2}_{22}}{\partial x^{3}} - \Gamma^{2}_{13}\Gamma^{1}_{22} - \Gamma^{2}_{33}\Gamma^{3}_{22} - \Gamma^{2}_{43}\Gamma^{4}_{22} + \Gamma^{2}_{12}\Gamma^{1}_{23} + \Gamma^{2}_{32}\Gamma^{3}_{23} + \Gamma^{2}_{42}\Gamma^{4}_{23}$$

$$R^{2}_{224} = \frac{\partial \Gamma^{2}_{24}}{\partial x^{2}} - \frac{\partial \Gamma^{2}_{22}}{\partial x^{4}} - \Gamma^{2}_{14}\Gamma^{1}_{22} - \Gamma^{2}_{34}\Gamma^{3}_{22} - \Gamma^{2}_{44}\Gamma^{4}_{22} + \Gamma^{2}_{12}\Gamma^{1}_{24} + \Gamma^{2}_{32}\Gamma^{3}_{24} + \Gamma^{2}_{42}\Gamma^{4}_{24}$$

$$R^2_{234} = \frac{\partial \Gamma^2_{24}}{\partial x^3} - \frac{\partial \Gamma^2_{23}}{\partial x^4} - \Gamma^2_{14}\Gamma^1_{23} - \Gamma^2_{34}\Gamma^3_{23} - \Gamma^2_{44}\Gamma^4_{23} + \Gamma^2_{13}\Gamma^1_{24} + \Gamma^2_{33}\Gamma^3_{24} + \Gamma^2_{43}\Gamma^4_{24}$$

$$R^2_{312} = \frac{\partial \Gamma^2_{32}}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma^2_{31}}{\partial x^2} - \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{31} - \Gamma^2_{22}\Gamma^2_{31} - \Gamma^2_{32}\Gamma^3_{31} - \Gamma^2_{42}\Gamma^4_{31} + \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{32} + \Gamma^2_{21}\Gamma^2_{32} + \Gamma^2_{31}\Gamma^3_{32} + \Gamma^2_{41}\Gamma^4_{32}$$

$$R^2_{313} = \frac{\partial \Gamma^2_{33}}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma^2_{31}}{\partial x^3} - \Gamma^2_{13}\Gamma^1_{31} - \Gamma^2_{23}\Gamma^2_{31} - \Gamma^2_{33}\Gamma^3_{31} - \Gamma^2_{43}\Gamma^4_{31} + \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{33} + \Gamma^2_{21}\Gamma^2_{33} + \Gamma^2_{31}\Gamma^3_{33} + \Gamma^2_{41}\Gamma^4_{33}$$

$$R^2_{314} = \frac{\partial \Gamma^2_{34}}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma^2_{31}}{\partial x^4} - \Gamma^2_{14}\Gamma^1_{31} - \Gamma^2_{24}\Gamma^2_{31} - \Gamma^2_{34}\Gamma^3_{31} - \Gamma^2_{44}\Gamma^4_{31} + \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{34} + \Gamma^2_{21}\Gamma^2_{34} + \Gamma^2_{31}\Gamma^3_{34} + \Gamma^2_{41}\Gamma^4_{34}$$

$$R^2_{323} = \frac{\partial \Gamma^2_{33}}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma^2_{32}}{\partial x^3} - \Gamma^2_{13}\Gamma^1_{32} - \Gamma^2_{23}\Gamma^2_{32} - \Gamma^2_{33}\Gamma^3_{32} - \Gamma^2_{43}\Gamma^4_{32} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{33} + \Gamma^2_{22}\Gamma^2_{33} + \Gamma^2_{32}\Gamma^3_{33} + \Gamma^2_{42}\Gamma^4_{33}$$

$$R^2_{324} = \frac{\partial \Gamma^2_{34}}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma^2_{32}}{\partial x^4} - \Gamma^2_{14}\Gamma^1_{32} - \Gamma^2_{24}\Gamma^2_{32} - \Gamma^2_{34}\Gamma^3_{32} - \Gamma^2_{44}\Gamma^4_{32} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{34} + \Gamma^2_{22}\Gamma^2_{34} + \Gamma^2_{32}\Gamma^3_{34} + \Gamma^2_{42}\Gamma^4_{34}$$

$$R^2_{334} = \frac{\partial \Gamma^2_{34}}{\partial x^3} - \frac{\partial \Gamma^2_{33}}{\partial x^4} - \Gamma^2_{14}\Gamma^1_{33} - \Gamma^2_{24}\Gamma^2_{33} - \Gamma^2_{34}\Gamma^3_{33} - \Gamma^2_{44}\Gamma^4_{33} + \Gamma^2_{13}\Gamma^1_{34} + \Gamma^2_{23}\Gamma^2_{34} + \Gamma^2_{33}\Gamma^3_{34} + \Gamma^2_{43}\Gamma^4_{34}$$

$$R^2_{412} = \frac{\partial \Gamma^2_{42}}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma^2_{41}}{\partial x^2} - \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{41} - \Gamma^2_{22}\Gamma^2_{41} - \Gamma^2_{32}\Gamma^3_{41} - \Gamma^2_{42}\Gamma^4_{41} + \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{42} + \Gamma^2_{21}\Gamma^2_{42} + \Gamma^2_{31}\Gamma^3_{42} + \Gamma^2_{41}\Gamma^4_{42}$$

$$R^2_{413} = \frac{\partial \Gamma^2_{43}}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma^2_{41}}{\partial x^3} - \Gamma^2_{13}\Gamma^1_{41} - \Gamma^2_{23}\Gamma^2_{41} - \Gamma^2_{33}\Gamma^3_{41} - \Gamma^2_{43}\Gamma^4_{41} + \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{43} + \Gamma^2_{21}\Gamma^2_{43} + \Gamma^2_{31}\Gamma^3_{43} + \Gamma^2_{41}\Gamma^4_{43}$$

$$R^2_{414} = \frac{\partial \Gamma^2_{44}}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma^2_{41}}{\partial x^4} - \Gamma^2_{14}\Gamma^1_{41} - \Gamma^2_{24}\Gamma^2_{41} - \Gamma^2_{34}\Gamma^3_{41} - \Gamma^2_{44}\Gamma^4_{41} + \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{44} + \Gamma^2_{21}\Gamma^2_{44} + \Gamma^2_{31}\Gamma^3_{44} + \Gamma^2_{41}\Gamma^4_{44}$$

$$R^2_{423} = \frac{\partial \Gamma^2_{43}}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma^2_{42}}{\partial x^3} - \Gamma^2_{13}\Gamma^1_{42} - \Gamma^2_{23}\Gamma^2_{42} - \Gamma^2_{33}\Gamma^3_{42} - \Gamma^2_{43}\Gamma^4_{42} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{43} + \Gamma^2_{22}\Gamma^2_{43} + \Gamma^2_{32}\Gamma^3_{43} + \Gamma^2_{42}\Gamma^4_{43}$$

$$R^2_{424} = \frac{\partial \Gamma^2_{44}}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma^2_{42}}{\partial x^4} - \Gamma^2_{14}\Gamma^1_{42} - \Gamma^2_{24}\Gamma^2_{42} - \Gamma^2_{34}\Gamma^3_{42} - \Gamma^2_{44}\Gamma^4_{42} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{44} + \Gamma^2_{22}\Gamma^2_{44} + \Gamma^2_{32}\Gamma^3_{44} + \Gamma^2_{42}\Gamma^4_{44}$$

$$R^2_{434} = \frac{\partial \Gamma^2_{44}}{\partial x^3} - \frac{\partial \Gamma^2_{43}}{\partial x^4} - \Gamma^2_{14}\Gamma^1_{43} - \Gamma^2_{24}\Gamma^2_{43} - \Gamma^2_{34}\Gamma^3_{43} - \Gamma^2_{44}\Gamma^4_{43} + \Gamma^2_{13}\Gamma^1_{44} + \Gamma^2_{23}\Gamma^2_{44} + \Gamma^2_{33}\Gamma^3_{44} + \Gamma^2_{43}\Gamma^4_{44}$$

$$R^3_{112} = \frac{\partial \Gamma^3_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma^3_{11}}{\partial x^2} - \Gamma^3_{12}\Gamma^1_{11} - \Gamma^3_{22}\Gamma^2_{11} - \Gamma^3_{32}\Gamma^3_{11} - \Gamma^3_{42}\Gamma^4_{11} + \Gamma^3_{11}\Gamma^1_{12} + \Gamma^3_{21}\Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{31}\Gamma^3_{12} + \Gamma^3_{41}\Gamma^4_{12}$$

$$R^3_{113} = \frac{\partial \Gamma^3_{13}}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma^3_{11}}{\partial x^3} - \Gamma^3_{13}\Gamma^1_{11} - \Gamma^3_{23}\Gamma^2_{11} - \Gamma^3_{33}\Gamma^3_{11} - \Gamma^3_{43}\Gamma^4_{11} + \Gamma^3_{11}\Gamma^1_{13} + \Gamma^3_{21}\Gamma^2_{13} + \Gamma^3_{31}\Gamma^3_{13} + \Gamma^3_{41}\Gamma^4_{13}$$

$$R^3_{114} = \frac{\partial \Gamma^3_{14}}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma^3_{11}}{\partial x^4} - \Gamma^3_{14}\Gamma^1_{11} - \Gamma^3_{24}\Gamma^2_{11} - \Gamma^3_{34}\Gamma^3_{11} - \Gamma^3_{44}\Gamma^4_{11} + \Gamma^3_{11}\Gamma^1_{14} + \Gamma^3_{21}\Gamma^2_{14} + \Gamma^3_{31}\Gamma^3_{14} + \Gamma^3_{41}\Gamma^4_{14}$$

$$R^3_{123} = \frac{\partial \Gamma^3_{13}}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma^3_{12}}{\partial x^3} - \Gamma^3_{13}\Gamma^1_{12} - \Gamma^3_{23}\Gamma^2_{12} - \Gamma^3_{33}\Gamma^3_{12} - \Gamma^3_{43}\Gamma^4_{12} + \Gamma^3_{12}\Gamma^1_{13} + \Gamma^3_{22}\Gamma^2_{13} + \Gamma^3_{32}\Gamma^3_{13} + \Gamma^3_{42}\Gamma^4_{13}$$

$$R^3_{124} = \frac{\partial \Gamma^3_{14}}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma^3_{12}}{\partial x^4} - \Gamma^3_{14}\Gamma^1_{12} - \Gamma^3_{24}\Gamma^2_{12} - \Gamma^3_{34}\Gamma^3_{12} - \Gamma^3_{44}\Gamma^4_{12} + \Gamma^3_{12}\Gamma^1_{14} + \Gamma^3_{22}\Gamma^2_{14} + \Gamma^3_{32}\Gamma^3_{14} + \Gamma^3_{42}\Gamma^4_{14}$$

$$R^3_{134}=\frac{\partial\Gamma^3_{14}}{\partial x^3}-\frac{\partial\Gamma^3_{13}}{\partial x^4}-\Gamma^3_{14}\Gamma^1_{13}-\Gamma^3_{24}\Gamma^2_{13}-\Gamma^3_{34}\Gamma^3_{13}-\Gamma^3_{44}\Gamma^4_{13}+\Gamma^3_{13}\Gamma^1_{14}+\Gamma^3_{23}\Gamma^2_{14}+\Gamma^3_{33}\Gamma^3_{14}+\Gamma^3_{43}\Gamma^4_{14}$$

$$R^3_{212}=\frac{\partial\Gamma^3_{22}}{\partial x^1}-\frac{\partial\Gamma^3_{21}}{\partial x^2}-\Gamma^3_{12}\Gamma^1_{21}-\Gamma^3_{22}\Gamma^2_{21}-\Gamma^3_{32}\Gamma^3_{21}-\Gamma^3_{42}\Gamma^4_{21}+\Gamma^3_{11}\Gamma^1_{22}+\Gamma^3_{21}\Gamma^2_{22}+\Gamma^3_{31}\Gamma^3_{22}+\Gamma^3_{41}\Gamma^4_{22}$$

$$R^3_{213}=\frac{\partial\Gamma^3_{23}}{\partial x^1}-\frac{\partial\Gamma^3_{21}}{\partial x^3}-\Gamma^3_{13}\Gamma^1_{21}-\Gamma^3_{23}\Gamma^2_{21}-\Gamma^3_{33}\Gamma^3_{21}-\Gamma^3_{43}\Gamma^4_{21}+\Gamma^3_{11}\Gamma^1_{23}+\Gamma^3_{21}\Gamma^2_{23}+\Gamma^3_{31}\Gamma^3_{23}+\Gamma^3_{41}\Gamma^4_{23}$$

$$R^3_{214}=\frac{\partial\Gamma^3_{24}}{\partial x^1}-\frac{\partial\Gamma^3_{21}}{\partial x^4}-\Gamma^3_{14}\Gamma^1_{21}-\Gamma^3_{24}\Gamma^2_{21}-\Gamma^3_{34}\Gamma^3_{21}-\Gamma^3_{44}\Gamma^4_{21}+\Gamma^3_{11}\Gamma^1_{24}+\Gamma^3_{21}\Gamma^2_{24}+\Gamma^3_{31}\Gamma^3_{24}+\Gamma^3_{41}\Gamma^4_{24}$$

$$R^3_{223}=\frac{\partial\Gamma^3_{23}}{\partial x^2}-\frac{\partial\Gamma^3_{22}}{\partial x^3}-\Gamma^3_{13}\Gamma^1_{22}-\Gamma^3_{23}\Gamma^2_{22}-\Gamma^3_{33}\Gamma^3_{22}-\Gamma^3_{43}\Gamma^4_{22}+\Gamma^3_{12}\Gamma^1_{23}+\Gamma^3_{22}\Gamma^2_{23}+\Gamma^3_{32}\Gamma^3_{23}+\Gamma^3_{42}\Gamma^4_{23}$$

$$R^3_{224}=\frac{\partial\Gamma^3_{24}}{\partial x^2}-\frac{\partial\Gamma^3_{22}}{\partial x^4}-\Gamma^3_{14}\Gamma^1_{22}-\Gamma^3_{24}\Gamma^2_{22}-\Gamma^3_{34}\Gamma^3_{22}-\Gamma^3_{44}\Gamma^4_{22}+\Gamma^3_{12}\Gamma^1_{24}+\Gamma^3_{22}\Gamma^2_{24}+\Gamma^3_{32}\Gamma^3_{24}+\Gamma^3_{42}\Gamma^4_{24}$$

$$R^3_{234}=\frac{\partial\Gamma^3_{24}}{\partial x^3}-\frac{\partial\Gamma^3_{23}}{\partial x^4}-\Gamma^3_{14}\Gamma^1_{23}-\Gamma^3_{24}\Gamma^2_{23}-\Gamma^3_{34}\Gamma^3_{23}-\Gamma^3_{44}\Gamma^4_{23}+\Gamma^3_{13}\Gamma^1_{24}+\Gamma^3_{23}\Gamma^2_{24}+\Gamma^3_{33}\Gamma^3_{24}+\Gamma^3_{43}\Gamma^4_{24}$$

$$R^3_{312}=\frac{\partial\Gamma^3_{32}}{\partial x^1}-\frac{\partial\Gamma^3_{31}}{\partial x^2}-\Gamma^3_{12}\Gamma^1_{31}-\Gamma^3_{22}\Gamma^2_{31}-\Gamma^3_{42}\Gamma^4_{31}+\Gamma^3_{11}\Gamma^1_{32}+\Gamma^3_{21}\Gamma^2_{32}+\Gamma^3_{41}\Gamma^4_{32}$$

$$R^3_{313}=\frac{\partial\Gamma^3_{33}}{\partial x^1}-\frac{\partial\Gamma^3_{31}}{\partial x^3}-\Gamma^3_{13}\Gamma^1_{31}-\Gamma^3_{23}\Gamma^2_{31}-\Gamma^3_{43}\Gamma^4_{31}+\Gamma^3_{11}\Gamma^1_{33}+\Gamma^3_{21}\Gamma^2_{33}+\Gamma^3_{41}\Gamma^4_{33}$$

$$R^3_{314}=\frac{\partial\Gamma^3_{34}}{\partial x^1}-\frac{\partial\Gamma^3_{31}}{\partial x^4}-\Gamma^3_{14}\Gamma^1_{31}-\Gamma^3_{24}\Gamma^2_{31}-\Gamma^3_{44}\Gamma^4_{31}+\Gamma^3_{11}\Gamma^1_{34}+\Gamma^3_{21}\Gamma^2_{34}+\Gamma^3_{41}\Gamma^4_{34}$$

$$R^3_{323}=\frac{\partial\Gamma^3_{33}}{\partial x^2}-\frac{\partial\Gamma^3_{32}}{\partial x^3}-\Gamma^3_{13}\Gamma^1_{32}-\Gamma^3_{23}\Gamma^2_{32}-\Gamma^3_{43}\Gamma^4_{32}+\Gamma^3_{12}\Gamma^1_{33}+\Gamma^3_{22}\Gamma^2_{33}+\Gamma^3_{42}\Gamma^4_{33}$$

$$R^3_{324}=\frac{\partial\Gamma^3_{34}}{\partial x^2}-\frac{\partial\Gamma^3_{32}}{\partial x^4}-\Gamma^3_{14}\Gamma^1_{32}-\Gamma^3_{24}\Gamma^2_{32}-\Gamma^3_{44}\Gamma^4_{32}+\Gamma^3_{12}\Gamma^1_{34}+\Gamma^3_{22}\Gamma^2_{34}+\Gamma^3_{42}\Gamma^4_{34}$$

$$R^3_{334}=\frac{\partial\Gamma^3_{34}}{\partial x^3}-\frac{\partial\Gamma^3_{33}}{\partial x^4}-\Gamma^3_{14}\Gamma^1_{33}-\Gamma^3_{24}\Gamma^2_{33}-\Gamma^3_{44}\Gamma^4_{33}+\Gamma^3_{13}\Gamma^1_{34}+\Gamma^3_{23}\Gamma^2_{34}+\Gamma^3_{43}\Gamma^4_{34}$$

$$R^3_{412}=\frac{\partial\Gamma^3_{42}}{\partial x^1}-\frac{\partial\Gamma^3_{41}}{\partial x^2}-\Gamma^3_{12}\Gamma^1_{41}-\Gamma^3_{22}\Gamma^2_{41}-\Gamma^3_{32}\Gamma^3_{41}-\Gamma^3_{42}\Gamma^4_{41}+\Gamma^3_{11}\Gamma^1_{42}+\Gamma^3_{21}\Gamma^2_{42}+\Gamma^3_{31}\Gamma^3_{42}+\Gamma^3_{41}\Gamma^4_{42}$$

$$R^3_{413}=\frac{\partial\Gamma^3_{43}}{\partial x^1}-\frac{\partial\Gamma^3_{41}}{\partial x^3}-\Gamma^3_{13}\Gamma^1_{41}-\Gamma^3_{23}\Gamma^2_{41}-\Gamma^3_{33}\Gamma^3_{41}-\Gamma^3_{43}\Gamma^4_{41}+\Gamma^3_{11}\Gamma^1_{43}+\Gamma^3_{21}\Gamma^2_{43}+\Gamma^3_{31}\Gamma^3_{43}+\Gamma^3_{41}\Gamma^4_{43}$$

$$R^3_{414}=\frac{\partial\Gamma^3_{44}}{\partial x^1}-\frac{\partial\Gamma^3_{41}}{\partial x^4}-\Gamma^3_{14}\Gamma^1_{41}-\Gamma^3_{24}\Gamma^2_{41}-\Gamma^3_{34}\Gamma^3_{41}-\Gamma^3_{44}\Gamma^4_{41}+\Gamma^3_{11}\Gamma^1_{44}+\Gamma^3_{21}\Gamma^2_{44}+\Gamma^3_{31}\Gamma^3_{44}+\Gamma^3_{41}\Gamma^4_{44}$$

$$R^3_{423}=\frac{\partial\Gamma^3_{43}}{\partial x^2}-\frac{\partial\Gamma^3_{42}}{\partial x^3}-\Gamma^3_{13}\Gamma^1_{42}-\Gamma^3_{23}\Gamma^2_{42}-\Gamma^3_{33}\Gamma^3_{42}-\Gamma^3_{43}\Gamma^4_{42}+\Gamma^3_{12}\Gamma^1_{43}+\Gamma^3_{22}\Gamma^2_{43}+\Gamma^3_{32}\Gamma^3_{43}+\Gamma^3_{42}\Gamma^4_{43}$$

$$R^3_{424}=\frac{\partial\Gamma^3_{44}}{\partial x^2}-\frac{\partial\Gamma^3_{42}}{\partial x^4}-\Gamma^3_{14}\Gamma^1_{42}-\Gamma^3_{24}\Gamma^2_{42}-\Gamma^3_{34}\Gamma^3_{42}-\Gamma^3_{44}\Gamma^4_{42}+\Gamma^3_{12}\Gamma^1_{44}+\Gamma^3_{22}\Gamma^2_{44}+\Gamma^3_{32}\Gamma^3_{44}+\Gamma^3_{42}\Gamma^4_{44}$$

$$R^3_{434}=\frac{\partial\Gamma^3_{44}}{\partial x^3}-\frac{\partial\Gamma^3_{43}}{\partial x^4}-\Gamma^3_{14}\Gamma^1_{43}-\Gamma^3_{24}\Gamma^2_{43}-\Gamma^3_{34}\Gamma^3_{43}-\Gamma^3_{44}\Gamma^4_{43}+\Gamma^3_{13}\Gamma^1_{44}+\Gamma^3_{23}\Gamma^2_{44}+\Gamma^3_{33}\Gamma^3_{44}+\Gamma^3_{43}\Gamma^4_{44}$$

$$R^4_{112}=\frac{\partial\Gamma^4_{12}}{\partial x^1}-\frac{\partial\Gamma^4_{11}}{\partial x^2}-\Gamma^4_{12}\Gamma^1_{11}-\Gamma^4_{22}\Gamma^2_{11}-\Gamma^4_{32}\Gamma^3_{11}-\Gamma^4_{42}\Gamma^4_{11}+\Gamma^4_{11}\Gamma^1_{12}+\Gamma^4_{21}\Gamma^2_{12}+\Gamma^4_{31}\Gamma^3_{12}+\Gamma^4_{41}\Gamma^4_{12}$$

$$R^4_{113}=\frac{\partial\Gamma^4_{13}}{\partial x^1}-\frac{\partial\Gamma^4_{11}}{\partial x^3}-\Gamma^4_{13}\Gamma^1_{11}-\Gamma^4_{23}\Gamma^2_{11}-\Gamma^4_{33}\Gamma^3_{11}-\Gamma^4_{43}\Gamma^4_{11}+\Gamma^4_{11}\Gamma^1_{13}+\Gamma^4_{21}\Gamma^2_{13}+\Gamma^4_{31}\Gamma^3_{13}+\Gamma^4_{41}\Gamma^4_{13}$$

$$R^4_{114}=\frac{\partial\Gamma^4_{14}}{\partial x^1}-\frac{\partial\Gamma^4_{11}}{\partial x^4}-\Gamma^4_{14}\Gamma^1_{11}-\Gamma^4_{24}\Gamma^2_{11}-\Gamma^4_{34}\Gamma^3_{11}-\Gamma^4_{44}\Gamma^4_{11}+\Gamma^4_{11}\Gamma^1_{14}+\Gamma^4_{21}\Gamma^2_{14}+\Gamma^4_{31}\Gamma^3_{14}+\Gamma^4_{41}\Gamma^4_{14}$$

$$R^4_{123}=\frac{\partial\Gamma^4_{13}}{\partial x^2}-\frac{\partial\Gamma^4_{12}}{\partial x^3}-\Gamma^4_{13}\Gamma^1_{12}-\Gamma^4_{23}\Gamma^2_{12}-\Gamma^4_{33}\Gamma^3_{12}-\Gamma^4_{43}\Gamma^4_{12}+\Gamma^4_{12}\Gamma^1_{13}+\Gamma^4_{22}\Gamma^2_{13}+\Gamma^4_{32}\Gamma^3_{13}+\Gamma^4_{42}\Gamma^4_{13}$$

$$R^4_{124}=\frac{\partial\Gamma^4_{14}}{\partial x^2}-\frac{\partial\Gamma^4_{12}}{\partial x^4}-\Gamma^4_{14}\Gamma^1_{12}-\Gamma^4_{24}\Gamma^2_{12}-\Gamma^4_{34}\Gamma^3_{12}-\Gamma^4_{44}\Gamma^4_{12}+\Gamma^4_{12}\Gamma^1_{14}+\Gamma^4_{22}\Gamma^2_{14}+\Gamma^4_{32}\Gamma^3_{14}+\Gamma^4_{42}\Gamma^4_{14}$$

$$R^4_{134}=\frac{\partial\Gamma^4_{14}}{\partial x^3}-\frac{\partial\Gamma^4_{13}}{\partial x^4}-\Gamma^4_{14}\Gamma^1_{13}-\Gamma^4_{24}\Gamma^2_{13}-\Gamma^4_{34}\Gamma^3_{13}-\Gamma^4_{44}\Gamma^4_{13}+\Gamma^4_{13}\Gamma^1_{14}+\Gamma^4_{23}\Gamma^2_{14}+\Gamma^4_{33}\Gamma^3_{14}+\Gamma^4_{43}\Gamma^4_{14}$$

$$R^4_{212}=\frac{\partial\Gamma^4_{22}}{\partial x^1}-\frac{\partial\Gamma^4_{21}}{\partial x^2}-\Gamma^4_{12}\Gamma^1_{21}-\Gamma^4_{22}\Gamma^2_{21}-\Gamma^4_{32}\Gamma^3_{21}-\Gamma^4_{42}\Gamma^4_{21}+\Gamma^4_{11}\Gamma^1_{22}+\Gamma^4_{21}\Gamma^2_{22}+\Gamma^4_{31}\Gamma^3_{22}+\Gamma^4_{41}\Gamma^4_{22}$$

$$R^4_{213}=\frac{\partial\Gamma^4_{23}}{\partial x^1}-\frac{\partial\Gamma^4_{21}}{\partial x^3}-\Gamma^4_{13}\Gamma^1_{21}-\Gamma^4_{23}\Gamma^2_{21}-\Gamma^4_{33}\Gamma^3_{21}-\Gamma^4_{43}\Gamma^4_{21}+\Gamma^4_{11}\Gamma^1_{23}+\Gamma^4_{21}\Gamma^2_{23}+\Gamma^4_{31}\Gamma^3_{23}+\Gamma^4_{41}\Gamma^4_{23}$$

$$R^4_{214}=\frac{\partial\Gamma^4_{24}}{\partial x^1}-\frac{\partial\Gamma^4_{21}}{\partial x^4}-\Gamma^4_{14}\Gamma^1_{21}-\Gamma^4_{24}\Gamma^2_{21}-\Gamma^4_{34}\Gamma^3_{21}-\Gamma^4_{44}\Gamma^4_{21}+\Gamma^4_{11}\Gamma^1_{24}+\Gamma^4_{21}\Gamma^2_{24}+\Gamma^4_{31}\Gamma^3_{24}+\Gamma^4_{41}\Gamma^4_{24}$$

$$R^4_{223}=\frac{\partial\Gamma^4_{23}}{\partial x^2}-\frac{\partial\Gamma^4_{22}}{\partial x^3}-\Gamma^4_{13}\Gamma^1_{22}-\Gamma^4_{23}\Gamma^2_{22}-\Gamma^4_{33}\Gamma^3_{22}-\Gamma^4_{43}\Gamma^4_{22}+\Gamma^4_{12}\Gamma^1_{23}+\Gamma^4_{22}\Gamma^2_{23}+\Gamma^4_{32}\Gamma^3_{23}+\Gamma^4_{42}\Gamma^4_{23}$$

$$R^4_{224}=\frac{\partial\Gamma^4_{24}}{\partial x^2}-\frac{\partial\Gamma^4_{22}}{\partial x^4}-\Gamma^4_{14}\Gamma^1_{22}-\Gamma^4_{24}\Gamma^2_{22}-\Gamma^4_{34}\Gamma^3_{22}-\Gamma^4_{44}\Gamma^4_{22}+\Gamma^4_{12}\Gamma^1_{24}+\Gamma^4_{22}\Gamma^2_{24}+\Gamma^4_{32}\Gamma^3_{24}+\Gamma^4_{42}\Gamma^4_{24}$$

$$R^4_{234}=\frac{\partial\Gamma^4_{24}}{\partial x^3}-\frac{\partial\Gamma^4_{23}}{\partial x^4}-\Gamma^4_{14}\Gamma^1_{23}-\Gamma^4_{24}\Gamma^2_{23}-\Gamma^4_{34}\Gamma^3_{23}-\Gamma^4_{44}\Gamma^4_{23}+\Gamma^4_{13}\Gamma^1_{24}+\Gamma^4_{23}\Gamma^2_{24}+\Gamma^4_{33}\Gamma^3_{24}+\Gamma^4_{43}\Gamma^4_{24}$$

$$R^4_{312}=\frac{\partial\Gamma^4_{32}}{\partial x^1}-\frac{\partial\Gamma^4_{31}}{\partial x^2}-\Gamma^4_{12}\Gamma^1_{31}-\Gamma^4_{22}\Gamma^2_{31}-\Gamma^4_{32}\Gamma^3_{31}-\Gamma^4_{42}\Gamma^4_{31}+\Gamma^4_{11}\Gamma^1_{32}+\Gamma^4_{21}\Gamma^2_{32}+\Gamma^4_{31}\Gamma^3_{32}+\Gamma^4_{41}\Gamma^4_{32}$$

$$R^4_{313}=\frac{\partial\Gamma^4_{33}}{\partial x^1}-\frac{\partial\Gamma^4_{31}}{\partial x^3}-\Gamma^4_{13}\Gamma^1_{31}-\Gamma^4_{23}\Gamma^2_{31}-\Gamma^4_{33}\Gamma^3_{31}-\Gamma^4_{43}\Gamma^4_{31}+\Gamma^4_{11}\Gamma^1_{33}+\Gamma^4_{21}\Gamma^2_{33}+\Gamma^4_{31}\Gamma^3_{33}+\Gamma^4_{41}\Gamma^4_{33}$$

$$R^4_{314}=\frac{\partial\Gamma^4_{34}}{\partial x^1}-\frac{\partial\Gamma^4_{31}}{\partial x^4}-\Gamma^4_{14}\Gamma^1_{31}-\Gamma^4_{24}\Gamma^2_{31}-\Gamma^4_{34}\Gamma^3_{31}-\Gamma^4_{44}\Gamma^4_{31}+\Gamma^4_{11}\Gamma^1_{34}+\Gamma^4_{21}\Gamma^2_{34}+\Gamma^4_{31}\Gamma^3_{34}+\Gamma^4_{41}\Gamma^4_{34}$$

$$R^4_{323}=\frac{\partial\Gamma^4_{33}}{\partial x^2}-\frac{\partial\Gamma^4_{32}}{\partial x^3}-\Gamma^4_{13}\Gamma^1_{32}-\Gamma^4_{23}\Gamma^2_{32}-\Gamma^4_{33}\Gamma^3_{32}-\Gamma^4_{43}\Gamma^4_{32}+\Gamma^4_{12}\Gamma^1_{33}+\Gamma^4_{22}\Gamma^2_{33}+\Gamma^4_{32}\Gamma^3_{33}+\Gamma^4_{42}\Gamma^4_{33}$$

$$R^4_{324}=\frac{\partial\Gamma^4_{34}}{\partial x^2}-\frac{\partial\Gamma^4_{32}}{\partial x^4}-\Gamma^4_{14}\Gamma^1_{32}-\Gamma^4_{24}\Gamma^2_{32}-\Gamma^4_{34}\Gamma^3_{32}-\Gamma^4_{44}\Gamma^4_{32}+\Gamma^4_{12}\Gamma^1_{34}+\Gamma^4_{22}\Gamma^2_{34}+\Gamma^4_{32}\Gamma^3_{34}+\Gamma^4_{42}\Gamma^4_{34}$$

$$R^4_{334} = \frac{\partial \Gamma^4_{34}}{\partial x^3} - \frac{\partial \Gamma^4_{33}}{\partial x^4} - \Gamma^4_{14}\Gamma^1_{33} - \Gamma^4_{24}\Gamma^2_{33} - \Gamma^4_{34}\Gamma^3_{33} - \Gamma^4_{44}\Gamma^4_{33} + \Gamma^4_{13}\Gamma^1_{34} + \Gamma^4_{23}\Gamma^2_{34} + \Gamma^4_{33}\Gamma^3_{34} + \Gamma^4_{43}\Gamma^4_{34}$$

$$R^4_{412} = \frac{\partial \Gamma^4_{42}}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma^4_{41}}{\partial x^2} - \Gamma^4_{12}\Gamma^1_{41} - \Gamma^4_{22}\Gamma^2_{41} - \Gamma^4_{32}\Gamma^3_{41} + \Gamma^4_{11}\Gamma^1_{42} + \Gamma^4_{21}\Gamma^2_{42} + \Gamma^4_{31}\Gamma^3_{42}$$

$$R^4_{413} = \frac{\partial \Gamma^4_{43}}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma^4_{41}}{\partial x^3} - \Gamma^4_{13}\Gamma^1_{41} - \Gamma^4_{23}\Gamma^2_{41} - \Gamma^4_{33}\Gamma^3_{41} + \Gamma^4_{11}\Gamma^1_{43} + \Gamma^4_{21}\Gamma^2_{43} + \Gamma^4_{31}\Gamma^3_{43}$$

$$R^4_{414} = \frac{\partial \Gamma^4_{44}}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma^4_{41}}{\partial x^4} - \Gamma^4_{14}\Gamma^1_{41} - \Gamma^4_{24}\Gamma^2_{41} - \Gamma^4_{34}\Gamma^3_{41} + \Gamma^4_{11}\Gamma^1_{44} + \Gamma^4_{21}\Gamma^2_{44} + \Gamma^4_{31}\Gamma^3_{44}$$

$$R^4_{423} = \frac{\partial \Gamma^4_{43}}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma^4_{42}}{\partial x^3} - \Gamma^4_{13}\Gamma^1_{42} - \Gamma^4_{23}\Gamma^2_{42} - \Gamma^4_{33}\Gamma^3_{42} + \Gamma^4_{12}\Gamma^1_{43} + \Gamma^4_{22}\Gamma^2_{43} + \Gamma^4_{32}\Gamma^3_{43}$$

$$R^4_{424} = \frac{\partial \Gamma^4_{44}}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma^4_{42}}{\partial x^4} - \Gamma^4_{14}\Gamma^1_{42} - \Gamma^4_{24}\Gamma^2_{42} - \Gamma^4_{34}\Gamma^3_{42} + \Gamma^4_{12}\Gamma^1_{44} + \Gamma^4_{22}\Gamma^2_{44} + \Gamma^4_{32}\Gamma^3_{44}$$

$$R^4_{434} = \frac{\partial \Gamma^4_{44}}{\partial x^3} - \frac{\partial \Gamma^4_{43}}{\partial x^4} - \Gamma^4_{14}\Gamma^1_{43} - \Gamma^4_{24}\Gamma^2_{43} - \Gamma^4_{34}\Gamma^3_{43} + \Gamma^4_{13}\Gamma^1_{44} + \Gamma^4_{23}\Gamma^2_{44} + \Gamma^4_{33}\Gamma^3_{44}$$

Podaliśmy 96 niezerowych składowych mieszanego tensora Grossmanna, 96 pozostałych niezerowych składowych różni się tylko znakiem.

- **Niezależne składowe kowariantnego tensora krzywizny Riemanna-Christoffela**

Tensor $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ posiada w przestrzeni czterowymiarowej 256 składowych spełniających poniższe zależności:

$$
\begin{aligned}
&R_{1111} = R_{1112} = R_{1113} = R_{1114} = R_{1121} = R_{1122} = R_{1123} = R_{1124} = R_{1131} = R_{1132} = R_{1133} = \\
&= R_{1134} = R_{1141} = R_{1142} = R_{1143} = R_{1144} = R_{2211} = R_{2212} = R_{2213} = R_{2214} = R_{2221} = R_{2222} = \\
&= R_{2223} = R_{2224} = R_{2231} = R_{2232} = R_{2233} = R_{2234} = R_{2241} = R_{2242} = R_{2243} = R_{2244} = R_{3311} = \\
&= R_{3312} = R_{3313} = R_{3314} = R_{3321} = R_{3322} = R_{3323} = R_{3324} = R_{3331} = R_{3332} = R_{3333} = R_{3334} = \\
&= R_{3341} = R_{3342} = R_{3343} = R_{3344} = R_{4411} = R_{4412} = R_{4413} = R_{4414} = R_{4421} = R_{4422} = R_{4423} = \\
&= R_{4424} = R_{4431} = R_{4432} = R_{4433} = R_{4434} = R_{4441} = R_{4442} = R_{4443} = R_{4444} = R_{1211} = R_{1311} = \\
&= R_{1411} = R_{2111} = R_{2311} = R_{2411} = R_{3111} = R_{3211} = R_{3411} = R_{4111} = R_{4211} = R_{4311} = R_{1222} = \\
&= R_{1322} = R_{1422} = R_{2122} = R_{2322} = R_{2422} = R_{3122} = R_{3222} = R_{3422} = R_{4122} = R_{4222} = R_{4322} = \\
&= R_{1233} = R_{1333} = R_{1433} = R_{2133} = R_{2333} = R_{2433} = R_{3133} = R_{3233} = R_{3433} = R_{4133} = R_{4233} = \\
&= R_{4333} = R_{1244} = R_{1344} = R_{1444} = R_{2144} = R_{2344} = R_{2444} = R_{3144} = R_{3244} = R_{3444} = R_{4144} = \\
&= R_{4244} = R_{4344} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&R_{1212} = -R_{1221} = -R_{2112} = R_{2121} \\
&R_{1213} = -R_{1231} = -R_{2113} = R_{2131} = R_{1312} = -R_{1321} = -R_{3112} = R_{3121} \\
&R_{1214} = -R_{1241} = -R_{2114} = R_{2141} = R_{1412} = -R_{1421} = -R_{4112} = R_{4121} \\
&R_{1223} = -R_{1232} = -R_{2123} = R_{2132} = R_{2312} = -R_{2321} = -R_{3212} = R_{3221} \\
&R_{1224} = -R_{1242} = -R_{2124} = R_{2142} = R_{2412} = -R_{2421} = -R_{4212} = R_{4221} \\
&R_{1234} = -R_{1243} = -R_{2134} = R_{2143} = R_{3412} = -R_{3421} = -R_{4312} = R_{4321} \\
&R_{1313} = -R_{1331} = -R_{3113} = R_{3131} \\
&R_{1314} = -R_{1341} = -R_{3114} = R_{3141} = R_{1413} = -R_{1431} = -R_{4113} = R_{4131} \\
&R_{1323} = -R_{1332} = -R_{3123} = R_{3132} = R_{2313} = -R_{2331} = -R_{3213} = R_{3231} \\
&R_{1324} = -R_{1342} = -R_{3124} = R_{3142} = R_{2413} = -R_{2431} = -R_{4213} = R_{4231} \\
&R_{1334} = -R_{1343} = -R_{3134} = R_{3143} = R_{3413} = -R_{3431} = -R_{4313} = R_{4331} \\
&R_{1414} = -R_{1441} = -R_{4114} = R_{4141} \\
&R_{1423} = -R_{1432} = -R_{4123} = R_{4132} = R_{2314} = -R_{2341} = -R_{3214} = R_{3241} \\
&R_{1424} = -R_{1442} = -R_{4124} = R_{4142} = R_{2414} = -R_{2441} = -R_{4214} = R_{4241} \\
&R_{1434} = -R_{1443} = -R_{4134} = R_{4143} = R_{3414} = -R_{3441} = -R_{4314} = -R_{4341} \\
&R_{2323} = -R_{2332} = -R_{3223} = R_{3232} \\
&R_{2324} = -R_{2342} = -R_{3224} = R_{3242} = R_{2423} = -R_{2432} = -R_{4223} = R_{4232} \\
&R_{2334} = -R_{2343} = -R_{3234} = R_{3243} = R_{3423} = -R_{3432} = -R_{4323} = R_{4332} \\
&R_{2424} = -R_{2442} = -R_{4224} = R_{4242} \\
&R_{2434} = -R_{2443} = -R_{4234} = R_{4243} = R_{3424} = -R_{3442} = -R_{4324} = R_{4342} \\
&R_{3434} = -R_{3443} = -R_{4334} = R_{4343}
\end{aligned}
$$

$$R_{1234} + R_{1423} + R_{1342} = 0 \quad \text{lub} \quad R_{1234} + R_{1423} - R_{1324} = 0$$

Wśród 144 niezerowych składowych tylko 20 jest niezależnych.

- **Niezerowe niezależne składowe kowariantnego tensora krzywizny $R_{\bullet\bullet\bullet\bullet}$ wyrażone przez składowe mieszanego tensora krzywizny $R^{\bullet}_{\bullet\bullet\bullet}$**

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} \overset{df}{=} g_{\alpha\sigma} R^{\sigma}_{\beta\mu\nu}$$

$$R_{1212} = g_{11}R^1_{212} + g_{12}R^2_{212} + g_{13}R^3_{212} + g_{14}R^4_{212}$$
$$R_{1213} = g_{11}R^1_{213} + g_{12}R^2_{213} + g_{13}R^3_{213} + g_{14}R^4_{213}$$
$$R_{1214} = g_{11}R^1_{214} + g_{12}R^2_{214} + g_{13}R^3_{214} + g_{14}R^4_{214}$$
$$R_{1223} = g_{11}R^1_{223} + g_{12}R^2_{223} + g_{13}R^3_{223} + g_{14}R^4_{223}$$
$$R_{1224} = g_{11}R^1_{224} + g_{12}R^2_{224} + g_{13}R^3_{224} + g_{14}R^4_{224}$$
$$R_{1234} = g_{11}R^1_{234} + g_{12}R^2_{234} + g_{13}R^3_{234} + g_{14}R^4_{234}$$
$$R_{1313} = g_{11}R^1_{313} + g_{12}R^2_{313} + g_{13}R^3_{313} + g_{14}R^4_{313}$$
$$R_{1314} = g_{11}R^1_{314} + g_{12}R^2_{314} + g_{13}R^3_{314} + g_{14}R^4_{314}$$
$$R_{1323} = g_{11}R^1_{323} + g_{12}R^2_{323} + g_{13}R^3_{323} + g_{14}R^4_{323}$$
$$R_{1324} = g_{11}R^1_{324} + g_{12}R^2_{324} + g_{13}R^3_{324} + g_{14}R^4_{324}$$
$$R_{1334} = g_{11}R^1_{334} + g_{12}R^2_{334} + g_{13}R^3_{334} + g_{14}R^4_{334}$$
$$R_{1414} = g_{11}R^1_{414} + g_{12}R^2_{414} + g_{13}R^3_{414} + g_{14}R^4_{414}$$
$$R_{1423} = g_{11}R^1_{423} + g_{12}R^2_{423} + g_{13}R^3_{423} + g_{14}R^4_{423}$$
$$R_{1424} = g_{11}R^1_{424} + g_{12}R^2_{424} + g_{13}R^3_{424} + g_{14}R^4_{424}$$
$$R_{1434} = g_{11}R^1_{434} + g_{12}R^2_{434} + g_{13}R^3_{434} + g_{14}R^4_{434}$$
$$R_{2323} = g_{21}R^1_{323} + g_{22}R^2_{323} + g_{23}R^3_{323} + g_{24}R^4_{323}$$
$$R_{2324} = g_{21}R^1_{324} + g_{22}R^2_{324} + g_{23}R^3_{324} + g_{24}R^4_{324}$$
$$R_{2334} = g_{21}R^1_{334} + g_{22}R^2_{334} + g_{23}R^3_{334} + g_{24}R^4_{334}$$
$$R_{2424} = g_{21}R^1_{424} + g_{22}R^2_{424} + g_{23}R^3_{424} + g_{24}R^4_{424}$$
$$R_{2434} = g_{21}R^1_{434} + g_{22}R^2_{434} + g_{23}R^3_{434} + g_{24}R^4_{434}$$
$$R_{3434} = g_{31}R^1_{434} + g_{32}R^2_{434} + g_{33}R^3_{434} + g_{34}R^4_{434}$$

Wśród 21 składowych tensora $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ wymienionych powyżej tylko 20 jest niezależnych, ponieważ $R_{1234} + R_{1423} - R_{1324} = 0$.

- **Składowe kowariantnego tensora Ricciego $R_{\bullet\bullet}$ wyrażone przez składowe mieszanego tensora Grossmanna $R^{\bullet}_{\bullet\bullet\bullet}$**

Konstruując tensor Ricciego $R_{\mu\beta} \overset{df}{=} R^{\nu}_{\beta\mu\nu}$, wykorzystaliśmy tylko 64 z 256 składowych tensora Grossmanna $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}$.

$$R^1_{111}+R^2_{112}+R^3_{113}+R^4_{114}\overset{df}{=}R_{11}$$
$$R^1_{221}+R^2_{222}+R^3_{223}+R^4_{224}\overset{df}{=}R_{22}$$
$$R^1_{331}+R^2_{332}+R^3_{333}+R^4_{334}\overset{df}{=}R_{33}$$
$$R^1_{441}+R^2_{442}+R^3_{443}+R^4_{444}\overset{df}{=}R_{44}$$
$$R^1_{121}+R^2_{122}+R^3_{123}+R^4_{124}\overset{df}{=}R_{12}=R_{21}\overset{df}{=}R^1_{211}+R^2_{212}+R^3_{213}+R^4_{214}$$
$$R^1_{131}+R^2_{132}+R^3_{133}+R^4_{134}\overset{df}{=}R_{13}=R_{31}\overset{df}{=}R^1_{311}+R^2_{312}+R^3_{313}+R^4_{314}$$
$$R^1_{141}+R^2_{142}+R^3_{143}+R^4_{144}\overset{df}{=}R_{14}=R_{41}\overset{df}{=}R^1_{411}+R^2_{412}+R^3_{413}+R^4_{414}$$
$$R^1_{231}+R^2_{232}+R^3_{233}+R^4_{234}\overset{df}{=}R_{23}=R_{32}\overset{df}{=}R^1_{321}+R^2_{322}+R^3_{323}+R^4_{324}$$
$$R^1_{241}+R^2_{242}+R^3_{243}+R^4_{244}\overset{df}{=}R_{24}=R_{42}\overset{df}{=}R^1_{421}+R^2_{422}+R^3_{423}+R^4_{424}$$
$$R^1_{341}+R^2_{342}+R^3_{343}+R^4_{344}\overset{df}{=}R_{34}=R_{43}\overset{df}{=}R^1_{431}+R^2_{432}+R^3_{433}+R^4_{434}$$

UWAGA
Sześć ostatnich równań nie pozwala zmniejszyć liczby niezależnych składowych w tensorze $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}$ o dalszych sześć, ponieważ składowe R^2_{212}, R^3_{313}, R^4_{414}, R^3_{323}, R^4_{424}, R^4_{434} pojawiły się już we wcześniej rozpatrywanych warunkach. Ostatecznie liczba różnych od zera niezależnych składowych w tensorze $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}$ wynosi 86.

Konstruując tensor Ricciego $R^{*}_{\mu\beta} \overset{df}{=} R^{\mu}_{\beta\mu\nu}$, wykorzystujemy również 64 składowe tensora Grossmanna $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}$.

$$R^1_{111}+R^2_{121}+R^3_{131}+R^4_{141}\overset{df}{=}R^*_{11}$$
$$R^1_{212}+R^2_{222}+R^3_{232}+R^4_{242}\overset{df}{=}R^*_{22}$$
$$R^1_{313}+R^2_{323}+R^3_{333}+R^4_{343}\overset{df}{=}R^*_{33}$$
$$R^1_{414}+R^2_{424}+R^3_{434}+R^4_{444}\overset{df}{=}R^*_{44}$$
$$R^1_{112}+R^2_{122}+R^3_{132}+R^4_{142}\overset{df}{=}R^*_{12}=R^*_{21}\overset{df}{=}R^1_{211}+R^2_{221}+R^3_{231}+R^4_{241}$$
$$R^1_{113}+R^2_{123}+R^3_{133}+R^4_{143}\overset{df}{=}R^*_{13}=R^*_{31}\overset{df}{=}R^1_{311}+R^2_{321}+R^3_{331}+R^4_{341}$$
$$R^1_{114}+R^2_{124}+R^3_{134}+R^4_{144}\overset{df}{=}R^*_{14}=R^*_{41}\overset{df}{=}R^1_{411}+R^2_{421}+R^3_{431}+R^4_{441}$$
$$R^1_{213}+R^2_{223}+R^3_{233}+R^4_{243}\overset{df}{=}R^*_{23}=R^*_{32}\overset{df}{=}R^1_{312}+R^2_{322}+R^3_{332}+R^4_{342}$$
$$R^1_{214}+R^2_{224}+R^3_{234}+R^4_{244}\overset{df}{=}R^*_{24}=R^*_{42}\overset{df}{=}R^1_{412}+R^2_{422}+R^3_{432}+R^4_{442}$$
$$R^1_{314}+R^2_{324}+R^3_{334}+R^4_{344}\overset{df}{=}R^*_{34}=R^*_{43}\overset{df}{=}R^1_{413}+R^2_{423}+R^3_{433}+R^4_{443}$$

- **Składowe kowariantnego tensora Ricciego $R_{\bullet\bullet}$ wyrażone przez składowe kowariantnego tensora Riemanna-Christoffela $R_{\bullet\bullet\bullet\bullet}$**

Konstruując tensor Ricciego $R_{\beta\mu} = g^{\alpha\nu}R_{\alpha\beta\mu\nu}$, wykorzystaliśmy dwadzieścia z dwudziestu niezależnych składowych tensora $R_{\alpha\beta\mu\nu}$.

$$R_{11} =$$
$$= + g^{22}R_{2112} + 2g^{23}R_{2113} + 2g^{24}R_{2114} +$$
$$+ g^{33}R_{3113} + 2g^{34}R_{3114} + g^{44}R_{4114}$$

$$R_{22} =$$
$$= +g^{11}R_{1221} + 2g^{13}R_{1223} + 2g^{14}R_{1224} +$$
$$+ g^{33}R_{3223} + 2g^{34}R_{3224} + g^{44}R_{4224}$$

$$R_{33} =$$
$$= +g^{11}R_{1331} + 2g^{12}R_{1332} + 2g^{14}R_{1334} +$$
$$+ g^{22}R_{2332} + 2g^{24}R_{2334} + g^{44}R_{4334}$$

$$R_{44} =$$
$$= +g^{11}R_{1441} + 2g^{12}R_{1442} + 2g^{13}R_{1443}$$
$$+ g^{22}R_{2442} + 2g^{23}R_{2443} + g^{33}R_{3443}$$

$$R_{12} = R_{21} =$$
$$= g^{21}R_{2121} + g^{23}R_{2123} + g^{24}R_{2124} +$$
$$+ g^{31}R_{3121} + g^{33}R_{3123} + g^{34}R_{3124} +$$
$$+ g^{41}R_{4121} + g^{43}R_{4123} + g^{44}R_{4124}$$

$$R_{13} = R_{31} =$$
$$= +g^{21}R_{2131} + g^{22}R_{2132} + g^{24}R_{2134} +$$
$$+ g^{31}R_{3131} + g^{32}R_{3132} + g^{34}R_{3134} +$$
$$+ g^{41}R_{4131} + g^{42}R_{4132} + g^{44}R_{4134}$$

$$R_{14} = R_{41} =$$
$$= +g^{21}R_{2141} + g^{22}R_{2142} + g^{23}R_{2143}$$
$$+ g^{31}R_{3141} + g^{32}R_{3142} + g^{33}R_{3143}$$
$$+ g^{41}R_{4141} + g^{42}R_{4142} + g^{43}R_{4143}$$

$$R_{23} = R_{32} =$$
$$= +g^{11}R_{1231} + g^{12}R_{1232} + g^{14}R_{1234} +$$
$$+ g^{31}R_{3231} + g^{32}R_{3232} + g^{34}R_{3234} +$$
$$+ g^{41}R_{4231} + g^{42}R_{4232} + g^{44}R_{4234}$$

$$R_{24} = R_{42} =$$
$$= +g^{11}R_{1241} + g^{12}R_{1242} + g^{13}R_{1243}$$
$$+ g^{31}R_{3241} + g^{32}R_{3242} + g^{33}R_{3243}$$
$$+ g^{41}R_{4241} + g^{42}R_{4242} + g^{43}R_{4243}$$

$$R_{34} = R_{43} =$$
$$= +g^{11}R_{1341} + g^{12}R_{1342} + g^{13}R_{1343}$$
$$+ g^{21}R_{2341} + g^{22}R_{2342} + g^{23}R_{2343}$$
$$+ g^{41}R_{4341} + g^{42}R_{4342} + g^{43}R_{4343}$$

- **Składowe kontrawariantne tensora metrycznego i jego wyznacznik dla metryki stacjonarnej o zerowych składowych przestrzenno-czasowych**

Poniżej podana została jawna postać niezerowych składowych kontrawariantnego tensora metrycznego i jego wyznacznik dla metryki stacjonarnej o zerowych składowych przestrzenno-czasowych, czyli metryki typu:

$$(ds)^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta + g_{44}dx^4dx^4\,, \quad \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^4} = 0\,, \quad \frac{\partial g_{44}}{\partial x^4} = 0\,, \quad (\alpha,\beta = 1,2,3).$$

Przykładem takiej metryki jest metryka Schwarzschilda:

$$(ds)^2 = \left\{\delta_{\alpha\beta} + \frac{x^\alpha x^\beta}{r^2}\left[\left(1-\frac{r_S}{r}\right)^{-1} - 1\right]\right\}dx^\alpha dx^\beta + \left(\delta_{44} - \frac{r_S}{r}\right)dx^4dx^4\,, \quad (\alpha,\beta = 1,2,3).$$

$$g^{11} = g^{-1}\left(g_{22}g_{33}g_{44} - g_{23}g_{23}g_{44}\right)$$
$$g^{22} = g^{-1}\left(g_{11}g_{33}g_{44} - g_{13}g_{13}g_{44}\right)$$
$$g^{33} = g^{-1}\left(g_{11}g_{22}g_{44} - g_{12}g_{12}g_{44}\right)$$
$$g^{44} = g_{44}^{-1}$$
$$g^{12} = g^{-1}\left(g_{13}g_{23}g_{44} - g_{12}g_{33}g_{44}\right)$$
$$g^{13} = g^{-1}\left(g_{12}g_{23}g_{44} - g_{13}g_{22}g_{44}\right)$$
$$g^{23} = g^{-1}\left(g_{11}g_{23}g_{44} - g_{11}g_{23}g_{44}\right)$$

$$g = g_{11}\left(g_{22}g_{33}g_{44} - g_{23}g_{23}g_{44}\right) + g_{12}\left(g_{13}g_{23}g_{44} - g_{12}g_{33}g_{44}\right) + g_{13}\left(g_{12}g_{23}g_{44} - g_{13}g_{22}g_{44}\right)$$

- **Jawna postać symboli Christoffela pierwszego rodzaju dla metryki stacjonarnej o zerowych składowych przestrzenno-czasowych**

$$\begin{bmatrix} \mu\ \nu \\ \alpha \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right)$$ Ogólna postać symboli Christoffela pierwszego rodzaju

Poniżej podana została jawna postać niezerowych symboli Christoffela pierwszego rodzaju dla metryki stacjonarnej o zerowych składowych przestrzenno-czasowych, czyli metryki typu:

$$(ds)^2 = g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} + g_{44} dx^4 dx^4, \quad \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^4} = 0, \quad \frac{\partial g_{44}}{\partial x^4} = 0, \quad (\alpha, \beta = 1,2,3).$$

Przykładem takiej metryki jest metryka Schwarzschilda:

$$(ds)^2 = \left\{ \delta_{\alpha\beta} + \frac{x^{\alpha} x^{\beta}}{r^2}\left[\left(1 - \frac{r_S}{r} \right)^{-1} - 1 \right] \right\} dx^{\alpha} dx^{\beta} + \left(\delta_{44} - \frac{r_S}{r} \right) dx^4 dx^4, \quad (\alpha, \beta = 1,2,3).$$

$$\begin{bmatrix} 1\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}$$

$$\begin{bmatrix} 1\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}$$

$$\begin{bmatrix} 1\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{\partial g_{13}}{\partial x^1} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^3}$$

$$\begin{bmatrix} 2\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}$$

$$\begin{bmatrix} 2\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}$$

$$\begin{bmatrix} 2\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{\partial g_{23}}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^3}$$

$$\begin{bmatrix} 3\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\partial g_{31}}{\partial x^3} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}$$

$$\begin{bmatrix} 3\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{\partial g_{32}}{\partial x^3} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}$$

$$\begin{bmatrix} 3\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^3}$$

$$\begin{bmatrix} 4\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^1}$$

$$\begin{bmatrix} 4\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^2}$$

$$\begin{bmatrix} 4\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^3}$$

$$\begin{bmatrix} 1\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}$$

$$\begin{bmatrix} 1\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}$$

$$\begin{bmatrix} 1\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{23}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^3} \right)$$

$$\begin{bmatrix} 1\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^3}$$

$$\begin{bmatrix} 1\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{32}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{13}}{\partial x^2} \right)$$

$$\begin{bmatrix} 1\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}$$

$$\begin{bmatrix} 1\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^1}$$

$$\begin{bmatrix} 2\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{31}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{23}}{\partial x^1} \right)$$

$$\begin{bmatrix} 2\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^3}$$

$$\begin{bmatrix} 2\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}$$

$$\begin{bmatrix} 2\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^2}$$

$$\begin{bmatrix} 3\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^3}$$

- **Jawna postać symboli Christoffela drugiego rodzaju dla metryki stacjonarnej o zerowych składowych przestrzenno-czasowych**

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = g^{\sigma\alpha}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\mu\ \nu}{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{4} g^{\sigma\alpha}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\mu\ \nu}{\alpha}$$ Ogólna postać symboli Christoffela drugiego rodzaju

Poniżej podana została jawna postać niezerowych symboli Christoffela pierwszego rodzaju dla metryki stacjonarnej o zerowych składowych przestrzenno-czasowych, czyli metryki typu:

$$(ds)^2 = g_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta} + g_{44}dx^4dx^4\,,\qquad \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^4} = 0\,,\qquad \frac{\partial g_{44}}{\partial x^4} = 0\,,\qquad (\alpha,\beta = 1,2,3).$$

Przykładem takiej metryki jest metryka Schwarzschilda:

$$(ds)^2 = \left\{\delta_{\alpha\beta} + \frac{x^{\alpha}x^{\beta}}{r^2}\left[\left(1-\frac{r_S}{r}\right)^{-1} - 1\right]\right\}dx^{\alpha}dx^{\beta} + \left(\delta_{44} - \frac{r_S}{r}\right)dx^4dx^4\,,\qquad (\alpha,\beta = 1,2,3).$$

$$\Gamma^1_{11} = g^{11}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{1\ 1}{1} + g^{12}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{1\ 1}{2} + g^{13}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{1\ 1}{3}$$

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = g^{11}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{1\ 2}{1} + g^{12}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{1\ 2}{2} + g^{13}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{1\ 2}{3}$$

$$\Gamma^1_{13} = \Gamma^1_{31} = g^{11}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{1\ 3}{1} + g^{12}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{1\ 3}{2} + g^{13}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{1\ 3}{3}$$

$$\Gamma^1_{22} = g^{11}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{2\ 2}{1} + g^{12}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{2\ 2}{2} + g^{13}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{2\ 2}{3}$$

$$\Gamma^1_{23} = \Gamma^1_{32} = g^{11}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{2\ 3}{1} + g^{12}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{2\ 3}{2} + g^{13}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{2\ 3}{3}$$

$$\Gamma^1_{33} = g^{11}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{3\ 3}{1} + g^{12}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{3\ 3}{2} + g^{13}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{3\ 3}{3}$$

$$\Gamma^1_{44} = g^{11}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{4\ 4}{1} + g^{12}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{4\ 4}{2} + g^{13}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{4\ 4}{3}$$

$$\Gamma^2_{11} = g^{21}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{1\ 1}{1} + g^{22}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{1\ 1}{2} + g^{23}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{1\ 1}{3}$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = g^{21}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{1\ 2}{1} + g^{22}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{1\ 2}{2} + g^{23}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{1\ 2}{3}$$

$$\Gamma^2_{13} = \Gamma^2_{31} = g^{21}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{1\ 3}{1} + g^{22}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{1\ 3}{2} + g^{23}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{1\ 3}{3}$$

$$\Gamma^2_{22} = g^{21}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{2\ 2}{1} + g^{22}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{2\ 2}{2} + g^{23}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{2\ 2}{3}$$

$$\Gamma^2_{23} = \Gamma^2_{32} = g^{21}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{2\ 3}{1} + g^{22}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{2\ 3}{2} + g^{23}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{2\ 3}{3}$$

$$\Gamma^2_{33} = g^{21}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{3\ 3}{1} + g^{22}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{3\ 3}{2} + g^{23}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{3\ 3}{3}$$

$$\Gamma^2_{44} = g^{21}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{4\ 4}{1} + g^{22}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{4\ 4}{2} + g^{23}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{4\ 4}{3}$$

$$\Gamma^3_{11} = g^{31}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{1\ 1}{1} + g^{32}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{1\ 1}{2} + g^{33}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{1\ 1}{3}$$

$$\Gamma^3_{12} = \Gamma^3_{21} = g^{31}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{1\ 2}{1} + g^{32}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{1\ 2}{2} + g^{33}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{1\ 2}{3}$$

$$\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = g^{31}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{1\ 3}{1} + g^{32}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{1\ 3}{2} + g^{33}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{1\ 3}{3}$$

$$\Gamma^3_{22} = g^{31}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{2\ 2}{1} + g^{32}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{2\ 2}{2} + g^{33}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{2\ 2}{3}$$

$$\Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = g^{31}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{2\ 3}{1} + g^{32}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{2\ 3}{2} + g^{33}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{2\ 3}{3}$$

$$\Gamma^3_{33} = g^{31}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{3\ 3}{1} + g^{32}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{3\ 3}{2} + g^{33}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{3\ 3}{3}$$

$$\Gamma^3_{44} = g^{31}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{4\ 4}{1} + g^{32}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{4\ 4}{2} + g^{33}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{4\ 4}{3}$$

$$\Gamma^4_{14} = \Gamma^4_{41} = g^{44}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{1\ 4}{4}$$

$$\Gamma^4_{24} = \Gamma^4_{42} = g^{44}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{2\ 4}{4}$$

$$\Gamma^4_{34} = \Gamma^4_{43} = g^{44}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{3\ 4}{4}$$

- **Jawna postać kowariannego tensora krzywizny Ricciego dla metryki stacjonarnej o zerowych składowych przestrzenno-czasowych**

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} - \Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}$$ Ogólna postać składowych tensora Ricciego

Poniżej podana została jawna postać niezerowych składowych tensora Ricciego dla metryki stacjonarnej o zerowych składowych przestrzenno-czasowych, czyli metryki typu:

$$(ds)^2 = g_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta} + g_{44}dx^4dx^4, \quad \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^4} = 0, \quad \frac{\partial g_{44}}{\partial x^4} = 0, \quad (\alpha,\beta = 1,2,3).$$

Przykładem takiej metryki jest metryka Schwarzschilda:

$$(ds)^2 = \left\{\delta_{\alpha\beta} + \frac{x^{\alpha}x^{\beta}}{r^2}\left[\left(1-\frac{r_S}{r}\right)^{-1} - 1\right]\right\}dx^{\alpha}dx^{\beta} + \left(\delta_{44} - \frac{r_S}{r}\right)dx^4dx^4, \quad (\alpha,\beta = 1,2,3).$$

$$R_{11} = \frac{\partial\Gamma^2_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial\Gamma^3_{13}}{\partial x^1} + \frac{\partial\Gamma^4_{14}}{\partial x^1} - \frac{\partial\Gamma^2_{11}}{\partial x^2} - \frac{\partial\Gamma^3_{11}}{\partial x^3} + \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} + 2\Gamma^3_{12}\Gamma^2_{13} + \Gamma^1_{13}\Gamma^3_{11} + \Gamma^3_{13}\Gamma^3_{13} + \Gamma^4_{14}\Gamma^4_{14} +$$

$$-\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} - \Gamma^3_{11}\Gamma^2_{23} - \Gamma^1_{11}\Gamma^3_{13} - \Gamma^2_{11}\Gamma^3_{23} - \Gamma^3_{11}\Gamma^3_{33} - \Gamma^1_{11}\Gamma^4_{14} - \Gamma^2_{11}\Gamma^4_{24} - \Gamma^3_{11}\Gamma^4_{34}$$

$$R_{22} = \frac{\partial\Gamma^1_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial\Gamma^3_{23}}{\partial x^2} + \frac{\partial\Gamma^4_{24}}{\partial x^2} - \frac{\partial\Gamma^1_{22}}{\partial x^1} - \frac{\partial\Gamma^3_{22}}{\partial x^3} + \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{22} + 2\Gamma^3_{12}\Gamma^1_{23} + \Gamma^2_{23}\Gamma^3_{22} + \Gamma^3_{23}\Gamma^3_{23} + \Gamma^4_{24}\Gamma^4_{24} +$$

$$-\Gamma^1_{22}\Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{22}\Gamma^1_{12} - \Gamma^3_{22}\Gamma^1_{13} - \Gamma^1_{22}\Gamma^3_{13} - \Gamma^2_{22}\Gamma^3_{23} - \Gamma^3_{22}\Gamma^3_{33} - \Gamma^1_{22}\Gamma^4_{14} - \Gamma^2_{22}\Gamma^4_{24} - \Gamma^3_{22}\Gamma^4_{34}$$

$$R_{33} = \frac{\partial\Gamma^1_{13}}{\partial x^3} + \frac{\partial\Gamma^2_{23}}{\partial x^3} + \frac{\partial\Gamma^4_{34}}{\partial x^3} - \frac{\partial\Gamma^1_{33}}{\partial x^1} - \frac{\partial\Gamma^2_{33}}{\partial x^2} + \Gamma^1_{13}\Gamma^1_{13} + 2\Gamma^2_{13}\Gamma^1_{23} + \Gamma^3_{13}\Gamma^1_{33} + \Gamma^2_{23}\Gamma^2_{23} + \Gamma^3_{23}\Gamma^2_{33} + \Gamma^4_{34}\Gamma^4_{34} +$$

$$-\Gamma^1_{33}\Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{33}\Gamma^1_{12} - \Gamma^3_{33}\Gamma^1_{13} - \Gamma^1_{33}\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{33}\Gamma^2_{22} - \Gamma^3_{33}\Gamma^2_{23} - \Gamma^1_{33}\Gamma^4_{14} - \Gamma^2_{33}\Gamma^4_{24} - \Gamma^3_{33}\Gamma^4_{34}$$

$$R_{44} = -\frac{\partial\Gamma^1_{44}}{\partial x^1} - \frac{\partial\Gamma^2_{44}}{\partial x^2} - \frac{\partial\Gamma^3_{44}}{\partial x^3} + \Gamma^4_{14}\Gamma^1_{44} + \Gamma^4_{24}\Gamma^2_{44} + \Gamma^4_{34}\Gamma^3_{44} +$$

$$-\Gamma^1_{44}\Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{44}\Gamma^1_{12} - \Gamma^3_{44}\Gamma^1_{13} - \Gamma^1_{44}\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{44}\Gamma^2_{22} - \Gamma^3_{44}\Gamma^2_{23} - \Gamma^4_{44}\Gamma^2_{24} - \Gamma^1_{44}\Gamma^3_{13} - \Gamma^2_{44}\Gamma^3_{23} - \Gamma^3_{44}\Gamma^3_{33}$$

$$R_{12} = R_{21} = \frac{\partial\Gamma^1_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial\Gamma^3_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial\Gamma^4_{14}}{\partial x^2} - \frac{\partial\Gamma^1_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial\Gamma^3_{12}}{\partial x^3} + \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22} + \Gamma^3_{11}\Gamma^1_{23} + \Gamma^2_{13}\Gamma^3_{22} + \Gamma^3_{13}\Gamma^3_{23} + \Gamma^4_{14}\Gamma^4_{24} +$$

$$-\Gamma^2_{12}\Gamma^1_{12} - \Gamma^1_{12}\Gamma^3_{13} - \Gamma^2_{12}\Gamma^3_{23} - \Gamma^3_{12}\Gamma^3_{33} - \Gamma^1_{12}\Gamma^4_{14} - \Gamma^2_{12}\Gamma^4_{24} - \Gamma^3_{12}\Gamma^4_{34}$$

$$R_{13} = R_{31} = \frac{\partial\Gamma^1_{11}}{\partial x^3} + \frac{\partial\Gamma^2_{12}}{\partial x^3} + \frac{\partial\Gamma^4_{14}}{\partial x^3} - \frac{\partial\Gamma^1_{13}}{\partial x^1} - \frac{\partial\Gamma^2_{13}}{\partial x^2} + \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{23} + \Gamma^3_{11}\Gamma^1_{33} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{23} + \Gamma^3_{12}\Gamma^2_{33} + \Gamma^4_{14}\Gamma^4_{34} +$$

$$-\Gamma^3_{13}\Gamma^1_{13} - \Gamma^1_{13}\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{13}\Gamma^2_{22} - \Gamma^3_{13}\Gamma^2_{23} - \Gamma^1_{13}\Gamma^4_{14} - \Gamma^2_{13}\Gamma^4_{24} - \Gamma^3_{13}\Gamma^4_{34}$$

$$R_{23} = R_{32} = \frac{\partial\Gamma^1_{12}}{\partial x^3} + \frac{\partial\Gamma^2_{22}}{\partial x^3} + \frac{\partial\Gamma^4_{24}}{\partial x^3} - \frac{\partial\Gamma^1_{23}}{\partial x^1} - \frac{\partial\Gamma^2_{23}}{\partial x^2} + \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{13} + \Gamma^3_{12}\Gamma^1_{33} + \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{13} + \Gamma^3_{22}\Gamma^2_{33} + \Gamma^4_{24}\Gamma^4_{34} +$$

$$-\Gamma^1_{23}\Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{23}\Gamma^1_{12} - \Gamma^3_{23}\Gamma^1_{13} - \Gamma^3_{23}\Gamma^2_{23} - \Gamma^1_{23}\Gamma^4_{14} - \Gamma^2_{23}\Gamma^4_{24} - \Gamma^3_{23}\Gamma^4_{34}$$

- **Jawna postać symboli Christoffela pierwszego rodzaju dla metryki diagonalnej**

$$\left[{\mu\,\nu \atop \alpha}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}}+\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\right)$$ Ogólna postać symboli Christoffela pierwszego rodzaju

Poniżej podana została jawna postać niezerowych symboli Christoffela pierwszego rodzaju dla metryki diagonalnej, czyli metryki typu:

$$ds^2=g_{\alpha\alpha}dx^{\alpha}dx^{\alpha},\quad (\alpha=1,2,3,4).$$

$$\left[{1\,1 \atop 1}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}$$

$$\left[{1\,1 \atop 2}\right]=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}$$

$$\left[{1\,1 \atop 3}\right]=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^3}$$

$$\left[{1\,1 \atop 4}\right]=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^4}$$

$$\left[{2\,2 \atop 1}\right]=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}$$

$$\left[{2\,2 \atop 2}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}$$

$$\left[{2\,2 \atop 3}\right]=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^3}$$

$$\left[{2\,2 \atop 4}\right]=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^4}$$

$$\left[{3\,3 \atop 1}\right]=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}$$

$$\left[{3\,3 \atop 2}\right]=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}$$

$$\left[{3\,3 \atop 3}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^3}$$

$$\left[{3\,3 \atop 4}\right]=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^4}$$

$$\left[{4\,4 \atop 1}\right]=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^1}$$

$$\left[{4\,4 \atop 2}\right]=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^2}$$

$$\left[{4\,4 \atop 3}\right]=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^3}$$

$$\left[{4\,4 \atop 4}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^4}$$

$$\left[{1\,2 \atop 1}\right]=\left[{2\,1 \atop 1}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}$$

$$\left[{1\,2 \atop 2}\right]=\left[{2\,1 \atop 2}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}$$

$$\left[{1\,3 \atop 1}\right]=\left[{3\,1 \atop 1}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^3}$$

$$\left[{1\,3 \atop 3}\right]=\left[{3\,1 \atop 3}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}$$

$$\left[{1\,4 \atop 1}\right]=\left[{4\,1 \atop 1}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^4}$$

$$\left[{1\,4 \atop 4}\right]=\left[{4\,1 \atop 4}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^1}$$

$$\left[{2\,3 \atop 2}\right]=\left[{3\,2 \atop 2}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^3}$$

$$\left[{2\,3 \atop 3}\right]=\left[{3\,2 \atop 3}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}$$

$$\left[{2\,4 \atop 2}\right]=\left[{4\,2 \atop 2}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^4}$$

$$\left[{2\,4 \atop 4}\right]=\left[{4\,2 \atop 4}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^2}$$

$$\left[{3\,4 \atop 3}\right]=\left[{4\,3 \atop 3}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^4}$$

$$\left[{3\,4 \atop 4}\right]=\left[{4\,3 \atop 4}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^3}$$

- **Jawna postać symboli Christoffela drugiego rodzaju dla metryki diagonalnej**

$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = g^{\sigma\alpha}\left[{\mu\;\nu \atop \alpha}\right] = \sum_{\alpha=1}^{4} g^{\sigma\alpha}\left[{\mu\;\nu \atop \alpha}\right]$ Ogólna postać symboli Christoffela drugiego rodzaju

Poniżej podana została jawna postać niezerowych symboli Christoffela drugiego rodzaju dla metryki diagonalnej, czyli metryki typu:

$$ds^2 = g_{\alpha\alpha} dx^{\alpha} dx^{\alpha}, \quad (\alpha = 1,2,3,4).$$

$$\Gamma^1_{11} = g^{11}\left[{1\;1 \atop 1}\right] = \frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}$$

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = g^{11}\left[{1\;2 \atop 1}\right] = \frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}$$

$$\Gamma^1_{13} = \Gamma^1_{31} = g^{11}\left[{1\;3 \atop 1}\right] = \frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^3}$$

$$\Gamma^1_{14} = \Gamma^1_{41} = g^{11}\left[{1\;4 \atop 1}\right] = \frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^4}$$

$$\Gamma^1_{22} = g^{11}\left[{2\;2 \atop 1}\right] = -\frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}$$

$$\Gamma^1_{33} = g^{11}\left[{3\;3 \atop 1}\right] = -\frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}$$

$$\Gamma^1_{44} = g^{11}\left[{4\;4 \atop 1}\right] = -\frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^1}$$

$$\Gamma^2_{11} = g^{22}\left[{1\;1 \atop 2}\right] = -\frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = g^{22}\left[{1\;2 \atop 2}\right] = \frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}$$

$$\Gamma^2_{22} = g^{22}\left[{2\;2 \atop 2}\right] = \frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}$$

$$\Gamma^2_{23} = \Gamma^2_{32} = g^{22}\left[{2\;3 \atop 2}\right] = \frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^3}$$

$$\Gamma^2_{24} = \Gamma^2_{42} = g^{22}\left[{2\;4 \atop 2}\right] = \frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^4}$$

$$\Gamma^2_{33} = g^{22}\left[{3\;3 \atop 2}\right] = -\frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}$$

$$\Gamma^2_{44} = g^{22}\left[{4\;4 \atop 2}\right] = -\frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^2}$$

$$\Gamma^3_{11} = g^{33}\left[{1\;1 \atop 3}\right] = -\frac{1}{2g_{33}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^3}$$

$$\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = g^{33}\left[{1\;3 \atop 3}\right] = \frac{1}{2g_{33}}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}$$

$$\Gamma^3_{22} = g^{33}\left[{2\;2 \atop 3}\right] = -\frac{1}{2g_{33}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^3}$$

$$\Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = g^{33}\left[{2\;3 \atop 3}\right] = \frac{1}{2g_{33}}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}$$

$$\Gamma^3_{33} = g^{33}\left[{3\;3 \atop 3}\right] = \frac{1}{2g_{33}}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^3}$$

$$\Gamma^3_{34} = \Gamma^3_{43} = g^{33}\left[{3\;4 \atop 3}\right] = \frac{1}{2g_{33}}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^4}$$

$$\Gamma^3_{44} = g^{33}\left[{4\;4 \atop 3}\right] = -\frac{1}{2g_{33}}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^3}$$

$$\Gamma^4_{11} = g^{44}\left[{1\;1 \atop 4}\right] = -\frac{1}{2g_{44}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^4}$$

$$\Gamma^4_{14} = \Gamma^4_{41} = g^{44}\left[{1\;4 \atop 4}\right] = \frac{1}{2g_{44}}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^1}$$

$$\Gamma^4_{22} = g^{44}\left[{2\;2 \atop 4}\right] = -\frac{1}{2g_{44}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^4}$$

$$\Gamma^4_{24} = \Gamma^4_{42} = g^{44}\left[{2\;4 \atop 4}\right] = \frac{1}{2g_{44}}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^2}$$

$$\Gamma^4_{33} = g^{44}\left[{3\;3 \atop 4}\right] = -\frac{1}{2g_{44}}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^4}$$

$$\Gamma^4_{34} = \Gamma^4_{43} = g^{44}\left[{3\;4 \atop 4}\right] = \frac{1}{2g_{44}}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^3}$$

$$\Gamma^4_{44} = g^{44}\left[{4\;4 \atop 4}\right] = \frac{1}{2g_{44}}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^4}$$

- **Jawna postać kowariannego tensora krzywizny Ricciego dla metryki diagonalnej**

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} - \Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha} \quad \text{Ogólna postać składowych tensora Ricciego}$$

Poniżej podana została jawna postać niezerowych składowych tensora Ricciego dla metryki diagonalnej, czyli metryki typu:

$$ds^2 = g_{\alpha\alpha} dx^{\alpha} dx^{\alpha}, \quad (\alpha = 1,2,3,4).$$

$$R_{11} = \frac{\partial \Gamma^{2}_{12}}{\partial x^{1}} + \frac{\partial \Gamma^{3}_{13}}{\partial x^{1}} + \frac{\partial \Gamma^{4}_{14}}{\partial x^{1}} - \frac{\partial \Gamma^{2}_{11}}{\partial x^{2}} - \frac{\partial \Gamma^{3}_{11}}{\partial x^{3}} - \frac{\partial \Gamma^{4}_{11}}{\partial x^{4}} +$$

$$+ \Gamma^{1}_{12}\Gamma^{2}_{11} + \Gamma^{2}_{12}\Gamma^{2}_{12} + \Gamma^{1}_{13}\Gamma^{3}_{11} + \Gamma^{3}_{13}\Gamma^{3}_{13} + \Gamma^{1}_{14}\Gamma^{4}_{11} + \Gamma^{4}_{14}\Gamma^{4}_{14} +$$

$$- \Gamma^{1}_{11}\Gamma^{2}_{12} - \Gamma^{2}_{11}\Gamma^{2}_{22} - \Gamma^{3}_{11}\Gamma^{2}_{23} - \Gamma^{4}_{11}\Gamma^{2}_{24} - \Gamma^{1}_{11}\Gamma^{3}_{13} - \Gamma^{2}_{11}\Gamma^{3}_{23} - \Gamma^{3}_{11}\Gamma^{3}_{33} - \Gamma^{4}_{11}\Gamma^{3}_{34} - \Gamma^{1}_{11}\Gamma^{4}_{14} - \Gamma^{2}_{11}\Gamma^{4}_{24} - \Gamma^{3}_{11}\Gamma^{4}_{34} - \Gamma^{4}_{11}\Gamma^{4}_{44}$$

$$R_{22} = \frac{\partial \Gamma^{1}_{21}}{\partial x^{2}} + \frac{\partial \Gamma^{3}_{23}}{\partial x^{2}} + \frac{\partial \Gamma^{4}_{24}}{\partial x^{2}} - \frac{\partial \Gamma^{1}_{22}}{\partial x^{1}} - \frac{\partial \Gamma^{3}_{22}}{\partial x^{3}} - \frac{\partial \Gamma^{4}_{22}}{\partial x^{4}} +$$

$$+ \Gamma^{1}_{12}\Gamma^{1}_{12} + \Gamma^{2}_{12}\Gamma^{1}_{22} + \Gamma^{2}_{23}\Gamma^{3}_{22} + \Gamma^{3}_{23}\Gamma^{3}_{23} + \Gamma^{2}_{24}\Gamma^{4}_{22} + \Gamma^{4}_{24}\Gamma^{4}_{24} +$$

$$- \Gamma^{1}_{22}\Gamma^{1}_{11} - \Gamma^{2}_{22}\Gamma^{1}_{12} - \Gamma^{3}_{22}\Gamma^{1}_{13} - \Gamma^{4}_{22}\Gamma^{1}_{14} - \Gamma^{1}_{22}\Gamma^{3}_{13} - \Gamma^{2}_{22}\Gamma^{3}_{23} - \Gamma^{3}_{22}\Gamma^{3}_{33} - \Gamma^{4}_{22}\Gamma^{3}_{34} - \Gamma^{1}_{22}\Gamma^{4}_{14} - \Gamma^{2}_{22}\Gamma^{4}_{24} - \Gamma^{3}_{22}\Gamma^{4}_{34} - \Gamma^{4}_{22}\Gamma^{4}_{44}$$

$$R_{33} = \frac{\partial \Gamma^{1}_{13}}{\partial x^{3}} + \frac{\partial \Gamma^{2}_{23}}{\partial x^{3}} + \frac{\partial \Gamma^{4}_{34}}{\partial x^{3}} - \frac{\partial \Gamma^{1}_{33}}{\partial x^{1}} - \frac{\partial \Gamma^{2}_{33}}{\partial x^{2}} - \frac{\partial \Gamma^{4}_{33}}{\partial x^{4}} +$$

$$+ \Gamma^{1}_{13}\Gamma^{1}_{13} + \Gamma^{3}_{13}\Gamma^{1}_{33} + \Gamma^{2}_{23}\Gamma^{2}_{23} + \Gamma^{3}_{23}\Gamma^{2}_{33} + \Gamma^{3}_{34}\Gamma^{4}_{33} + \Gamma^{4}_{34}\Gamma^{4}_{34} +$$

$$- \Gamma^{1}_{33}\Gamma^{1}_{11} - \Gamma^{2}_{33}\Gamma^{1}_{12} - \Gamma^{3}_{33}\Gamma^{1}_{13} - \Gamma^{4}_{33}\Gamma^{1}_{14} - \Gamma^{1}_{33}\Gamma^{2}_{12} - \Gamma^{2}_{33}\Gamma^{2}_{22} - \Gamma^{3}_{33}\Gamma^{2}_{23} - \Gamma^{4}_{33}\Gamma^{2}_{24} - \Gamma^{1}_{33}\Gamma^{4}_{14} - \Gamma^{2}_{33}\Gamma^{4}_{24} - \Gamma^{3}_{33}\Gamma^{4}_{34} - \Gamma^{4}_{33}\Gamma^{4}_{44}$$

$$R_{44} = \frac{\partial \Gamma^{1}_{14}}{\partial x^{4}} + \frac{\partial \Gamma^{2}_{24}}{\partial x^{4}} + \frac{\partial \Gamma^{3}_{34}}{\partial x^{4}} - \frac{\partial \Gamma^{1}_{44}}{\partial x^{1}} - \frac{\partial \Gamma^{2}_{44}}{\partial x^{2}} - \frac{\partial \Gamma^{3}_{44}}{\partial x^{3}} +$$

$$+ \Gamma^{1}_{14}\Gamma^{1}_{14} + \Gamma^{4}_{14}\Gamma^{1}_{44} + \Gamma^{2}_{24}\Gamma^{2}_{24} + \Gamma^{4}_{24}\Gamma^{2}_{44} + \Gamma^{3}_{34}\Gamma^{3}_{34} + \Gamma^{4}_{34}\Gamma^{3}_{44} +$$

$$- \Gamma^{1}_{44}\Gamma^{1}_{11} - \Gamma^{2}_{44}\Gamma^{1}_{12} - \Gamma^{3}_{44}\Gamma^{1}_{13} - \Gamma^{4}_{44}\Gamma^{1}_{14} - \Gamma^{1}_{44}\Gamma^{2}_{12} - \Gamma^{2}_{44}\Gamma^{2}_{22} - \Gamma^{3}_{44}\Gamma^{2}_{23} - \Gamma^{4}_{44}\Gamma^{2}_{24} - \Gamma^{1}_{44}\Gamma^{3}_{13} - \Gamma^{2}_{44}\Gamma^{3}_{23} - \Gamma^{3}_{44}\Gamma^{3}_{33} - \Gamma^{4}_{44}\Gamma^{3}_{34}$$

- **Jawna postać kowariannego tensora krzywizny Ricciego dla metryki diagonalnej (składowe mieszane)**

$$R_{12} = R_{21} = \frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma^3_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma^4_{14}}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma^3_{12}}{\partial x^3} +$$
$$+ \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22} + \Gamma^3_{13}\Gamma^3_{23} + \Gamma^4_{14}\Gamma^4_{24} +$$
$$- \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{12} - \Gamma^1_{12}\Gamma^3_{13} - \Gamma^2_{12}\Gamma^3_{23} - \Gamma^1_{12}\Gamma^4_{14} - \Gamma^2_{12}\Gamma^4_{24}$$

$$R_{13} = R_{31} = \frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial x^3} + \frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial x^3} + \frac{\partial \Gamma^4_{14}}{\partial x^3} - \frac{\partial \Gamma^1_{13}}{\partial x^1} +$$
$$+ \Gamma^3_{11}\Gamma^1_{33} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{23} + \Gamma^4_{14}\Gamma^4_{34} +$$
$$- \Gamma^3_{13}\Gamma^1_{13} - \Gamma^1_{13}\Gamma^2_{12} - \Gamma^3_{13}\Gamma^2_{23} - \Gamma^1_{13}\Gamma^4_{14} - \Gamma^3_{13}\Gamma^4_{34}$$

$$R_{14} = R_{41} = \frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial x^4} + \frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial x^4} + \frac{\partial \Gamma^3_{13}}{\partial x^4} - \frac{\partial \Gamma^1_{14}}{\partial x^1} +$$
$$+ \Gamma^4_{11}\Gamma^1_{44} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{24} + \Gamma^3_{13}\Gamma^3_{34} +$$
$$- \Gamma^4_{14}\Gamma^1_{14} - \Gamma^1_{14}\Gamma^2_{12} - \Gamma^4_{14}\Gamma^2_{24} - \Gamma^1_{14}\Gamma^3_{13} - \Gamma^4_{14}\Gamma^3_{34}$$

$$R_{23} = R_{32} = \frac{\partial \Gamma^1_{12}}{\partial x^3} + \frac{\partial \Gamma^2_{22}}{\partial x^3} + \frac{\partial \Gamma^4_{24}}{\partial x^3} - \frac{\partial \Gamma^2_{23}}{\partial x^2} +$$
$$+ \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{13} + \Gamma^3_{22}\Gamma^2_{33} + \Gamma^4_{24}\Gamma^4_{34} +$$
$$- \Gamma^2_{23}\Gamma^1_{12} - \Gamma^3_{23}\Gamma^1_{13} - \Gamma^3_{23}\Gamma^2_{23} - \Gamma^2_{23}\Gamma^4_{24} - \Gamma^3_{23}\Gamma^4_{34}$$

$$R_{24} = R_{42} = \frac{\partial \Gamma^1_{12}}{\partial x^4} + \frac{\partial \Gamma^2_{22}}{\partial x^4} + \frac{\partial \Gamma^3_{23}}{\partial x^4} - \frac{\partial \Gamma^2_{24}}{\partial x^2} +$$
$$+ \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{14} + \Gamma^4_{22}\Gamma^2_{44} + \Gamma^3_{23}\Gamma^3_{34} +$$
$$- \Gamma^2_{24}\Gamma^1_{12} - \Gamma^4_{24}\Gamma^1_{14} - \Gamma^4_{24}\Gamma^2_{24} - \Gamma^2_{24}\Gamma^3_{23} - \Gamma^4_{24}\Gamma^3_{34}$$

$$R_{34} = R_{43} = \frac{\partial \Gamma^1_{13}}{\partial x^4} + \frac{\partial \Gamma^2_{23}}{\partial x^4} + \frac{\partial \Gamma^3_{33}}{\partial x^4} - \frac{\partial \Gamma^3_{34}}{\partial x^3} +$$
$$+ \Gamma^1_{13}\Gamma^1_{14} + \Gamma^2_{23}\Gamma^2_{24} + \Gamma^4_{33}\Gamma^3_{44} +$$
$$- \Gamma^3_{34}\Gamma^1_{13} - \Gamma^4_{34}\Gamma^1_{14} - \Gamma^3_{34}\Gamma^2_{23} - \Gamma^4_{34}\Gamma^2_{24} - \Gamma^4_{34}\Gamma^3_{34}$$

- **Jawna postać symboli Christoffela pierwszego rodzaju dla stacjonarnej metryki diagonalnej**

$$\left[{\mu\,\nu \atop \alpha}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}}+\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\right)$$ Ogólna postać symboli Christoffela pierwszego rodzaju

Poniżej podana została jawna postać niezerowych symboli Christoffela pierwszego rodzaju dla stacjonarnej metryki diagonalnej, czyli metryki typu:

$$ds^2=g_{\alpha\alpha}dx^{\alpha}dx^{\alpha}\,,\qquad \frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x^4}=0\,,\qquad (\alpha=1,2,3,4).$$

$$\left[{1\,1 \atop 1}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}$$

$$\left[{1\,1 \atop 2}\right]=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}$$

$$\left[{1\,1 \atop 3}\right]=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^3}$$

$$\left[{2\,2 \atop 1}\right]=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}$$

$$\left[{2\,2 \atop 2}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}$$

$$\left[{2\,2 \atop 3}\right]=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^3}$$

$$\left[{3\,3 \atop 1}\right]=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}$$

$$\left[{3\,3 \atop 2}\right]=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}$$

$$\left[{3\,3 \atop 3}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^3}$$

$$\left[{4\,4 \atop 1}\right]=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^1}$$

$$\left[{4\,4 \atop 2}\right]=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^2}$$

$$\left[{4\,4 \atop 3}\right]=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^3}$$

$$\left[{1\,2 \atop 1}\right]=\left[{2\,1 \atop 1}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}$$

$$\left[{1\,2 \atop 2}\right]=\left[{2\,1 \atop 2}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}$$

$$\left[{1\,3 \atop 1}\right]=\left[{3\,1 \atop 1}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^3}$$

$$\left[{1\,3 \atop 3}\right]=\left[{3\,1 \atop 3}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}$$

$$\left[{1\,4 \atop 4}\right]=\left[{4\,1 \atop 4}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^1}$$

$$\left[{2\,3 \atop 2}\right]=\left[{3\,2 \atop 2}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^3}$$

$$\left[{2\,3 \atop 3}\right]=\left[{3\,2 \atop 3}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}$$

$$\left[{2\,4 \atop 4}\right]=\left[{4\,2 \atop 4}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^2}$$

$$\left[{3\,4 \atop 4}\right]=\left[{4\,3 \atop 4}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^3}$$

- **Jawna postać symboli Christoffela drugiego rodzaju dla stacjonarnej metryki diagonalnej**

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = g^{\sigma\alpha}\left[{\mu\;\nu \atop \alpha}\right] = \sum_{\alpha=1}^{4} g^{\sigma\alpha}\left[{\mu\;\nu \atop \alpha}\right]$$ Ogólna postać symboli Christoffela drugiego rodzaju

Poniżej podana została jawna postać niezerowych symboli Christoffela drugiego rodzaju dla stacjonarnej metryki diagonalnej, czyli metryki typu:

$$ds^2 = g_{\alpha\alpha}dx^{\alpha}dx^{\alpha}\,, \quad \frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x^4} = 0\,, \quad (\alpha = 1,2,3,4).$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{g_{11}}\left[{1\;1 \atop 1}\right] = \frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}$$

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \frac{1}{g_{11}}\left[{1\;2 \atop 1}\right] = \frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}$$

$$\Gamma^1_{13} = \Gamma^1_{31} = \frac{1}{g_{11}}\left[{1\;3 \atop 1}\right] = \frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^3}$$

$$\Gamma^1_{22} = \frac{1}{g_{11}}\left[{2\;2 \atop 1}\right] = -\frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}$$

$$\Gamma^1_{33} = \frac{1}{g_{11}}\left[{3\;3 \atop 1}\right] = -\frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}$$

$$\Gamma^1_{44} = \frac{1}{g_{11}}\left[{4\;4 \atop 1}\right] = -\frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^1}$$

$$\Gamma^2_{11} = \frac{1}{g_{22}}\left[{1\;1 \atop 2}\right] = -\frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{g_{22}}\left[{1\;2 \atop 2}\right] = \frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}$$

$$\Gamma^2_{22} = \frac{1}{g_{22}}\left[{2\;2 \atop 2}\right] = \frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}$$

$$\Gamma^2_{23} = \Gamma^2_{32} = \frac{1}{g_{22}}\left[{2\;3 \atop 2}\right] = \frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^3}$$

$$\Gamma^2_{33} = \frac{1}{g_{22}}\left[{3\;3 \atop 2}\right] = -\frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}$$

$$\Gamma^2_{44} = \frac{1}{g_{22}}\left[{4\;4 \atop 2}\right] = -\frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^2}$$

$$\Gamma^3_{11} = \frac{1}{g_{33}}\left[{1\;1 \atop 3}\right] = -\frac{1}{2g_{33}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^3}$$

$$\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{g_{33}}\left[{1\;3 \atop 3}\right] = \frac{1}{2g_{33}}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}$$

$$\Gamma^3_{22} = \frac{1}{g_{33}}\left[{2\;2 \atop 3}\right] = -\frac{1}{2g_{33}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^3}$$

$$\Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \frac{1}{g_{33}}\left[{2\;3 \atop 3}\right] = \frac{1}{2g_{33}}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}$$

$$\Gamma^3_{33} = \frac{1}{g_{33}}\left[{3\;3 \atop 3}\right] = \frac{1}{2g_{33}}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^3}$$

$$\Gamma^3_{44} = \frac{1}{g_{33}}\left[{4\;4 \atop 3}\right] = -\frac{1}{2g_{33}}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^3}$$

$$\Gamma^4_{14} = \Gamma^4_{41} = \frac{1}{g_{44}}\left[{1\;4 \atop 4}\right] = \frac{1}{2g_{44}}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^1}$$

$$\Gamma^4_{24} = \Gamma^4_{42} = \frac{1}{g_{44}}\left[{2\;4 \atop 4}\right] = \frac{1}{2g_{44}}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^2}$$

$$\Gamma^4_{34} = \Gamma^4_{43} = \frac{1}{g_{44}}\left[{3\;4 \atop 4}\right] = \frac{1}{2g_{44}}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^3}$$

- **Jawna postać kowariantnego tensora krzywizny Ricciego dla stacjonarnej metryki diagonalnej**

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} - \Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}$$ Ogólna postać składowych tensora Ricciego

Poniżej podana została jawna postać niezerowych składowych tensora Ricciego dla stacjonarnej metryki diagonalnej, czyli metryki typu:

$$ds^2 = g_{\alpha\alpha}dx^{\alpha}dx^{\alpha}, \quad \frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x^4} = 0, \quad (\alpha = 1,2,3,4).$$

$$R_{11} = \frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma^3_{13}}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma^4_{14}}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma^2_{11}}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma^3_{11}}{\partial x^3} +$$
$$+\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} + \Gamma^1_{13}\Gamma^3_{11} + \Gamma^3_{13}\Gamma^3_{13} + \Gamma^4_{14}\Gamma^4_{14} +$$
$$-\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} - \Gamma^3_{11}\Gamma^2_{23} - \Gamma^1_{11}\Gamma^3_{13} - \Gamma^2_{11}\Gamma^3_{23} - \Gamma^3_{11}\Gamma^3_{33} - \Gamma^1_{11}\Gamma^4_{14} - \Gamma^2_{11}\Gamma^4_{24} - \Gamma^3_{11}\Gamma^4_{34}$$

$$R_{22} = \frac{\partial \Gamma^1_{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma^3_{23}}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma^4_{24}}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma^1_{22}}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma^3_{22}}{\partial x^3} +$$
$$+\Gamma^1_{12}\Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{22} + \Gamma^2_{23}\Gamma^3_{22} + \Gamma^3_{23}\Gamma^3_{23} + \Gamma^4_{24}\Gamma^4_{24} +$$
$$-\Gamma^1_{22}\Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{22}\Gamma^1_{12} - \Gamma^3_{22}\Gamma^1_{13} - \Gamma^1_{22}\Gamma^3_{13} - \Gamma^2_{22}\Gamma^3_{23} - \Gamma^3_{22}\Gamma^3_{33} - \Gamma^1_{22}\Gamma^4_{14} - \Gamma^2_{22}\Gamma^4_{24} - \Gamma^3_{22}\Gamma^4_{34}$$

$$R_{33} = \frac{\partial \Gamma^1_{13}}{\partial x^3} + \frac{\partial \Gamma^2_{23}}{\partial x^3} + \frac{\partial \Gamma^4_{34}}{\partial x^3} - \frac{\partial \Gamma^1_{33}}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma^2_{33}}{\partial x^2} +$$
$$+\Gamma^1_{13}\Gamma^1_{13} + \Gamma^3_{13}\Gamma^1_{33} + \Gamma^2_{23}\Gamma^2_{23} + \Gamma^3_{23}\Gamma^2_{33} + \Gamma^4_{34}\Gamma^4_{34} +$$
$$-\Gamma^1_{33}\Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{33}\Gamma^1_{12} - \Gamma^3_{33}\Gamma^1_{13} - \Gamma^1_{33}\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{33}\Gamma^2_{22} - \Gamma^3_{33}\Gamma^2_{23} - \Gamma^1_{33}\Gamma^4_{14} - \Gamma^2_{33}\Gamma^4_{24} - \Gamma^3_{33}\Gamma^4_{34}$$

$$R_{44} = -\frac{\partial \Gamma^1_{44}}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma^2_{44}}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma^3_{44}}{\partial x^3} +$$
$$+\Gamma^4_{14}\Gamma^1_{44} + \Gamma^2_{24}\Gamma^2_{24} + \Gamma^4_{24}\Gamma^2_{44} + \Gamma^3_{34}\Gamma^3_{34} + \Gamma^4_{34}\Gamma^3_{44} +$$
$$-\Gamma^1_{44}\Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{44}\Gamma^1_{12} - \Gamma^3_{44}\Gamma^1_{13} - \Gamma^1_{44}\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{44}\Gamma^2_{22} - \Gamma^3_{44}\Gamma^2_{23} - \Gamma^1_{44}\Gamma^3_{13} - \Gamma^2_{44}\Gamma^3_{23} - \Gamma^3_{44}\Gamma^3_{33}$$

- **Jawna postać kowariantnego tensora krzywizny Ricciego dla stacjonarnej metryki diagonalnej (składowe mieszane)**

$$R_{12} = R_{21} = \frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma^3_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma^4_{14}}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma^3_{12}}{\partial x^3} +$$

$$+ \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22} + \Gamma^3_{13}\Gamma^3_{23} + \Gamma^4_{14}\Gamma^4_{24} +$$

$$- \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{12} - \Gamma^1_{12}\Gamma^3_{13} - \Gamma^2_{12}\Gamma^3_{23} - \Gamma^1_{12}\Gamma^4_{14} - \Gamma^2_{12}\Gamma^4_{24}$$

$$R_{13} = R_{31} = \frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial x^3} + \frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial x^3} + \frac{\partial \Gamma^4_{14}}{\partial x^3} - \frac{\partial \Gamma^1_{13}}{\partial x^1} +$$

$$+ \Gamma^3_{11}\Gamma^1_{33} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{23} + \Gamma^4_{14}\Gamma^4_{34} +$$

$$- \Gamma^3_{13}\Gamma^1_{13} - \Gamma^1_{13}\Gamma^2_{12} - \Gamma^3_{13}\Gamma^2_{23} - \Gamma^1_{13}\Gamma^4_{14} - \Gamma^3_{13}\Gamma^4_{34}$$

$$R_{23} = R_{32} = \frac{\partial \Gamma^1_{12}}{\partial x^3} + \frac{\partial \Gamma^2_{22}}{\partial x^3} + \frac{\partial \Gamma^4_{24}}{\partial x^3} - \frac{\partial \Gamma^2_{23}}{\partial x^2} +$$

$$+ \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{13} + \Gamma^3_{22}\Gamma^2_{33} + \Gamma^4_{24}\Gamma^4_{34} +$$

$$- \Gamma^2_{23}\Gamma^1_{12} - \Gamma^3_{23}\Gamma^1_{13} - \Gamma^3_{23}\Gamma^2_{23} - \Gamma^2_{23}\Gamma^4_{24} - \Gamma^3_{23}\Gamma^4_{34}$$

- **Symbole Christoffela drugiego rodzaju i składowe tensora Ricciego odpowiadające rozwiązaniu osiowo-symetrycznemu Weyla**

Współrzędne cylindryczne

$$x^1 = z, \quad x^2 = \rho, \quad x^3 = \varphi, \quad x^4 = ict$$

Składowe tensora metrycznego

$$g_{11} = e^{\nu}, \quad g_{22} = e^{\nu}, \quad g_{33} = e^{-\mu}\left(x^2\right)^2, \quad g_{44} = e^{\mu}$$

Symbole Christoffela drugiego rodzaju

$$\Gamma^1_{11} = g^{11}\left[{1\;1 \atop 1}\right] = \frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} = \frac{1}{2}\frac{\partial \nu}{\partial x^1}, \quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = g^{11}\left[{1\;2 \atop 1}\right] = \frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial \nu}{\partial x^2}$$

$$\Gamma^1_{22} = g^{11}\left[{2\;2 \atop 1}\right] = -\frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \nu}{\partial x^1}, \quad \Gamma^1_{33} = g^{11}\left[{3\;3 \atop 1}\right] = -\frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} = \frac{1}{2}\left(x^2\right)^2 e^{-\mu}e^{-\nu}\frac{\partial \mu}{\partial x^1}$$

$$\Gamma^1_{44} = g^{11}\left[{4\;4 \atop 1}\right] = -\frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^1} = -\frac{1}{2}e^{-\mu}e^{-\nu}\frac{\partial \mu}{\partial x^1}, \quad \Gamma^2_{11} = g^{22}\left[{1\;1 \atop 2}\right] = -\frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \nu}{\partial x^2}$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = g^{22}\left[{1\;2 \atop 2}\right] = \frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = \frac{1}{2}\frac{\partial \nu}{\partial x^1}, \quad \Gamma^2_{22} = g^{22}\left[{2\;2 \atop 2}\right] = \frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial \nu}{\partial x^2}$$

$$\Gamma^2_{33} = g^{22}\left[{3\;3 \atop 2}\right] = -\frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} = -x^2 e^{-\mu}e^{-\nu} + \frac{1}{2}\left(x^2\right)^2 e^{-\mu}e^{-\nu}\frac{\partial \mu}{\partial x^2}$$

$$\Gamma^2_{44} = g^{22}\left[{4\;4 \atop 2}\right] = -\frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^2} = -\frac{1}{2}e^{-\mu}e^{-\nu}\frac{\partial \mu}{\partial x^2}, \quad \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = g^{33}\left[{1\;3 \atop 3}\right] = \frac{1}{2}g^{33}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \mu}{\partial x^1}$$

$$\Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = g^{33}\left[{2\;3 \atop 3}\right] = \frac{1}{2}g^{33}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial \mu}{\partial x^2}, \quad \Gamma^4_{14} = \Gamma^4_{41} = g^{44}\left[{1\;4 \atop 4}\right] = \frac{1}{2}g^{44}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^1} = \frac{1}{2}\frac{\partial \mu}{\partial x^1}$$

$$\Gamma^4_{24} = \Gamma^4_{42} = g^{44}\left[{2\;4 \atop 4}\right] = \frac{1}{2}g^{44}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial \mu}{\partial x^2}$$

Składowe tensora Ricciego

$$R_{11} = \frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma^3_{13}}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma^4_{14}}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma^2_{11}}{\partial x^2} +$$

$$+ \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{13}\Gamma^3_{13} + \Gamma^4_{14}\Gamma^4_{14} - \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{11}\Gamma^3_{13} - \Gamma^2_{11}\Gamma^3_{23} - \Gamma^1_{11}\Gamma^4_{14} - \Gamma^2_{11}\Gamma^4_{24}$$

$$R_{22} = \frac{\partial \Gamma^1_{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma^3_{23}}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma^4_{24}}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma^1_{22}}{\partial x^1} +$$

$$+ \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{22} + \Gamma^3_{23}\Gamma^3_{23} + \Gamma^4_{24}\Gamma^4_{24} - \Gamma^1_{22}\Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{22}\Gamma^1_{12} - \Gamma^1_{22}\Gamma^3_{13} - \Gamma^2_{22}\Gamma^3_{23} - \Gamma^1_{22}\Gamma^4_{14} - \Gamma^2_{22}\Gamma^4_{24}$$

$$R_{33} = -\frac{\partial \Gamma^1_{33}}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma^2_{33}}{\partial x^2} + \Gamma^3_{13}\Gamma^1_{33} + \Gamma^3_{23}\Gamma^2_{33} - \Gamma^1_{33}\Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{33}\Gamma^1_{12} - \Gamma^1_{33}\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{33}\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{33}\Gamma^4_{14} - \Gamma^2_{33}\Gamma^4_{24}$$

$$R_{44} = -\frac{\partial \Gamma^1_{44}}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma^2_{44}}{\partial x^2} + \Gamma^4_{14}\Gamma^1_{44} + \Gamma^4_{24}\Gamma^2_{44} - \Gamma^1_{44}\Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{44}\Gamma^1_{12} - \Gamma^1_{44}\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{44}\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{44}\Gamma^3_{13} - \Gamma^2_{44}\Gamma^3_{23}$$

- **Jawna postać niezerowych składowych niezależnych mieszanego tensora krzywizny odpowiadających modelowi Wszechświata Friedmana dla przypadku k = 1**

$$ds^2 = L^2 \left[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \right] + (dx^4)^2$$

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^4 = ict$$

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = L^2, \quad g_{44} = 1$$

$$R^1_{212} = \Gamma^1_{41}\Gamma^4_{22} = -\frac{1}{4g_{11}g_{44}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^4}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^4} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2$$

$$R^1_{313} = \Gamma^1_{41}\Gamma^4_{33} = -\frac{1}{4g_{11}g_{44}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^4}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^4} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2$$

$$R^1_{414} = -\frac{\partial \Gamma^1_{41}}{\partial x^4} - \Gamma^1_{14}\Gamma^1_{41} = -\frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x^4 \partial x^4} + \left(\frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^4}\right)^2 = \frac{1}{Rc^2}\frac{\partial^2 L}{\partial t^2}$$

$$R^2_{121} = \Gamma^2_{42}\Gamma^4_{11} = -\frac{1}{4g_{22}g_{44}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^4}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^4} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2$$

$$R^2_{323} = \Gamma^2_{42}\Gamma^4_{33} = -\frac{1}{4g_{22}g_{44}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^4}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^4} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2$$

$$R^2_{424} = -\frac{\partial \Gamma^2_{42}}{\partial x^4} - \Gamma^2_{24}\Gamma^2_{42} = -\frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^4 \partial x^4} + \left(\frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^4}\right)^2 = \frac{1}{Lc^2}\frac{\partial^2 L}{\partial t^2}$$

$$R^3_{131} = \Gamma^3_{43}\Gamma^4_{11} = -\frac{1}{4g_{33}g_{44}}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^4}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^4} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2$$

$$R^3_{232} = \Gamma^3_{43}\Gamma^4_{22} = -\frac{1}{4g_{33}g_{44}}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^4}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^4} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2$$

$$R^{3}_{434} = -\frac{\partial \Gamma^{3}_{43}}{\partial x^{4}} - \Gamma^{3}_{34}\Gamma^{3}_{43} = -\frac{1}{2g_{33}}\frac{\partial^{2} g_{33}}{\partial x^{4}\partial x^{4}} + \left(\frac{1}{2g_{33}}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^{4}}\right)^{2} = \frac{1}{Lc^{2}}\frac{\partial^{2} L}{\partial t^{2}}$$

$$R^{4}_{141} = \frac{\partial \Gamma^{4}_{11}}{\partial x^{4}} - \Gamma^{4}_{11}\Gamma^{1}_{14} =$$

$$= -\frac{1}{2g_{44}}\frac{\partial^{2} g_{11}}{\partial x^{4}\partial x^{4}} + \frac{1}{2g_{44}g_{44}}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^{4}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^{4}} + \frac{1}{4g_{44}g_{11}}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^{4}}\right)^{2} = \frac{L}{c^{2}}\frac{\partial^{2} L}{\partial t^{2}}$$

$$R^{4}_{242} = \frac{\partial \Gamma^{4}_{22}}{\partial x^{4}} - \Gamma^{4}_{22}\Gamma^{2}_{24} =$$

$$= -\frac{1}{2g_{44}}\frac{\partial^{2} g_{22}}{\partial x^{4}\partial x^{4}} + \frac{1}{2g_{44}g_{44}}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^{4}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^{4}} + \frac{1}{4g_{44}g_{22}}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^{4}}\right)^{2} = \frac{L}{c^{2}}\frac{\partial^{2} L}{\partial t^{2}}$$

$$R^{4}_{343} =$$

$$= \frac{\partial \Gamma^{4}_{33}}{\partial x^{4}} - \Gamma^{4}_{33}\Gamma^{3}_{34} = -\frac{1}{2g_{44}}\frac{\partial^{2} g_{33}}{\partial x^{4}\partial x^{4}} + \frac{1}{2g_{44}g_{44}}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^{4}}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^{4}} + \frac{1}{4g_{44}g_{33}}\left(\frac{\partial g_{33}}{\partial x^{4}}\right)^{2} = \frac{L}{c^{2}}\frac{\partial^{2} L}{\partial t^{2}}$$

$$ds^{2} = L^{2}\left[(dx^{1})^{2} + (dx^{2})^{2} + (dx^{3})^{2}\right] + (dx^{4})^{2}$$

$$x^{1} = x, \quad x^{2} = y, \quad x^{3} = z, \quad x^{4} = ict$$

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = L^{2}, \quad g_{44} = 1$$

$$R^{1}_{212} = R^{1}_{313} = R^{2}_{121} = R^{2}_{323} = R^{3}_{131} = R^{3}_{232} = \frac{1}{c^{2}}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^{2}$$

$$R^{1}_{414} = R^{2}_{424} = R^{3}_{434} = \frac{1}{Lc^{2}}\frac{\partial^{2} L}{\partial t^{2}}$$

$$R^{4}_{141} = R^{4}_{242} = R^{4}_{343} = \frac{L}{c^{2}}\frac{\partial^{2} L}{\partial t^{2}}$$

- **Jawna postać niezerowych składowych niezależnych mieszanego tensora krzywizny odpowiadających prostemu modelowi rozszerzającej się czasoprzestrzeni**

$$ds^2 = L^2 \left[\left(dx^1\right)^2 + \left(dx^2\right)^2 + \left(dx^3\right)^2 + \left(dx^4\right)^2 \right]$$

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^4 = ict$$

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = g_{44} = L^2$$

$$R^1_{212} = \Gamma^1_{41}\Gamma^4_{22} = -\frac{1}{4g_{11}g_{44}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^4} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^4} = \left(\frac{1}{Lc} \frac{\partial L}{\partial t} \right)^2$$

$$R^1_{313} = \Gamma^1_{41}\Gamma^4_{33} = -\frac{1}{4g_{11}g_{44}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^4} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^4} = \left(\frac{1}{Lc} \frac{\partial L}{\partial t} \right)^2$$

$$R^1_{414} = -\frac{\partial \Gamma^1_{41}}{\partial x^4} - \Gamma^1_{14}\Gamma^1_{41} + \Gamma^1_{14}\Gamma^4_{44} =$$

$$= -\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x^4 \partial x^4} + \left(\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^4} \right)^2 + \frac{1}{4g_{11}g_{44}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^4} \frac{\partial g_{44}}{\partial x^4} = \frac{1}{Lc^2} \frac{\partial^2 L}{\partial t^2} - \left(\frac{1}{Lc} \frac{\partial L}{\partial t} \right)^2$$

$$R^2_{121} = \Gamma^2_{42}\Gamma^4_{11} = -\frac{1}{4g_{22}g_{44}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^4} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^4} = \left(\frac{1}{Lc} \frac{\partial L}{\partial t} \right)^2$$

$$R^2_{323} = \Gamma^2_{42}\Gamma^4_{33} = -\frac{1}{4g_{22}g_{44}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^4} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^4} = \left(\frac{1}{Lc} \frac{\partial L}{\partial t} \right)^2$$

$$R^2_{424} = -\frac{\partial \Gamma^2_{42}}{\partial x^4} - \Gamma^2_{24}\Gamma^2_{42} + \Gamma^2_{42}\Gamma^4_{44} =$$

$$= -\frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^4 \partial x^4} + \left(\frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^4} \right)^2 + \frac{1}{4g_{22}g_{44}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^4} \frac{\partial g_{44}}{\partial x^4} = \frac{1}{Lc^2} \frac{\partial^2 L}{\partial t^2} - \left(\frac{1}{Lc} \frac{\partial L}{\partial t} \right)^2$$

$$R^3_{131} = \Gamma^3_{43}\Gamma^4_{11} = -\frac{1}{4g_{33}g_{44}} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^4} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^4} = \left(\frac{1}{Lc} \frac{\partial L}{\partial t} \right)^2$$

$$R^3_{232} = \Gamma^3_{43}\Gamma^4_{22} = -\frac{1}{4g_{33}g_{44}}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^4}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^4} = \left(\frac{1}{Lc}\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2$$

$$R^3_{434} = -\frac{\partial \Gamma^3_{43}}{\partial x^4} - \Gamma^3_{34}\Gamma^3_{43} + \Gamma^3_{43}\Gamma^4_{44} =$$

$$= -\frac{1}{2g_{33}}\frac{\partial^2 g_{33}}{\partial x^4 \partial x^4} + \left(\frac{1}{2g_{33}}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^4}\right)^2 + \frac{1}{4g_{33}g_{44}}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^4}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^4} = \frac{1}{Lc^2}\frac{\partial^2 L}{\partial t^2} - \left(\frac{1}{Lc}\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2$$

$$R^4_{141} = \frac{\partial \Gamma^4_{11}}{\partial x^4} - \Gamma^4_{11}\Gamma^1_{14} + \Gamma^4_{11}\Gamma^4_{44} =$$

$$= -\frac{1}{2g_{44}}\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x^4 \partial x^4} + \frac{1}{4g_{44}g_{11}}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^4}\right)^2 + \frac{1}{4g_{44}g_{44}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^4}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^4} = \frac{1}{Lc^2}\frac{\partial^2 L}{\partial t^2} - \left(\frac{1}{Lc}\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2$$

$$R^4_{242} = \frac{\partial \Gamma^4_{22}}{\partial x^4} - \Gamma^4_{22}\Gamma^2_{24} + \Gamma^4_{22}\Gamma^4_{44} =$$

$$= -\frac{1}{2g_{44}}\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^4 \partial x^4} + \frac{1}{4g_{44}g_{22}}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^4}\right)^2 + \frac{1}{4g_{44}g_{44}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^4}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^4} = \frac{1}{Lc^2}\frac{\partial^2 L}{\partial t^2} - \left(\frac{1}{Lc}\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2$$

$$R^4_{343} = \frac{\partial \Gamma^4_{33}}{\partial x^4} - \Gamma^4_{33}\Gamma^3_{34} + \Gamma^4_{33}\Gamma^4_{44} =$$

$$= -\frac{1}{2g_{44}}\frac{\partial^2 g_{33}}{\partial x^4 \partial x^4} + \frac{1}{4g_{44}g_{33}}\left(\frac{\partial g_{33}}{\partial x^4}\right)^2 + \frac{1}{4g_{44}g_{44}}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^4}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^4} = \frac{1}{Lc^2}\frac{\partial^2 L}{\partial t^2} - \left(\frac{1}{Lc}\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2$$

$$ds^2 = L^2 \left[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2\right]$$

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^4 = ict$$

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = g_{44} = L^2$$

$$R^1_{212} = R^1_{313} = R^2_{121} = R^2_{323} = R^3_{131} = R^3_{232} = \left(\frac{1}{Lc}\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2$$

$$R^1_{414} = R^2_{424} = R^3_{434} = R^4_{141} = R^4_{242} = R^4_{343} = \frac{1}{Lc^2}\frac{\partial^2 L}{\partial t^2} - \left(\frac{1}{Lc}\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2$$

BIBLIOGRAFIA

W bibliografii podałem książki wydane w języku polskim, które inspirowały mnie lub urzekły elegancją, rzetelnością i jednocześnie prostotą prezentowanych w nich wywodów.

1. B. Baranowski: *Nierównowagowa termodynamika w chemii fizycznej*. PWN, W-wa 1974.
2. H. Bondi: *Kosmologia*. PWN, Warszawa 1965.
3. I. N. Bronsztejn, K. A. Siemiendiajew: *Matematyka (Poradnik encyklopedyczny)*. PWN, W-wa 1998.
4. J. Bukowski: *Mechanika płynów*. PWN, W-wa 1968.
5. A. Chełkowski: *Fizyka dielektryków*. PWN, W-wa 1993.
6. M. P. Douchanow: *Rozchodzenie się fal radiowych*. PWN, W-wa 1965.
7. A. Einstein: *Istota teorii względności*. PWN, W-wa 1962.
8. A. Einstein, L. Infeld: *Ewolucja fizyki (Rozwój poglądów od najdawniejszych pojęć do teorii względności i kwantów)*. PWN, W-wa 1962.
9. *Encyklopedia fizyki (Tom 1)*. PWN, W-wa 1972.
10. *Encyklopedia fizyki (Tom 2)*. PWN, W-wa 1973.
11. *Encyklopedia fizyki (Tom 3)*. PWN, W-wa 1974.
12. R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands: *Feynmana wykłady z fizyki (Tom II – Część 2)*. PWN, W-wa 1970.
13. G. M. Fichtenholz: *Rachunek różniczkowy i całkowy (Tom III)*. PWN, W-wa 1966.
14. S. Frisz, A. Timoriewa: *Kurs fizyki (Tom II – zjawiska elektryczne i elektromagnetyczne*). PWN, W-wa 1965.
15. I. M. Gelfand: *Wykłady z algebry liniowej*. PWN, W-wa 1971.
16. J. Ginter: *Fizyka fal*. PWN, W-wa 1993.
17. A. Goetz: *Geometria różniczkowa*. PWN, W-wa 1965.
18. D. J. Griffiths: *Podstawy elektrodynamiki*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2001.
19. D. Halliday, R. Resnick: *Fizyka (Tom II)*. PWN, W-wa 1967.
20. S. W. Hawking: *Krótka historia czasu*. ZYSK i S-KA, Poznań 1996.
21. S. W. Hawking: *Czarne dziury i wszechświaty niemowlęce oraz inne eseje*. ZYSK i S-KA, Poznań 1997.
22. S. W. Hawking, R. Penrose: *Natura czasu i przestrzeni*. ZYSK i S-KA, Poznań 1996.
23. J. D. Jackson: *Elektrodynamika klasyczna*. PWN, W-wa 1982.
24. A. Januszajtis: *Fizyka (Tom I – cząstki)*. PWN, W-wa 1977.
25. A. Januszajtis: *Fizyka (Tom II – pola)*. PWN, W-wa 1982.
26. A. Januszajtis: *Fizyka (Tom III – fale)*. PWN, W-wa 1991.
27. B. M. Jaworski, A. A. Dietłaf: *Fizyka (Poradnik encyklopedyczny)*. PWN, W-wa 1997.
28. M. Kaku: *Hiperprzestrzeń (Wszechświaty równoległe, pętle czasowe i dziesiąty wymiar)*. Prószyński i S-ka, W-wa 1997.
29. E. Karaśkiewicz: *Zarys teorii wektorów i tensorów*. PWN, W-wa 1964.
30. R. Katz: *Wstęp do szczególnej teorii względności*. PWN, W-wa 1967.
31. C. Kittel, W. D. Knight, M. A. Ruderman: *Mechanika*. PWN, W-wa 1969.
32. A. S. Kompaniejec: *Fizyka teoretyczna*. PWN, W-wa 1961.
33. L. Landau, E. Lifszic: *Elektrodynamika ośrodków ciągłych*. PWN, W-wa 1960.
34. L. Landau, E. Lifszic: *Mechanika*. PWN, W-wa 1965.
35. L. Landau, E. Lifszic: *Mechanika ośrodków ciągłych*. PWN, W-wa 1958.

36. L. Landau, E. Lifszic: *Teoria pola*. PWN, W-wa 1958.
37. M. von Laue: *Historia fizyki*. PWN, W-wa 1960.
38. F. Leja: *Geometria analityczna*. PWN, W-wa 1965.
39. S. Loria: *Względność i grawitacya (Teorya A. Einsteina)*. Altenberg, Lwów 1921.
40. G. J. Lubarski: *Teoria grup i jej zastosowania w fizyce*. PWN, W-wa 1961.
41. H. Margenau, G. M. Murphy: *Matematyka w fizyce i chemii*. PWN, W-wa 1962.
42. A. N. Matwiejew: *Teoria pola elektromagnetycznego*. PWN, 1967.
43. A. P. Miszyna, I. W. Proskuriakow: *Algebra wyższa (Algebra liniowa, wielomiany, algebra ogólna)*. PWN, W-wa 1966.
44. J. Mozrzymas: *Zastosowania teorii grup w fizyce współczesnej (Część I)*. PWN, Warszawa – Wrocław 1967.
45. A. H. Piekara: *Mechanika ogólna*. PWN, W-wa 1961.
46. A. H. Piekara: *Elektryczność i magnetyzm*. PWN, W-wa 1970.
47. E. M. Purcell: *Elektryczność i magnetyzm*. PWN, W-wa 1974.
48. P. K. Raszewski: *Geometria Riemanna i analiza tensorowa*. PWN, W-wa 1958.
49. P. K. Raszewski: *Wstęp do rachunku tensorowego*. PWN, W-wa 1964.
50. W. Rubinowicz, W. Królikowski: *Mechanika teoretyczna*. PWN, W-wa 1967.
51. B. F. Schutz: *Wstęp do ogólnej teorii względności*. PWN, W-wa 1995.
52. *Słownik fizyczny*. Wiedza Powszechna, W-wa 1984.
53. W. I. Smirnow: *Matematyka wyższa (Tom III, część pierwsza)*. PWN, W-wa 1964.
54. M. Stark: *Geometria analityczna*. PWN, W-wa 1958.
55. M. Sufczyński: *Elektrodynamika*. PWN, W-wa 1969.
56. J. L. Synge, A. Schild: *Rachunek tensorowy*.PWN, W-wa 1964.
57. S. Szczeniowski: *Fizyka doświadczalna (Część I – mechanika i akustyka)*. PWN, W-wa 1972.
58. S. Szczeniowski: *Fizyka doświadczalna (Część III – elektryczność i magnetyzm)*. PWN, W-wa 1972.
59. I. E. Tamm: *Podstawy teorii elektryczności*. WNT, W-wa 1967.
60. E. F. Taylor, J. A. Wheeler: *Fizyka czasoprzestrzeni*. PWN, W-wa 1972.
61. T. Trajdos: *Matematyka (Część III)*.WNT, W-wa 1993.
62. W. Pogorzelski: *Analiza matematyczna (Tom III)*. PWN. W-wa 1954.
63. W. A. Ugarow: *Szczególna teoria względności*. PWN, W-wa 1985.
64. J. Werle: *Termodynamika fenomenologiczna*. PWN, W-wa 1957.
65. E. T. Whittaker: *Dynamika analityczna*. PWN, W-wa 1959.

DODATEK

W nawiasach kwadratowych podano numery stron.

- **Oryginalne wyniki**

W przedstawionym tutaj podręczniku Czytelnik zajmujący się zawodowo ogólną teorią względności zapewne z łatwością znajdzie nie opublikowane wcześniej wyniki mojego autorstwa. Są nimi:

1. Interpretacja czwartej (czasowej) składowej tensora pędu-energii cieczy nielepkiej [59, 76].
2. Zmodyfikowane równania Maxwella w postaci trójwymiarowej [67].
3. Czterowymiarowe równania ruchu cząstki próbnej [48-50, 77].
4. Równania ruchu swobodnej cząstki próbnej w polu grawitacyjnym wirującej planety [98-104].
5. Pierwsza prędkość kosmiczna dla orbity kołowej w przypadku wirującej planety [33, 103].
6. Prosty model rozszerzającej się czasoprzestrzeni [135-140].

Ad. 1. Kwadrat czwartej (czasowej) składowej gęstości objętościowej pędu opatrzony znakiem minus i podzielony przez podwojoną gęstość jest równy gęstości objętościowej energii całkowitej. Przy czym, tak jak wykazaliśmy we wcześniej opublikowanym tomie poświęconym Szczególnej Teorii Względności[1)], energia spoczynkowa, kinetyczna i całkowita cząstki powinny być inaczej zdefiniowane[2, 3)].
Ad. 2. Ze zmodyfikowanych równań Maxwella wynika, że fale grawitacyjne mają wpływ na zjawiska elektromagnetyczne. Możliwa jest zatem bardzo prosta metoda detekcji pól grawitacyjnych o zmieniającej się wartości wyznacznika tensora metrycznego.
Ad. 3. Podano interpretację fizyczną równań ruchu cząstki próbnej.
Ad. 4. Zaproponowano nową metodę analizy ruchu swobodnej cząstki próbnej w polu grawitacyjnym wirującej planety.
Ad. 5. Uzyskany wynik jest zgodny z analogicznym rozwiązaniem w ramach teorii grawitacji Newtona[4)].
Ad. 6. Analizowany model wszechświata umożliwia nową interpretację prawa Hubble'a.

- **Propozycje nowych nazw**

Proponuję, aby mieszany tensor krzywizny czwartego rzędu nazywać tensorem krzywizny Grossmanna. Pojęcie tensora mieszanego jako pierwszy wprowadził Marcell Grossmann[5)] (1878-1936) przy okazji rozważań dotyczących krzywizny czasoprzestrzeni.

Proponuję również, aby tensor energii-pędu (pędu-energii) nazywać tensorem gęstości energii, ponieważ składowe tego tensora mają wymiar gęstości objętościowej energii.

[1)] Zbigniew Osiak: *Szczególna teoria względności*. Self Publishig (2012), ISBN: 978-83-272-3464-3
[2)] Zbigniew Osiak: *Energy in special relativity*. Self Publishig (2011), ISBN: 978-83-272-3448-3
[3)] Zbigniew Osiak: *Energia w szczególnej teorii względności*. Self Publishig (2012), ISBN: 978-83-272-3465-0
[4)] Zbigniew Osiak: *Pierwsza prędkość kosmiczna a siła Coriolisa*. Delta **4**, 371 (2005) 10-11.
[5)] A. Einstein, M. Grossmann: *Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation*. Zeitschrift für Mathematik und Physik **62**, 3 (1913) 225-261.
Zarys uogólnionej teorii względności i teorii grawitacji.

Zbigniew Osiak

Należę do pokolenia fizyków, dla których idolami byli Albert Einstein, Lew Dawidowicz Landau i Richard P. Feynman. Einstein zniewolił mnie potęgą swej intuicji. Landaua podziwiam za rzetelność, precyzję i prostotę wywodów oraz instynktowne wyczuwanie istoty zagadnienia. Feynman urzekł mnie lekkością narracji i subtelnym poczuciem humoru.