Zbigniew Osiak

Elektryczność

Linki do moich publikacji naukowych i popularnonaukowych, e-booków oraz audycji telewizyjnych i radiowych są dostępne w bazie ORCID pod adresem internetowym: http://orcid.org/0000-0002-5007-306X

Zbigniew Osiak

ELEKTRYCZNOŚĆ

STAŁE POLE ELEKTRYCZNE W PRÓŻNI
KONDENSATOR PŁASKI
DIELEKTRYKI
PRĄD ELEKTRYCZNY STAŁY W METALACH
OBWODY PRĄDU STAŁEGO

Madzi,
mojej córce poświęcam

Portret autora zamieszczony na okładkach przedniej i tylnej
Rafał Pudło

Wydawnictwo: Self Publishing

ISBN: 978-83-272-3361-5

e-mail: zbigniew.osiak@gmail.com

Linki do moich publikacji naukowych i popularnonaukowych, e-booków oraz audycji telewizyjnych i radiowych są dostępne w bazie ORCID pod adresem internetowym:
http://orcid.org/0000-0002-5007-306X

SPIS TREŚCI

KONDENSATOR PŁASKI

OBWODY PRĄDU STAŁEGO

STAŁE POLE ELEKTRYCZNE W PRÓŻNI

1 ISTOTNE CECHY POLA ELEKTRYCZNEGO

- Pole elektryczne między innymi:
  1. Działa siłami na spoczywające i poruszające się ładunki elektryczne.
  2. Indukuje ładunki elektryczne na powierzchniach nienaładowanych metali (wywołuje indukcję elektrostatyczną).
  3. Indukuje ładunki elektryczne na powierzchniach nienaładowanych dielektryków (wywołuje polaryzację dielektryków).

Z opisem tych zjawisk związane są odpowiednio wektor natężenia pola elektrycznego **E**, wektor indukcji elektrycznej **D**, zwanej też przesunięciem elektrycznym, oraz wektor polaryzacji **P**, którym zajmiemy się w innym rozdziale.

2 WEKTOR NATĘŻENIA POLA ELEKTRYCZNEGO E

- **Natężeniem pola elektrycznego E** w danym punkcie nazywamy stosunek siły **F**, działającej ze strony pola na umieszczony w tym punkcie ładunek próbny q_o, do wartości tego ładunku.

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_o}}$$

Ładunek próbny z założenia jest dodatni i odpowiednio mały, aby jego pole nie zaburzało badanego pola. Natężenie pola elektrycznego jest wektorem.

$[E] = 1\frac{N}{C} = 1\frac{V}{m}$.

- **Siła działająca na ładunek w polu elektrycznym**

Znajomość wektorów natężenia pola w każdym punkcie pola elektrycznego pozwala na obliczenie siły działającej na znajdujący się w polu ładunek elektryczny.

$$\boxed{\mathbf{F} = q \cdot \mathbf{E}}$$

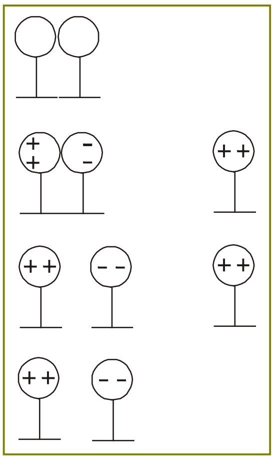
Na dodatni ładunek działa w polu elektrycznym siła o kierunku i zwrocie natężenia pola elektrycznego. Na ujemny ładunek działa w polu elektrycznym siła o kierunku natężenia pola, ale mająca zwrot przeciwny niż natężenie.

$$\boxed{\begin{array}{lll} q > 0 & \Rightarrow & \mathbf{F} \uparrow\uparrow \mathbf{E} \\ q < 0 & \Rightarrow & \mathbf{F} \downarrow\uparrow \mathbf{E} \end{array}}$$

- **Stałym polem elektrycznym** nazywamy takie pole elektryczne, którego wektory natężeń są stałe w czasie. Dalej zajmować się będziemy stałym polem elektrycznym, którego źródłem są spoczywające ładunki elektryczne.
- **Jednorodnym polem elektrycznym** nazywamy takie pole elektryczne, którego wektory natężeń są stałe co do wartości, kierunku i zwrotu w każdym punkcie pola. Jednorodne pole elektryczne jest szczególnie proste do opisu.

3 WEKTOR INDUKCJI ELEKTRYCZNEJ D

- **Zjawisko indukcji elektrostatycznej**



1. Stykamy ze sobą dwie nienaładowane kulki lub płytki metalowe umieszczone na izolujących podstawach.
2. Przybliżamy do nich dodatni (lub ujemny) ładunek indukujący.
3. Przy obecności ładunku indukującego, odsuwamy od siebie obie kulki.
4. Usuwamy ładunek indukujący.

- **Wektor indukcji elektrycznej**

Wartością indukcji elektrycznej **D** w danym punkcie pola elektrycznego nazywamy stosunek maksymalnego ładunku q, indukowanego na powierzchni jednej z dwóch zetkniętych ze sobą bardzo małych metalowych płytek próbnych umieszczonych w danym punkcie, do pola powierzchni (jednostronnej) S tej płytki.

$$\boxed{|\mathbf{D}| = \frac{|q|}{S}}$$

Indukcja **D** jest wektorem o kierunku prostopadłym do płytek próbnych i skierowanym od płytki, na której indukuje się ujemny ładunek elektryczny, do płytki, na której indukuje się dodatni ładunek elektryczny. Indukcja elektryczna nazywana była dawniej przesunięciem elektrycznym.

$[D] = 1\frac{C}{m^2}$.

- **Relacja między wektorami E i D**

Z doświadczenia wiadomo, że w jednorodnych izotropowych ośrodkach dielektrycznych wektory **E** i **D** są równoległe względem siebie, a ich wartości są proporcjonalne do siebie w każdym punkcie ośrodka.

$$\boxed{\mathbf{D} = \varepsilon_o \varepsilon_r \mathbf{E}}$$

UWAGA
Własność ta nie dotyczy ośrodków anizotropowych oraz ferroelektryków.

ε_o = przenikalność elektryczna próżni
ε_o = $8{,}85 \cdot 10^{-12}$ C/Vm
ε_r = względna przenikalność dielektryczna ośrodka lub stała dielektryczna, czyli liczba informująca ile razy natężenie pola elektrycznego w danym ośrodku jest mniejsze od natężenia pola elektrycznego w próżni

$\varepsilon_r \geq 1$
$\varepsilon_r = 1$ tylko dla próżni
$\varepsilon_r > 1$ dla wszystkich dielektryków
$\varepsilon_r = 1{,}00059$ dla powietrza

UWAGA
Indukcja elektryczna **D** nie zależy od stałej dielektrycznej ośrodka.

4 PRAWO GAUSSA

- **Strumień wektora indukcji elektrycznej przez powierzchnię**

Podamy definicję strumienia indukcji Φ_D w prostym przypadku, kiedy w każdym punkcie płaskiej powierzchni indukcja ma taką samą stałą wartość, ustalony kierunek i zwrot, inaczej mówiąc, gdy pole jest jednorodne a powierzchnia jest fragmentem płaszczyzny.

$$\boxed{\Phi_D = \mathbf{D} \cdot \mathbf{S}} \quad \text{lub} \quad \boxed{\Phi_D = \varepsilon_o \varepsilon_r \mathbf{E} \cdot \mathbf{S}}$$

S = pole płaskiej powierzchni
S = wektor o wartości równej polu płaskiej powierzchni S, prostopadły do tej powierzchni, o zwrocie na zewnątrz obszaru ograniczonego między innymi przez rozważaną powierzchnię

$[\Phi_D] = 1\mathrm{C}$.

Aby wyznaczyć strumień wektora indukcji, w przypadku gdy pole jest niejednorodne a powierzchnia nie jest płaska, należy powierzchnię podzielić na kawałki płaskie tak małe, aby we wszystkich punktach pole było jednorodne. Następnie należy obliczyć strumień dla każdego kawałka

$$d\Phi_D = \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

i wszystkie takie elementarne strumienie zsumować.

Inaczej mówiąc, w ogólnym przypadku strumień wektora indukcji **D** przez powierzchnię S dany jest jako

$$\boxed{\Phi_D = \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}\ .$$

Dla powierzchni zamkniętej

$$\boxed{\Phi_D = \oint\!\!\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}\ .$$

- **Prawo Gaussa w postaci całkowej (globalnej)**

Strumień wektora indukcji elektrycznej przez powierzchnię zamkniętą jest równy algebraicznej sumie ładunków swobodnych otoczonych przez tę powierzchnię.

$$\boxed{\Phi_D = \oint\!\!\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \sum_i q_i}$$

Powierzchnia zamknięta, którą otaczamy ładunki, nazywana jest powierzchnią Gaussa. Cała sztuka stosowania prawa Gaussa polega na skonstruowaniu odpowiedniej powierzchni Gaussa, co jest stosunkowo proste w przypadku pól symetrycznych.

UWAGA

Strumień wektora przez dany element powierzchni zamkniętej jest dodatni, gdy wektor ma różną od zera składową skierowaną na zewnątrz powierzchni Gaussa, prostopadłą do danego elementu powierzchni. Strumień wektora przez dany element powierzchni jest ujemny, gdy wektor ma różną od zera składową skierowaną do wnętrza powierzchni Gaussa, prostopadłą do danego elementu powierzchni.

- **Prawo Gaussa w postaci różniczkowej (lokalnej)**

Prawo Gaussa

$$\oint\!\!\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \sum_i q_i$$

Twierdzenie Gaussa

$$\oint\!\!\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \mathrm{div}\mathbf{D}\, dV$$

$$\sum_i q_i = \iiint_V \rho\, dV$$

$$\Rightarrow \quad \iiint_V \mathrm{div}\mathbf{D}\, dV = \iiint_V \rho\, dV$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{div}\mathbf{D} = \rho}$$

ρ = gęstość objętościowa ładunku

5 POTENCJALNOŚĆ STAŁEGO POLA WEKTORA E

- Przypomnijmy, zajmujemy się stałym polem elektrycznym, którego źródłem są spoczywające ładunki elektryczne. Stałe pole wektora natężenia **E** jest polem bezwirowym lub potencjalnym, czyli polem w którym praca wykonana przez siły pola przy przesuwaniu ładunku wzdłuż krzywej zamkniętej jest równa zeru. Inaczej mówiąc, praca wykonywana przez siły pola przy przesuwaniu ładunku z jednego punktu do drugiego zależy tylko od położenia tych punktów, a nie zależy od toru, po którym przesuwany był ładunek. To, że stałe pole wektora natężenia **E** jest potencjalne, oznacza również, że można go opisać skalarem zwanym potencjałem elektrycznym.

Różnica potencjałów elektrycznych między punktami A i B jest równa stosunkowi pracy $W_{A\to B}$, którą wykonują siły pola elektrycznego przy przemieszczaniu ładunku q z punktu A do punktu B, do wartości tego ładunku.

$$\boxed{\varphi_A - \varphi_B = \frac{W_{A\to B}}{q}} \qquad [\varphi] = 1\frac{J}{C} = 1V$$

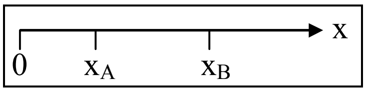
Potencjałem elektrycznym φ_A w danym punkcie A pola elektrycznego nazywamy stosunek pracy jaką muszą wykonać siły pola przy przemieszczanu ładunku q z danego punktu A do punktu B, w którym z założenia potencjał jest równy zeru, do wartości przemieszczanego ładunku.

$$\boxed{\varphi_A - \cancel{\varphi_B} = \frac{W_{A\to B}}{q}\,, \qquad \varphi_B = 0}$$

UWAGA
Potencjał w danym punkcie zdefiniowaliśmy jako różnicę potencjałów w tym punkcie oraz w punkcie, gdzie z założenia przyjęliśmy potencjał równy zeru. Najczęściej przyjmuje się $\varphi = 0$ w nieskończoności. Fizyczny sens ma jedynie różnica potencjałów.

- **Związek między natężeniem a potencjałem**

Z potencjalności stałego pola wektora **E** wynika związek między natężeniem a potencjałem, który podamy dla najprostszego przypadku, czyli dla stałego pola jednorodnego wzdłuż linii wektora **E**.



$$W_{A\to B} = q(\varphi_A - \varphi_B)$$
$$W_{A\to B} = F(x_B - x_A)$$
$$F = qE$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\varphi_A - \varphi_B = -E(x_A - x_B)}$$

W stałym jednorodnym polu wektora **E** bezwzględna wartość różnicy potencjałów między punktami A i B, leżącymi na linii wektora **E**, jest równa iloczynowi wartości wektora **E** i odległości d między tymi punktami

$$|\varphi_A - \varphi_B| = |\mathbf{E}|\, d$$

W ogólnym przypadku:

$$W_{A\to B} = q(\varphi_A - \varphi_B)$$
$$W_{A\to B} = \int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l}$$
$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}$$

Twierdzenie Stokesa

$$\oint_l \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathrm{rot}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}$$

$$\Rightarrow \oint_l \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\oint_l \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = 0 \qquad \mathrm{rot}\mathbf{E} = 0}$$

Dla stałego potencjalnego pola elektrycznego cyrkulacja wektora **E** wzdłuż dowolnej drogi zamkniętej oraz rotacja wektora **E** w każdym punkcie są równe zeru.

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = 0$$
$$\mathrm{rot}\ \mathrm{grad}\varphi = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\varphi}$$

UWAGA
Znak minus oznacza, że wektor natężenia pola elektrycznego **E** jest skierowany od większego do mniejszego potencjału.

6 RÓWNANIA POISSONA I LAPLACE'A

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathrm{div}\mathbf{D} = \rho\\ &\mathbf{D} = \varepsilon_o\varepsilon_r\mathbf{E}\\ &\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\varphi\\ &\mathrm{grad}\varepsilon_r = 0\end{aligned}}$$

$$\mathrm{div}\alpha\mathbf{A} = \alpha\mathrm{div}\mathbf{A} + \mathbf{A}\mathrm{grad}\alpha$$

$$\mathrm{grad}\alpha\beta = \beta\mathrm{grad}\alpha + \alpha\mathrm{grad}\beta$$

$$\mathrm{div\ grad}\varphi = \nabla^2\varphi = \Delta\varphi$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Δ = operator Laplace'a, laplasjan

$$\Rightarrow \quad \mathrm{div}\varepsilon_o\varepsilon_r\mathbf{E} = \rho$$

$$\varepsilon_o\varepsilon_r\mathrm{div}\mathbf{E} + \mathbf{E}\mathrm{grad}\varepsilon_o\varepsilon_r = \rho$$

$$\varepsilon_o\varepsilon_r\mathrm{div}\mathbf{E} = \rho$$

$$\varepsilon_o\varepsilon_r\mathrm{div\ grad}\varphi = -\rho$$

$$\boxed{\Delta\varphi = \frac{-\rho}{\varepsilon_o\varepsilon_r}}$$ Równanie Poissona

$$\Big\downarrow \ \rho = 0$$

$$\boxed{\Delta\varphi = 0}$$ Równanie Laplace'a

7 PRAWO COULOMBA

- **Prawo Coulomba**

Dla powierzchni Gaussa będącej sferą o promieniu r, w środku której znajduje się ładunek punktowy Q, mamy:

$$S = 4\pi r^2$$

$$\oint\!\!\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = D4\pi r^2$$

$$\oint\!\!\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = Q$$

$$D = \varepsilon_o\varepsilon_r E$$

$$F = qE$$

$$D = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{Q}{r^2}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{Q}{\varepsilon_r r^2}$$

$$\boxed{F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{Qq}{\varepsilon_r r^2}}$$

Dwa punktowe ładunki elektryczne oddziałują na siebie wzajemnie siłą, której wartość jest wprost proporcjonalna do iloczynu ich wartości oraz odwrotnie proporcjonalna do iloczynu kwadratu odległości między nimi i stałej dielektrycznej ośrodka, w którym się znajdują. Siła ta jest skierowana wzdłuż prostej łączącej oba oddziałujące ładunki. Dwa ładunki jednoimienne odpychają się, a dwa różnoimienne przyciągają się.

ε_o = przenikalność elektryczna próżni

$\varepsilon_o = 8{,}85 \cdot 10^{-12} m^{-2}N^{-1}C^2$

$1/4\pi\varepsilon_o = k = 9 \cdot 10^{9} m^2NC^{-2}$

ε_r = względna przenikalność dielektryczna lub stała dielektryczna, czyli liczba informująca ile razy siła działająca między dwoma ładunkami elektrycznymi w danym ośrodku jest mniejsza od siły działającej między tymi ładunkami w próżni

$\varepsilon_r \geq 1$

$\varepsilon_r = 1$ tylko dla próżni

$\varepsilon_r > 1$ dla wszystkich dielektryków

$\varepsilon_r = 1{,}00059$ dla powietrza

PRZYKŁAD

Obliczmy ile razy wartość siły F_e odpychania elektrycznego dwóch elektronów jest większa od wartości siły F_g przyciągania grawitacyjnego tych dwóch elektronów.

$$F_e = \frac{ke^2}{r^2}$$

$$F_g = \frac{Gm_e^2}{r^2}$$

$$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$$

$$m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$$

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2kg^{-2}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{F_e}{F_g} \cong 4 \cdot 10^{42}}$$

- **Zapis prawa Coulomba w postaci wektorowej**

$$\boxed{\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{q_1 q_2}{\varepsilon_r r_{12}^2} \cdot \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}}$$

$\mathbf{r}_{12}$ = promień wodzący poprowadzony z punktu 1 do punktu 2
r_{12} = odległość między punktami 1 i 2
$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $\quad \mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$
$\mathbf{r}_{12} = -\mathbf{r}_{21}$
$\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ = promienie wodzące poprowadzone z początku układu współrzędnych odpowiednio do punktu 1 i 2
$\mathbf{F}_{12}$ = siła z jaką ładunek q_1 działa na ładunek q_2
$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$

8 LINIE WEKTORÓW E I D. POWIERZCHNIE EKWIPOTENCJALNE

- **Linie pola wektorowego** są liniami, do których styczne w każdym punkcie pokrywają się z kierunkiem wektora w tym punkcie.
- Pole elektryczne można charakteryzować, kreśląc linie wektorów **E** i **D**. Linie wektora **E** nazywa się niekiedy liniami sił pola elektrycznego. W próżni linie wektorów **E** i **D** pokrywają się. Linie wektorów **E** i **D** zaczynają się na dodatnich ładunkach i kończą się na ujemnych, lub jeden z ich końców znajduje się w nieskończoności, przy czym linie wektora **D** zaczynają się i kończą tylko na ładunkach swobodnych. Linie wektorów **E** i **D** nie mogą być zamknięte, ponieważ cyrkulacja wektora **E** wzdłuż dowolnej zamkniętej linii sił byłaby dodatnia. Linie wektorów **E** i **D** nie przecinają się. Linie wektorów **E** i **D**, w przypadku pola jednorodnego, są równoległe. Gęstość linii danego wektora jest wprost proporcjonalna do wartości tego wektora. Pojęcie linii sił pola elektrycznego wprowadził Faraday. Początkowo linie sił wiązano z naprężeniami eteru.
- **Powierzchnie ekwipotencjalne**, to powierzchnie stałego potencjału. Linie sił są prostopadłe do powierzchni ekwipotencjalnej. Gęstość powierzchni ekwipotencjalnych jest miarą wartości gradientu potencjału, czyli miarą wartości natężenia pola elektrycznego.

9 POLE ŁADUNKU PUNKTOWEGO

- **Natężenie pola elektrycznego ładunku punktowego**

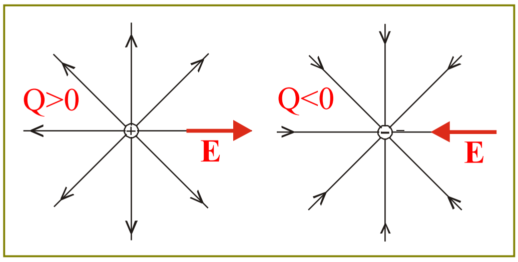
$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_o}$$

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{Qq_o}{\varepsilon_r r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$\varepsilon_r = 1$$

Q = ładunek źródłowy

$$\Rightarrow \quad \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{Q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$



- **Praca sił pola elektrycznego przy przemieszczaniu ładunku q w polu ładunku źródłowego Q z punktu A do punktu B wzdłuż linii sił**

$$W_{A\to B} = \int_{r_A}^{r_B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{Qq}{\varepsilon_r r^2} dr$$

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}$$

$$\varepsilon_r = 1$$

$$\int \frac{1}{r^2} dr = -\frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \quad W_{A\to B} = kQq \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

r_A = odległość punktu A od ładunku źródłowego Q
r_B = odległość punktu B od ładunku źródłowego Q
$\mathbf{r}$ = promień wodzący zaczepiony w źródle

- **Potencjał pola elektrycznego ładunku punktowego**

$$\varphi_A = \frac{W_{A\to B}}{q}$$

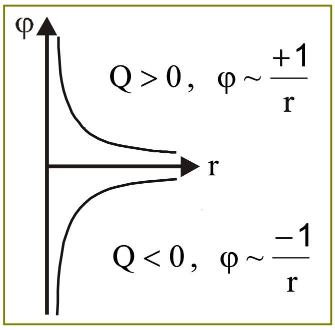
$$r_B = \infty, \quad \varphi_B = 0$$

$$W_{A\to B} = kQq \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_A = \frac{kQ}{r_A}$$

$$\varphi = \frac{kQ}{r}$$

Q = ładunek źródłowy
r = odległość od źródła



10 POLE UKŁADU ŁADUNKÓW PUNKTOWYCH. ZASADA SUPERPOZYCJI

- **Zasada superpozycji natężeń**

Wektor natężenia **E** pola elektrycznego, wytworzonego przez układ ładunków $\{Q_i\}$, równy jest sumie wektorów natężeń $\mathbf{E}_i$ pochodzących od poszczególnych ładunków.

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{r_i^2} \cdot \frac{\mathbf{r}_i}{r_i}$$

- **Zasada superpozycji potencjałów**

Potencjał φ pola elektrycznego, wytworzonego przez układ ładunków $\{Q_i\}$, równy jest sumie potencjałów φ_i pochodzących od poszczególnych ładunków.

$$\boxed{\varphi = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{r_i}}$$

11 POLE DIPOLA

- **Dipol**

Dipolem elektrycznym nazywamy układ dwóch różnoimiennych ładunków punktowych q>0 i –q o identycznych wartościach bezwzględnych, znajdujących się w stałej odległości od siebie. **Osią** dipola nazywamy prostą, na której znajdują się oba ładunki dipola. **Środkiem** dipola nazywamy punkt leżący na osi dipola w równej odległości od obu ładunków dipola. **Ramieniem** dipola nazywamy wektor leżący na osi dipola, o początku w ładunku ujemnym, a końcu w ładunku dodatnim, o wartości równej odległości l między ładunkami dipola.

- **Momentem elektrycznym μ dipola** lub **elektrycznym momentem dipolowym** nazywamy wektor

$$\boxed{\boldsymbol{\mu} = q \cdot \mathbf{l}}\ .$$

Podamy też inną, równoważną definicję momentu dipolowego, nadającą się do uogólnień.

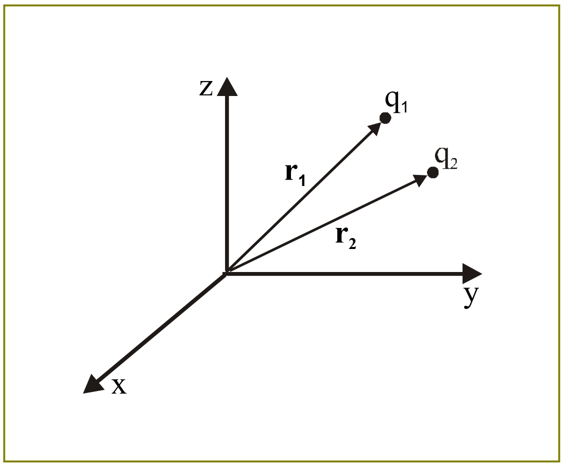
$$\boldsymbol{\mu} = q_1\mathbf{r}_1 + q_2\mathbf{r}_2 = \sum_{s=1}^{n} q_s\mathbf{r}_s$$

$$\boldsymbol{\mu} = \mu_x\mathbf{i} + \mu_y\mathbf{j} + \mu_z\mathbf{k}$$

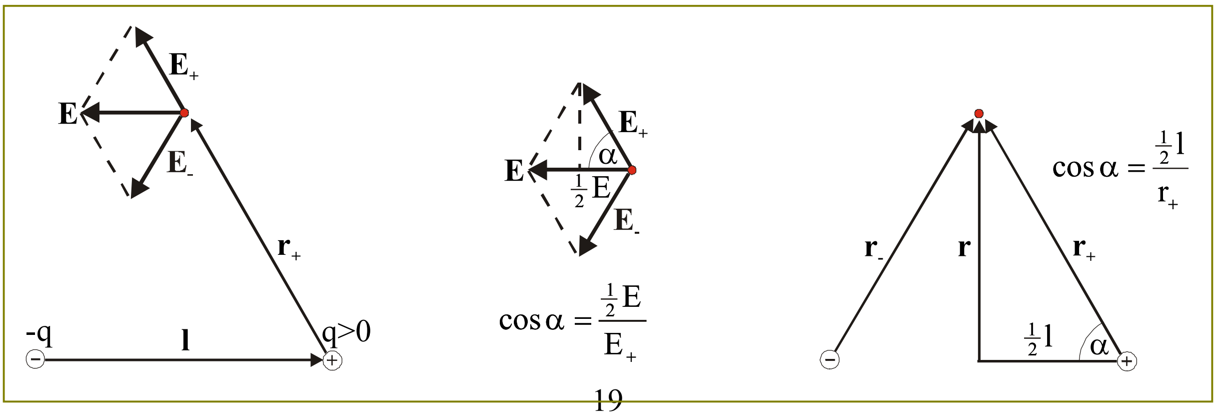
$$\mu_x = q_1x_1 + q_2x_2 = \sum_{s=1}^{n} q_s x_s$$

$$\mu_y = q_1y_1 + q_2y_2 = \sum_{s=1}^{n} q_s y_s$$

$$\mu_z = q_1z_1 + q_2z_2 = \sum_{s=1}^{n} q_s z_s$$



- **Natężenie i potencjał w punktach płaszczyzny prostopadłej do osi dipola przechodzącej przez jego środek**



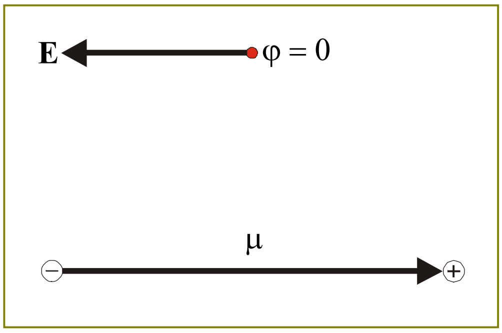
$$E = 2E_+ \cos\alpha$$
$$E_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{q}{r_+^2}$$
$$\cos\alpha = \frac{\frac{1}{2}l}{r_+}$$
$$\mu = ql$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{\mu}{r_+^3}$$

w środku dipola : $r_+ = \frac{1}{2}l$ $\qquad E = \frac{2\mu}{\pi\varepsilon_o l^3}$

$$\Downarrow \quad r >> l \Rightarrow r_+ \approx r$$

$$E \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{\mu}{r^3}$$



$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-}\right)$$
$$r_+ = r_-$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = 0$$

r = promień wodzący poprowadzony ze środka dipola

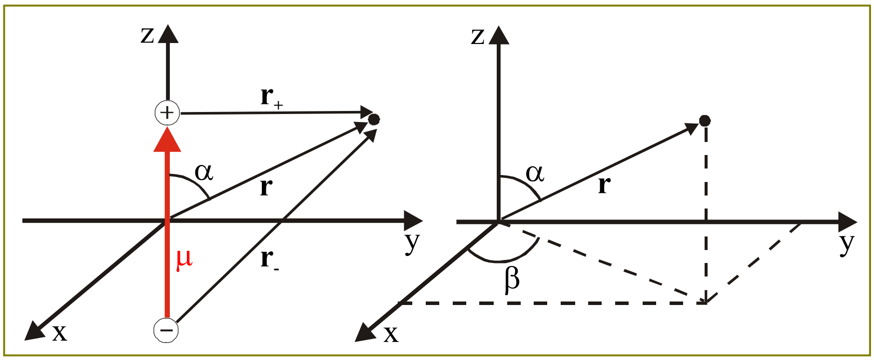
W każdym punkcie płaszczyzny prostopadłej do osi dipola, przechodzącej przez jego środek,
1. wektor natężenia pola elektrycznego jest równoległy do osi dipola i skierowany od ładunku dodatniego do ładunku ujemnego,
2. potencjał elektryczny jest równy zeru.

- **Potencjał w dowolnym punkcie daleko od środka dipola**

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\pi_o}\left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-}\right)$$
$$\alpha = \angle(\mathbf{l},\mathbf{r}) = \angle(\boldsymbol{\mu},\mathbf{r})$$

$$r >> l$$
$$r_- - r_+ \approx l\cos\alpha$$
$$r_-\cdot r_+ \approx r^2$$

$$\mu = ql$$
$$\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{r} = \mu r\cos\alpha$$
$$r = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\cos\alpha = \frac{z}{r}$$



$$\Rightarrow \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{\mu\cos\alpha}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{r}}{r^3}$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{\mu z}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

UWAGA
$\mu\cos\alpha$ jest rzutem wektora momentu dipolowego $\boldsymbol{\mu}$ na promień wodzący poprowadzony ze środka dipola do punktu obserwacji.

- **Natężenie w dowolnym punkcie daleko od środka dipola**

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_o} \cdot \frac{\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

$$E = -\mathrm{grad}\varphi$$

$$\mathrm{grad} = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\mathrm{grad}\, r^n = nr^{n-1} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$\mathrm{grad}\frac{1}{r^3} = -\frac{3}{r^4} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$\mathrm{grad}\,\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r} = \boldsymbol{\mu}$$

$$\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r} = \mu r\cos\alpha$$

$$r = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{z}{r}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{\mu z}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

$$E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

$$E = \left(E_x^2 + E_y^2 + E_z^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{\mu\cos\alpha}{r^2}$$

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}, \quad E_\alpha = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}$$

$$E_\beta = \frac{1}{r\sin\alpha} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}$$

$$\mathbf{E}_r \perp \mathbf{E}_\alpha$$

$$E = \left(E_r^2 + E_\alpha^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

$$\Rightarrow \mathbf{E} = -\mathrm{grad}\left\{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r}}{r^3}\right\} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \mathrm{grad}\left\{\frac{\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r}}{r^3}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \left\{(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r})\mathrm{grad}\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3}\mathrm{grad}\,\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r}\right\}$$

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \left\{\frac{3(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r})}{r^4} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{\boldsymbol{\mu}}{r^3}\right\}}$$

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \left\{\frac{3\mu\cos\alpha}{r^3} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{\boldsymbol{\mu}}{r^3}\right\}}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{3\mu xz}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{5}{2}}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{3\mu yz}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{5}{2}}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{\mu\left(2z^2 - y^2 - x^2\right)}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{5}{2}}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{2\mu\cos\alpha}{r^3}}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{\mu\sin\alpha}{r^3}}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_\beta = 0}$$

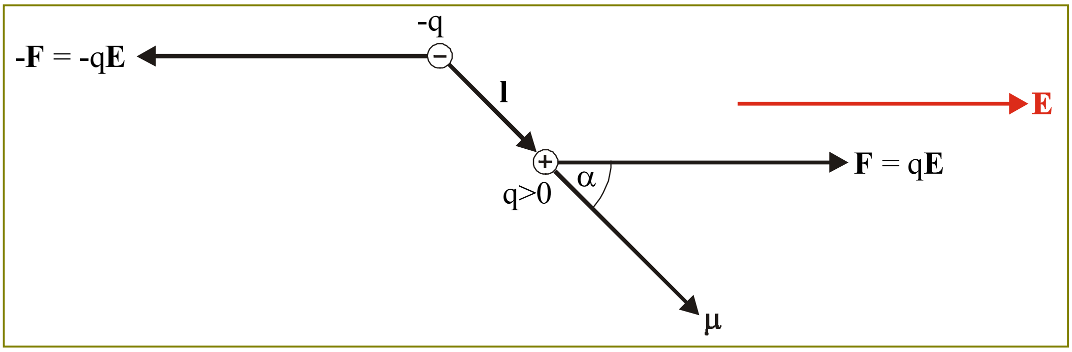
$$\Downarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{\mu}{4\pi\varepsilon_o r^3} \cdot \left(1 + 3\cos^2\alpha\right)^{\frac{1}{2}}}$$

E_x = składowa **E** wzdłuż osi x
E_y = składowa **E** wzdłuż osi y
E_z = składowa **E** wzdłuż osi z
E_r = składowa radialna **E**
E_α = składowa południkowa **E**
E_β = składowa równoleżnikowa **E**

12 DIPOL W ZEWNĘTRZNYM POLU ELEKTRYCZNYM

- **Dipol w jednorodnym polu elektrycznym**



W jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu **E** suma sił działających na dipol jest równa zeru, ponieważ na dodatni ładunek dipola działa siła +q**E**, a na ujemny –q**E**. Siły +q**E** i –q**E** stanowią parę sił o momencie **M**.

$$\mathbf{M} = \mathbf{l} \times \mathbf{F}, \quad \mathbf{F} = q\mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\mu} = q\mathbf{l} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{E}}$$

$$M = lF\sin\alpha, \quad F = qE, \quad \mu = ql \quad \Rightarrow \quad \boxed{M = \mu E \sin\alpha}$$

Para sił powoduje obrót dipola do położenia, w którym wektory **μ** i **E** są równoległe (α=0).

UWAGA

Wprawdzie **M=0** dla kątów α=0 i α=π , ale są to jakościowo różne stany.

1. α=0, **M=0**, **μ**↑↑**E**, to stan stabilny.
   Małe odchylenie od stanu α=0 powoduje oscylacyjny ruch dipola wokół tego stanu.
2. α=π, **M=0**, **μ**↓↑**E**, to stan niestabilny.
   Małe odchylenie od stanu α=π powoduje bezpowrotne wyjście z tego stanu.

- **Energia potencjalna W_p dipola w zewnętrznym polu elektrycznym**

Podczas obrotu dipola siły pola elektrycznego wykonują pracę równą ujemnemu przyrostowi energii potencjalnej dipola.

$$\Delta W_P = W_{P2} - W_{P1}$$
$$\Delta W_P = -W_{\text{sił el}}$$
$$W_{\text{sił el}} = -\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} M d\alpha$$
$$M = \mu E \sin\alpha$$
$$W_{P2} = W_P, \; \alpha_2 = \alpha$$
$$W_{P1} = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{\pi}{2}$$
$$\int \sin\alpha d\alpha = -\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \quad W_P = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \mu E \sin\alpha d\alpha$$
$$\Downarrow$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{W_P = -\mu E \cos\alpha}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{W_P = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{E}}$$

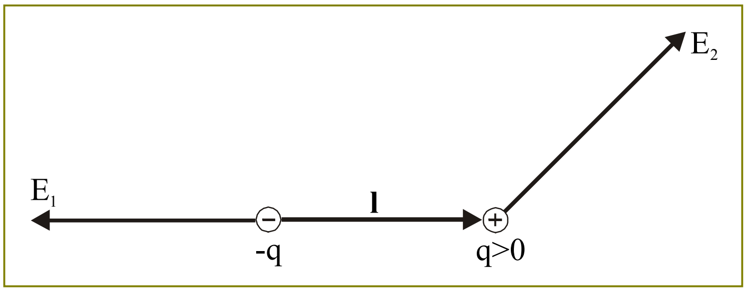
- **Dipol w niejednorodnym polu elektrycznym**

W niejednorodnym polu elektrycznym siły działające na dipol mają na ogół różny od zera moment i wypadkową wartość, powodują więc obrót dipola do położenia równoległego względem lokalnego natężenia i wciągają go w obszar pola o większym natężeniu.

$$\mathbf{F} = -\mathrm{grad} W_p$$
$$W_P = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = \mathrm{grad}(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{E})}$$
$$\Updownarrow$$
$$W_P = -\mu E \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = \mathrm{grad}(\mu E \cos\alpha)}$$

Obliczmy ponownie siłę działającą na dipol w zewnętrznym niejednorodnym polu elektrycznym.

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}_2 - q\mathbf{E}_1$$
$$\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 = l\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial l}$$
$$l\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial l} = (\mathbf{l} \cdot \mathrm{grad})\mathbf{E}$$
$$\boldsymbol{\mu} = q\mathbf{l}$$
$$(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathrm{grad})\mathbf{E} = \mathrm{grad}(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{E})$$



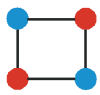
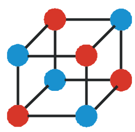
$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{F} = \mathrm{grad}(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{E})}$$

13 ROZWINIĘCIE MULTIPOLOWE POTENCJAŁU POLA UKŁADU ŁADUNKÓW PUNKTOWYCH

- **Multipole**

Multipolem n-tego rzędu nazywamy układ 2^n ładunków o jednakowych wartościach bezwzględnych, z czego połowę stanowią ładunki dodatnie, taki, że w dużej odległości od niego potencjał pola elektrycznego wytworzonego przez ten układ zachowuje się w dobrym przybliżeniu, jak

$$\varphi \sim \frac{1}{R^{n+1}} .$$

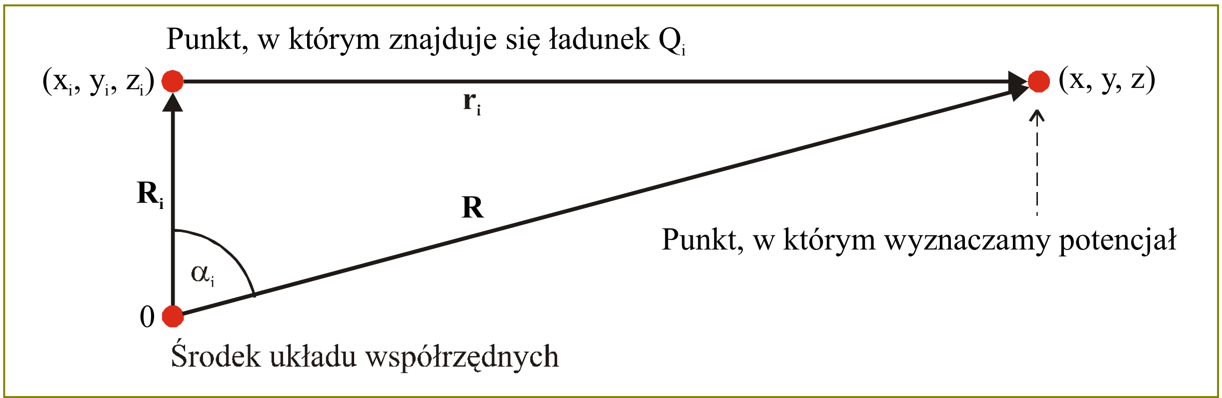
Multipol	Ilość biegunów	Przykład	Potencjał
zerowego rzędu, monopol	$2^0 = 1$	+q 	$\varphi \sim \frac{1}{R}$
pierwszego rzędu, dipol	$2^1 = 2$	-q +q 	$\varphi \sim \frac{1}{R^2}$
drugiego rzędu, kwadrupol	$2^2 = 4$		$\varphi \sim \frac{1}{R^3}$
trzeciego rzędu, oktupol	$2^3 = 8$		$\varphi \sim \frac{1}{R^4}$

- **Rozwinięcie multipolowe potencjału**

Potencjał układu ładunków punktowych w dużej odległości od tych ładunków można zapisać w postaci szeregu

$$\varphi = \frac{K_o}{4\pi\varepsilon_o R} + \frac{K_1}{4\pi\varepsilon_o R^2} + \frac{K_2}{4\pi\varepsilon_o R^3} + \cdots,$$

zwanym rozwinięciem multipolowym.



$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\sum_i \frac{Q_i}{r_i}$$

$$\mathbf{r_i} = \mathbf{R} - \mathbf{R_i}$$

$$r_i = \sqrt{R^2 - 2RR_i\cos\alpha_i + R_i^2}$$

$$R >> R_i$$

$$\left[1 - 2\cos\alpha_i \cdot \left(\frac{R_i}{R}\right) + \left(\frac{R_i}{R}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R_i}{R}\right)^n P_n(\cos\alpha_i)$$

$P_n(\cos\alpha) =$ wielomian Legendre'a stopnia n

$$P_o(\cos\alpha) = 1$$

$$P_1(\cos\alpha) = \cos\alpha$$

$$P_2(\cos\alpha) = \frac{1}{2}\left(3\cos^2\alpha - 1\right)$$

$$P_3(\cos\alpha) = \frac{1}{2}\left(5\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{R}\left[1 - 2\cos\alpha_i \cdot \left(\frac{R_i}{R}\right) + \left(\frac{R_i}{R}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{R}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R_i}{R}\right)^n P_n(\cos\alpha_i) = \frac{1}{R^{n+1}}\sum_{n=0}^{\infty} R_i^n P_n(\cos\alpha_i)$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^{n+1}}\sum_i Q_i \sum_{n=0}^{\infty} R_i^n P_n(\cos\alpha_i)$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R}\sum_i Q_i + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^2}\sum_i Q_i R_i\cos\alpha_i + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^3}\sum_i \frac{1}{2}Q_i R_i^2\left(3\cos^2\alpha_i - 1\right) + \cdots$$

$K_o = \sum_i Q_i =$ całkowity ładunek układu

$K_1 = \sum_i Q_i R_i \cos\alpha_i =$ rzut wypadkowego momentu dipolowego układu ładunków na kierunek promienia wodzącego **R**

$$K_2 = \sum_i \frac{1}{2} Q_i R_i^2\left(3\cos^2\alpha_i - 1\right)$$

Spróbujemy uzyskać ten sam wynik w inny sposób, przez rozwinięcie potencjału w szereg Taylora.

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\sum_i \frac{Q_i}{r_i}$$
$$\mathbf{r_i} = \mathbf{R} - \mathbf{R_i}$$
$$r_i = |\mathbf{R} - \mathbf{R_i}|$$
$$r_i = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}$$
$$x = x_1,\ y = x_2,\ z = x_3$$
$$x_i = x_1^i,\ y_i = x_2^i,\ z_i = x_3^i$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{r_i} = \left[\sum_{\lambda=1}^{3}\left(x_\lambda - x_\lambda^i\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\sum_i Q_i\left[\sum_{\lambda=1}^{3}\left(x_\lambda - x_\lambda^i\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}}$$

Po rozwinięciu $1/r_i$ w szereg Taylora, otrzymujemy

$$\frac{1}{r_i} = \left[\sum_{\lambda=1}^{3}\left(x_\lambda - x_\lambda^i\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} = \left[\sum_{\lambda=1}^{3}x_\lambda^2\right]^{-\frac{1}{2}} - \sum_{\nu=1}^{3}x_\nu^i\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left[\sum_{\lambda=1}^{3}x_\lambda^2\right]^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3}x_\mu^i x_\nu^i\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\left[\sum_{\lambda=1}^{3}x_\lambda^2\right]^{-\frac{1}{2}} + \cdots$$

$$\left[\sum_{\lambda=1}^{3}x_\lambda^2\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{R},\quad \left[\sum_{\lambda=1}^{3}x_\lambda^2\right]^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{R^3},\quad \left[\sum_{\lambda=1}^{3}x_\lambda^2\right]^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{R^5}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left[\sum_{\lambda=1}^{3}x_\lambda^2\right]^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\left[\sum_{\lambda=1}^{3}x_\lambda^2\right]^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x_\nu = -\left[\sum_{\lambda=1}^{3}x_\lambda^2\right]^{-\frac{3}{2}}x_\nu = \frac{-x_\nu}{R^3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\left[\sum_{\lambda=1}^{3}x_\lambda^2\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left[\sum_{\lambda=1}^{3}x_\lambda^2\right]^{-\frac{1}{2}} = -\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left\{\left[\sum_{\lambda=1}^{3}x_\lambda^2\right]^{-\frac{3}{2}}x_\nu\right\} =$$

$$= -x_\nu\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\sum_{\lambda=1}^{3}x_\lambda^2\right]^{-\frac{3}{2}} - \left[\sum_{\lambda=1}^{3}x_\lambda^2\right]^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial x_\nu}{\partial x_\mu} = 3x_\mu x_\nu\left[\sum_{\lambda=1}^{3}x_\lambda^2\right]^{-\frac{5}{2}} - \left[\sum_{\lambda=1}^{3}x_\lambda^2\right]^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial x_\nu}{\partial x_\mu} =$$

$$= \frac{3x_\mu x_\nu}{R^5} - \frac{1}{R^3}\delta_{\mu\nu} = \frac{1}{R^3}\left(\frac{3x_\mu x_\nu}{R^2} - \delta_{\mu\nu}\right)$$

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow \mu = \nu \\ 0 \Leftrightarrow \mu \neq \nu \end{cases}$$

$$\sum_{\nu=1}^{3}x_\nu^i x_\nu = \mathbf{R_i}\cdot\mathbf{R} = R_i R\cos\alpha_i$$

$$-\sum_{\nu=1}^{3}x_\nu^i\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left[\sum_{\lambda=1}^{3}x_\lambda^2\right]^{-\frac{1}{2}} = \sum_{\nu=1}^{3}\frac{x_\nu^i x_\nu}{R^3} = \frac{\mathbf{R_i}\cdot\mathbf{R}}{R^3} = \frac{R_i R\cos\alpha_i}{R^3} = \frac{R_i\cos\alpha_i}{R^2}$$

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R^2}R_i\cos\alpha_i + \frac{1}{R^3}\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3}x_\mu^i x_\nu\left(\frac{3x_\mu x_\nu}{R^2} - \delta_{\mu\nu}\right) + \cdots$$

$$\boxed{\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R}\sum_i Q_i + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^2}\sum_i Q_i R_i\cos\alpha_i + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^3}\frac{1}{2}\sum_i Q_i\sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3}x_\mu^i x_\nu^i\left(\frac{3x_\mu x_\nu}{R^2} - \delta_{\mu\nu}\right) + \cdots}$$

Wykażemy jeszcze, że trzecie człony w obu rozwinięciach są identyczne.

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^3}\frac{1}{2}\sum_i Q_i \sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3} x_\mu^i x_\nu^i \left(\frac{3x_\mu x_\nu}{R^2}-\delta_{\mu\nu}\right) \overset{?}{=} \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^3}\frac{1}{2}\sum_i Q_i R_i^2\left(3\cos^2\alpha_i - 1\right)$$

$$\sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3} x_\mu^i x_\nu^i \left(\frac{3x_\mu x_\nu}{R^2}-\delta_{\mu\nu}\right) = \sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3}\frac{3x_\mu^i x_\mu x_\nu^i x_\nu}{R^2} - \sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3} x_\mu^i x_\nu^i \delta_{\mu\nu} =$$

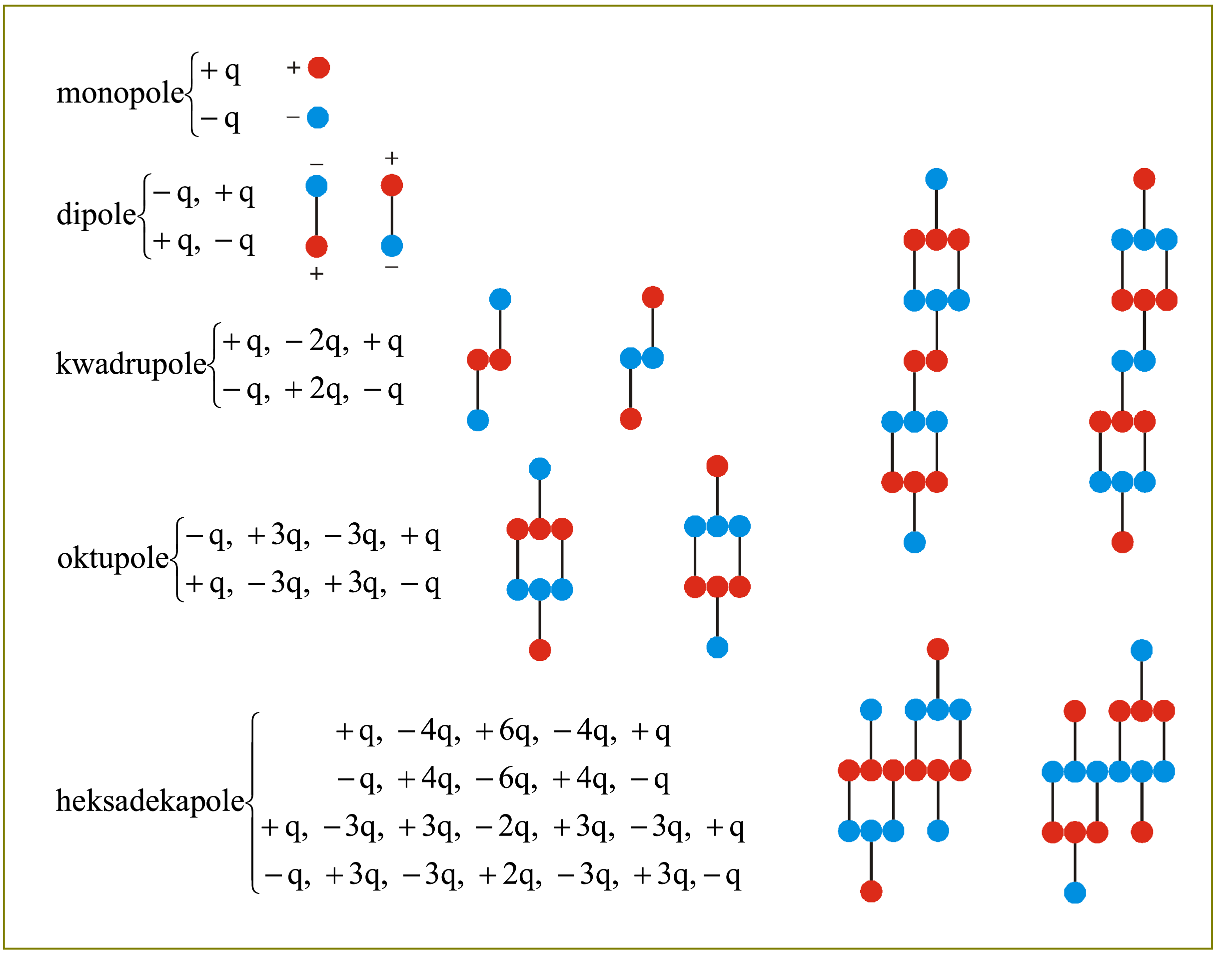
$$\boxed{\begin{array}{l} R_i^2 = \sum\limits_{\mu=1}^{3}\sum\limits_{\nu=1}^{3} x_\mu^i x_\nu^i \delta_{\mu\nu} \\ \cos^2\alpha_i = \dfrac{\sum\limits_{\mu=1}^{3}\sum\limits_{\nu=1}^{3} x_\mu^i x_\mu x_\nu^i x_\nu}{R_i^2 R^2} \end{array}}$$

$$= \sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3}\frac{3x_\mu^i x_\mu x_\nu^i x_\nu}{R^2} - R_i^2 = R_i^2\left(\sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3}\frac{3x_\mu^i x_\mu x_\nu^i x_\nu}{R_i^2 R^2} - 1\right) =$$

$$= R_i^2\left(3\cos^2\alpha_i - 1\right)$$

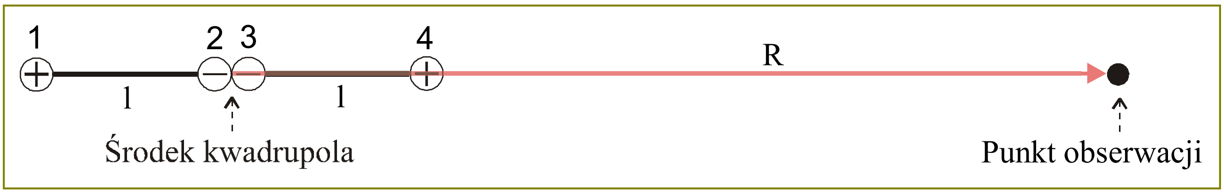
14 MULTIPOLE LINIOWE

- **Multipol liniowy** jest multipolem, którego ładunki położone są na jednej prostej zwanej jego osią. Środkiem multipola liniowego będziemy nazywali punkt położony na jego osi w równej odległości od obu końców multipola.



PRZYKŁAD

Potencjał i natężenie pola kwadrupola liniowego w punktach leżących na jego osi.



$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^3}\sum_{i=1}^{4} Q_i R_i^2 P_2(\cos\alpha_i)$$

$$P_2(\cos\alpha_i) = \frac{1}{2}\left(3\cos^2\alpha_i - 1\right)$$

$$P_2(\cos\alpha) = P_2(\cos[\pi-\alpha])$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \pi \ \text{lub} \ 0, \quad P_2 = 1$$

$$\alpha_3 = \alpha_4 = 0 \ \text{lub} \ \pi, \quad P_2 = 1$$

$$Q_1 = Q_4 = q > 0, \quad Q_2 = Q_3 = -q$$

$$R_1 = R_4 = l, \quad R_2 = R_3 = 0$$

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$$

$$\operatorname{grad}\frac{1}{R^3} = \frac{-3}{R^4}\frac{\mathbf{R}}{R}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\varphi_2 = \frac{2ql^2}{4\pi\varepsilon_o R^3}, \quad q > 0}$$

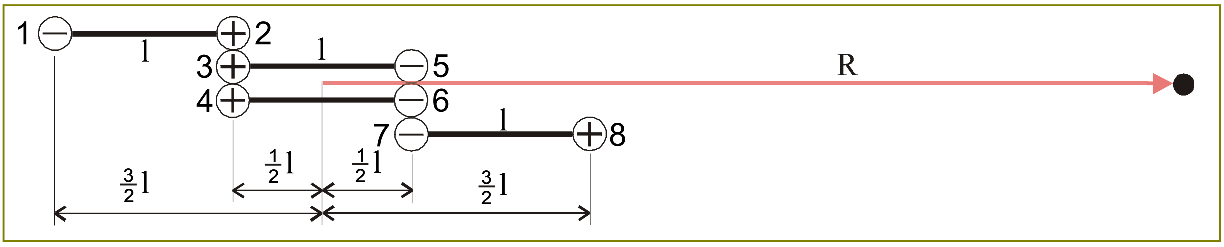
$\Downarrow$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\mathbf{E}_2 = \frac{6ql^2}{4\pi\varepsilon_o R^4}\frac{\mathbf{R}}{R}, \quad q > 0}$$

PRZYKŁAD

Potencjał i natężenie pola oktupola liniowego w punktach leżących na jego osi.



$$\varphi_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^4}\sum_{i=1}^{8} Q_i R_i^3 P_3(\cos\alpha_i)$$

$$P_3(\cos\alpha_i) = \frac{1}{2}\left(5\cos^3\alpha_i - 3\cos\alpha_i\right)$$

$$P_3(\cos\alpha) = -P_3(\cos[\pi-\alpha])$$

$$P_3(\cos 0) = 1, \quad P_3(\cos\pi) = -1$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \pi \ \text{lub} \ 0, \quad P_3 = -1 \ \text{lub} \ +1$$

$$\alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_7 = \alpha_8 = 0 \ \text{lub} \ \pi, \quad P_3 = +1 \ \text{lub} \ -1$$

$$Q_1 = Q_5 = Q_6 = Q_7 = -q, \quad Q_2 = Q_3 = Q_4 = Q_8 = q > 0$$

$$R_1 = R_8 = \frac{3}{2}l, \quad R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = R_7 = \frac{1}{2}l$$

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$$

$$\operatorname{grad}\frac{1}{R^4} = \frac{-4}{R^5}\frac{\mathbf{R}}{R}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\varphi_3 = \frac{6ql^3 P_3(\cos\alpha)}{4\pi\varepsilon_o R^4}, \quad q > 0}$$

$$\boxed{\mathbf{E}_3 = \frac{24ql^3 P_3(\cos\alpha)}{4\pi\varepsilon_o R^5}\frac{\mathbf{R}}{R}, \quad q > 0}$$

α = kąt zawarty między promieniem wodzącym, poprowadzonym z ujemnego do dodatniego końca oktupola, a promieniem wodzącym, poprowadzonym ze środka oktupola do punktu obserwacji

Z przytoczonych przykładów wynika, że potencjał multipola liniowego n-tego rzędu spełnia następujące zależności:

$$\boxed{\varphi_n = (\pm)\cdot\frac{ql^n}{4\pi\varepsilon_o R^{n+1}}\cdot n!\,P_n(\cos\alpha)} \; .$$

q>0

n! = silnia liczby naturalnej n
$0! = 1,\ 1! = 1,\ 2! = 1\cdot 2 = 2,\ 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$

R = promień wodzący poprowadzony ze środka multipola do punktu, w którym wyznaczamy potencjał

l = odległość między sąsiednimi grupami ładunków

$$(\pm) = \begin{cases} +1 \Leftrightarrow \text{oba końce multipola są ładunkami dodatnimi lub różnoimiennymi} \\ -1 \Leftrightarrow \text{oba końce multipola są ładunkami ujemnymi} \end{cases}$$

$$P_n(\cos\alpha) = (-1)^n\cdot P_n(\cos[\pi-\alpha])$$

UWAGA
Środek układu współrzędnych umieściliśmy w środku multipola (co nie było konieczne). Promienie wodzące ładunków różne od zera tworzą z promieniem wodzącym punktu obserwacji kąty α lub $\pi-\alpha$. Dla wielomianów (współczynników) Legendre'a stopnia parzystego P_2, P_4, P_6, ...

$$P_n(\cos\alpha) = P_n(\cos[\pi-\alpha]) \; .$$

Dla wielomianów (współczynników) Legendre'a stopnia nieparzystego P_1, P_3, P_5, ...

$$P_n(\cos\alpha) = -P_n(\cos[\pi-\alpha]) \; .$$

Innymi słowy, dla multipoli parzystego rzędu z kątami nie ma problemu. Obliczając współczynnik Legendre'a odpowiedniego parzystego stopnia, podstawiamy jeden z dwóch kątów α lub $\pi-\alpha$, wedle uznania. Dla multipoli nieparzystego rzędu, obliczając współczynnik Legendre'a odpowiedniego nieparzystego stopnia, podstawiamy kąt α zawarty między promieniem wodzącym $\mathfrak{R}$, poprowadzonym z ujemnego do dodatniego końca multipola, a promieniem wodzącym, poprowadzonym ze środka układu współrzędnych (środka multipola) do punktu obserwacji.

- **Natężenie pola multipola liniowego na jego osi**

$$\varphi_n = (\pm)\cdot\frac{ql^n}{4\pi\varepsilon_o R^{n+1}}\cdot n!P_n(\cos\alpha)$$
$$\alpha = 0 \text{ lub } \alpha = \pi$$
$$\mathbf{E}_n = -\mathrm{grad}\varphi_n$$
$$\mathrm{grad}\frac{1}{R^{n+1}} = -(n+1)\frac{1}{R^{n+2}}\frac{\mathbf{R}}{R}$$
$$n!(n+1) = (n+1)!$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{E}_n = (\pm)\cdot\frac{ql^n}{4\pi\varepsilon_o R^{n+2}}\cdot(n+1)!P_n(\cos\alpha)\cdot\frac{\mathbf{R}}{R}}$$

- **Potencjał multipola liniowego w płaszczyźnie prostopadłej do osi multipola przechodzacej przez jego środek**

$$\varphi_n = (\pm)\cdot\frac{ql^n}{4\pi\varepsilon_o R^{n+1}}\cdot n!P_n\left(\cos\tfrac{\pi}{2}\right)$$

$$\varphi_o = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o R},\qquad \varphi_1 = 0,\qquad \varphi_2 = (\pm)\frac{-ql^2}{4\pi\varepsilon_o R^3},\qquad \varphi_3 = 0,\qquad \varphi_4 = (\pm)\frac{9ql^4}{4\pi\varepsilon_o R^5}$$

15 SIŁY WZAJEMNEGO ODDZIAŁYWANIA MIĘDZY MULTIPOLAMI LINIOWYMI LEŻĄCYMI NA WSPÓLNEJ OSI

- **Dipol w polu ładunku punktowego**

$$F = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{(R+l/2)^2} - \frac{1}{(R-l/2)^2}\right]$$

$$R >> l$$

$$\boldsymbol{\mu} = q\mathbf{l}$$

$$\Rightarrow \quad F = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{2Qql}{R^3\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{l}{R}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{l}{R}\right)^4\right]}$$

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{2Q}{R^3}\cdot\boldsymbol{\mu}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{Q}{R^2}$$

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad}\mu E\cos\alpha$$

$$\alpha = 0 \ \text{ lub } \ \alpha = \pi$$

$$\operatorname{grad}\frac{1}{R^2} = \frac{-2}{R^3}\cdot\frac{\mathbf{R}}{R}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{F} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{2Q\mu\cos\alpha}{R^3}\cdot\frac{\mathbf{R}}{R}$$

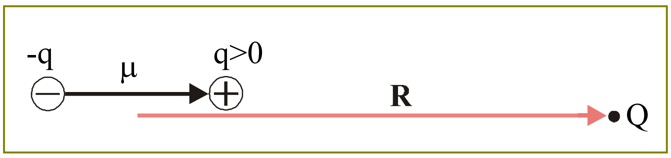
- **Ładunek punktowy w polu dipola**

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\left\{\frac{3\mu\cos\alpha}{R^3}\frac{\mathbf{R}}{R} - \frac{\boldsymbol{\mu}}{R^3}\right\}$$

$$\alpha = \angle(\boldsymbol{\mu},\mathbf{R}).\ \ \alpha = 0 \ \text{ lub } \ \alpha = \pi$$

$$\boldsymbol{\mu} = \mu\cos\alpha\cdot\frac{\mathbf{R}}{R}$$

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$$



$$\Rightarrow \quad \mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{2Q}{R^3}\cdot\boldsymbol{\mu}$$

- **Dipol w polu dipola**

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left\{\frac{3\mu_1\cos\alpha_1}{R^3}\cdot\frac{\mathbf{R}}{R} - \frac{\boldsymbol{\mu}_1}{R^3}\right\}$$
$$\alpha_1 = \angle(\boldsymbol{\mu}_1, \mathbf{R})$$
$$\boldsymbol{\mu}_1 = \mu_1\cos\alpha_1\cdot\frac{\mathbf{R}}{R} \Leftrightarrow (\alpha_1 = 0 \vee \alpha_1 = \pi)$$
$$\mathbf{F}_{12} = \mathrm{grad}(\mathbf{E}_1\cdot\boldsymbol{\mu}_2)$$
$$\alpha_{12} = \angle(\mathbf{E}_1, \boldsymbol{\mu}_2) = \angle(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)$$
$$\mathrm{grad}\frac{1}{R^3} = \frac{-3}{R^4}\cdot\frac{\mathbf{R}}{R}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{E}_1 = \frac{2\boldsymbol{\mu}_1}{4\pi\varepsilon_o R^3}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{F}_{12} = \frac{2\mu_1\mu_2\cos\alpha_{12}}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\mathrm{grad}\frac{1}{R^3}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{F}_{12} = -\frac{6\mu_1\mu_2\cos\alpha_{12}}{4\pi\varepsilon_o R^4}\cdot\frac{\mathbf{R}}{R}}$$

R = promień wodzący poprowadzony ze środka pierwszego dipola do środka drugiego dipola
$\mathbf{F}_{12}$ = siła, z jaką pierwszy dipol działa na drugi dipol
$\mathbf{E}_1$ = natężenie pola, którego źródłem jest pierwszy dipol w środku drugiego dipola

- **Monopol w polu multipola n-tego rzędu**

$$\mathbf{E}_n = (\pm)\frac{(n+1)!ql^n}{4\pi\varepsilon_o R^{n+2}}P_n(\cos\alpha)\cdot\frac{\mathbf{R}}{R}$$
$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E}_n$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{F} = (\pm)\frac{(n+1)!Qql^n P_n(\cos\alpha)}{4\pi\varepsilon_o R^{n+2}}\cdot\frac{\mathbf{R}}{R}}$$

- **Dipol w polu multipola**

$$E_n = (\pm)\frac{(n+1)!ql^n P_n(\cos\alpha)}{4\pi\varepsilon_o R^{n+2}}$$
$$\mathbf{F} = \mathrm{grad}\mu E_n\cos\beta$$
$$\beta = 0 \ \text{lub} \ \beta = \pi$$
$$\mu = ql$$
$$\mathrm{grad}\frac{1}{R^{n+2}} = \frac{-(n+2)}{R^{n+3}}\frac{\mathbf{R}}{R}$$
$$(n+1)!(n+2) = (n+2)!$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{F} = (\pm)\frac{-(n+2)!ql^n\mu\cos\beta P_n(\cos\alpha)}{4\pi\varepsilon_o R^3}\cdot\frac{\mathbf{R}}{R}}$$

β = kąt zawarty między promieniem wodzącym **R**, poprowadzonym ze środka multipola do środka dipola, a momentem dipola $\boldsymbol{\mu}$

- **Siły wzajemnego oddziaływania multipoli liniowych leżących na wspólnej osi**

Siła wzajemnego oddziaływania dwóch multipoli liniowych o rzędach n i m, leżących na wspólnej osi, zachowuje się jak

$$\boxed{F \sim \frac{1}{R^{m+n+2}}}\,.$$

16 CZŁON DIPOLOWY W ROZWINIĘCIU POTENCJAŁU

- **Człon dipolowy**

  Jeżeli sumaryczny ładunek układu jest równy zeru $\sum_i Q_i = 0$, to rozwinięcie potencjału układu ładunków

$$\varphi = \cancel{\frac{\sum_i Q_i}{4\pi\varepsilon_o R}} + \frac{\sum_i Q_i R_i \cos\alpha_i}{4\pi\varepsilon_o R^2} + \cdots$$

zaczyna się od drugiego wyrazu, zwanego członem dipolowym. W członie tym rozdzielimy współrzędne określające położenie ładunków od współrzędnych położenia punktu obserwacji.

$$\boxed{\begin{aligned} &\varphi = \frac{\sum_i Q_i R_i \cos\alpha_i}{4\pi\varepsilon_o R^2} \\ &\cos\alpha_i = \frac{\mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}}{R_i R} \\ &\mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R} = x_i x + y_i y + z_i z \\ &\boldsymbol{\mu} = \sum_i Q_i \mathbf{R}_i \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^3} \cdot \sum_i Q_i \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^3} \cdot \sum_i Q_i \left(x_i x + y_i y + z_i z\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\varphi = \frac{\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{R}}{4\pi\varepsilon_o R^3}}$$

- **Moment dipolowy μ układu ładunków**

$$\boxed{\boldsymbol{\mu} = \sum_i Q_i \mathbf{R}_i}$$

zapiszemy, rozdzielając człony związane z dodatnimi i ujemnymi ładunkami.

$$\boxed{\begin{aligned} &\boldsymbol{\mu} = \sum_i Q_i^+ \mathbf{R}_i^+ + \sum_i Q_i^- \mathbf{R}_i^- \\ &\mathbf{R}^+ = \frac{\sum_i Q_i^+ \mathbf{R}_i^+}{\sum_i Q_i^+} \\ &\mathbf{R}^- = \frac{\sum_i Q_i^- \mathbf{R}_i^-}{\sum_i Q_i^-} \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_i Q_i^+ \mathbf{R}_i^+ = \mathbf{R}^+ \sum_i Q_i^+$$

$$\Rightarrow \quad \sum_i Q_i^- \mathbf{R}_i^- = \mathbf{R}^- \sum_i Q_i^-$$

$Q_i^+, \mathbf{R}_i^+$ = ładunki dodatnie i ich promienie wodzące
$Q_i^-, \mathbf{R}_i^-$ = ładunki ujemne i ich promienie wodzące
$\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^-$ = promienie wodzące poprowadzone ze środka układu współrzędnych do środka ładunków odpowiednio dodatnich i ujemnych

$$\boxed{\boldsymbol{\mu} = \mathbf{R}^{+}\sum_i Q_i^{+} + \mathbf{R}^{-}\sum_i Q_i^{-}}$$

Jeżeli sumaryczny ładunek układu jest równy zeru $\left(\sum_i Q_i^{+} = -\sum_i Q_i^{-}\right)$, a środki dodatnich i ujemnych ładunków nie pokrywają się $\left(\mathbf{R}^{+} - \mathbf{R}^{-} \neq 0\right)$, to moment dipolowy $\boldsymbol{\mu}$ układu ładunków jest równy iloczynowi sumarycznego ładunku dodatniego $\left(\sum_i Q_i^{+}\right)$ i promienia wodzącego $\left(\mathbf{R}^{+} - \mathbf{R}^{-}\right)$ poprowadzonego ze środka ładunków ujemnych do środka ładunków dodatnich.

$$\boxed{\begin{aligned} &\boldsymbol{\mu} = \mathbf{R}^{+}\sum_i Q_i^{+} + \mathbf{R}^{-}\sum_i Q_i^{-} \\ &\sum_i Q_i^{+} = -\sum_i Q_i^{-} \\ &\mathbf{R}^{+} - \mathbf{R}^{-} \neq 0 \end{aligned}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{\mu} = \sum_i Q_i^{+}\left(\mathbf{R}^{+} - \mathbf{R}^{-}\right)}$$

- **Moment dipolowy jako niezmiennik**

Jeżeli sumaryczny ładunek układu jest równy zeru $\left(\sum_i Q_i = 0\right)$, to moment dipolowy $\boldsymbol{\mu}$ tego układu ładunków nie zależy od wyboru układu współrzędnych.

DOWÓD

Niech $\mathbf{R}_i^{\mathrm{I}}$ i $\mathbf{R}_i^{\mathrm{II}}$ będą promieniami wodzącymi tego samego ładunku Q_i w dwóch różnych układach współrzędnych, a $\mathbf{c}$ danym stałym wektorem i niech $\mathbf{R}_i^{\mathrm{II}} = \mathbf{R}_i^{\mathrm{I}} + \mathbf{c}$, wtedy

$$\boldsymbol{\mu}^{\mathbf{II}} = \sum_i Q_i \mathbf{R}_i^{\mathrm{II}} = \sum_i Q_i\left(\mathbf{R}_i^{\mathrm{I}} + \mathbf{c}\right) = \sum_i Q_i \mathbf{R}_i^{\mathrm{I}} + \sum_i Q_i \mathbf{c} = \sum_i Q_i \mathbf{R}_i^{\mathrm{I}} + \mathbf{c}\sum_i Q_i = \sum_i Q_i \mathbf{R}_i^{\mathrm{I}} = \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{I}}\ .$$

17 CZŁON KWADRUPOLOWY W ROZWINIĘCIU POTENCJAŁU

- **Człon kwadrupolowy**

Jeżeli sumaryczny ładunek i moment dipolowy układu są równe zeru, to rozwinięcie potencjału

$$\varphi = \cancel{\frac{\sum_i Q_i}{4\pi\varepsilon_o R}} + \cancel{\frac{\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{R}}{4\pi\varepsilon_o R^3}} + \frac{\frac{1}{2}\sum_i Q_i R_i^2\left(3\cos^2\alpha_i - 1\right)}{4\pi\varepsilon_o R^3} + \cdots$$

zaczyna się od trzeciego wyrazu, zwanego członem kwadrupolowym. W członie tym rozdzielimy współrzędne określające położenie ładunków od współrzędnych określających położenie punktu, w którym wyznaczamy potencjał.

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sum_i Q_i R_i^2\left(3\cos^2\alpha_i-1\right)$$
$$R_i^2=x_i^2+y_i^2+z_i^2$$
$$\cos^2\alpha_i=\frac{\left(x_i x+y_i y+z_i z\right)^2}{R_i^2 R^2}$$

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sum_i Q_i\sum_\mu\sum_\nu x_\mu^i x_\nu^i\left(\frac{3x_\mu x_\nu}{R^2}-\delta_{\mu\nu}\right)$$

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[\sum_i Q_i x_i^2\left(\frac{3x^2}{R^2}-1\right)+\sum_i Q_i y_i^2\left(\frac{3y^2}{R^2}-1\right)+\sum_i Q_i z_i^2\left(\frac{3z^2}{R^2}-1\right)+\right.$$
$$+\sum_i Q_i x_i y_i\left(\frac{3xy}{R^2}-0\right)+\sum_i Q_i x_i z_i\left(\frac{3xz}{R^2}-0\right)+\sum_i Q_i y_i z_i\left(\frac{3yz}{R^2}-0\right)+$$
$$\left.+\sum_i Q_i y_i x_i\left(\frac{3yx}{R^2}-0\right)+\sum_i Q_i z_i x_i\left(\frac{3zx}{R^2}-0\right)+\sum_i Q_i z_i y_i\left(\frac{3zy}{R^2}-0\right)\right]$$

- **Tensor momentu kwadrupolowego układu ładunków**

Człon kwadrupolowy w rozwinięciu potencjału układu ładunków punktowych można przedstawić w postaci

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[d_{xx}\left(\frac{3x^2}{R^2}-1\right)+d_{yy}\left(\frac{3y^2}{R^2}-1\right)+d_{zz}\left(\frac{3z^2}{R^2}-1\right)+\right.$$
$$+d_{xy}\left(\frac{3xy}{R^2}-0\right)+d_{yx}\left(\frac{3xy}{R^2}-0\right)+d_{xz}\left(\frac{3xz}{R^2}-0\right)+$$
$$\left.+d_{zx}\left(\frac{3xz}{R^2}-0\right)+d_{yz}\left(\frac{3yz}{R^2}-0\right)+d_{zy}\left(\frac{3zy}{R^2}-0\right)\right],$$

gdzie dziewięć wielkości, określonych poniżej

$$d_{xx}=\sum_i Q_i x_i^2,\quad d_{yy}=\sum_i Q_i y_i^2,\quad d_{zz}=\sum_i Q_i z_i^2;$$
$$d_{xy}=d_{yx}=\sum_i Q_i x_i y_i,\quad d_{xz}=d_{zx}=\sum_i Q_i x_i z_i,\quad d_{yz}=d_{zy}=\sum_i Q_i y_i z_i\ ,$$

tworzy tensor momentu kwadrupolowego układu ładunków punktowych, zapisywany też w następujący sposób

$$\left[d_{\alpha\beta}\right]=\begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xy} & d_{xz}\\ d_{yx} & d_{yy} & d_{yz}\\ d_{zx} & d_{zy} & d_{zz}\end{bmatrix},\quad d_{\alpha\beta}=\sum_i Q_i x_\alpha^i x_\beta^i\ .$$

$$x_1^i=x_i,\quad x_2^i=y_i,\quad x_3^i=z_i$$

Symetryczny tensor $d_{\alpha\beta}$ kwadrupolowego momentu układu ładunków punktowych tworzy dziewięć składowych, w tym sześć niezależnych, ponieważ
$d_{xy}=d_{yx},\quad d_{xz}=d_{zx},\quad d_{yz}=d_{zy}$.
Tensor $d_{\alpha\beta}$ jest tensorem drugiego rzędu.

Przeprowadzimy jeszcze raz ostatnie rachunki, korzystając ze skróconej notacji.

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum_i Q_i R_i^2 \left(3\cos^2\alpha_i - 1\right)$$

$$R_i^2 = x_\mu^i x_\nu^i \delta_{\mu\nu}$$

$$\cos^2\alpha_i = \frac{x_\mu^i x_\nu^i x_\mu x_\nu}{R_i^2 R^2}$$

$$d_{\mu\nu} = \sum_i Q_i x_\mu^i x_\nu^i$$

$$x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z$$

$$x_1^i = x_i,\ x_2^i = y_i,\ x_3^i = z_i$$

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow \mu = \nu \\ 0 \Leftrightarrow \mu \neq \nu \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad R_i^2\left(3\cos^2\alpha_i - 1\right) = x_\mu^i x_\nu^i \left(\frac{3x_\mu x_\nu}{R^2} - \delta_{\mu\nu}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^3} \cdot \frac{1}{2} \cdot d_{\mu\nu}\left(\frac{3x_\mu x_\nu}{R^2} - \delta_{\mu\nu}\right)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3} d_{\mu\nu}\left(\frac{3x_\mu x_\nu}{R^2} - \delta_{\mu\nu}\right)}$$

Spróbujemy inaczej określić tensor momentu kwadrupolowego tak, aby zmniejszyć liczbę jego niezależnych składowych. W tym celu zrobimy pewną sztuczkę z zerem.

$$\frac{R_i^2}{3}\left(\frac{3x^2}{R^2} - 1\right) + \frac{R_i^2}{3}\left(\frac{3y^2}{R^2} - 1\right) + \frac{R_i^2}{3}\left(\frac{3z^2}{R^2} - 1\right) = \frac{R_i^2}{3}\left[\frac{3\left(x^2 + y^2 + z^2\right)}{R^2} - 3\right] = \frac{R_i^2}{3}\left[\frac{3R^2}{R^2} - 3\right] = 0$$

lub to samo, inaczej

$$\frac{1}{3}R_i^2\delta_{\mu\nu}\left(\delta_{\mu\nu}\frac{3x_\mu x_\nu}{R^2} - \delta_{\mu\nu}\right) = 0.$$

Dlaczego właśnie takie zero?

Równanie Laplace'a

$$\Delta\frac{1}{R} = 0$$

$$\Delta = \delta_{\mu\nu}\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$$

$$\delta_{\mu\nu}\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\frac{1}{R} = \delta_{\mu\nu}\frac{3x_\mu x_\nu}{R^5} - \delta_{\mu\nu}\frac{1}{R^3}$$

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\frac{1}{R} = \delta_{\mu\nu}\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\frac{1}{R} = \delta_{\mu\nu}\frac{3x_\mu x_\nu}{R^5} - \delta_{\mu\nu}\frac{1}{R^3} =$$

$$= \frac{1}{R^3} \cdot \left(\delta_{\mu\nu}\frac{3x_\mu x_\nu}{R^2} - \delta_{\mu\nu}\right) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\delta_{\mu\nu}\frac{3x_\mu x_\nu}{R^2} - \delta_{\mu\nu} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{3}R_i^2\delta_{\mu\nu}\left(\delta_{\mu\nu}\frac{3x_\mu x_\nu}{R^2} - \delta_{\mu\nu}\right) = 0}$$

I oto zapowiadana sztuczka z zerem :

$$x_\mu^i x_\nu^i \left(\frac{3x_\mu x_\nu}{R^2} - \delta_{\mu\nu}\right) =$$

$$= x_i^2\left(\frac{3x^2}{R^2} - 1\right) + \cdots + z_i y_i\left(\frac{3zy}{R^2} - 0\right) - \boxed{\left[\frac{R_i^2}{3}\left(\frac{3x^2}{R^2} - 1\right) + \frac{R_i^2}{3}\left(\frac{3y^2}{R^2} - 1\right) + \frac{R_i^2}{3}\left(\frac{3z^2}{R^2} - 1\right)\right]} =$$

$$x_\mu^i x_\nu^i\left(\frac{3x_\mu x_\nu}{R^2}-\delta_{\mu\nu}\right)=$$

$$=x_i^2\left(\frac{3x^2}{R^2}-1\right)+\cdots+z_i y_i\left(\frac{3zy}{R^2}-0\right)-\boxed{\left[\frac{R_i^2}{3}\left(\frac{3x^2}{R^2}-1\right)+\frac{R_i^2}{3}\left(\frac{3y^2}{R^2}-1\right)+\frac{R_i^2}{3}\left(\frac{3z^2}{R^2}-1\right)\right]}=$$

$$=\left(x_i^2-\frac{1}{3}R_i^2\right)\left(\frac{3x^2}{R^2}-1\right)+\cdots+(z_i y_i-0)\left(\frac{3zy}{R^2}-0\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left[\left(3x_i^2-R_i^2\delta_{xx}\right)\left(\frac{3x^2}{R^2}-\delta_{xx}\right)+\cdots+\left(z_i y_i-\delta_{zy}\right)\left(\frac{3zy}{R^2}-\delta_{zy}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\left(3x_\mu^i x_\nu^i-R_i^2\delta_{\mu\nu}\right)\left(\frac{3x_\mu x_\nu}{R^2}-\delta_{\mu\nu}\right)$$

Powtórzmy jeszcze raz te rachunki.

$$x_\mu^i x_\nu^i\left(\frac{3x_\mu x_\nu}{R^2}-\delta_{\mu\nu}\right)=x_\mu^i x_\nu^i\left(\frac{3x_\mu x_\nu}{R^2}-\delta_{\mu\nu}\right)-\boxed{\frac{1}{3}R_i^2\delta_{\mu\nu}\left(\delta_{\mu\nu}\frac{3x_\mu x_\nu}{R^2}-\delta_{\mu\nu}\right)}=$$

$$=\frac{1}{3}\left(3x_\mu^i x_\nu^i-R_i^2\delta_{\mu\nu}\right)\left(\frac{3x_\mu x_\nu}{R^2}-\delta_{\mu\nu}\right)$$

Powracamy do członu kwadrupolowego w rozwinięciu potencjału.

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sum_i Q_i\ x_\mu^i x_\nu^i\left(\frac{3x_\mu x_\nu}{R^2}-\delta_{\mu\nu}\right)$$

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^3}\cdot\frac{1}{6}\cdot\sum_i Q_i\left(3x_\mu^i x_\nu^i-R_i^2\delta_{\mu\nu}\right)\left(\frac{3x_\mu x_\nu}{R^2}-\delta_{\mu\nu}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^3}\cdot\frac{1}{6}\cdot D_{\mu\nu}\left(\frac{3x_\mu x_\nu}{R^2}-\delta_{\mu\nu}\right)\\ D_{\mu\nu}&=\sum_i Q_i\left(3x_\mu^i x_\nu^i-R_i^2\delta_{\mu\nu}\right)\end{aligned}}$$

$D_{\mu\nu}$ jest tensorem momentu kwadrupolowego układu ładunków punktowych. A oto jego składowe.

$$D_{xx}=\sum_i Q_i\left(3x_i^2-R_i^2\right)=\sum_i Q_i\left(2x_i^2-y_i^2-z_i^2\right)$$

$$D_{yy}=\sum_i Q_i\left(3y_i^2-R_i^2\right)=\sum_i Q_i\left(2y_i^2-x_i^2-z_i^2\right)$$

$$D_{zz}=\sum_i Q_i\left(3z_i^2-R_i^2\right)=\sum_i Q_i\left(2z_i^2-x_i^2-y_i^2\right)$$

$$D_{xy}=D_{yx}=\sum_i 3Q_i x_i y_i$$

$$D_{xz}=D_{zx}=\sum_i 3Q_i x_i z_i$$

$$D_{yz}=D_{zy}=\sum_i 3Q_i y_i z_i$$

Tensor $D_{\mu\nu}$ ma 5 niezależnych składowych, ponieważ jest tensorem symetrycznym

$$\boxed{D_{\mu\nu}=D_{\nu\mu}}\ ,$$

a suma jego składowych diagonalnych jest równa zeru:

$$\boxed{D_{xx}+D_{yy}+D_{zz}=0}\ .$$

$$R_i^2=x_i^2+y_i^2+z_i^2$$

Na koniec zestawimy różne postacie członu kwadrupolowego w rozwinięciu potencjału układu ładunków punktowych.

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sum_i Q_i R_i^2\left(3\cos^2\alpha_i - 1\right)$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3}\sum_i Q_i\, x_\mu^i x_\nu^i\left(\frac{3x_\mu x_\nu}{R^2} - \delta_{\mu\nu}\right)$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3} d_{\mu\nu}\left(\frac{3x_\mu x_\nu}{R^2} - \delta_{\mu\nu}\right)$$

$$\boxed{d_{\mu\nu} = \sum_i Q_i\, x_\mu^i x_\nu^i}$$

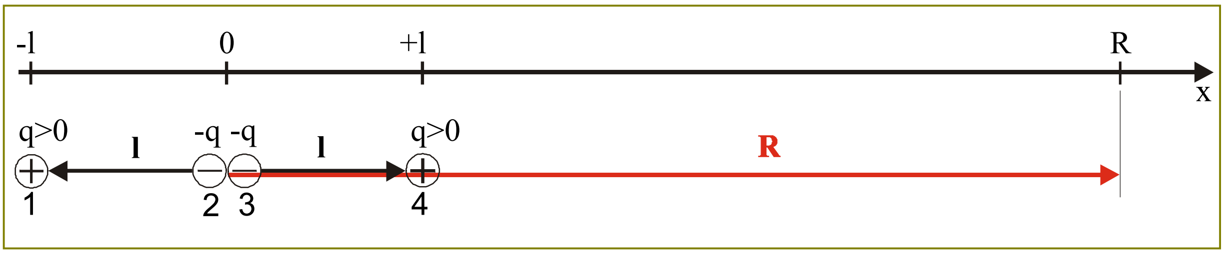
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^3}\cdot\frac{1}{6}\cdot\sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3}\sum_i Q_i\left(3x_\mu^i x_\nu^i - R_i^2\delta_{\mu\nu}\right)\left(\frac{3x_\mu x_\nu}{R^2} - \delta_{\mu\nu}\right)$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^3}\cdot\frac{1}{6}\cdot\sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3} D_{\mu\nu}\left(\frac{3x_\mu x_\nu}{R^2} - \delta_{\mu\nu}\right)$$

$$\boxed{D_{\mu\nu} = \sum_i Q_i\left(3x_\mu^i x_\nu^i - R_i^2\delta_{\mu\nu}\right)}$$

Jeżeli sumaryczny ładunek i moment dipolowy układu są równe zeru, to składowe tensora momentu kwadrupolowego tego układu ładunków nie zależą od wyboru układu współrzędnych ze zbioru układów o analogicznych osiach równoległych.

PRZYKŁAD



$$Q_1 = Q_4 = +q > 0$$
$$Q_2 = Q_3 = -q < 0$$
$$x_1 = -l,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = +l$$
$$y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 0$$
$$z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = 0$$
$$x = R,\ y = 0,\ z = 0$$

$$d_{xx} = \sum_{i=1}^{4} Q_i x_i^2 = 2ql^2$$

pozostałe składowe tensora $d_{\mu\nu}$ są równe zeru

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^3}\cdot\frac{1}{2}\cdot d_{\mu\nu}\left(\frac{3x_\mu x_\nu}{R^2} - \delta_{\mu\nu}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^3}\cdot\frac{1}{2}\cdot d_{xx}\left(\frac{3x^2}{R^2} - 1\right)$$

$$\varphi = \frac{2ql^2}{4\pi\varepsilon_o R^3}$$

$$D_{xx} = \sum_{i=1}^{4} 2Q_i x_i^2 = 4ql^2,$$

$$D_{yy} = -\sum_{i=1}^{4} Q_i x_i^2 = -2ql^2,$$

$$D_{zz} = -\sum_{i=1}^{4} Q_i x_i^2 = -2ql^2.$$

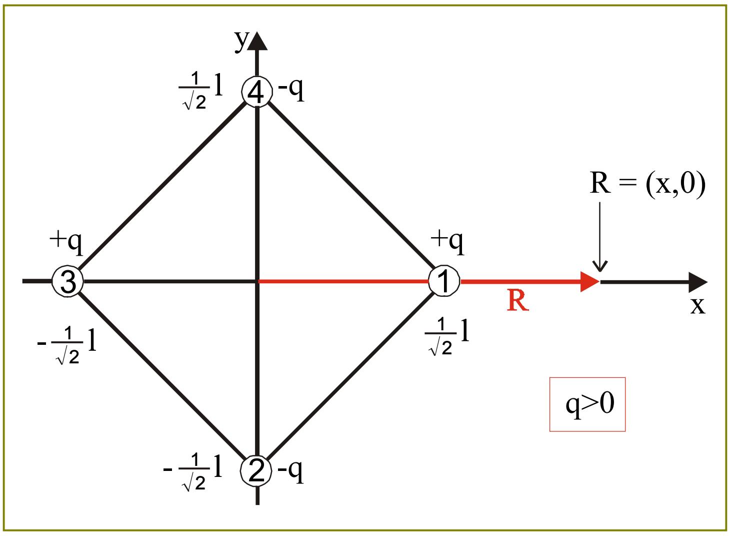
Pozostałe składowe tensora $D_{\mu\nu}$ są równe zeru.

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^3}\cdot\frac{1}{6}\cdot D_{\mu\nu}\left(\frac{3x_\mu x_\nu}{R^2} - \delta_{\mu\nu}\right),$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^3}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left[D_{xx}\left(\frac{3x^2}{R^2}-1\right) + D_{yy}\left(\frac{3y^2}{R^2}-1\right) + D_{zz}\left(\frac{3z^2}{R^2}-1\right)\right],$$

$$\varphi = \frac{2ql^2}{4\pi\varepsilon_o R^3}.$$

PRZYKŁAD



$$Q_1 = Q_3 = q > 0,\ Q_2 = Q_4 = -q < 0,$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}},\ x_2 = x_4 = 0,\ x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$y_1 = y_3 = 0,\ y_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ y_4 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$x = R,\ y = 0,\ z = 0.$$

$$d_{xx} = \sum_{i=1}^{4} Q_i x_i^2 = ql^2,\ d_{yy} = \sum_{i=1}^{4} Q_i y_i^2 = -ql^2,\ d_{zz} = 0,$$

$$d_{xy} = d_{yx} = d_{xz} = d_{zx} = d_{yz} = d_{zy} = 0.$$

$$D_{xx} = \sum_{i=1}^{4} Q_i\left(2x_i^2 - y_i^2\right) = 3ql^2,\ D_{yy} = \sum_{i=1}^{4} Q_i\left(2y_i^2 - x_i^2\right) = -3ql^2,\ D_{zz} = 0,$$

$$D_{xy} = D_{yx} = D_{xz} = D_{zx} = D_{yz} = D_{zy} = 0.$$

$$d_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} ql^2 & 0 & 0 \\ 0 & -ql^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad D_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 3ql^2 & 0 & 0 \\ 0 & -3ql^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^3}\cdot\frac{1}{2}\cdot d_{\mu\nu}\cdot\left(\frac{3x_\mu x_\nu}{R^2} - \delta_{\mu\nu}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[d_{xx}\left(\frac{3x^2}{R^2}-1\right) + d_{yy}\left(\frac{3y^2}{R^2}-1\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^3}\cdot\frac{3}{2}\cdot ql^2,$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^3}\cdot\frac{1}{6}\cdot D_{\mu\nu}\cdot\left(\frac{3x_\mu x_\nu}{R^2} - \delta_{\mu\nu}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^3}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left[D_{xx}\left(\frac{3x^2}{R^2}-1\right) + D_{yy}\left(\frac{3y^2}{R^2}-1\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^3}\cdot\frac{3}{2}\cdot ql^2.$$

18 CZŁON OKTUPOLOWY W ROZWINIĘCIU POTENCJAŁU

- **Człon oktupolowy**

Jeżeli sumaryczny ładunek, moment dipolowy, oraz wszystkie składowe tensora momentu kwadrupolowego układu są równe zeru, to rozwinięcie potencjału

$$\varphi = \cancel{\frac{\sum_i Q_i}{4\pi\varepsilon_o R}} + \cancel{\frac{\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{R}}{4\pi\varepsilon_o R^3}} + \cancel{\frac{\frac{1}{6}\cdot D_{\mu\nu}\cdot\left(\frac{3x_\mu x_\nu}{R^2}-\delta_{\mu\nu}\right)}{4\pi\varepsilon_o R^3}} + \frac{\frac{1}{2}\cdot\sum_i Q_i R_i^3\left(5\cos^3\alpha_i - 3\cos\alpha_i\right)}{4\pi\varepsilon_o R^4} + \cdots$$

zaczyna się od czwartego wyrazu, zwanego członem oktupolowym. W członie tym rozdzielimy współrzędne określające położenie ładunków od współrzędnych położenia punktu obserwacji.

$$\boxed{\begin{aligned}
&\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sum_i Q_i R_i^3\left(5\cos^3\alpha_i - 3\cos\alpha_i\right)\\
&R_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2\\
&\cos\alpha_i = \frac{x_i x + y_i y + z_i z}{R_i R}\\
&\cos^3\alpha_i = \frac{(x_i x + y_i y + z_i z)^3}{R_i^3 R^3}
\end{aligned}}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sum_i Q_i \sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\sum_{\gamma=1}^{3} x_\alpha^i x_\beta^i x_\gamma^i\left(\frac{5x_\alpha x_\beta x_\gamma}{R^3} - \frac{x_\alpha\delta_{\beta\gamma} + x_\beta\delta_{\alpha\gamma} + x_\gamma\delta_{\alpha\beta}}{R}\right)$$

$$\begin{aligned}
\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sum_i Q_i \Bigg[& x_i^3\left(\frac{5x^3}{R^3}-\frac{3x}{R}\right) + y_i^3\left(\frac{5y^3}{R^3}-\frac{3y}{R}\right) + z_i^3\left(\frac{5z^3}{R^3}-\frac{3z}{R}\right) +\\
& + 3x_i^2 y_i\left(\frac{5x^2y}{R^3}-\frac{y}{R}\right) + 3x_i^2 z_i\left(\frac{5x^2z}{R^3}-\frac{z}{R}\right) + 3x_i y_i^2\left(\frac{5xy^2}{R^3}-\frac{x}{R}\right) + 3x_i z_i^2\left(\frac{5xz^2}{R^3}-\frac{x}{R}\right) +\\
& + 3y_i z_i^2\left(\frac{5yz^2}{R^3}-\frac{y}{R}\right) + 3y_i^2 z_i\left(\frac{5y^2z}{R^3}-\frac{z}{R}\right) + 6x_i y_i z_i\left(\frac{5xyz}{R^3}-0\right)\Bigg]
\end{aligned}$$

- **Tensor momentu oktupolowego układu ładunków**

Człon oktupolowy w rozwinięciu potencjału układu ładunków punktowych można przedstawić w postaci

$$\boxed{\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sum_i Q_i \sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\sum_{\gamma=1}^{3} d_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{5x_\alpha x_\beta x_\gamma}{R^3} - \frac{x_\alpha\delta_{\beta\gamma} + x_\beta\delta_{\alpha\gamma} + x_\gamma\delta_{\alpha\beta}}{R}\right)},$$

gdzie dwadzieścia siedem wielkości $d_{\alpha\beta\gamma}$, określonych dalej, tworzy tensor momentu oktupolowego układu ładunków punktowych.

$$d_{xxx} = \sum_i Q_i x_i^3,\ d_{yyy} = \sum_i Q_i y_i^3,\ d_{zzz} = \sum_i Q_i z_i^3,$$
$$d_{xxy} = d_{xyx} = d_{yxx} = \sum_i Q_i x_i^2 y_i,$$
$$d_{xxz} = d_{xzx} = d_{zxx} = \sum_i Q_i x_i^2 z_i,$$
$$d_{xyy} = d_{yxy} = d_{yyx} = \sum_i Q_i x_i y_i^2,$$
$$d_{xzz} = d_{zxz} = d_{zzx} = \sum_i Q_i x_i z_i^2,$$
$$d_{yzz} = d_{zyz} = d_{zzy} = \sum_i Q_i y_i z_i^2,$$
$$d_{yyz} = d_{yzy} = d_{zyy} = \sum_i Q_i y_i^2 z_i,$$
$$d_{xyz} = d_{xzy} = d_{yxz} = d_{yzx} = d_{zxy} = d_{zyx} = \sum_i Q_i x_i y_i z_i.$$

Dwadzieścia siedem powyższych wielkości tworzy tensor momentu oktupolowego układu ładunków punktowych, zapisywany też jako

$$\boxed{d_{\alpha\beta\gamma} = \sum_i Q_i x_\alpha^i x_\beta^i x_\gamma^i}\ .$$

Tensor $d_{\alpha\beta\gamma}$ jest tensorem trzeciego rzędu, stanowi go $3^3 = 27$ składowych, w tym dziesięć niezależnych.
Przeprowadźmy jeszcze raz ostatnie rachunki, korzystając ze skróconej notacji.

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sum_i Q_i R_i^3\left(5\cos^3\alpha_i - 3\cos\alpha_i\right)$$
$$\cos\alpha_i = \frac{x_\alpha^i x_\alpha}{R_i R}$$
$$R_i^2 = x_\alpha^i x_\alpha^i = x_\beta^i x_\gamma^i \delta_{\beta\gamma}$$
$$\cos^3\alpha_i = \frac{x_\alpha^i x_\alpha x_\beta^i x_\beta x_\gamma^i x_\gamma}{R_i^3 R^3}$$

$$R_i^3\left(5\cos^3\alpha_i - 3\cos\alpha_i\right) =$$
$$= \frac{5x_\alpha^i x_\alpha x_\beta^i x_\beta x_\gamma^i x_\gamma}{R^3} - \frac{3x_\alpha^i x_\alpha x_\beta^i x_\gamma^i \delta_{\beta\gamma}}{R} =$$
$$= x_\alpha^i x_\beta^i x_\gamma^i\left(\frac{5x_\alpha x_\beta x_\gamma}{R^3} - \frac{3x_\alpha \delta_{\beta\gamma}}{R}\right) =$$
$$= x_\alpha^i x_\beta^i x_\gamma^i\left(\frac{5x_\alpha x_\beta x_\gamma}{R^3} - \frac{x_\alpha\delta_{\beta\gamma} + x_\beta\delta_{\alpha\gamma} + x_\gamma\delta_{\alpha\beta}}{R}\right)$$

$$\boxed{\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sum_i Q_i \sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\sum_{\gamma=1}^{3} x_\alpha^i x_\beta^i x_\gamma^i\left(\frac{5x_\alpha x_\beta x_\gamma}{R^3} - \frac{x_\alpha\delta_{\beta\gamma} + x_\beta\delta_{\alpha\gamma} + x_\gamma\delta_{\alpha\beta}}{R}\right)}$$

Aby zmniejszyć liczbę składowych niezależnych tensora momentu oktupolowego, wykonamy znowu sztuczkę z zerem

$$\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\sum_{\gamma=1}^{3}\frac{1}{5}\cdot R_i^2\left(x_\alpha^i\delta_{\beta\gamma} + x_\beta^i\delta_{\alpha\gamma} + x_\gamma^i\delta_{\alpha\beta}\right)\left(\frac{5x_\alpha x_\beta x_\gamma}{R^3} - \frac{x_\alpha\delta_{\beta\gamma} + x_\beta\delta_{\alpha\gamma} + x_\gamma\delta_{\alpha\beta}}{R}\right) = 0\,.$$

Dla uproszczenia rachunków, opuścimy operatory sumowania $\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\sum_{\gamma=1}^{3}$ i przyjmiemy, że

$$A = \left(\frac{5x_\alpha x_\beta x_\gamma}{R^3} - \frac{x_\alpha\delta_{\beta\gamma} + x_\beta\delta_{\alpha\gamma} + x_\gamma\delta_{\alpha\beta}}{R}\right).$$

$$x_\alpha^i x_\beta^i x_\gamma^i\left(\frac{5x_\alpha x_\beta x_\gamma}{R^3}-\frac{x_\alpha\delta_{\beta\gamma}+x_\beta\delta_{\alpha\gamma}+x_\gamma\delta_{\alpha\beta}}{R}\right)=x_\alpha^i x_\beta^i x_\gamma^i A-\frac{1}{5}\cdot R_i^2\left(x_\alpha^i\delta_{\beta\gamma}+x_\beta^i\delta_{\alpha\gamma}+x_\gamma^i\delta_{\alpha\beta}\right)A=$$

$$=A\left[x_\alpha^i x_\beta^i x_\gamma^i-\frac{1}{5}\cdot R_i^2\left(x_\alpha^i\delta_{\beta\gamma}+x_\beta^i\delta_{\alpha\gamma}+x_\gamma^i\delta_{\alpha\beta}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\left[5x_\alpha^i x_\beta^i x_\gamma^i-R_i^2\left(x_\alpha^i\delta_{\beta\gamma}+x_\beta^i\delta_{\alpha\gamma}+x_\gamma^i\delta_{\alpha\beta}\right)\right]\left(\frac{5x_\alpha x_\beta x_\gamma}{R^3}-\frac{x_\alpha\delta_{\beta\gamma}+x_\beta\delta_{\alpha\gamma}+x_\gamma\delta_{\alpha\beta}}{R}\right)$$

Powracamy do członu oktupolowego w rozwinięciu potencjału.

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^4}\cdot\frac{1}{10}\cdot\sum_i Q_i\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\sum_{\gamma=1}^{3}D_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{5x_\alpha x_\beta x_\gamma}{R^3}-\frac{x_\alpha\delta_{\beta\gamma}+x_\beta\delta_{\alpha\gamma}+x_\gamma\delta_{\alpha\beta}}{R}\right)$$

$$D_{\alpha\beta\gamma}=\sum_i Q_i\left[5x_\alpha^i x_\beta^i x_\gamma^i-R_i^2\left(x_\alpha^i\delta_{\beta\gamma}+x_\beta^i\delta_{\alpha\gamma}+x_\gamma^i\delta_{\alpha\beta}\right)\right]$$

$$R_i^2=x_i^2+y_i^2+z_i^2$$

Wypiszemy teraz w jawnej postaci składowe tensora $D_{\alpha\beta\gamma}$ momentu oktupolowego.

$$D_{xxx}=\sum_i Q_i\left(5x_i^3-3x_iR_i^2\right)=\sum_i Q_i\left(2x_i^3-3x_iy_i^2-3x_iz_i^2\right)$$

$$D_{yyy}=\sum_i Q_i\left(5y_i^3-3y_iR_i^2\right)=\sum_i Q_i\left(2y_i^3-3x_i^2y_i-3y_iz_i^2\right)$$

$$D_{zzz}=\sum_i Q_i\left(5z_i^3-3z_iR_i^2\right)=\sum_i Q_i\left(2z_i^3-3x_i^2z_i-3y_i^2z_i\right)$$

$$D_{xxy}=D_{xyx}=D_{yxx}=\sum_i Q_i\left(5x_i^2y_i-y_iR_i^2\right)=\sum_i Q_i\left(4x_i^2y_i-y_i^3-y_iz_i^2\right)$$

$$D_{xxz}=D_{xzx}=D_{zxx}=\sum_i Q_i\left(5x_i^2z_i-z_iR_i^2\right)=\sum_i Q_i\left(4x_i^2z_i-z_i^3-y_i^2z_i\right)$$

$$D_{xyy}=D_{yxy}=D_{yyx}=\sum_i Q_i\left(5x_iy_i^2-x_iR_i^2\right)=\sum_i Q_i\left(4x_iy_i^2-x_i^3-x_iz_i^2\right)$$

$$D_{xzz}=D_{zxz}=D_{zzx}=\sum_i Q_i\left(5x_iz_i^2-x_iR_i^2\right)=\sum_i Q_i\left(4x_iz_i^2-x_i^3-x_iy_i^2\right)$$

$$D_{yzz}=D_{zyz}=D_{zzy}=\sum_i Q_i\left(5y_iz_i^2-y_iR_i^2\right)=\sum_i Q_i\left(4y_iz_i^2-y_i^3-x_i^2y_i\right)$$

$$D_{yyz}=D_{yzy}=D_{zyy}=\sum_i Q_i\left(5y_i^2z_i-z_iR_i^2\right)=\sum_i Q_i\left(4y_i^2z_i-z_i^3-x_i^2z_i\right)$$

$$D_{xyz}=D_{xzy}=D_{yxz}=D_{yzx}=D_{zxy}=D_{zyx}=\sum_i Q_i\left(5x_iy_iz_i-0\right)=\sum_i Q_i5x_iy_iz_i$$

$$D_{xxx}+D_{xyy}+D_{xzz}=0$$

$$D_{yxx}+D_{yyy}+D_{yzz}=0$$

$$D_{zxx}+D_{zyy}+D_{zzz}=0$$

Tensor $D_{\alpha\beta\gamma}$ momentu oktupolowego układu ładunków punktowych jest tensorem trzeciego rzędu, tworzy go $3^3=27$ składowych, w tym siedem niezależnych.

Napiszmy jeszcze raz wszystkie trzy postacie członu oktupolowego.

$$\boxed{\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sum_i Q_i R_i^3\left(5\cos^3\alpha_i - 3\cos\alpha_i\right)}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sum_i Q_i \sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\sum_{\gamma=1}^{3} d_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{5x_\alpha x_\beta x_\gamma}{R^3} - \frac{x_\alpha\delta_{\beta\gamma} + x_\beta\delta_{\alpha\gamma} + x_\gamma\delta_{\alpha\beta}}{R}\right)$$

$$\boxed{d_{\alpha\beta\gamma} = \sum_i Q_i x_\alpha^i x_\beta^i x_\gamma^i}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^4}\cdot\frac{1}{10}\cdot\sum_i Q_i \sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\sum_{\gamma=1}^{3} D_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{5x_\alpha x_\beta x_\gamma}{R^3} - \frac{x_\alpha\delta_{\beta\gamma} + x_\beta\delta_{\alpha\gamma} + x_\gamma\delta_{\alpha\beta}}{R}\right)$$

$$\boxed{D_{\alpha\beta\gamma} = \sum_i Q_i\left[5x_\alpha^i x_\beta^i x_\gamma^i - R_i^2\left(x_\alpha^i\delta_{\beta\gamma} + x_\beta^i\delta_{\alpha\gamma} + x_\gamma^i\delta_{\alpha\beta}\right)\right]}$$

$$R_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$$

Jeżeli sumaryczny ładunek, moment dipolowy, oraz wszystkie składowe tensora momentu kwadrupolowego układu ładunków punktowych są równe zeru, to składowe tensora momentu oktupolowego nie zależą od wyboru układu współrzędnych w zbiorze układów o analogicznych osiach równoległych.

Na koniec powróćmy do sztuczki z zerem.

$$\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\sum_{\gamma=1}^{3}\frac{1}{5}\cdot R_i^2\left(x_\alpha^i\delta_{\beta\gamma} + x_\beta^i\delta_{\alpha\gamma} + x_\gamma^i\delta_{\alpha\beta}\right)\left(\frac{5x_\alpha x_\beta x_\gamma}{R^3} - \frac{x_\alpha\delta_{\beta\gamma} + x_\beta\delta_{\alpha\gamma} + x_\gamma\delta_{\alpha\beta}}{R}\right) =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\sum_{\gamma=1}^{3}\frac{1}{5}\cdot R_i^2\cdot\frac{1}{R^3}\left(x_\alpha^i\delta_{\beta\gamma} + x_\beta^i\delta_{\alpha\gamma} + x_\gamma^i\delta_{\alpha\beta}\right)\left[5x_\alpha x_\beta x_\gamma - R^2\left(x_\alpha\delta_{\beta\gamma} + x_\beta\delta_{\alpha\gamma} + x_\gamma\delta_{\alpha\beta}\right)\right] =$$

$$= \frac{R_i^2}{5R^3}\cdot 3x_i\left[\left(5x^3 - 3xR^2\right) + \left(5xy^2 - xR^2\right) + \left(5xz^2 - xR^2\right)\right] +$$

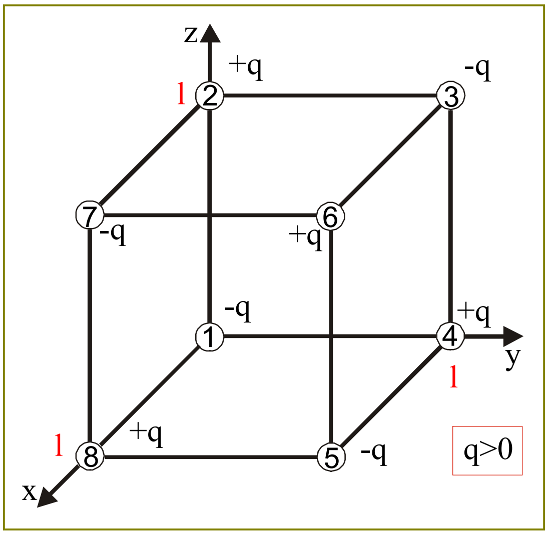
$$+ \frac{R_i^2}{5R^3}\cdot 3y_i\left[\left(5y^3 - 3yR^2\right) + \left(5x^2y - yR^2\right) + \left(5yz^2 - yR^2\right)\right] +$$

$$+ \frac{R_i^2}{5R^3}\cdot 3z_i\left[\left(5z^3 - 3zR^2\right) + \left(5x^2z - zR^2\right) + \left(5y^2z - zR^2\right)\right] =$$

$$= \frac{R_i^2}{5R^3}\cdot 15\left[x_i x\left(x^2 + y^2 + z^2 - R^2\right) + y_i y\left(x^2 + y^2 + z^2 - R^2\right) + z_i z\left(x^2 + y^2 + z^2 - R^2\right)\right] =$$

$$= \frac{R_i^2}{5R^3}\cdot 15\left[x_i x\left(R^2 - R^2\right) + y_i y\left(R^2 - R^2\right) + z_i z\left(R^2 - R^2\right)\right] = 0$$

PRZYKŁAD



$Q_1 = Q_3 = Q_5 = Q_7 = -q < 0$

$Q_2 = Q_4 = Q_6 = Q_8 = +q > 0$

$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$

$x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = l$

$y_1 = y_2 = y_7 = y_8 = 0$

$y_3 = y_4 = y_5 = y_6 = l$

$z_1 = z_4 = z_5 = z_8 = 0$

$z_2 = z_3 = z_6 = z_7 = l$

l = odległość między dwoma sąsiednimi ładunkami

$$d_{xyz} = d_{xzy} = d_{yxz} = d_{yzx} = d_{zxy} = d_{zyx} = \sum_{i=1}^{8} Q_i x_i y_i z_i = ql^3$$

Pozostałe składowe tensora $d_{\alpha\beta\gamma}$ są równe zeru.

$$D_{xyz} = D_{xzy} = D_{yxz} = D_{yzx} = D_{zxy} = D_{zyx} = \sum_{i=1}^{8} 5Q_i x_i y_i z_i = 5ql^3$$

Pozostałe składowe tensora $D_{\alpha\beta\gamma}$ są równe zeru.

19 KIERUNKI WŁASNE (OSIE GŁÓWNE) I WARTOŚCI WŁASNE ORAZ NIEZMIENNIKI TENSORA MOMENTU KWADRUPOLOWEGO

- **Osie główne** lub **kierunki własne** symetrycznego tensora drugiego rzędu, to kierunki osi układu współrzędnych prostokątnych, w którym wszystkie składowe niediagonalne tensora są równe zeru. Składowe diagonalne takiego tensora nazywane są jego wartościami własnymi. Kierunek własny tensora ma tę własność, że każdy wektor **x** o tym kierunku, przemnożony przez macierz utworzoną ze składowych tensora, staje się wektorem λ**x**. Współczynnik λ jest wartością własną tensora dla danego kierunku.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{lub} \quad \sum_{q=1}^{3} a_{pq} x_q = \lambda x_p \quad p = 1,2,3 \quad \text{lub} \quad \left. \begin{aligned} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \lambda)x_3 = 0 \end{aligned} \right\}$$

Układ ten (przedstawiony w trzech różnych równoważnych postaciach) posiada niezerowe rozwiązanie x_1, x_2, x_3 wtedy i tylko wtedy, gdy jego wyznacznik jest równy zeru.

$$\det(a_{pq} - \lambda\delta_{pq}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = 0$$

Współczynniki I_1, I_2, I_3 określone są następująco:

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \sum_{\mu=1}^{3} a_{\mu\mu}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right) + \left(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}\right) + \left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right)$$

$$I_3 = \det a_{pq} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Równanie $-\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = 0$ nazywamy równaniem charakterystycznym (wiekowym lub sekularnym).

Dla każdej wartości własnej tworzymy odpowiedni układ równań.

$$\sum_{q=1}^{3} a_{pq} x_q = \lambda_1 x_p, \quad p = 1, 2, 3.$$

$$\sum_{q=1}^{3} a_{pq} x_q = \lambda_2 x_p, \quad p = 1, 2, 3.$$

$$\sum_{q=1}^{3} a_{pq} x_q = \lambda_3 x_p, \quad p = 1, 2, 3.$$

Rozwiązania tych równań wyznaczają kierunki własne tensora, odpowiadające wartościom własnym $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Ze składowych tensora momentu kwadrupolowego tworzymy macierz

$$d_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix}, \; d_{\mu\nu} = d_{\nu\mu}.$$

Tensor momentu kwadrupolowego, jak każdy symetryczny tensor drugiego rzędu, można sprowadzić do postaci diagonalnej o składowych rzeczywistych. W nowym układzie współrzędnych składowe tensora $d_{\mu\nu}$ mają postać

$$d'_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} d'_{11} & d'_{12} & d'_{13} \\ d'_{21} & d'_{22} & d'_{23} \\ d'_{31} & d'_{32} & d'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

Znajdujemy je jako rozwiązania $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ równania charakterystycznego, zwane wartościami własnymi tensora $d_{\mu\nu}$. Odpowiadające tym wartościom własnym kierunki własne stanowią osie nowego układu współrzędnych.

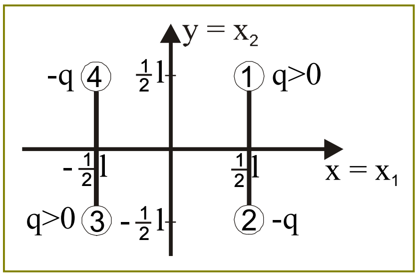
$$\det\left(d_{pq} - \lambda\delta_{pq}\right) = -\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = 0,$$

$$\sum_{q=1}^{3} d_{pq} x_q = \lambda_1 x_p, \quad \sum_{q=1}^{3} d_{pq} x_q = \lambda_2 x_p, \quad \sum_{q=1}^{3} d_{pq} x_q = \lambda_3 x_p, \quad p = 1, 2, 3.$$

Niezmiennikami ortogonalnych przekształceń układu współrzędnych są:

1. ślad macierzy utworzonej ze składowych tensora
   $$I_1 = \mathrm{Tr}\, d_{\mu\nu} = d_{11} + d_{22} + d_{33} = \mathrm{Tr}\, d'_{\mu\nu} = d'_{11} + d'_{22} + d'_{33} = I'_1\ ,$$
2. wyznacznik macierzy utworzonej ze składowych tensora
   $$I_2 = \det d_{\mu\nu} = \det d'_{\mu\nu} = I'_2\ ,$$
3. wartości własne $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ macierzy utworzonej ze składowych tensora,
4. współczynnik I_3 w równaniu charakterystycznym macierzy utworzonej ze składowych tensora
   $$I_3 = (d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}) + (d_{11}d_{33} - d_{13}d_{31}) + (d_{22}d_{33} - d_{23}d_{32}) =$$
   $$= (d'_{11}d'_{22} - d'_{12}d'_{21}) + (d'_{11}d'_{33} - d'_{13}d'_{31}) + (d'_{22}d'_{33} - d'_{23}d'_{32}) = I'_3\ .$$

PRZYKŁAD



Tensor momentu kwadrupolowego w układzie współrzędnych x_1, x_2

$$d_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & ql^2 & 0 \\ ql^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Równanie charakterystyczne

$$-\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = 0$$
$$I_1 = 0$$
$$I_2 = -q^2 l^4$$
$$I_3 = 0$$

$\Rightarrow$ $-\lambda^3 + q^2 l^4 \lambda = 0$

Wartości własne:

$$\lambda_1 = ql^2$$
$$\lambda_2 = -ql^2$$
$$\lambda_3 = 0$$

W układzie osi głównych tensor momentu kwadrupolowego przyjmuje postać diagonalną.

$$d'_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ql^2 & 0 & 0 \\ 0 & -ql^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aby znaleźć osie główne (kierunki własne) tensora, należy dla każdej wartości własnej $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ rozwiązać odpowiedni układ równań.

$$\sum_{q=1}^{3} d_{pq}x_q = \lambda_1 x_p, \qquad \sum_{q=1}^{3} d_{pq}x_q = \lambda_2 x_p, \qquad \sum_{q=1}^{3} d_{pq}x_q = \lambda_3 x_p,$$

$$p = 1, 2, 3.$$

$\lambda_1 = ql^2$

$$\left.\begin{array}{l} (0 - ql^2)x_1 + ql^2 x_2 + 0 = 0 \\ ql^2 x_1 + (0 - ql^2)x_2 + 0 = 0 \\ 0 + 0 + (0 - ql^2)x_3 = 0 \end{array}\right\}$$

$x_1 = x_2$

$x_3 = 0$

$\lambda_2 = -ql^2$

$$\left.\begin{array}{l} (0 + ql^2)x_1 + ql^2 x_2 + 0 = 0 \\ ql^2 x_1 + (0 + ql^2)x_2 + 0 = 0 \\ 0 + 0 + (0 + ql^2)x_3 = 0 \end{array}\right\}$$

$x_1 = -x_2$

$x_3 = 0$

$\lambda_3 = 0$

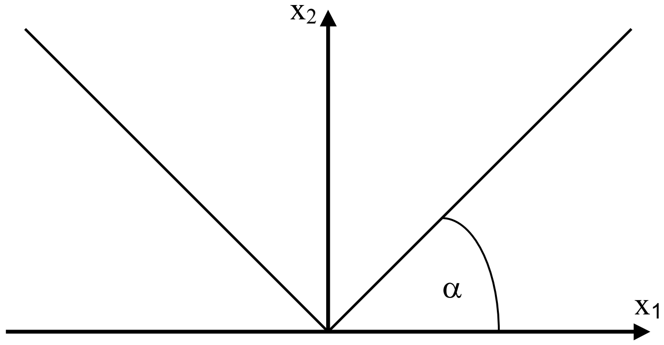
$$\left.\begin{array}{l} 0\cdot x_1 + ql^2 x_2 + 0\cdot x_3 = 0 \\ ql^2 x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = 0 \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = 0 \end{array}\right\}$$

$x_1 = 0$

$x_2 = 0$

$x_3 = 0$

$(x_1 = -x_2,\ x_3 = 0)$
Kierunek własny odpowiadający wartości własnej $\lambda_2 = -ql^2$.



$(x_1 = x_2,\ x_3 = 0)$
Kierunek własny odpowiadający wartości własnej $\lambda_1 = ql^2$.

$\boxed{\mathrm{tg}\alpha = 1}$

Kierunki własne stanowią osie nowego układu współrzędnych x_1', x_2'. Nowe współrzędne punktów, w których znajdują się ładunki kwadrupola, znajdujemy ze wzorów transformacyjnych.

$$x_1' = x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha$$
$$x_2' = -x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha$$
$$\mathrm{tg}\,\alpha = 1,\ \ \alpha = 45^\circ$$

$$d_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & ql^2 & 0 \\ ql^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow d'_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} ql^2 & 0 & 0 \\ 0 & -ql^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A	x_1	x_2
Q_1	$\frac{1}{2}\cdot l$	$\frac{1}{2}\cdot l$
Q_2	$\frac{1}{2}\cdot l$	$-\frac{1}{2}\cdot l$
Q_3	$-\frac{1}{2}\cdot l$	$-\frac{1}{2}\cdot l$
Q_4	$-\frac{1}{2}\cdot l$	$\frac{1}{2}\cdot l$

$$x_1' = +\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot x_2$$
$$x_2' = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot x_2$$

$\longrightarrow$

A	x_1'	x_2'
Q_1	$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot l$	0
Q_2	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot l$
Q_3	$-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot l$	0
Q_4	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot l$

20 MULTIPOLOWE ROZWINIĘCIE POTENCJAŁU POLA CIĄGŁEGO ROZKŁADU ŁADUNKÓW ROZMIESZCZONYCH ZE STAŁĄ GĘSTOŚCIĄ OBJĘTOŚCIOWĄ W OBSZARZE ELIPSOIDY W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH, KTÓRY STANOWIĄ OSIE ELIPSOIDY

- **Elipsoida**

Elipsoida obrotowa modeluje wiele obiektów, poczynając od kuli, poprzez dysk, cygaro, a na walcu kończąc. Elipsoida trójosiowa jest powierzchnią daną równaniem kanonicznym.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

a, b, c = półosie elipsoidy

$a = b = c$ sfera
$a = b > c$ elipsoida obrotowa spłaszczona
$a = b < c$ elipsoida obrotowa wydłużona

Objętość elipsoidy wynosi

$$V=\frac{4}{3}\cdot\pi abc.$$

Kontur rzutu na płaszczyznę x, y przekroju elipsoidy płaszczyzną prostopadłą do osi z jest elipsą

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)}=1,\ z=\text{const}$$

o półosiach

$$a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\quad \text{i} \quad b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}$$

i polu powierzchni

$$|R_z|=\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right).$$

- **Przejście od dyskretnego (nieciągłego) do ciągłego rozkładu ładunków**

Aby przejść, od wzorów dla układu ładunków punktowych do wzorów dla ciągłego rozkładu ładunków, dokonamy następujących odwzorowań.

$$\sum_i Q_i \to Q=\iiint_V \rho(x,y,z)dV$$

$$\mu_x=\sum_i Q_i x_i \to \mu_x=\iiint_V \rho(x,y,z)x dV \qquad d_{xx}=\sum_i Q_i x_i^2 \to d_{xx}=\iiint_V \rho(x,y,z)x^2 dV$$

$$\mu_y=\sum_i Q_i y_i \to \mu_y=\iiint_V \rho(x,y,z)y dV \qquad d_{yy}=\sum_i Q_i y_i^2 \to d_{yy}=\iiint_V \rho(x,y,z)y^2 dV$$

$$\mu_z=\sum_i Q_i z_i \to \mu_z=\iiint_V \rho(x,y,z)z dV \qquad d_{zz}=\sum_i Q_i z_i^2 \to d_{zz}=\iiint_V \rho(x,y,z)z^2 dV$$

$$D_{xx} = \sum_i Q_i\left(2x_i^2 - y_i^2 - z_i^2\right) \to D_{xx} = \iiint_V \rho(x,y,z)\left(2x^2 - y^2 - z^2\right)dV$$

$$D_{yy} = \sum_i Q_i\left(2y_i^2 - x_i^2 - z_i^2\right) \to D_{yy} = \iiint_V \rho(x,y,z)\left(2y^2 - x^2 - z^2\right)dV$$

$$D_{zz} = \sum_i Q_i\left(2z_i^2 - y_i^2 - x_i^2\right) \to D_{zz} = \iiint_V \rho(x,y,z)\left(2z^2 - y^2 - x^2\right)dV$$

- **Moment dipolowy ciągłego rozkładu ładunków rozmieszczonych w obszarze elipsoidy ze stałą gęstością objętościową**

Założymy ciągły rozkład ładunków w obszarze elipsoidy ze stałą gęstością objętościową

$$\boxed{\rho(x,y,z) = \frac{3Q}{4\pi abc}}\ .$$

Założymy też, że osie układu współrzędnych pokrywają się z osiami elipsoidy, czyli z osiami głównymi tensora momentu kwadrupolowego.

$$\mu_x = \iiint_V \rho(x,y,z)x\,dV$$

$$\rho(x,y,x) = \frac{3Q}{4\pi abc}$$

$$\iint_{R_x} dydz = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$\int_{-a}^{a} xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-a}^{+a} = 0$$

$$\int_{-a}^{a} x^3dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-a}^{+a} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\mu_x = \iiint_V \frac{3Q}{4\pi abc} xdxdydz =$$

$$= \frac{3Q}{4\pi abc}\iiint_V xdxdydz =$$

$$= \frac{3Q}{4\pi abc}\int_{-a}^{+a} xdx \iint_{R_x} dydz =$$

$$= \frac{3Q}{4\pi abc}\pi bc\int_{-a}^{+a} x\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx =$$

$$= 0$$

$$\mu_y = \iiint_V \rho(x,y,z)y\,dV$$

$$\rho(x,y,x) = \frac{3Q}{4\pi abc}$$

$$\iint_{R_y} dxdz = \pi ac\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

$$\int_{-b}^{b} ydy = \left[\frac{y^2}{2}\right]_{-b}^{+b} = 0$$

$$\int_{-b}^{b} y^3dy = \left[\frac{y^4}{4}\right]_{-b}^{+b} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\mu_y = \iiint_V \frac{3Q}{4\pi abc} ydxdydz =$$

$$= \frac{3Q}{4\pi abc}\iiint_V ydxdydz =$$

$$= \frac{3Q}{4\pi abc}\int_{-b}^{+b} ydy \iint_{R_y} dxdz =$$

$$= \frac{3Q}{4\pi abc}\pi ac\int_{-b}^{+b} y\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)dy =$$

$$= 0$$

$$\mu_z = \iiint_V \rho(x,y,z)z\,dV$$

$$\rho(x,y,x) = \frac{3Q}{4\pi abc}$$

$$\iint_{R_z} dxdy = \pi ab\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)$$

$$\int_{-c}^{c} zdz = \left[\frac{z^2}{2}\right]_{-c}^{+c} = 0$$

$$\int_{-c}^{c} z^3dz = \left[\frac{z^4}{4}\right]_{-c}^{+c} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\mu_z = \iiint_V \frac{3Q}{4\pi abc} zdxdydz =$$

$$= \frac{3Q}{4\pi abc}\iiint_V zdxdydz =$$

$$= \frac{3Q}{4\pi abc}\int_{-c}^{+c} zdz \iint_{R_z} dxdy =$$

$$= \frac{3Q}{4\pi abc}\pi ab\int_{-c}^{+c} z\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)dz =$$

$$= 0$$

R_x = rzut na płaszczyznę y, z przekroju elipsoidy płaszczyzną prostopadłą do osi x
$\iint_{R_x} dydz$ = pole rzutu na płaszczyznę y, z przekroju elipsoidy płaszczyzną prostopadłą do osi x

W rozpatrywanym układzie współrzędnych, czyli układzie którego osie pokrywają się z osiami elipsoidy, moment dipolowy jest równy zeru, ponieważ wszystkie jego składowe są równe zeru.

$$\left(\mu_x = 0,\ \mu_y = 0,\ \mu_z = 0\right) \Rightarrow \boldsymbol{\mu} = 0$$

- **Tensor momentu kwadrupolowego ciągłego rozkładu ładunków rozmieszczonych w obszarze elipsoidy ze stałą gęstością objętościową**

$$d_{xx} = \iiint_V \rho(x,y,z)x^2 dV$$

$$\rho(x,y,z) = \frac{3Q}{4\pi abc}$$

$$\iint_{R_x} dydz = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$\int_{-a}^{+a} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{+a} = \frac{2}{3}a^3$$

$$\int_{-a}^{+a} x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-a}^{+a} = \frac{2}{5}a^5$$

$$\Downarrow$$

$$d_{xx} = \frac{3Q}{4\pi abc}\iiint_V x^2 dxdydz =$$

$$= \frac{3Q}{4\pi abc}\int_{-a}^{+a} x^2 dx \iint_{R_x} dydz =$$

$$= \frac{3Q}{4\pi abc}\pi bc \int_{-a}^{+a} x^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx$$

$$\boxed{d_{xx} = \frac{1}{5}Qa^2}$$

$$d_{yy} = \iiint_V \rho(x,y,z)y^2 dV$$

$$\rho(x,y,z) = \frac{3Q}{4\pi abc}$$

$$\iint_{R_y} dxdz = \pi ac\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

$$\int_{-b}^{+b} y^2 dy = \left[\frac{y^3}{3}\right]_{-b}^{+b} = \frac{2}{3}b^3$$

$$\int_{-b}^{+b} y^4 dy = \left[\frac{y^5}{5}\right]_{-b}^{+b} = \frac{2}{5}b^5$$

$$\Downarrow$$

$$d_{yy} = \frac{3Q}{4\pi abc}\iiint_V y^2 dxdydz =$$

$$= \frac{3Q}{4\pi abc}\int_{-b}^{+b} y^2 dy \iint_{R_y} dxdz =$$

$$= \frac{3Q}{4\pi abc}\pi ac \int_{-b}^{+b} y^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)dy$$

$$\boxed{d_{yy} = \frac{1}{5}Qb^2}$$

$$d_{zz} = \iiint_V \rho(x,y,z)z^2 dV$$

$$\rho(x,y,z) = \frac{3Q}{4\pi abc}$$

$$\iint_{R_z} dxdy = \pi ab\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)$$

$$\int_{-c}^{+c} z^2 dz = \left[\frac{z^3}{3}\right]_{-c}^{+c} = \frac{2}{3}c^3$$

$$\int_{-c}^{+c} z^4 dz = \left[\frac{z^5}{5}\right]_{-c}^{+c} = \frac{2}{5}c^5$$

$$\Downarrow$$

$$d_{zz} = \frac{3Q}{4\pi abc}\iiint_V z^2 dxdydz =$$

$$= \frac{3Q}{4\pi abc}\int_{-c}^{+c} z^2 dz \iint_{R_z} dxdy =$$

$$= \frac{3Q}{4\pi abc}\pi ab \int_{-c}^{+c} z^2\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)dz$$

$$\boxed{d_{zz} = \frac{1}{5}Qc^2}$$

R_x = rzut na płaszczyznę y, z przekroju elipsoidy płaszczyzną prostopadłą do osi x
$\iint_{R_x} dydz =$ pole rzutu na płaszczyznę y, z przekroju elipsoidy płaszczyzną prostopadłą do osi x
R_y = rzut na płaszczyznę x, z przekroju elipsoidy płaszczyzną prostopadłą do osi y
$\iint_{R_y} dxdz =$ pole rzutu na płaszczyznę x, z przekroju elipsoidy płaszczyzną prostopadłą do osi y
R_z = rzut na płaszczyznę x, y przekroju elipsoidy płaszczyzną prostopadłą do osi z
$\iint_{R_z} dxdy =$ pole rzutu na płaszczyznę x, y przekroju elipsoidy płaszczyzną prostopadłą do osi z

$$D_{xx} = \iiint_V \rho(x,y,z)\left(2x^2 - y^2 - z^2\right)dV$$
$$\rho(x,y,z) = \frac{3Q}{4\pi abc}$$

$$\Downarrow$$

$$D_{xx} = \frac{3Q}{4\pi abc}\iiint_V \left(2x^2 - y^2 - z^2\right)dxdydz =$$
$$= \frac{3Q}{4\pi abc}\left(2\int_{-a}^{+a} x^2 dx \iint_{R_x} dydz - \int_{-b}^{+b} y^2 dy \iint_{R_y} dxdz - \int_{-c}^{+c} z^2 dz \iint_{R_z} dxdy\right) =$$
$$= \frac{3Q}{4\pi abc}\left[2\pi bc\int_{-a}^{+a} x^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx - \pi ac\int_{-b}^{+b} y^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy - \pi ab\int_{-c}^{+c} z^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz\right] =$$
$$= \frac{3Q}{4\pi abc}\left[\frac{8}{15}\cdot \pi a^3 bc - \frac{4}{15}\cdot \pi ab^3 c - \frac{4}{15}\cdot \pi abc^3\right]$$

$$\boxed{D_{xx} = \frac{1}{5}\cdot Q\left(2a^2 - b^2 - c^2\right)}$$

$$D_{yy} = \iiint_V \rho(x,y,z)\left(2y^2 - x^2 - z^2\right)dV$$
$$\rho(x,y,z) = \frac{3Q}{4\pi abc}$$

$$\Downarrow$$

$$D_{yy} = \frac{3Q}{4\pi abc}\iiint_V \left(2y^2 - x^2 - z^2\right)dxdydz =$$
$$= \frac{3Q}{4\pi abc}\left(2\int_{-b}^{+b} y^2 dy \iint_{R_y} dxdz - \int_{-a}^{+a} x^2 dx \iint_{R_x} dydz - \int_{-c}^{+c} z^2 dz \iint_{R_z} dxdy\right) =$$
$$= \frac{3Q}{4\pi abc}\left[2\pi ac\int_{-b}^{+b} y^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy - \pi bc\int_{-a}^{+a} x^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx - \pi ab\int_{-c}^{+c} z^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz\right] =$$
$$= \frac{3Q}{4\pi abc}\left[\frac{8}{15}\cdot \pi ab^3 c - \frac{4}{15}\cdot \pi a^3 bc - \frac{4}{15}\cdot \pi abc^3\right]$$

$$\boxed{D_{yy} = \frac{1}{5}\cdot Q\left(2b^2 - a^2 - c^2\right)}$$

$$D_{zz} = \iiint_V \rho(x,y,z)\left(2z^2 - y^2 - x^2\right)dV$$
$$\rho(x,y,z) = \frac{3Q}{4\pi abc}$$

$$\Downarrow$$

$$D_{zz} = \frac{3Q}{4\pi abc}\iiint_V \left(2z^2 - y^2 - x^2\right)dxdydz =$$
$$= \frac{3Q}{4\pi abc}\left(2\int_{-c}^{+c} z^2 dz \iint_{R_z} dxdy - \int_{-b}^{+b} y^2 dy \iint_{R_y} dxdz - \int_{-a}^{+a} x^2 dx \iint_{R_x} dydz\right) =$$
$$= \frac{3Q}{4\pi abc}\left[2\pi ab\int_{-c}^{+c} z^2\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)dz - \pi ac\int_{-b}^{+b} y^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)dy - \pi bc\int_{-a}^{+a} x^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx\right] =$$
$$= \frac{3Q}{4\pi abc}\left[\frac{8}{15}\cdot \pi abc^3 - \frac{4}{15}\cdot \pi ab^3c - \frac{4}{15}\cdot \pi a^3bc\right]$$

$$\boxed{D_{zz} = \frac{1}{5}\cdot Q\left(2c^2 - b^2 - a^2\right)}$$

Zbierzmy otrzymane wyniki.

$$d_{xx} = \frac{1}{5}\cdot Qa^2, \quad d_{yy} = \frac{1}{5}\cdot Qb^2, \quad d_{zz} = \frac{1}{5}\cdot Qc^2,$$
$$D_{xx} = \frac{1}{5}\cdot Q\left(2a^2 - b^2 - c^2\right), \quad D_{yy} = \frac{1}{5}\cdot Q\left(2b^2 - a^2 - c^2\right), \quad D_{zz} = \frac{1}{5}\cdot Q\left(2c^2 - b^2 - a^2\right),$$
$$D_{xx} + D_{yy} + D_{zz} = 0.$$

Składowe niediagonalne obu tensorów są wszystkie równe zeru.

W przypadku elipsoidy obrotowej
$a = b$,

$$D_{xx} = \frac{1}{5}Q\left(a^2 - c^2\right),$$
$$D_{yy} = \frac{1}{5}Q\left(a^2 - c^2\right),$$
$$D_{zz} = \frac{2}{5}Q\left(c^2 - a^2\right),$$
$$-\frac{1}{2}D_{zz} = D_{xx} = D_{yy},$$

tensor momentu kwadrupolowego $D_{\mu\nu}$ posiada tylko jedną składową niezależną D_{zz}.

UWAGA

Składowa D_{zz} bywa utożsamiana z tensorem momentu kwadrupolowego, co prowadzi do nieporozumień.

- **Człon kwadrupolowy w rozwinięciu potencjału pola ciągłego rozkładu ładunków rozmieszczonych w obszarze elipsoidy obrotowej ze stałą gęstością objętościową**

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^3}\frac{1}{6}\sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3} D_{\mu\nu}\left(\frac{3x_\mu x_\nu}{R^2} - \delta_{\mu\nu}\right)$$

$$x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z$$

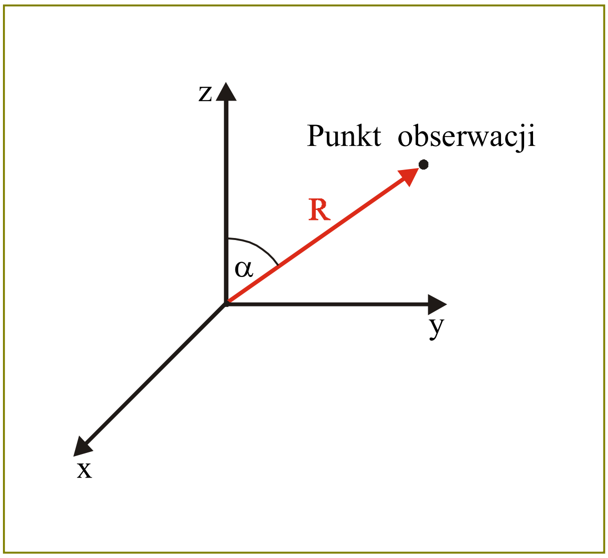
$$D_{xx} = D_{yy} = -\frac{1}{2}D_{zz}$$

$$D_{zz} = \frac{2}{5}Q\left(c^2 - a^2\right)$$

$$D_{xy} = D_{yx} = D_{xz} = D_{zx} = D_{yz} = D_{zy} = 0$$

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\cos^2\alpha = \frac{z^2}{R^2}$$



$$\Downarrow$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^3}\frac{1}{6}\left[D_{xx}\left(\frac{3x^2}{R^2} - 1\right) + D_{yy}\left(\frac{3y^2}{R^2} - 1\right) + D_{zz}\left(\frac{3z^2}{R^2} - 1\right)\right]$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^3}\frac{1}{6}D_{zz}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{3x^2}{R^2} - 1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{3y^2}{R^2} - 1\right) + \left(\frac{3z^2}{R^2} - 1\right)\right]$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^3}\frac{1}{6}D_{zz}\left(\frac{-3x^2 - 3y^2 + 6z^2}{2R^2}\right)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^3}\frac{1}{4}D_{zz}\left(\frac{3z^2 - R^2}{R^2}\right)$$

$$\boxed{\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^3}\frac{1}{4}D_{zz}\left(3\cos^2\alpha - 1\right)}$$

Pierwsze trzy człony w rozwinięciu potencjału ostatecznie przyjmują postać

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{1}{R} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{1}{R^3}\cdot\frac{1}{10}\left(c^2 - a^2\right)\left(3\cos^2\alpha - 1\right)\ .$$

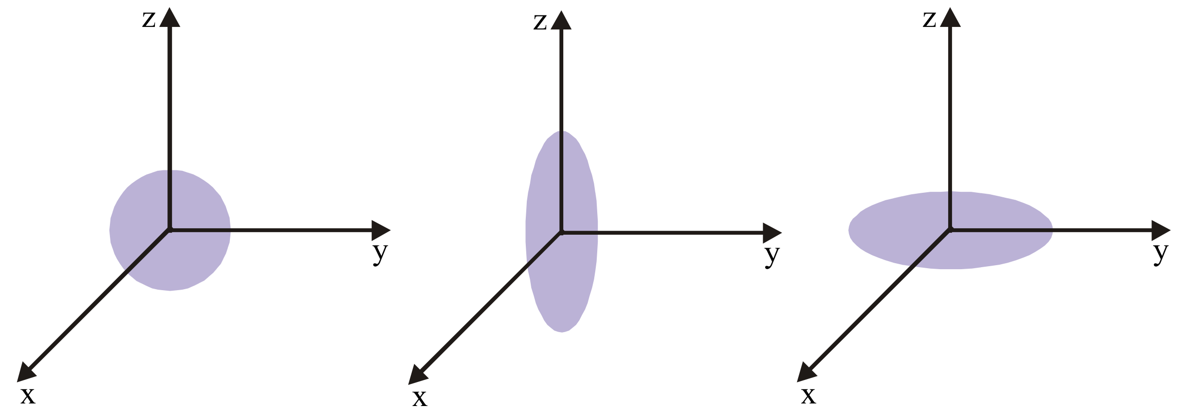
PRZYKŁAD
Elektryczny moment kwadrupolowy jądra atomowego
Jądro atomowe bywa modelowane elipsoidą obrotową, w której objętości rozmieszczony jest ładunek Ze ze stałą gęstością objętościową

$$\rho = \frac{3Ze}{4a^2c}\ .$$

Moment dipolowy ładunków rozmieszczonych ze stałą gęstością objętościową w obszarze elipsoidy obrotowej jest równy zeru względem układu współrzędnych, którego osie pokrywają się z osiami elipsoidy obrotowej, a równocześnie z osiami głównymi (kierunkami własnymi) tensora momentu kwadrupolowego. W takim układzie współrzędnych tensor momentu kwadrupolowego $D_{\mu\nu}$ posiada niezerowe rzeczywiste składowe diagonalne $D_{xx} = D_{yy} = -(1/2)\,D_{zz}$, a pozostałe składowe są równe zeru. Tensor momentu kwadrupolowego jądra posiada więc tylko jedną składową niezależną D_{zz}.

$$D_{zz} = \frac{1}{5}Q\left(2c^2 - b^2 - a^2\right)$$
$$a = b$$
$$Q = Ze$$
$$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{D_{zz} = \frac{2Ze}{5}\left(c^2 - a^2\right)}$$

W przypadku gdy moment kwadrupolowy ma tylko jedną niezależną składową, jej znak dostarcza informacji o rozmieszczeniu ładunków.



Kula: $D_{zz} = 0$ Cygaro: $D_{zz} > 0$ Dysk: $D_{zz} < 0$

Jądra kuliste (sferyczne) mają $D_{zz} = 0$.
Jądra wydłużone wzdłuż osi symetrii (cygaro) mają $D_{zz} > 0$.
Jądra spłaszczone wzdłuż osi symetrii (dysk) mają $D_{zz} < 0$.

Moment kwadrupolowy wyrazimy przez średni promień jądra r i parametr deformacji jądra η.

$$D_{zz} = \frac{2}{5}\cdot Ze\left(c^2 - a^2\right)$$
$$r = \frac{a+c}{2} = r_o A^{\frac{1}{3}}$$
$$r_o = 1{,}07 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}$$
$$\Delta r = c - a$$
$$\eta = \frac{\Delta r}{r} = 2\cdot\frac{c-a}{c+a}$$
$$c^2 - a^2 = (c+a)(c-a) = 2r^2\eta$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{D_{zz} = \frac{4}{5}\cdot Zer^2\eta}$$

Elektryczny moment kwadrupolowy jądra bywa też definiowany, jako

$$\boxed{Q_o = \frac{1}{e}\cdot\iiint_V \rho(x,y,z)\left(2z^2 - y^2 - x^2\right)dV = \frac{1}{e}\cdot D_{zz}}\ .$$

PRZYKŁAD
Potencjał elektryczny jądra atomowego

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R^3}\frac{1}{4}D_{zz}\left(3\cos^2\alpha - 1\right)$$

$$Q = Ze$$

$$\mu = 0$$

$$D_{zz} = \frac{2Ze}{5}\left(c^2 - a^2\right) = \frac{4}{5}Ze\eta r^2$$

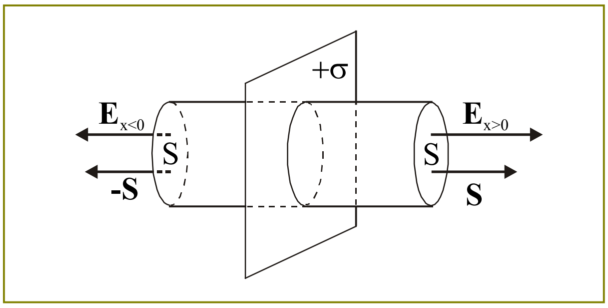
$$\boxed{\varphi = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_o R} + \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_o R^3}\frac{1}{10}\left(c^2 - a^2\right)\left(3\cos^2\alpha - 1\right)}$$

$$\varphi = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_o R} + \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_o R^3}\frac{1}{5}\eta r^2\left(3\cos^2\alpha - 1\right)$$

$$\boxed{\varphi = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_o R}\left[1 + \frac{r^2}{R^2}\cdot\frac{\eta}{5}\left(3\cos^2\alpha - 1\right)\right]}$$

21 POLA RÓŻNYCH NAŁADOWANYCH PRZEWODNIKÓW I ROZKŁADÓW ŁADUNKÓW

- **Pole elektryczne nieskończonej płaszczyzny naładowanej ze stałą gęstością powierzchniową ładunku σ**



Powierzchnię Gaussa stanowi powierzchnia walca prostopadłego do naładowanej płaszczyzny. Strumień natężenia pola elektrycznego przez powierzchnię boczną walca jest równy zeru, ponieważ wektory natężeń pola elektrycznego są równoległe do tej powierzchni.

$$\Phi_D = \sum_i q_i$$

$$\Phi_D = \varepsilon_o E_{x>0} 2S$$

$$\sum_i q_i = \sigma S$$

$$\mathbf{E}_{x>0} = -\mathbf{E}_{x<0}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_o E_{x>0} 2S = \sigma S \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} x > 0 & \Rightarrow & \mathbf{E} = \mathbf{E}_{x>0} = \dfrac{+\sigma}{2\varepsilon_o}\cdot\dfrac{\mathbf{x}}{x} \\ x < 0 & \Rightarrow & \mathbf{E} = -\mathbf{E}_{x>0} = \dfrac{-\sigma}{2\varepsilon_o}\cdot\dfrac{\mathbf{x}}{x} \end{array}}$$

$\mathbf{E}_{x>0}$ = wektor natężenia pola elektrycznego dla x>0
$\mathbf{E}_{x<0}$ = wektor natężenia pola elektrycznego dla x<0

$$\boxed{\begin{array}{l} E = -\dfrac{d\varphi}{dx} \\ x > 0 \\ E = \dfrac{+\sigma}{2\varepsilon_o} \\ \int dx = x \\ \int d\varphi = \varphi \\ \boxed{\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ \varphi(x_1) = 0 \\ x_2 = x \end{array}} \end{array}}$$

$$\Rightarrow \quad -\,d\varphi = E dx$$

$$-\int_{\varphi(x_1)}^{\varphi(x_2)} d\varphi = \int_{x_1}^{x_2} E dx$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi(x_1) - \varphi(x_2) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} \cdot (x_2 - x_1)$$

$$\Downarrow$$

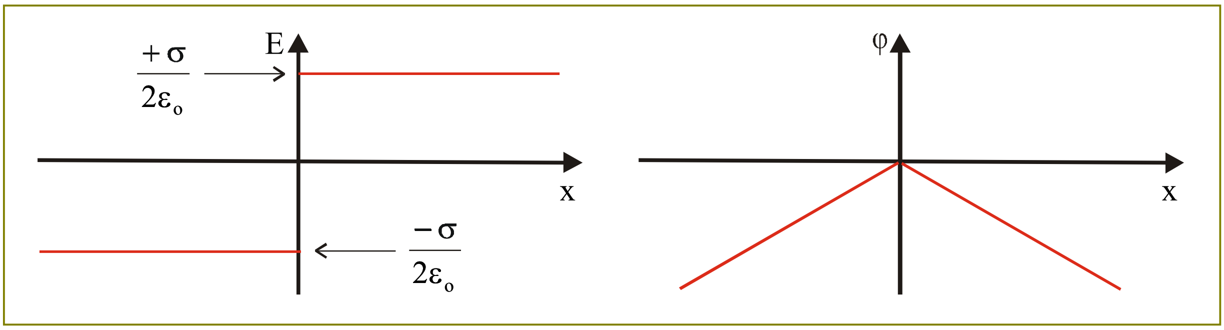
$$\Rightarrow \quad \boxed{\varphi(x) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_o} \cdot x}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} E = -\dfrac{d\varphi}{dx} \\ x < 0 \\ E = \dfrac{-\sigma}{2\varepsilon_o} \\ \boxed{\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ \varphi(x_1) = 0 \\ x_2 = x \end{array}} \end{array}}$$

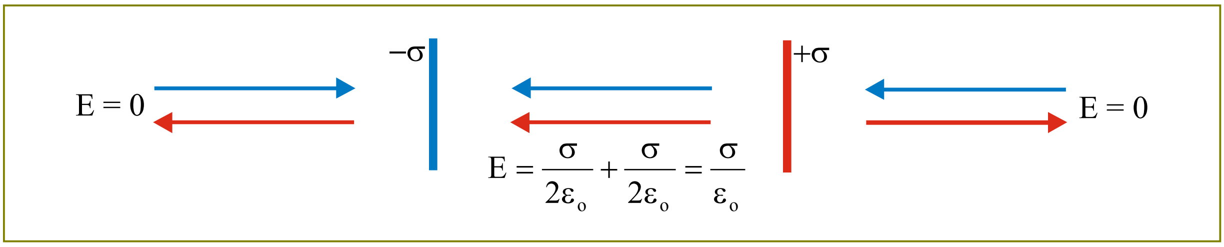
$$\Rightarrow \quad \varphi(x_1) - \varphi(x_2) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} \cdot (x_1 - x_2)$$

$$\Downarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\varphi(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} \cdot x}$$

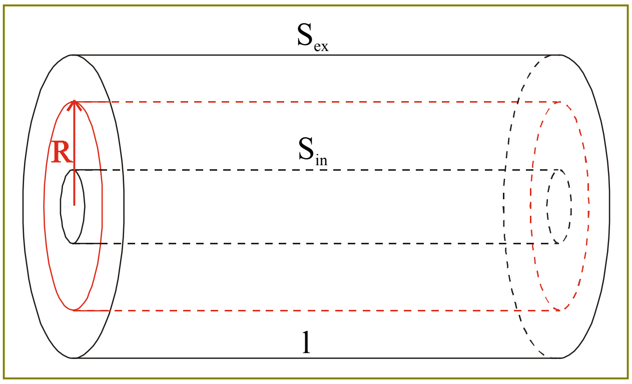


- **Pole elektryczne dwóch nieskończonych płaszczyzn równoległych naładowanych różnoimiennymi ładunkami o stałych gęstościach powierzchniowych $+\sigma$ i $-\sigma$**



Niebieskie strzałki oznaczają wektory natężeń pola elektrycznego, którego źródłem jest płaszczyzna naładowana ujemnie. Czerwone strzałki oznaczają wektory natężeń pola elektrycznego, którego źródłem jest płaszczyzna naładowana dodatnio.

- **Pole elektryczne powierzchni cylindrycznej (walcowej) naładowanej ze stałą gęstością powierzchniową ładunku σ**



R = promień naładowanej powierzchni cylindrycznej
S_{ex} = cylindryczna powierzchnia Gaussa współosiowa z naładowaną powierzchnią cylindryczną o promieniu $r \geq R$
S_{in} = cylindryczna powierzchnia Gaussa współosiowa z naładowaną powierzchnią cylindryczną o promieniu $r < R$
$l >> R$

Prawo Gaussa dla powierzchni S_{ex} :

$$\Phi_D = \sum_i q_i$$
$$r \geq R$$
$$\Phi_D = \varepsilon_o E \cdot 2\pi r \cdot l$$
$$\sum_i q_i = \sigma \cdot 2\pi R \cdot l = Q$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_o E \cdot 2\pi r \cdot l = \sigma \cdot 2\pi R \cdot l = Q$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma R}{\varepsilon_o r}} \qquad \boxed{E = \frac{Q}{2\varepsilon_o \pi r l}}$$

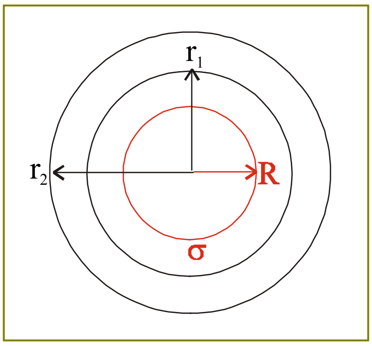
Prawo Gaussa dla powierzchni S_{in} :

$$\Phi_D = \sum_i q_i$$
$$r < R$$
$$\Phi_D = \varepsilon_o E \cdot 2\pi r \cdot l$$
$$\sum_i q_i = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E = 0}$$

$$l >> R$$
$$r \geq R$$
$$E = -\frac{d\varphi}{dr}$$
$$E = \frac{\sigma R}{\varepsilon_o r}$$
$$\int \frac{1}{r} dr = \ln|r|$$
$$\sigma = \frac{Q}{2\pi R l}$$
$$\lambda = \frac{Q}{l}$$

$$\Rightarrow$$

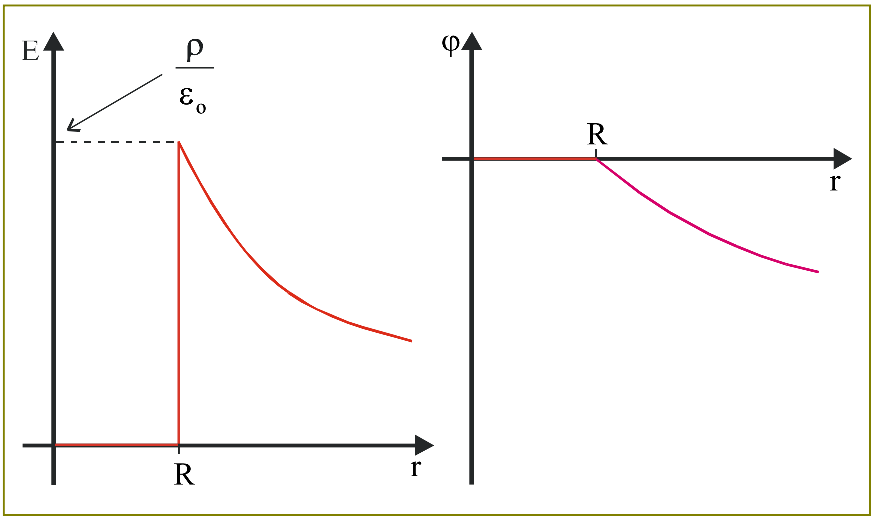


$$-d\varphi = Edr$$

$$-[\varphi(r_2) - \varphi(r_1)] = \int_{r_1}^{r_2} Edr$$

$$\varphi(r_1) - \varphi(r_2) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_o} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi(r_1) - \varphi(r_2) &= \frac{\sigma R}{\varepsilon_o} \ln \frac{r_2}{r_1} \\ &= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_o l} \ln \frac{r_2}{r_1} \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o} \ln \frac{r_2}{r_1} \end{aligned}}$$



$$r_1 = R$$
$$r_2 = r$$
$$\varphi(R) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi(R) - \varphi(r) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_o} \ln \frac{r}{R}$$

$$\boxed{\varphi(r) = -\frac{\sigma R}{\varepsilon_o} \ln \frac{r}{R}}$$

- **Pole elektryczne walca naładowanego ze stałą gęstością objętościową ładunku ρ**

R = promień naładowanego walca
S_{ex} = cylindryczna powierzchnia Gaussa współosiowa z naładowanym walcem o promieniu $r > R$
S_{in} = cylindryczna powierzchnia Gaussa współosiowa z naładowanym walcem o promieniu $r < R$
$l >> R$

Prawo Gaussa dla powierzchni S_{ex} :

$$\Phi_D = \sum_i q_i$$
$$r \geq R$$
$$\Phi_D = \varepsilon_o E \cdot 2\pi r \cdot l$$
$$\sum_i q_i = \rho \cdot \pi R^2 \cdot l = Q$$
$$\rho = \frac{Q}{\pi R^2 l}$$
$$\lambda = \frac{Q}{l}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_o E 2\pi r l = \rho \pi R^2 l$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{E = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o r}}$$

$$\Downarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_o}}$$

Prawo Gaussa dla powierzchni S_{in} :

$$\Phi_D = \sum_i q_i$$
$$r < R$$
$$\Phi_D = \varepsilon_o E \cdot 2\pi r \cdot l$$
$$\sum_i q_i = \rho \cdot \pi r^2 \cdot l$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_o E 2\pi r l = \rho \pi r^2 l$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{E = \frac{\rho r}{2\varepsilon_o}}$$

$r < R$

$E = -\frac{d\varphi}{dr}$

$E = \frac{\rho r}{2\varepsilon_o}$

$\int r dr = \frac{1}{2} r^2$

$\Rightarrow \quad -d\varphi = E dr$

$-\left[\varphi(r_2) - \varphi(r_1)\right] = \int_{r_1}^{r_2} E dr$

$\varphi(r_1) - \varphi(r_2) = \frac{\rho}{2\varepsilon_o} \int_{r_1}^{r_2} r dr \Rightarrow$

$$\boxed{\varphi(r_1) - \varphi(r_2) = \frac{\rho}{4\varepsilon_o}\left(r_2^2 - r_1^2\right)}$$

$\Downarrow$

$\boxed{r_1 = 0, \quad \varphi(r_1) = 0, \quad r_2 = r}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\varphi(r) = -\frac{\rho r^2}{4\varepsilon_o}}$

$r \geq R$

$E = -\frac{d\varphi}{dr}$

$E = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o r}$

$\int \frac{1}{r} dr = \ln|r|$

$\Rightarrow \quad -d\varphi = E dr$

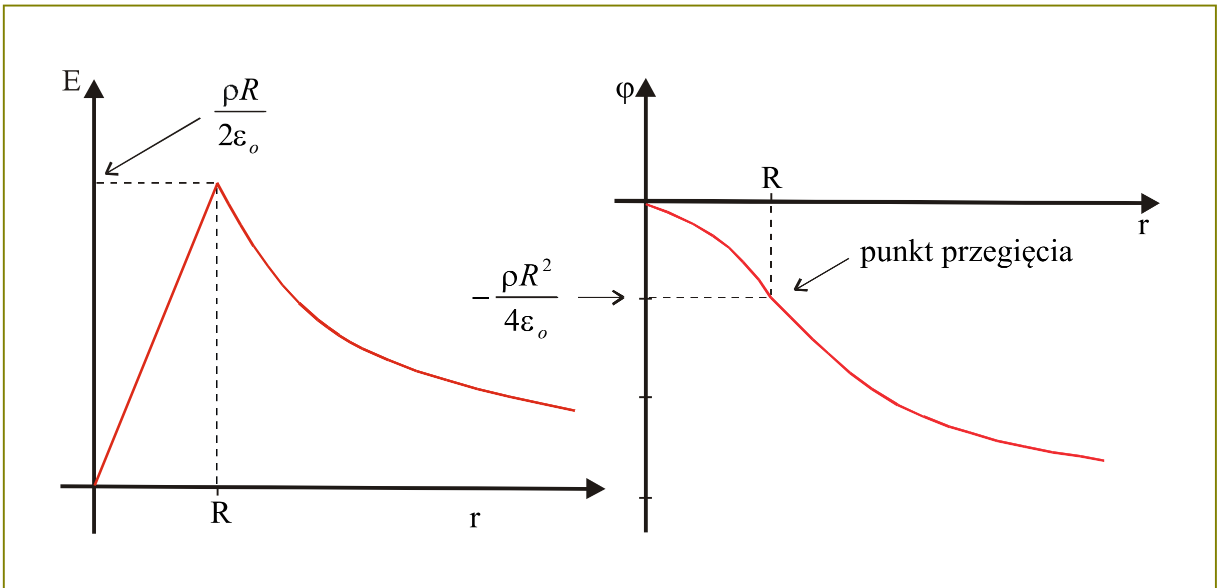
$\varphi(r_1) - \varphi(r_2) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr \Rightarrow$

$$\boxed{\varphi(r_1) - \varphi(r_2) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o} \ln\frac{r_2}{r_1}}$$

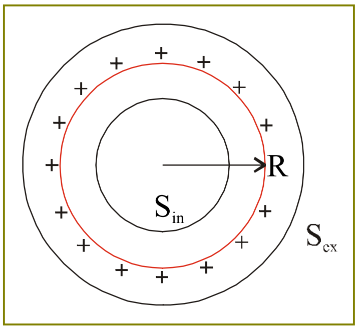
$\Downarrow$

$\boxed{r_1 = R, \quad r_2 = r}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\varphi(r) = \varphi(R) - \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o} \ln\frac{r}{R} = -\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o}\left(\frac{1}{2} + \ln\frac{r}{R}\right)}$

$\varphi(R) = -\frac{\rho R^2}{4\varepsilon_o}$



- **Pole elektryczne powierzchni kulistej (sferycznej) naładowanej ze stałą gęstością powierzchniową ładunku $+\sigma$**



R = promień sfery naładowanej elektrycznie
S_{ex} = powierzchnia Gaussa koncentryczna z naładowaną sferą o promieniu $r \geq R$
S_{in} = powierzchnia Gaussa koncentryczna z naładowaną sferą o promieniu $r < R$
r_{ex} i r_{in} = promienie powierzchni Gaussa S_{ex} i S_{in} koncentrycznych z naładowaną sferą

Prawo Gaussa dla powierzchni S_{ex} :

$$\Phi_D = \sum_i q_i \qquad r \geq R \qquad \Phi_D = \varepsilon_o E \cdot 4\pi r^2 \qquad \sum_i q_i = \sigma \cdot 4\pi R^2 = Q$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}} \qquad \boxed{\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}}$$

$$r \geq R \qquad E = -\frac{d\varphi}{dr} \qquad \varphi(\infty) = 0 \qquad E = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_o r^2} \qquad \int \frac{1}{r^2}\,dr = -\frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow -d\varphi = Edr$$

$$-[\varphi(\infty) - \varphi(r)] = \int_r^\infty Edr$$

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\int_r^\infty \frac{1}{r^2}\,dr$$

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{-1}{r}\right]_r^\infty \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{r}}$$

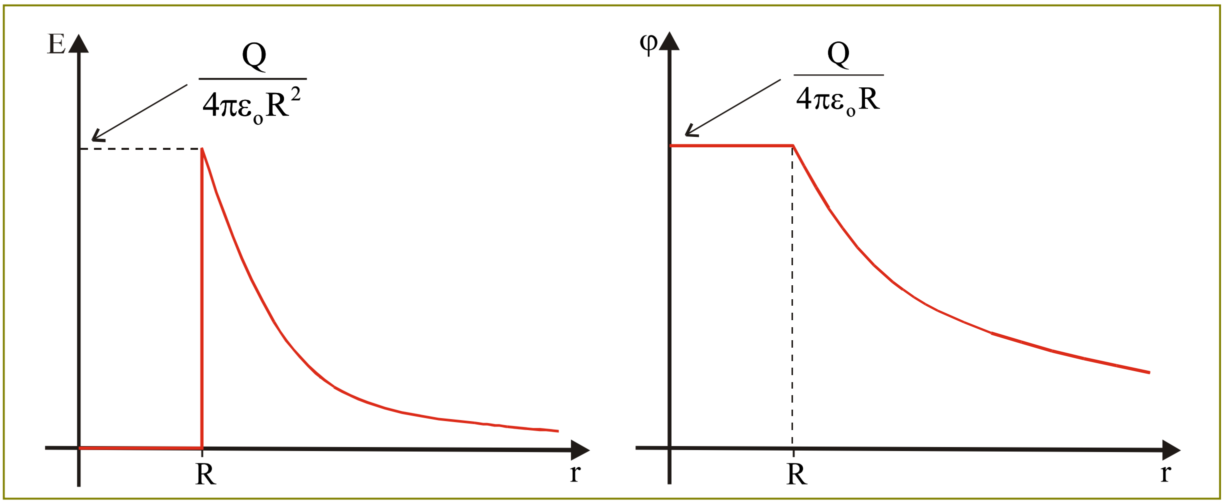
Prawo Gaussa dla powierzchni S_{in} :

$$r < R \qquad \Phi_D = \sum_i q_i \qquad \Phi_D = \varepsilon_o E \cdot 4\pi r^2 \qquad \sum_i q_i = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E = 0}$$

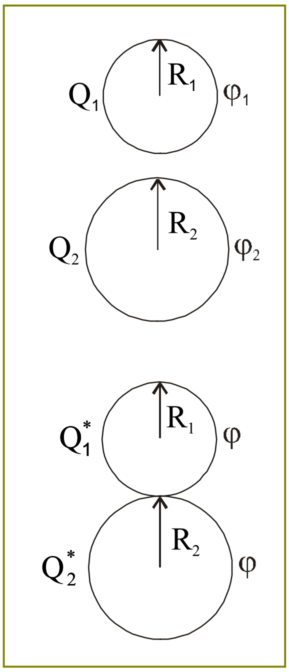
Natężenie pola elektrycznego, którego źródłem jest sfera naładowana ze stałą gęstością powierzchniową ładunku σ, jest
1. wewnątrz sfery ($r < R$) równe zeru,
2. na zewnątrz sfery ($r \geq R$) takie, jakby cały ładunek zgromadzony był w środku sfery.

PRZYKŁAD
Przykładem takiego rozmieszczenia ładunków jest naładowana kula metalowa, ponieważ ładunki gromadzą się tylko na jej powierzchni.



PRZYKŁAD

Zetknięto ze sobą dwie naładowane jednoimiennie metalowe kule, odpowiednio o promieniach R_1 i R_2 i potencjałach φ_1 i φ_2. Wyznaczmy potencjał wypadkowy tych kul.



$$\varphi_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o R_1}$$

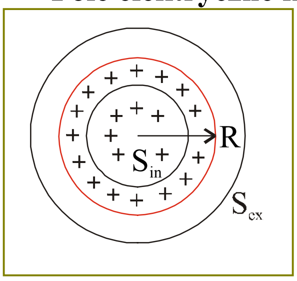
$$\varphi_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_o R_2}$$

$$\varphi = \frac{Q_1^*}{4\pi\varepsilon_o R_1}$$

$$\varphi = \frac{Q_2^*}{4\pi\varepsilon_o R_2}$$

$$Q_1 + Q_2 = Q_1^* + Q_2^* \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi = \frac{R_1\varphi_1 + R_2\varphi_2}{R_1 + R_2}}$$

- **Pole elektryczne kuli naładowanej ze stałą gęstością objętościową ładunku ρ**



R = promień kuli naładowanej elektrycznie
S_{ex} = powierzchnia Gaussa koncentryczna z naładowaną kulą o promieniu $r \geq R$
S_{in} = powierzchnia Gaussa koncentryczna z naładowaną kulą o promieniu $r < R$

Prawo Gaussa dla powierzchni S_{ex} :

$$r \geq R$$

$$\Phi_D = \sum_i q_i$$

$$\Phi_D = \varepsilon_o E \cdot 4\pi r^2$$

$$\sum_i q_i = \rho(4/3)\pi R^3 = Q$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}}$$

Prawo Gaussa dla powierzchni S_{in} :

$$r < R$$
$$\Phi_D = \sum_i q_i$$
$$\Phi_D = \varepsilon_o E \cdot 4\pi r^2$$
$$\sum_i q_i = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$
$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_o}}$$

$$\Downarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_o R^3}}$$

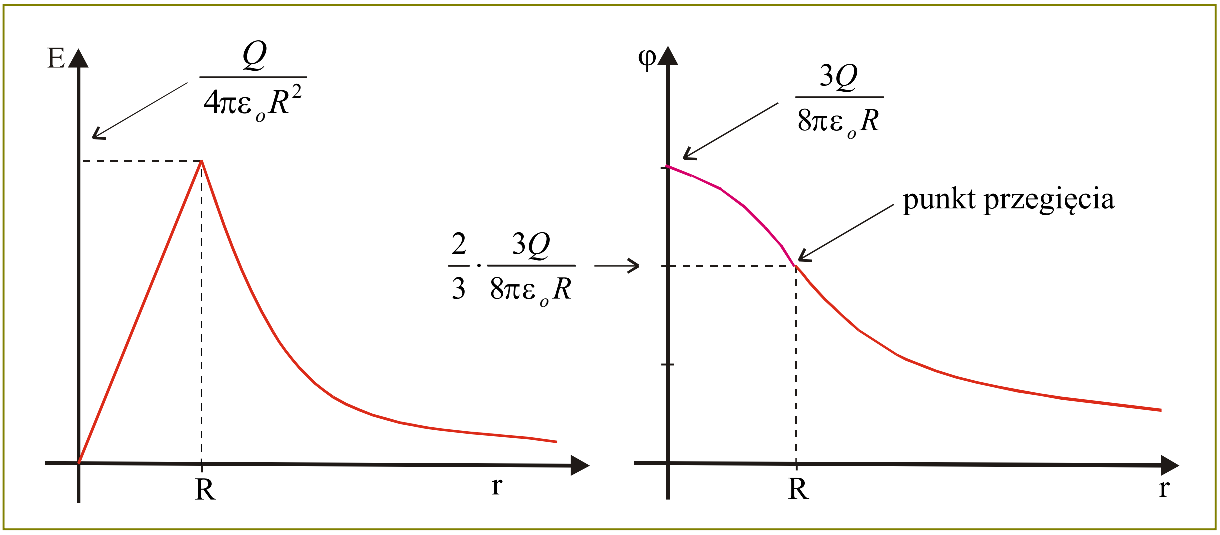
Natężenie pola elektrycznego, którego źródłem jest kula naładowana ze stałą gęstością objętościowa ρ, jest
1. wewnątrz kuli ($r < R$) takie, jakby źródłem pola była część całego ładunku znajdująca się w kuli o promieniu r, i zgromadzona w jej środku,
2. na zewnątrz kuli ($r \geq R$) takie, jakby cały ładunek zgromadzony był w środku kuli.

$$r \geq R$$
$$E = -\frac{d\varphi}{dr}$$
$$\varphi(\infty) = 0$$
$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r}$$
$$\int \frac{1}{r^2} dr = -\frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \quad -d\varphi = Edr$$
$$-[\varphi(\infty) - \varphi(r)] = \int_r^\infty Edr$$
$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\int_r^\infty \frac{1}{r^2} dr$$
$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\left[-\frac{1}{r}\right]_r^\infty \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{1}{r}}$$

$$r < R$$
$$E = -\frac{d\varphi}{dr}$$
$$\varphi(\infty) = 0$$
$$E_{in} = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_o R^3}$$
$$E_{ex} = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_o r^2}$$
$$\int rdr = \frac{1}{2}r^2$$
$$\int \frac{1}{r^2}dr = -\frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \quad -d\varphi = Edr$$
$$-[\varphi(\infty) - \varphi(r)] = \int_r^\infty Edr$$
$$\varphi(r) = \int_r^R E_{in}dr + \int_R^\infty E_{ex}dr$$
$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R^3}\int_r^R rdr + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr$$
$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R^3}\frac{1}{2}\left[r^2\right]_r^R + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{r}\right]_R^\infty$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\varphi(r) = \frac{3Q}{8\pi\varepsilon_o R} - \frac{Qr^2}{8\pi\varepsilon_o R^3}}$$



22 PRZEWODNIK W POLU ELEKTRYCZNYM

- **Naładowany przewodnik we własnym polu elektrycznym**

1. Nieskompensowane ładunki elektryczne gromadzą się tylko na zewnętrznej powierzchni naładowanego przewodnika.
2. Wewnątrz naładowanego przewodnika natężenie pola elektrycznego jest równe zeru.
3. Wnętrze naładowanego przewodnika jest ekwipotencjalne.
4. Na zewnętrznej powierzchni naładowanego przewodnika natężenie pola ma tylko składową normalną (prostopadłą) do tej powierzchni.
5. Powierzchnia naładowanego przewodnika jest ekwipotencjalna.
6. Składowa natężenia pola prostopadła do powierzchni naładowanego przewodnika jest proporcjonalna do lokalnej gęstości powierzchniowej ładunku $E_n = \sigma/\varepsilon_o$.
7. Gęstość powierzchniowa ładunku naładowanego przewodnika jest odwrotnie proporcjonalna do lokalnego promienia krzywizny $\sigma \sim 1/R$.

Spróbujemy wszystkie te twierdzenia udowodnić.

1. To, że nieskompensowane jednoimienne ładunki elektryczne gromadzą się tylko na zewnętrznej powierzchni metalu, jest wynikiem ich kulombowskiego odpychania się.
2. To, że wewnątrz metalu natężenie pola elektrycznego jest równe zeru, wynika z twierdzenia Gaussa, w związku z brakiem nieskompensowanego ładunku wewnątrz metalu.
3. To, że wnętrze metalu jest ekwipotencjalne, wynika z równania $\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\varphi$, w związku ze znikaniem natężenia pola wewnątrz metalu.

$\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\varphi$ Wewnątrz metalu $E = 0$.	$\Rightarrow$	Wewnątrz metalu $\varphi = \mathrm{const}$.

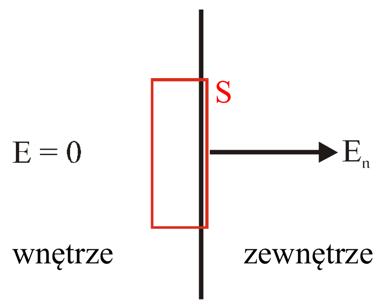
4. To, że natężenie pola elektrycznego na powierzchni naładowanego metalu posiada tylko składową normalną, czyli nie posiada składowej stycznej, wynika z (braku powierzchniowych prądów elektrycznych) $\mathrm{rot}\mathbf{E} = 0$ w punktach wewnątrz i na zewnątrz metalu, w związku ze znikaniem natężenia pola wewnątrz metalu.

Wewnątrz i na zewnątrz metalu $\mathrm{rot}\mathbf{E} = 0$. Wewnątrz metalu $\mathbf{E} = 0$.	$\Rightarrow$	Na powierzchni metalu $E_t = 0$, $E_n \neq 0$.

5. To, że powierzchnia naładowanego metalu jest ekwipotencjalna, wynika z **E** = -gradφ, w związku ze znikaniem na powierzchni metalu składowej stycznej natężenia pola elektrycznego.

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\varphi \\ \text{Na powierzchni metalu} \\ E_t = 0\ .\end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Na powierzchni metalu} \\ \varphi = \mathrm{const}\ .\end{array}}$$

6. To, że składowa natężenia pola prostopadła do powierzchni naładowanego metalu jest proporcjonalna do lokalnej gęstości powierzchniowej ładunku, wynika z twierdzenia Gaussa, w związku ze znikaniem natężenia pola wewnątrz metalu.



$$\Phi_D = \varepsilon_o E_n S = q$$

$$\sigma = \frac{q}{S}$$

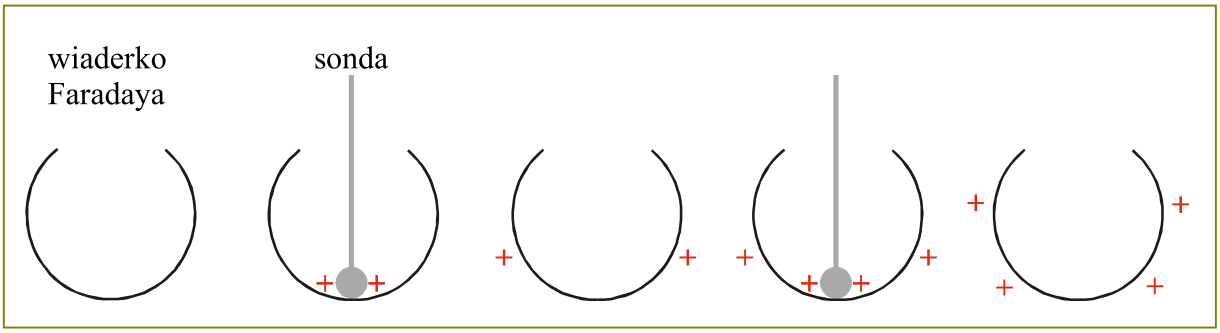
$$\Rightarrow \boxed{E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}}$$

7. To, że gęstość powierzchniowa ładunku jest odwrotnie proporcjonalna do lokalnego promienia krzywizny, pokażemy na przykładzie naładowanej kuli metalowej.

$$\boxed{\begin{array}{c}\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_o R} \\ \sigma = \dfrac{q}{4\pi R^2}\end{array}} \Rightarrow \boxed{\sigma \sim \frac{1}{R}}$$

PRZYKŁAD

Wiaderko (puszka) Faradaya. Gromadzenie się nieskompensowanych jednoimiennych ładunków elektrycznych tylko na zewnętrznej powierzchni przewodnika wykorzystuje się w wiaderku Faradaya, czyli metalowej powłoce sferycznej (wydrążonej kuli metalowej).



Wszystkie ładunki elektryczne znajdujące się na sondzie (próbniku), po dotknięciu nią (nim) wewnętrznej powierzchni wiaderka Faradaya, natychmiast gromadzą się na jego zewnętrznej powierzchni. Wiaderko Faradaya świetnie nadaje się na końcówkę przyrządów pomiarowych, takich jak elektrometry i elektroskopy, oraz na rezerwuar ładunków elektrycznych w maszynach elektrostatycznych i elektrostatycznym generatorze Van de Graaffa.

PRZYKŁAD

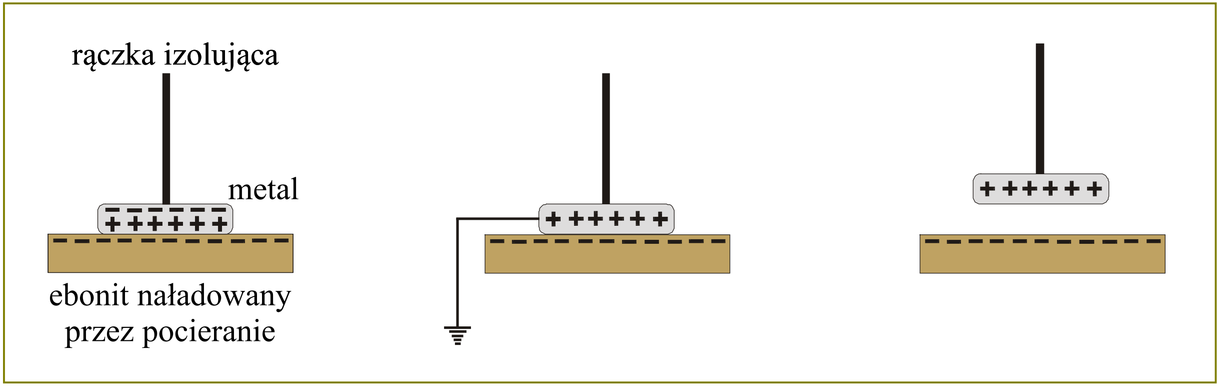
Ostrza. $E \sim \sigma \sim 1/R$. W pobliżu naładowanego ostrza natężenie pola elektrycznego jest tak duże, że powoduje jonizację otaczających go cząsteczek powietrza. W pobliżu ujemnie naładowanego ostrza wskutek wypływu elektronów powstają jony ujemne. W pobliżu dodatnio naładowanego ostrza, w skutek zasysania elektronów, powstają jony dodatnie. W obu przypadkach powstaje tzw. „wiatr elektryczny", którego istnienie można spektakularnie zademonstrować pochylaniem się płomienia świecy w kierunku od ostrza, lub obrotem wiatraczka. Wypływ elektronów z uziemionego ostrza wykorzystywany jest w piorunochronach.

- **Nienaładowany przewodnik w zewnętrznym polu elektrycznym**

1. Zewnętrzne pole elektryczne wywołuje w nienaładowanym przewodniku zjawisko indukcji elektrostatycznej, które polega na deformacji chmury swobodnych elektronów przewodnictwa. Na zewnętrznej powierzchni przewodnika indukuje się ładunek.

PRZYKŁAD

Elektrofor. Zjawisko indukcji elektrostatycznej wykorzystane jest w elektroforze do wytwarzania ładunków elektrycznych.



2. Natężenia obu pól, zewnętrznego i powstałego wewnątrz metalu w wyniku deformacji chmury elektronowej, znoszą się. Wypadkowe natężenie pola w dowolnym punkcie wewnątrz przewodnika, znajdującego się w zewnętrznym polu elektrycznym, jest równe zeru.

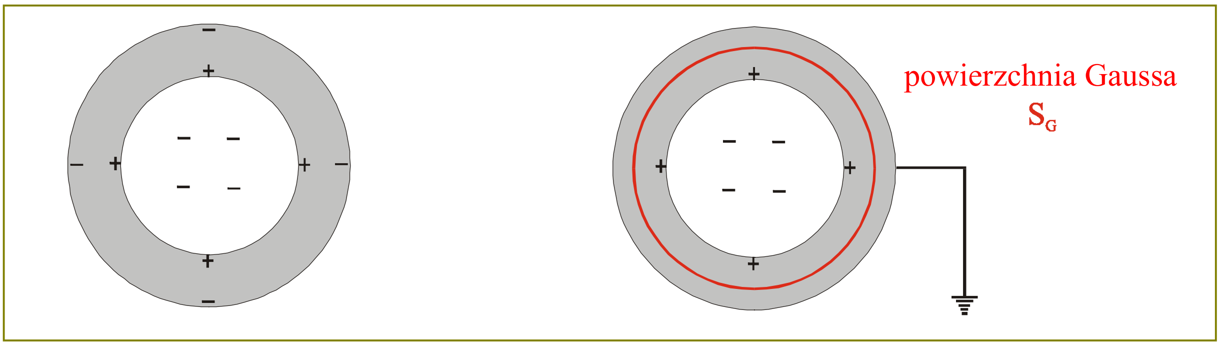
PRZYKŁAD

Ekran elektrostatyczny (osłona elektrostatyczna). Otoczenie urządzeń i przyrządów pomiarowych uziemioną blachą lub siatką metalową (klatka Faradaya) osłania je (ekranuje) przed wpływem zewnętrznego pola elektrostatycznego, ponieważ pole ładunków zewnętrznych znosi się z polem ładunków indukowanych przez nie na zewnętrznej powierzchni osłony.

3. Ładunki znajdujące się wewnątrz uziemionej osłony metalowej indukują na jej wewnętrznej powierzchni ładunek

$$-\oint\!\!\oint_S \sigma dS$$

równy im co do bezwzględnej wartości, ale przeciwnego znaku. Do ziemi odpływa ładunek równy ładunkowi wewnątrz osłony.



Uziemiona osłona metalowa ekranuje przestrzeń na zewnątrz osłony od ładunków znajdujących się wewnątrz osłony.

$$\oint\!\!\oint_{S_G} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon}\sum_i Q_i = 0$$

$$\sum_i Q_i = \oint\!\!\oint_S \sigma dS + \iiint_V \rho dV$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{-\oint\!\!\oint_S \sigma dS = \iiint_V \rho dV}$$

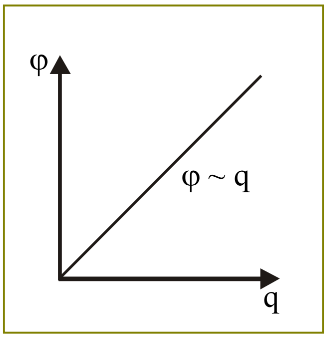
S = wewnętrzna powierzchnia osłony metalowej

$\iiint_V \rho dV =$ ładunek znajdujący się wewnątrz osłony metalowej

$-\oint\!\!\oint_S \sigma dS =$ ładunek znajdujący się na wewnętrznej powierzchni osłony

4. Wnętrze nienaładowanego przewodnika, znajdującego się w zewnętrznym polu elektrycznym, jest ekwipotencjalne.
5. Na powierzchni nienaładowanego przewodnika, znajdującego się w zewnętrznym polu elektrycznym, natężenie pola ma tylko składową prostopadłą do powierzchni przewodnika.
6. Powierzchnia nienaładowanego przewodnika, znajdującego się w zewnętrznym polu elektrycznym, jest powierzchnią ekwipotencjalną.
7. **Emisja polowa**. Silne pole elektryczne o natężeniu 10^8V/m i większym powoduje emisję elektronów z metalu. Zjawisko to nosi nazwę emisji polowej, zimnej emisji lub autoemisji. Gęstość prądu autoemisji nie zależy od temperatury emitera. Przykładem wykorzystania tego zjawiska jest mikroskop polowy.

- **Pojemność elektryczna odosobnionego przewodnika**



Pojemnością elektryczną C odosobnionego przewodnika nazywamy stosunek ładunku q, zgromadzonego na powierzchni przewodnika, do potencjału φ na jego powierzchni.

$$\boxed{C = \frac{q}{\varphi}}$$

PRZYKŁAD
Pojemność odosobnionej kuli metalowej:

$$C = \frac{q}{\varphi}$$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o R}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{C = 4\pi\varepsilon_o R}$$

23 ENERGIA POTENCJALNA UKŁADU ŁADUNKÓW W ZEWNĘTRZNYM POLU ELEKTRYCZNYM

- **Energia potencjalna ładunku w zewnętrznym polu elektrycznym**

Energią potencjalną W_p wzajemnego oddziaływania ładunku q z zewnętrznymi nieruchomymi ładunkami wytwarzającymi pole elektryczne, w danym punkcie tego pola, nazywamy pracę jaką wykonują siły pola przy przemieszczaniu ładunku q z danego punktu do nieskończoności (lub do punktu, w którym z założenia energia potencjalna jest równa zeru).

$$\begin{aligned} W_P &= W_{A\to\infty} \\ W_{A\to\infty} &= q(\varphi_A - \varphi_\infty) \\ \varphi_A &= \varphi \\ \varphi_\infty &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_P = q\varphi}$$

φ = potencjał pola zewnętrznego w punkcie zajętym przez ładunek q

Siłę działającą ze strony pola na ładunek q można wyrazić przez jego energię potencjalną.

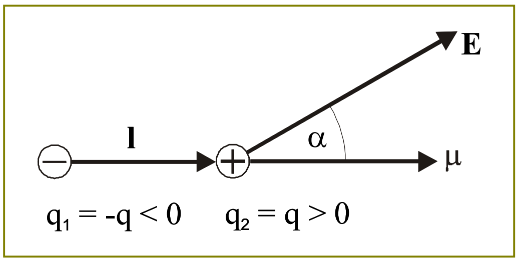
$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= q\mathbf{E} \\ \mathbf{E} &= -\mathrm{grad}\varphi \\ W_P &= q\varphi \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{F} = -\mathrm{grad} W_P}$$

- **Energia potencjalna dipola w zewnętrznym polu elektrycznym**

Obliczymy ponownie energię potencjalną wzajemnego oddziaływania dipola z zewnętrznymi nieruchomymi ładunkami wytwarzającymi pole elektryczne.

$$\begin{aligned} W_P &= q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2 \\ \varphi_2 - \varphi_1 &= \frac{\partial\varphi}{\partial l} l \\ \frac{\partial\varphi}{\partial l} l &= \mathbf{l}\cdot\mathrm{grad}\varphi \\ \mathbf{E} &= -\mathrm{grad}\varphi \\ \boldsymbol{\mu} &= q\mathbf{l} \end{aligned}$$

$$\boxed{W_P = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}}$$



$$\Rightarrow \boxed{W_P = -\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{E}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{W_P = -\mu E\cos\alpha}$$

φ_1 i φ_2 = potencjały zewnętrznego pola elektrycznego w punktach zajmowanych przez ładunki dipola q_1 i q_2

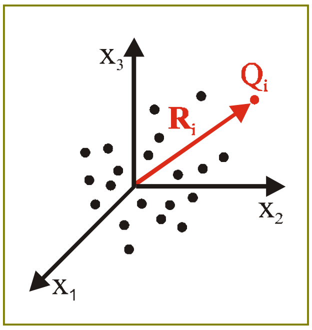
- **Energia potencjalna układu ładunków punktowych w zewnętrznym polu elektrycznym**

$$W_P = \sum_i Q_i \varphi(\mathbf{R}_i)$$

$\varphi(\mathbf{R}_i)$ = potencjał zewnętrznego pola elektrycznego w punkcie zajmowanym przez ładunek Q_i

$\mathbf{R}_i = \left(x_1^i, x_2^i, x_3^i\right)$ = promień wodzący i-tego ładunku

Jeżeli w obszarze, w którym znajduje się układ ładunków, pole zewnętrzne niewiele się zmienia, to energię potencjalną tego układu ładunków można rozwinąć w szereg Taylora.



$$W_P = \sum_i Q_i \varphi\left(x_1^i, x_2^i, x_3^i\right)$$

$$\varphi\left(x_1^i, x_2^i, x_3^i\right) = \varphi(0,0,0) + \sum_\lambda x_\lambda^i \left[\frac{\partial \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_\lambda}\right]_o + \frac{1}{2}\sum_\kappa \sum_\lambda x_\kappa^i x_\lambda^i \left[\frac{\partial^2 \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_\kappa \partial x_\lambda}\right]_o + \cdots$$

$$\Downarrow$$

$$W_P = \sum_i Q_i \varphi(0,0,0) + \sum_i Q_i \sum_\lambda x_\lambda^i \left[\frac{\partial \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_\lambda}\right]_o + \sum_i Q_i \frac{1}{2}\sum_\kappa \sum_\lambda x_\kappa^i x_\lambda^i \left[\frac{\partial^2 \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_\kappa \partial x_\lambda}\right]_o + \cdots$$

$$W_P = \varphi(0,0,0)\sum_i Q_i + \sum_\lambda \left[\frac{\partial \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_\lambda}\right]_o \sum_i Q_i x_\lambda^i + \frac{1}{2}\sum_\kappa \sum_\lambda \sum_i Q_i x_\kappa^i x_\lambda^i \left[\frac{\partial^2 \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_\kappa \partial x_\lambda}\right]_o + \cdots$$

$$\left[\frac{\partial \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_\lambda}\right]_o = -E_\lambda(0,0,0)$$

$$\sum_i Q_i x_\lambda^i = \mu_\lambda$$

$$\sum_\lambda \left[\frac{\partial \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_\lambda}\right]_o \cdot \sum_i Q_i x_\lambda^i = -\sum_\lambda E_\lambda(0,0,0)\cdot \mu_\lambda = -\mathbf{E}(0,0,0)\cdot \boldsymbol{\mu} = -\boldsymbol{\mu}\cdot \mathbf{E}(0,0,0)$$

$$\sum_i Q_i x_\kappa^i x_\lambda^i = d_{\kappa\lambda}$$

$$W_P = \varphi(0,0,0)\sum_i Q_i - \boldsymbol{\mu}\cdot \mathbf{E}(0,0,0) + \frac{1}{2}\sum_\kappa \sum_\lambda d_{\kappa\lambda} \left[\frac{\partial^2 \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_\kappa \partial x_\lambda}\right]_o + \cdots$$

$\varphi(0,0,0) =$ wartość potencjału pola zewnętrznego w początku układu współrzędnych

$\mathbf{E}(0,0,0) =$ wektor natężenia zewnętrznego pola elektrycznego w początku układu współrzędnych

$E_\lambda =$ składowe wektora natężenia pola elektrycznego w początku układu współrzędnych

$E_\lambda : E_1 = E_x,\ E_2 = E_y,\ E_3 = E_z$

$\boldsymbol{\mu} =$ wektor momentu dipolowego

$\mu_\lambda =$ składowe wektora momentu dipolowego

$\mu_\lambda : \mu_1 = \mu_x,\ \mu_2 = \mu_y,\ \mu_3 = \mu_z$

$d_{\kappa\lambda} =$ tensor momentu kwadrupolowego

$\left[\dfrac{\partial\varphi(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_\lambda}\right]_o =$ wartości pierwszych pochodnych potencjału pola zewnętrznego w początku układu współrzędnych

$\left[\dfrac{\partial^2\varphi(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_\kappa \partial x_\lambda}\right]_o =$ wartości drugich pochodnych potencjału pola zewnętrznego w początku układu współrzędnych

W wyrażeniu na energię potencjalną człon opisujący oddziaływanie kwadrupola z zewnętrznym polem elektrycznym przedstawimy w innej postaci.

$$\frac{1}{2}\sum_\kappa\sum_\lambda\sum_i Q_i x_\kappa^i x_\lambda^i \left[\frac{\partial^2\varphi(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_\kappa \partial x_\lambda}\right]_o =$$

$$R_i^2\delta_{\kappa\lambda}\left[\frac{\partial^2\varphi(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_\kappa \partial x_\lambda}\right]_o = 0$$

$$\sum_i Q_i\left(3x_\kappa^i x_\lambda^i - R_i^2\delta_{\kappa\lambda}\right) = D_{\kappa\lambda}$$

$$= \frac{1}{6}\sum_\kappa\sum_\lambda\sum_i Q_i\left\{3x_\kappa^i x_\lambda^i\left[\frac{\partial^2\varphi(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_\kappa \partial x_\lambda}\right]_o - R_i^2\delta_{\kappa\lambda}\left[\frac{\partial^2\varphi(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_\kappa \partial x_\lambda}\right]_o\right\} =$$

$$= \frac{1}{6}\sum_\kappa\sum_\lambda\sum_i Q_i\left(3x_\kappa^i x_\lambda^i - R_i^2\delta_{\kappa\lambda}\right)\left[\frac{\partial^2\varphi(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_\kappa \partial x_\lambda}\right]_o = \frac{1}{6}\sum_\kappa\sum_\lambda D_{\kappa\lambda}\left[\frac{\partial^2\varphi(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_\kappa \partial x_\lambda}\right]_o$$

Zbierzmy otrzymane wyniki.

$$\boxed{W_P = \varphi(0,0,0)\sum_i Q_i - \boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{E}(0,0,0) + \frac{1}{2}\sum_\kappa\sum_\lambda d_{\kappa\lambda}\left[\frac{\partial^2\varphi(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_\kappa \partial x_\lambda}\right]_o + \cdots}$$

$$\boxed{W_P = \varphi(0,0,0)\sum_i Q_i - \boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{E}(0,0,0) + \frac{1}{6}\sum_\kappa\sum_\lambda D_{\kappa\lambda}\left[\frac{\partial^2\varphi(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_\kappa \partial x_\lambda}\right]_o + \cdots}$$

PRZYKŁAD
Energia potencjalna jądra atomowego w zewnętrznym polu elektrycznym
Założymy, że dodatni ładunek jądra rozmieszczony jest ze stałą gęstością objętościową w obszarze elipsoidy obrotowej. Wybierzemy układ współrzędnych, którego osie pokrywają się z osiami elipsoidy.

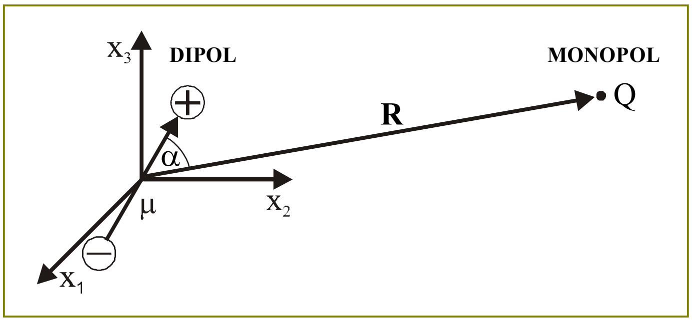
$$\sum_i Q_i = Ze, \qquad \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}, \qquad D_{xx} = D_{yy} = -\frac{1}{2}D_{zz}, \qquad D_{zz} = \frac{2Ze}{5}\left(c^2 - a^2\right) = \frac{4}{5}Ze\eta r^2$$

$$W_P = \varphi\sum_i Q_i - \boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{E} + \frac{1}{6}\left\{D_{xx}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right]_o + D_{yy}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right]_o + D_{zz}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right]_o\right\}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

$$W_P = Ze + \frac{1}{4}D_{zz}\left[\frac{\partial^2\varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial z^2}\right]_o$$

- **Energia potencjalna wzajemnego oddziaływania monopola z dipolem**



$$W_P = -\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{E}(0,0,0)$$
$$\mathbf{E}(0,0,0) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R^2}\cdot\frac{\mathbf{R}}{R}$$
$$\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{R} = \mu R\cos\alpha$$

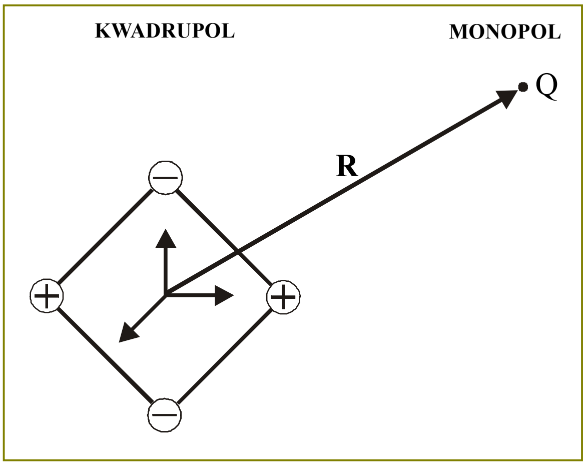
$$\Rightarrow \quad W_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{Q\,\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{R}}{R^3} \quad\Rightarrow\quad W_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{Q\mu\cos\alpha}{R^2}$$

- **Energia potencjalna wzajemnego oddziaływania monopola z kwadrupolem**

$$W_P = \frac{1}{2}\sum_\kappa\sum_\lambda d_{\kappa\lambda}\left[\frac{\partial^2\varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_\kappa \partial x_\lambda}\right]_o$$
$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{Q}{R}$$

$$\Downarrow$$

$$W_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{1}{2}\cdot Q\cdot\sum_\kappa\sum_\lambda d_{\kappa\lambda}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_\kappa \partial x_\lambda}\cdot\frac{1}{R}\right]_o$$



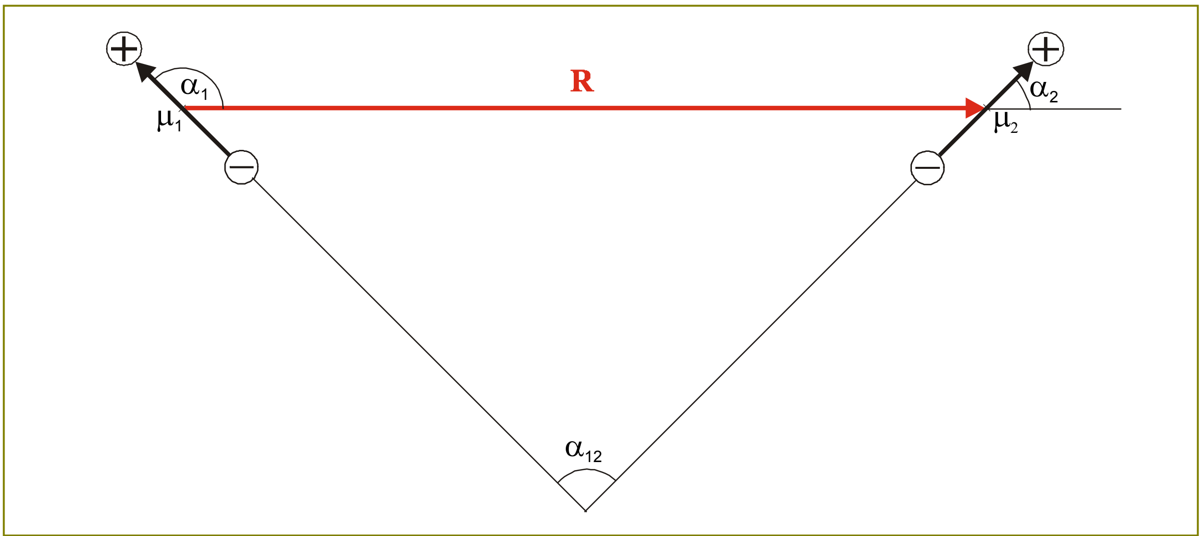
$$W_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{1}{2} \cdot Q \cdot \sum_\kappa \sum_\lambda d_{\kappa\lambda} \left[\frac{\partial^2}{\partial x_\kappa \partial x_\lambda} \cdot \frac{1}{R} \right]_o$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\kappa \partial x_\lambda} \cdot \frac{1}{R} = \frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left(\frac{\partial}{\partial x_\kappa} \cdot \frac{1}{R} \right) = \frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left(\frac{-x_\kappa}{R^3} \right) = -x_\kappa \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \cdot \frac{1}{R^3} - \frac{1}{R^3} \cdot \frac{\partial x_\kappa}{\partial x_\lambda} =$$

$$= \frac{3x_\kappa x_\lambda}{R^5} - \frac{1}{R^3} \cdot \delta_{\kappa\lambda} = \frac{1}{R^3}\left(\frac{3x_\kappa x_\lambda}{R^2} - \delta_{\kappa\lambda} \right)$$

$$W_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{R^3} \cdot \sum_\kappa \sum_\lambda d_{\kappa\lambda} \left(\frac{3x_\kappa x_\lambda}{R^2} - \delta_{\kappa\lambda} \right)$$

- **Energia potencjalna wzajemnego oddziaływania dipola z dipolem**



$$W_P = -\boldsymbol{\mu}_1 \cdot \mathbf{E}_2$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \left[\frac{3(\boldsymbol{\mu}_2 \cdot \mathbf{R})}{R^4} \cdot \frac{\mathbf{R}}{R} - \frac{\boldsymbol{\mu}_2}{R^3} \right]$$

$$\Rightarrow$$

$$W_P = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \left[\frac{3(\boldsymbol{\mu}_1 \cdot \mathbf{R})(\boldsymbol{\mu}_2 \cdot \mathbf{R})}{R^5} - \frac{\boldsymbol{\mu}_1 \cdot \boldsymbol{\mu}_2}{R^3} \right]$$

$$\boldsymbol{\mu}_1 \cdot \mathbf{R} = \mu_1 R \cos\alpha_1$$

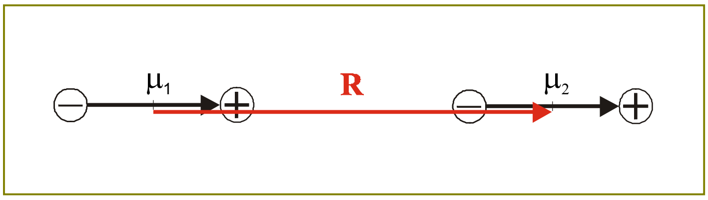
$$\boldsymbol{\mu}_2 \cdot \mathbf{R} = \mu_2 R \cos\alpha_2$$

$$\boldsymbol{\mu}_1 \cdot \boldsymbol{\mu}_2 = \mu_1 \mu_2 \cos\alpha_{12}$$

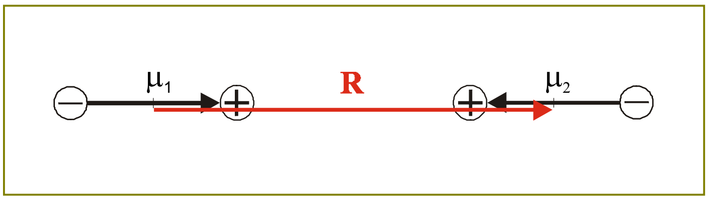
$$\alpha_{12} = |\alpha_1 - \alpha_2|$$

$$W_P = \frac{-\mu_1\mu_2}{4\pi\varepsilon_o R^3} \cdot (3\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 - \cos\alpha_{12})$$

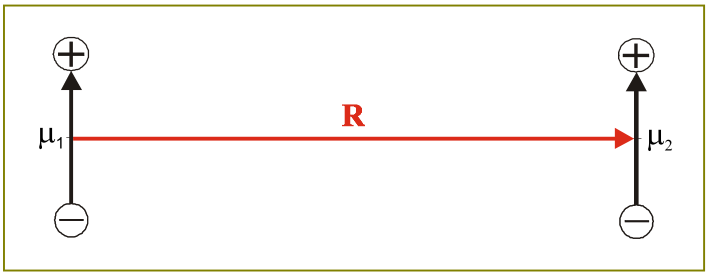
PRZYKŁAD



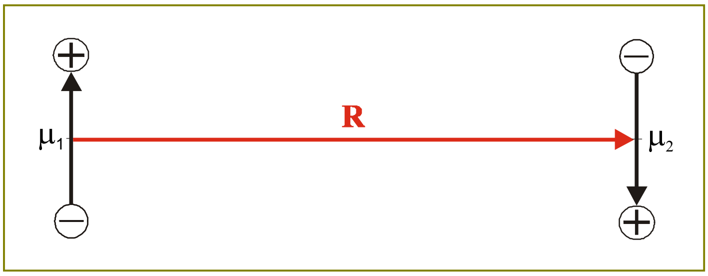
$$\alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 = 0 \quad \alpha_{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_P = \frac{-2\mu_1\mu_2}{4\pi\varepsilon_o R^3}}$$



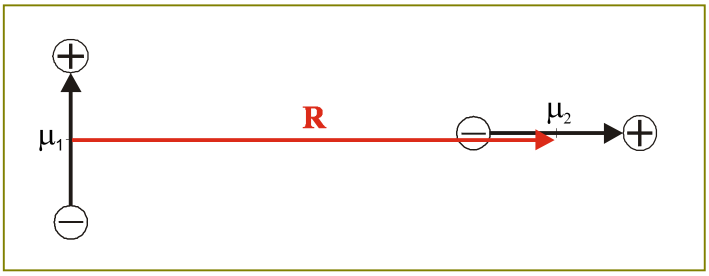
$$\alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 = \pi \quad \alpha_{12} = \pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_P = \frac{2\mu_1\mu_2}{4\pi\varepsilon_o R^3}}$$



$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2} \quad \alpha_{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_P = \frac{\mu_1\mu_2}{4\pi\varepsilon_o R^3}}$$



$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2} \quad \alpha_{12} = \pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_P = \frac{-\mu_1\mu_2}{4\pi\varepsilon_o R^3}}$$



$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} \quad \alpha_2 = 0 \quad \alpha_{12} = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_p = 0}$$

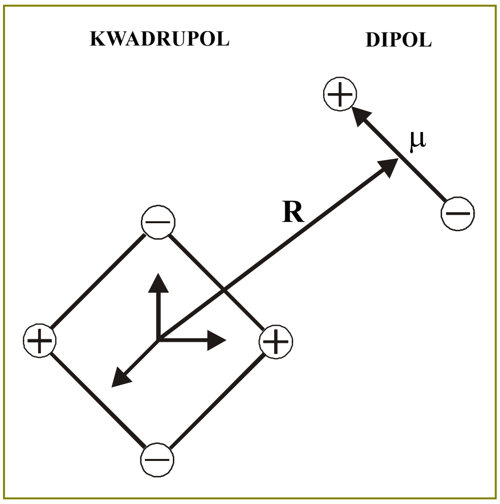
- **Energia potencjalna wzajemnego oddziaływania dipola z kwadrupolem**

$$W_P = \frac{1}{2} \cdot \sum_\kappa \sum_\lambda d_{\kappa\lambda} \left[\frac{\partial^2 \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_\kappa \partial x_\lambda} \right]_0$$

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{\mu \cos\alpha}{R^2} \quad , \quad \alpha = \angle(\mu, \mathbf{R})$$

$$\Downarrow$$

$$W_P = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{1}{2} \cdot \mu \cos\alpha \sum_\kappa \sum_\lambda d_{\kappa\lambda} \left[\frac{\partial}{\partial x_\kappa} \left(\frac{\partial}{\partial x_\lambda} \cdot \frac{1}{R^2} \right) \right]_0$$



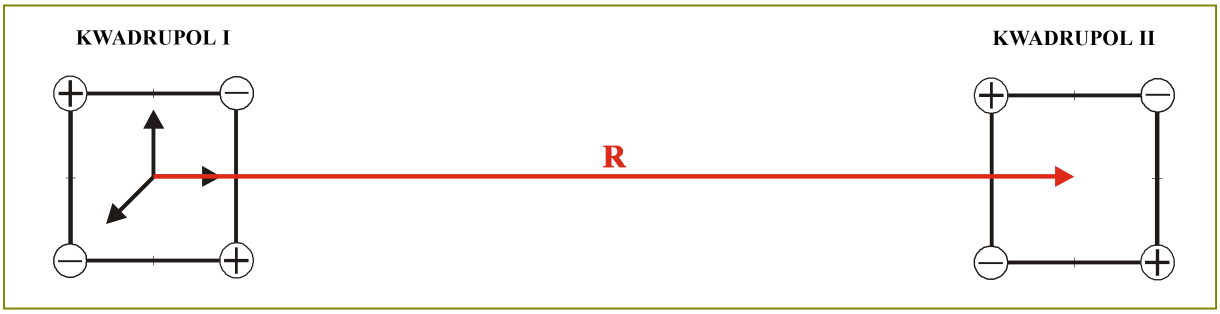
$$W_P = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{1}{2}\cdot\mu\cos\alpha\sum_{\kappa}\sum_{\lambda} d_{\kappa\lambda}\left[\frac{\partial}{\partial x_\kappa}\left(\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\cdot\frac{1}{R^2}\right)\right]_0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\kappa \partial x_\lambda}\frac{1}{R^2} = \frac{\partial}{\partial x_\kappa}\left(\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\frac{1}{R^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_\kappa}\left(\frac{-2x_\lambda}{R^4}\right) = -2\left(x_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\kappa}\frac{1}{R^4} + \frac{1}{R^4}\frac{\partial x_\lambda}{\partial x_\kappa}\right) =$$

$$= -2\left(\frac{-4x_\kappa x_\lambda}{R^6} + \frac{1}{R^4}\delta_{\kappa\lambda}\right) = \frac{2}{R^4}\left(\frac{4x_\kappa x_\lambda}{R^2} - \delta_{\kappa\lambda}\right)$$

$$W_P = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{\mu\cos\alpha}{R^4}\cdot\sum_{\kappa}\sum_{\lambda} d_{\kappa\lambda}\left(\frac{4x_\kappa x_\lambda}{R^2} - \delta_{\kappa\lambda}\right)$$

- **Energia potencjalna wzajemnego oddziaływania kwadrupola z kwadrupolem**



$$W_P = \frac{1}{2}\sum_{\alpha}\sum_{\beta} d^{I}_{\alpha\beta}\left[\frac{\partial^2\varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right]_0$$

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sum_{\mu}\sum_{\nu} d^{II}_{\mu\nu}\left(\frac{3x_\mu x_\nu}{R^5} - \frac{1}{R^3}\delta_{\mu\nu}\right)$$

$$\Downarrow$$

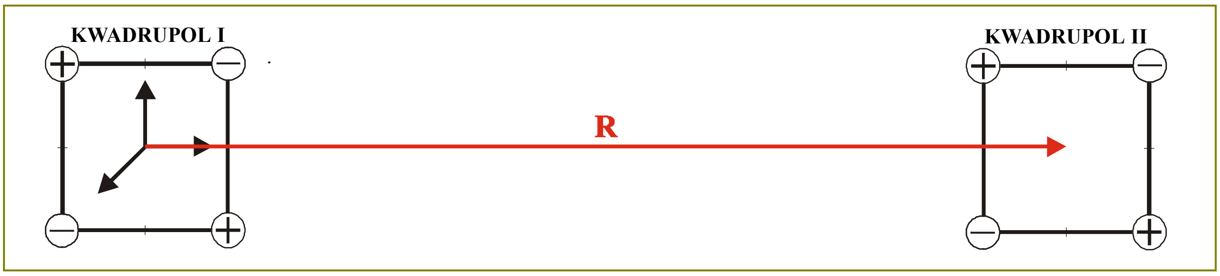
$$W_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{1}{4}\cdot\sum_{\alpha}\sum_{\beta} d^{I}_{\alpha\beta}\left[\frac{\partial}{\partial x_\beta}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\sum_{\mu}\sum_{\nu} d^{II}_{\mu\nu}\left(\frac{3x_\mu x_\nu}{R^5} - \frac{1}{R^3}\delta_{\mu\nu}\right)\right]_0$$

$$W_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{1}{4}\cdot\sum_{\alpha}\sum_{\beta} d^{I}_{\alpha\beta}\left[\frac{\partial}{\partial x_\beta}\sum_{\mu}\sum_{\nu} d^{II}_{\mu\nu}\left(\frac{-15x_\alpha x_\mu x_\nu}{R^7} + \frac{3}{R^5}\cdot\frac{\partial x_\mu x_\nu}{\partial x_\alpha} + \frac{3\delta_{\mu\nu}x_\alpha}{R^5}\right)\right]_0$$

$$W_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{R^5}\sum_{\alpha}\sum_{\beta}\sum_{\mu}\sum_{\nu} d^{I}_{\alpha\beta} d^{II}_{\mu\nu}\,\cdot$$

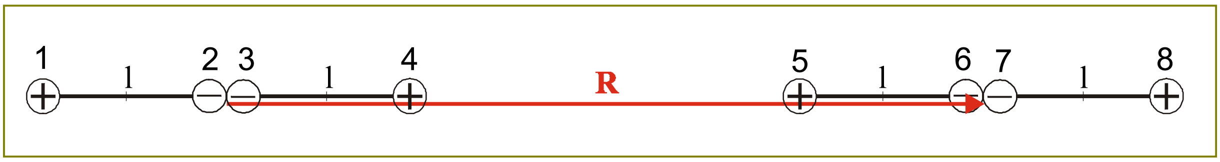
$$\cdot\left[\frac{105}{R^4}x_\alpha x_\beta x_\mu x_\nu - \frac{15}{R^2}\left(\delta_{\mu\nu}x_\alpha x_\beta + x_\beta\frac{\partial x_\mu x_\nu}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial x_\alpha x_\mu x_\nu}{\partial x_\beta}\right) + 3\left(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu} + \frac{\partial^2 x_\mu x_\nu}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right)\right]_0$$

- **Energia potencjalna wzajemnego oddziaływania kwadrupola z kwadrupolem - wzór szczegółowy**



$$
\begin{aligned}
W_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{R^5}\cdot\Bigg[& d^{I}_{xx}d^{II}_{xx}\left(\frac{105x^4}{R^4}-\frac{90x^2}{R^2}+9\right)+ \\
& +d^{I}_{yy}d^{II}_{yy}\left(\frac{105y^4}{R^4}-\frac{90y^2}{R^2}+9\right)+ \\
& +d^{I}_{zz}\,d^{II}_{zz}\left(\frac{105z^4}{R^4}-\frac{90z^2}{R^2}+9\right)+ \\
& +\left(d^{I}_{xx}d^{II}_{yy}+d^{I}_{yy}d^{II}_{xx}+4d^{I}_{xy}d^{II}_{xy}\right)\left(\frac{105x^2y^2}{R^4}-\frac{15x^2}{R^2}-\frac{15y^2}{R^2}+3\right)+ \\
& +\left(d^{I}_{xx}d^{II}_{zz}+d^{I}_{zz}d^{II}_{xx}+4d^{I}_{xz}d^{II}_{xz}\right)\left(\frac{105x^2y^2}{R^4}-\frac{15x^2}{R^2}-\frac{15z^2}{R^2}+3\right)+ \\
& +\left(d^{I}_{yy}d^{II}_{zz}+d^{I}_{zz}d^{II}_{yy}+4d^{I}_{yz}d^{II}_{zy}\right)\left(\frac{105y^2z^2}{R^4}-\frac{15y^2}{R^2}-\frac{15z^2}{R^2}+3\right)+ \\
& +\left(2d^{I}_{xx}d^{II}_{yz}+2d^{I}_{yz}d^{II}_{xx}+4d^{I}_{xy}d^{II}_{xz}+4d^{I}_{xz}d^{II}_{xy}\right)\left(\frac{105x^2yz}{R^4}-\frac{15yz}{R^2}\right)+ \\
& +\left(2d^{I}_{yy}d^{II}_{xz}+2d^{I}_{xz}d^{II}_{yy}+4d^{I}_{xy}d^{II}_{yz}+4d^{I}_{yz}d^{II}_{xy}\right)\left(\frac{105xy^2z}{R^4}-\frac{15xz}{R^2}\right)+ \\
& +\left(2d^{I}_{zz}d^{II}_{xy}+2d^{I}_{xy}d^{II}_{zz}+4d^{I}_{xz}d^{II}_{yz}+4d^{I}_{yz}d^{II}_{xz}\right)\left(\frac{105xyz^2}{R^4}-\frac{15xy}{R^2}\right)+ \\
& +\left(2d^{I}_{xx}d^{II}_{xy}+2d^{I}_{xy}d^{II}_{xx}\right)\left(\frac{105x^3y}{R^4}-\frac{45xy}{R^2}\right)+ \\
& +\left(2d^{I}_{xx}d^{II}_{xz}+2d^{I}_{xz}d^{II}_{xx}\right)\left(\frac{105x^3z}{R^4}-\frac{45xz}{R^2}\right)+ \\
& +\left(2d^{I}_{yy}d^{II}_{xy}+2d^{I}_{xy}d^{II}_{yy}\right)\left(\frac{105xy^3}{R^4}-\frac{45xy}{R^2}\right)+ \\
& +\left(2d^{I}_{yy}d^{II}_{yz}+2d^{I}_{yz}d^{II}_{yy}\right)\left(\frac{105y^3z}{R^4}-\frac{45yz}{R^2}\right)+ \\
& +\left(2d^{I}_{zz}d^{II}_{xz}+2d^{I}_{xz}d^{II}_{zz}\right)\left(\frac{105xz^3}{R^4}-\frac{45xz}{R^2}\right)+ \\
& +\left(2d^{I}_{zz}d^{II}_{yz}+2d^{I}_{yz}d^{II}_{zz}\right)\left(\frac{105yz^3}{R^4}-\frac{45yz}{R^2}\right)\Bigg]
\end{aligned}
$$

PRZYKŁAD
Energia potencjalna wzajemnego oddziaływania dwóch kwadrupoli liniowych leżących na wspólnej osi:



Pierwszy sposób

$$d_{xx} = 2Ql^2, \quad Q > 0$$

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \frac{2Ql^2}{4\pi\varepsilon_o R^3}$$

$$W_P = \frac{1}{2}\sum_{\alpha}\sum_{\beta} d_{\alpha\beta} \cdot \left[\frac{\partial^2 \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right]_0$$

$$R = x$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{x^3} = \frac{12}{x^5}$$

$$\Rightarrow \quad W_P = \frac{1}{2} d_{xx} \cdot \left[\frac{\partial^2 \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x^2}\right]_0$$

$$\Downarrow$$

$$\Rightarrow \quad W_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot 2Ql^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{x^3}\right]_0$$

$$\Downarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{W_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{24Q^2 l^4}{R^5}}$$

Drugi sposób

$$W_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{Q_1Q_5}{R} + \frac{Q_1Q_6}{R+l} + \frac{Q_1Q_7}{R+l} + \frac{Q_1Q_8}{R+2l} + \frac{Q_2Q_5}{R-l} + \frac{Q_2Q_6}{R} + \frac{Q_2Q_7}{R} + \frac{Q_2Q_8}{R+l} + \right.$$

$$\left. + \frac{Q_3Q_5}{R-l} + \frac{Q_3Q_6}{R} + \frac{Q_3Q_7}{R} + \frac{Q_3Q_8}{R+l} + \frac{Q_4Q_5}{R-2l} + \frac{Q_4Q_6}{R-l} + \frac{Q_4Q_7}{R-l} + \frac{Q_4Q_8}{R}\right]$$

$$W_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{6Q^2}{R} - \frac{4Q^2}{R+l} - \frac{4Q^2}{R-l} + \frac{Q^2}{R+2l} + \frac{Q^2}{R-2l}\right]$$

$$W_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{24Q^2 l^4}{R^5\left(1 + \frac{3l^2}{R^2} - \frac{4l^4}{R^4}\right)}$$

$$\xrightarrow{R \gg l} \quad \boxed{W_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{24Q^2 l^4}{R^5}}$$

Trzeci sposób

$$D_{xx} = 2\sum_i Q_i x_i^2 = 2\left(Ql^2 + 0 + 0 + Ql^2\right) = 4Ql^2$$

$$D_{yy} = -\sum_i Q_i x_i^2 = -2Ql^2$$

$$D_{zz} = -\sum_i Q_i x_i^2 = -2Ql^2$$

$$W_P = \frac{1}{6}\left(D_{xx}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + D_{yy}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + D_{zz}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)$$

$$D_{yy} = D_{zz} = -\frac{1}{2}D_{xx}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$$

$$D_{xx} = 4Ql^2$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{2Ql^2}{R^3}$$

$$R = x$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{x^3} = \frac{12}{x^5}$$

$$\Rightarrow \quad W_P = \frac{1}{6}D_{xx}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)\right]$$

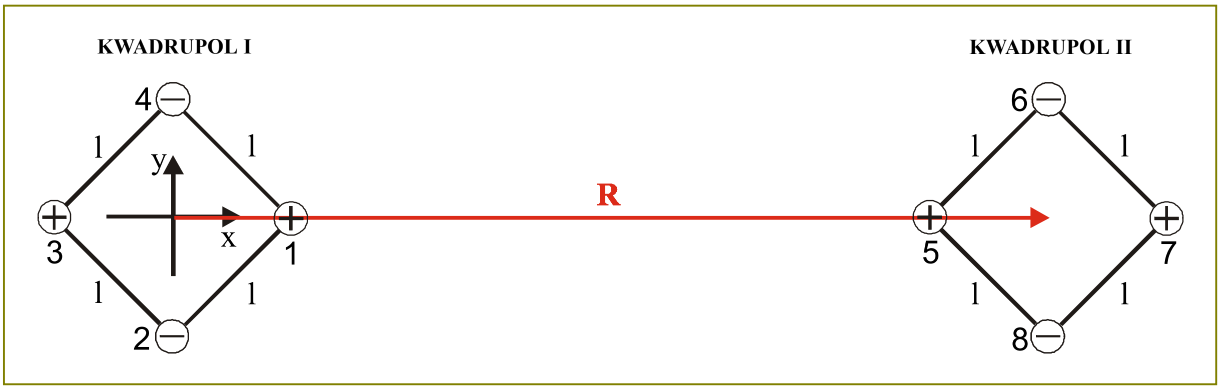
$$\Downarrow$$

$$\Rightarrow \quad W_P = \frac{1}{4}D_{xx}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{W_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{24Q^2 1^4}{R^5}}$$

PRZYKŁAD



$$d^{I}_{xx} = Ql^2$$

$$d^{I}_{yy} = -Ql^2$$

$$d^{II}_{xx} = Ql^2$$

$$d^{II}_{yy} = -Ql^2$$

$$x = R$$

$$y = 0$$

$$W_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{R^5}\cdot\left[d^{I}_{xx}d^{II}_{xx}\left(\frac{105x^4}{R^4} - \frac{90x^2}{R^2} + 9\right) + d^{I}_{yy}d^{II}_{yy}\left(\frac{105y^4}{R^4} - \frac{90y^2}{R^2} + 9\right) + \right.$$

$$\left. + \left(d^{I}_{xx}d^{II}_{yy} + d^{I}_{yy}d^{II}_{xx}\right)\left(\frac{105x^2y^2}{R4} - \frac{15x^2}{R^2} - \frac{15y^2}{R^2} + 3\right)\right]$$

$$\boxed{W_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{57}{4}\cdot\frac{Q^2 1^4}{R^5}}$$

24 ENERGIA POTENCJALNA WZAJEMNEGO ODDZIAŁYWANIA MIĘDZY PUNKTOWYMI ŁADUNKAMI ELEKTRYCZNYMI

- **Energia potencjalna wzajemnego oddziaływania dwóch ładunków punktowych**

Energia potencjalna W_p wzajemnego oddziaływania układu dwóch ładunków punktowych q_1 i q_2, znajdujących się w odległości r_{12} od siebie, jest równa pracy jaką wykonują siły elektryczne przy rozsuwaniu tych ładunków na odległość nieskończenie wielką.

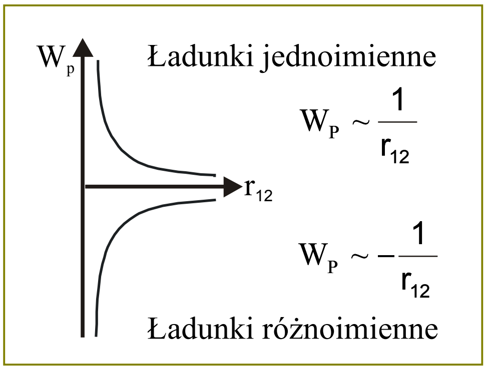
$$W_P = W_{A\to B}$$
$$W_{A\to B} = q(\varphi_A - \varphi_B)$$
$$q = q_2$$
$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{q_1}{r_{12}}$$
$$\varphi_B = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{W_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{q_1 q_2}{r_{12}}}$$

$$\Downarrow$$

$W_P > 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ ODPYCHANIE

$W_P < 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ PRZYCIĄGANIE



Ujemny przyrost energii potencjalnej układu ładunków, związany ze zmianą położenia tych ładunków względem siebie, równy jest pracy wykonywanej przez siły elektryczne (działające między ładunkami) podczas zmiany ich względnego położenia.

$$\boxed{W_{\text{sił el}} = -\Delta W_p}$$

- Energię potencjalną W_p wzajemnego oddziaływania układu dwóch ładunków punktowych q_1 i q_2 wyrazimy w innej postaci.

$$W_P = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o r_{12}}$$
$$\varphi_1 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_o r_{12}}$$
$$\varphi_2 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_o r_{21}}$$
$$r_{12} = r_{21}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{W_P = \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2)}$$

$$\Downarrow$$

Ogólnie:

$$\boxed{W_P = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} q_k\varphi_k}$$

φ_1 = potencjał pola pochodzący od ładunku q_2 w punkcie zajmowanym przez ładunek q_1

φ_2 = potencjał pola pochodzący od ładunku q_1 w punkcie zajmowanym przez ładunek q_2

φ_k = potencjał pola pochodzący od wszystkich ładunków prócz ładunku q_k w punkcie zajmowanym przez ładunek q_k

- **Energia potencjalna wzajemnego oddziaływania dowolnego układu ładunków punktowych**

$$W_P = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} q_k \varphi_k$$

$$\varphi_k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{q_i}{r_{ki}}$$

$$r_{ki} = r_{ik}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{W_P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_k q_i}{r_{ki}} \quad , \quad i \neq k}$$

PRZYKŁAD

Energia potencjalna wzajemnego oddziaływania trzech ładunków punktowych q_1, q_2, q_3 :

$$W_P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_1}{r_{21}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_3 q_1}{r_{31}} + \frac{q_3 q_2}{r_{32}} \right)$$

$$\boxed{W_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right)}$$

Rozważania o energii potencjalnej zakończymy, podając jeszcze raz jej definicję.

Energia potencjalna wzajemnego oddziaływania układu ładunków punktowych jest równa pracy jaką wykonują

1. siły zewnętrzne przy tworzeniu tego układu ze spoczywających ładunków znajdujących się w nieskończenie dużej odległości od siebie, lub
2. siły wewnętrzne przy likwidacji tego układu polegającej na usunięciu każdego ładunku oddzielnie do nieskończoności, tak by w stanie końcowym odległość między każdą parą ładunków była nieskończenie duża.

Oczywiście w obu przypadkach zakładamy, że energia potencjalna jest równa zeru w stanie, gdy odległość między każdą parą ładunków jest nieskończenie duża.

- **Energia potencjalna wzajemnego oddziaływania ciągłego rozkładu ładunków**

Wzór $W_P = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} q_k \varphi_k$ dostosujemy do przypadku ciągłego rozkładu ładunków w danej objętości z gęstością objętościową $\rho = dq/dV$, na danej powierzchni z gęstością powierzchniową $\sigma = dq/ds$, na danej linii z gęstością liniową $\lambda = dq/dl$.

$$q = \iiint_V \rho dV , \quad q = \iint_S \sigma dS , \quad q = \int_l \lambda dl$$

$$\boxed{W_P = \frac{1}{2}\iiint_V \rho\varphi dV + \frac{1}{2}\iint_S \sigma\varphi dS + \frac{1}{2}\int_l \lambda\varphi dl}$$

φ = potencjał pola wszystkich ładunków objętościowych, powierzchniowych i liniowych w elemencie objętości dV, na elemencie powierzchni dS i na elemencie liniowym dl

25 ENERGIA POLA ELEKTRYCZNEGO

- **Energia pola elektrycznego ciągłego rozkładu ładunków**

Wzór $W_P = \frac{1}{2}\iiint\limits_V \rho\varphi dV + \frac{1}{2}\iint\limits_S \sigma\varphi dS + \frac{1}{2}\int\limits_l \lambda\varphi dl$ sprowadzimy do postaci $W_P = \frac{1}{2}\varepsilon_o \iiint\limits_V E^2 dV$, której można nadać piękną interpretacje fizyczną. Dla prostoty rozpatrzymy przypadek $\sigma = 0,\ \lambda = 0$.

$$W_P = \frac{1}{2}\iiint\limits_V \rho\varphi dV,\ \sigma = 0,\ \lambda = 0$$

Twierdzenie Greena

$$\iiint\limits_V \left[\varphi\nabla^2\varphi + (\nabla\varphi)^2\right] dV = \oiint\limits_S \varphi\nabla\varphi \cdot d\mathbf{S}$$

$$\nabla\varphi = \mathrm{grad}\varphi = -\mathbf{E}$$

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

$$\oiint\limits_S \varphi\nabla\varphi \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \text{bo} \quad \varphi(\infty) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \iiint\limits_V \left(-\frac{\rho\varphi}{\varepsilon_o} + E^2\right) dV = 0$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon_o \iiint\limits_V E^2 dV = \frac{1}{2}\iiint\limits_V \rho\varphi dV = W_P$$

$$\boxed{W_P = \frac{1}{2}\varepsilon_o \iiint\limits_V E^2 dV}$$

Energia $W = \frac{1}{2}\varepsilon_o \iiint\limits_V E^2 dV$ jest energią pola elektrycznego zlokalizowaną w przestrzeni z gęstością objętościową $w \overset{df}{=} \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2}\varepsilon_o E^2$.

Energia pola elektrycznego jest sumą energii własnych ładunków będących źródłem pola elektrycznego i energii wzajemnego oddziaływania tych ładunków. Energia własna ładunku jest równa pracy jaką wykonałyby siły wzajemnego odpychania się tworzących go składników przy hipotetycznym oddalaniu się ich do nieskończoności. Dodatnia energia własna ładunków jest niemniejsza od energii wzajemnego oddziaływania między nimi. Prześledźmy to na przykładzie dwóch ładunków q_1 i q_2, które są źródłem pól o natężeniach $\mathbf{E}_1$ i $\mathbf{E}_2$. Energia pola wypadkowego o natężeniu $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ wyniesie:

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_o \iiint\limits_V E^2 dV = \frac{1}{2}\varepsilon_o \iiint\limits_V E_1^2 dV + \frac{1}{2}\varepsilon_o \iiint\limits_V E_2^2 dV + \frac{1}{2}\varepsilon_o \iiint\limits_V 2(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2) dV,$$

$$W = W_{11} + W_{22} + W_{12},$$

$$W_{11} = \frac{1}{2}\varepsilon_o \iiint\limits_V E_1^2 dV,$$

$$W_{22} = \frac{1}{2}\varepsilon_o \iiint\limits_V E_2^2 dV,$$

$$W_{12} = \frac{1}{2}\varepsilon_o \iiint\limits_V 2(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2) dV = \varepsilon_o \iiint\limits_V (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2) dV.$$

W_{11}, W_{22} = energie własne ładunków q_1 i q_2
W_{12} = energia wzajemnego oddziaływania ładunków q_1 i q_2

- **Energia pola elektrycznego odosobnionego naładowanego przewodnika** jest równa pracy jaką należy wykonać, aby go naładować. Niech dW oznacza pracę jaką należy wykonać, aby przenieść ładunek dq z nieskończoności na przewodnik.

$$dW = (\varphi - \varphi_\infty)dq$$
$$\varphi_\infty = 0$$
$$dq = Cd\varphi$$
$$q = C\varphi$$
$$\int \varphi d\varphi = \frac{1}{2}\varphi^2$$

$$\Rightarrow \quad dW = \varphi dq$$

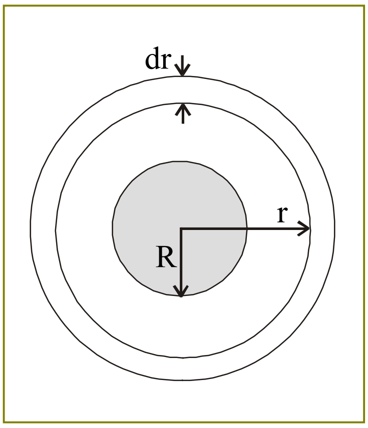
$$W = \int_0^\varphi \varphi dq = \int_0^\varphi C\varphi d\varphi = C\int_0^\varphi \varphi d\varphi = \frac{C\varphi^2}{2}$$

$$\boxed{W = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q\varphi}{2} = \frac{q^2}{2C}}$$

PRZYKŁAD

Energia pola równomiernie naładowanej kuli o promieniu R:

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_o \iiint_V E^2 dV$$
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{q}{r^2}$$
$$dV = 4\pi r^2 dr$$
$$\int \frac{1}{r^2}dr = -\frac{1}{r}$$
$$C = 4\pi\varepsilon_o R$$



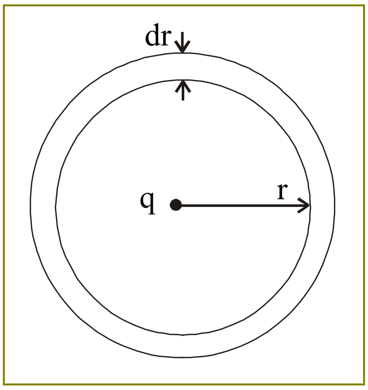
$$W = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_o}\int_R^\infty \frac{1}{r^2}dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_o}\left[-\frac{1}{r}\right]_R^\infty = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_o R}$$

$$\Downarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{W = \frac{q^2}{2C}}$$

- **Energia własna ładunku punktowego**

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_o \iiint_V E^2 dV$$
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{q}{r^2}$$
$$dV = 4\pi r^2 dr$$
$$\int \frac{1}{r^2}dr = -\frac{1}{r}$$



$$W = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_o}\int_0^\infty \frac{1}{r^2}dr = -\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{r}\right]_0^\infty = \infty$$

$$\Downarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{W = \infty}$$

UWAGA

Ładunek punktowy ma nieskończenie wielką energię własną. Przytoczone powyżej rozumowanie jest wynikiem nieporozumienia. Elektrodynamika klasyczna nie czyni żadnych założeń o strukturze ładunków i prądów. Ładunek punktowy jest pojęciem nieprecyzyjnym, modeluje on tylko symetrycznie sferyczne rozkłady ładunków (powierzchnia sferyczna naładowana ze stałą gęstością powierzchniową ładunku σ i kula naładowana ze stałą gęstością objętościową ładunku ρ w odległości od środka każdej z nich nie mniejszej niż promień odpowiednio sfery i kuli) oraz dowolny układ ładunków w odpowiednio dużej odległości od punktu obserwacji. Jak uczy fizyka kwantowa małe ładunki są obiektami rozmytymi w przestrzeni.

26 RUCH ŁADUNKÓW W POLU ELEKTRYCZNYM

- **Przyspieszenie, energia kinetyczna, prędkość i pęd ładunku w jednorodnym stałym polu elektrycznym**

$$F = ma \qquad F = qE \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = \frac{q}{m} \cdot E}$$

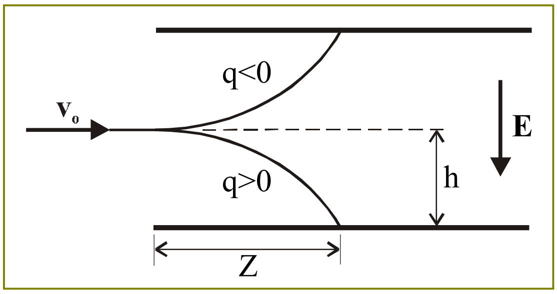
$$E_k = \frac{mv^2}{2} \qquad W = \Delta E_k \qquad W = qU \qquad p = mv \qquad E_k = \frac{p^2}{2m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta E_k = qU}$$

$$\boxed{\Delta E_k = qU} \xrightarrow{v_o = 0} \boxed{E_k = qU} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}} \Rightarrow \boxed{p = \sqrt{2mqU}}$$

- **Równoległe i antyrównoległe wejście ładunku w jednorodne stałe pole elektryczne**

$\rightarrow \mathbf{E} = \mathrm{const}$, $\mathbf{v_o} = 0$, $q > 0$	$\Rightarrow$	$\rightarrow \mathbf{F} = \mathrm{const}$ ruch prostoliniowy jednostajnie przyspieszony
$\rightarrow \mathbf{E} = \mathrm{const}$, $\mathbf{v_o} = 0$, $q < 0$	$\Rightarrow$	$\leftarrow \mathbf{F} = \mathrm{const}$ ruch prostoliniowy jednostajnie przyspieszony
$\rightarrow \mathbf{E} = \mathrm{const}$, $\rightarrow \mathbf{v_o}$, $q > 0$	$\Rightarrow$	$\rightarrow \mathbf{F} = \mathrm{const}$ ruch prostoliniowy jednostajnie przyspieszony
$\rightarrow \mathbf{E} = \mathrm{const}$, $\rightarrow \mathbf{v_o}$, $q < 0$	$\Rightarrow$	$\leftarrow \mathbf{F} = \mathrm{const}$ ruch prostoliniowy jednostajnie opóźniony, a po zatrzymaniu się i zmianie kierunku prędkości – jednostajnie przyspieszony
$\rightarrow \mathbf{E} = \mathrm{const}$, $\leftarrow \mathbf{v_o}$, $q > 0$	$\Rightarrow$	$\rightarrow \mathbf{F} = \mathrm{const}$ ruch prostoliniowy jednostajnie opóźniony, a po zatrzymaniu się i zmianie kierunku prędkości – jednostajnie przyspieszony
$\rightarrow \mathbf{E} = \mathrm{const}$, $\leftarrow \mathbf{v_o}$, $q < 0$	$\Rightarrow$	$\leftarrow \mathbf{F} = \mathrm{const}$ ruch prostoliniowy jednostajnie przyspieszony

- **Prostopadłe wejście ładunku w jednorodne stałe pole elektryczne**



$$F = qE$$
$$F = ma$$
$$h = \frac{at^2}{2}$$
$$Z = v_o t$$

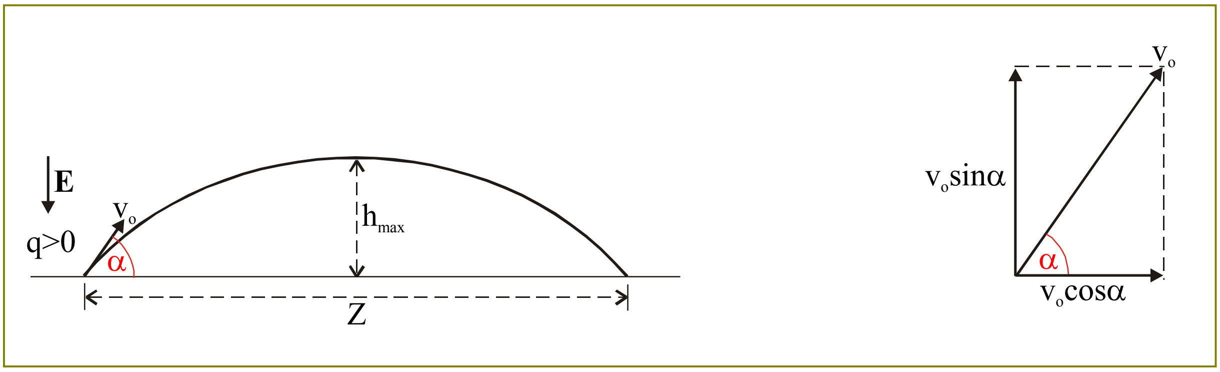
$$\boxed{a = \frac{q}{m}\cdot E}$$

$$\boxed{t = \sqrt{\frac{2h}{a}}}$$

$$\boxed{Z = v_o\sqrt{\frac{2h}{\frac{q}{m}\cdot E}}}$$

$$\boxed{\frac{q}{m} = \frac{2hv_o^2}{E^2Z^2}}$$

- **Skośne wejście ładunku w jednorodne stałe pole elektryczne**



$t_\uparrow = ?$
$v = v_o + at$
$t \to t_\uparrow$
$v \to 0$
$v_o \to v_o \sin\alpha$
$a \to -\frac{q}{m}\cdot E$
$t = 2t_\uparrow$
$h_{max} = ?$
$S = \frac{v_o + v}{2}\cdot t$
$S \to h_{max}$
$v_o \to v_o \sin\alpha$
$t \to t_\uparrow$
$Z = ?$
$Z = v_o \cos\alpha \cdot t$
$2\cos\alpha\sin\alpha = \sin 2\alpha$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{v - v_o}{a}$$

$$\Downarrow$$

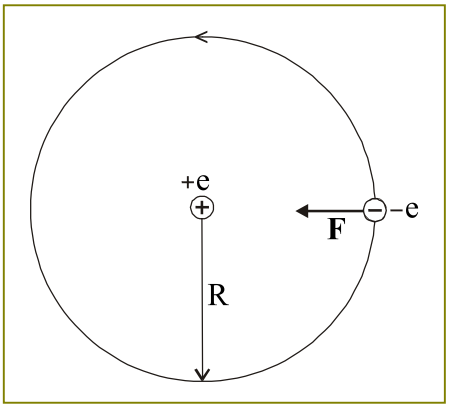
$$\Rightarrow \quad \boxed{t_\uparrow = \frac{v_o \sin\alpha}{\frac{q}{m}\cdot E}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \frac{2v_o \sin\alpha}{\frac{q}{m}\cdot E}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{h_{max} = \frac{v_o^2 \sin^2\alpha}{2\cdot\frac{q}{m}\cdot E}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{Z = \frac{2v_o^2 \cos\alpha \sin\alpha}{\frac{q}{m}\cdot E}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Z = \frac{v_o^2 \sin 2\alpha}{\frac{q}{m}\cdot E}}$$

$t_\uparrow$ = czas, po którym ładunek znajdzie się w wierzchołku paraboli

- **Atom wodoru (model Bohra)**



$$\mathbf{F}_d = \mathbf{F}_e$$
$$\mathbf{F}_d = -\frac{m_e v^2}{R}\cdot\frac{\mathbf{R}}{R}$$
$$\mathbf{F}_e = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o R^2}\cdot\frac{\mathbf{R}}{R}$$
$$W_k = \frac{mv^2}{2}$$
$$W_P = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_o R}$$
$$W = W_k + W_P$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m_e v^2}{R} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o R^2}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{R = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o m_e v^2}}$$
$$\Downarrow$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{W_k = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_o R}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{W = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_o R}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{W_k}{W_P} = -\frac{1}{2}}$$

Przeprowadzone obliczenia pozornie wyglądają na poprawne. Zgodnie z fizyką klasyczną, krążący wokół jądra elektron powinien emitować energię w postaci fali elektromagnetycznej i po torze spiralnym spaść na jądro. Według Bohra, elektron poruszając się wokół jądra po tzw. **stacjonarnych orbitach**, spełniających warunek

$$m_e v_n R_n = n\hbar, \qquad (n = 1, 2, 3, 4, \ldots),$$

nie emituje energii.

$$m_e v_n R_n = n\hbar$$
$$R_n = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o m_e}\cdot\frac{1}{v_n^2}$$
$$v_n = \frac{2\pi R_n}{T_n}$$
$$W_n = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{1}{R_n}$$
$$e = 1{,}602\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$$
$$m_e = 9{,}109\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$$
$$h = 6{,}625\cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$$
$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}054\cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{R_n = \frac{4\pi\varepsilon_o\hbar^2}{m_e e^2}\cdot n^2}$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{T_n = \frac{32\pi^3\varepsilon_o^2\hbar^3}{m_e e^4}\cdot n^3 = \frac{4\varepsilon_o^2 h^3}{m_e e^4}\cdot n^3}$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{v_n = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o\hbar}\cdot\frac{1}{n}}$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{W_n = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2\varepsilon_o\hbar^2}\cdot\frac{1}{n^2}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} R_n &\sim n^2 \\ T_n &\sim n^3 \end{aligned}}$$

$$v_n = \frac{2\pi R_n}{T_n} \sim \frac{R_n}{T_n} \sim \frac{1}{n}$$

$$p_n = m_e v_n \sim v_n \sim \frac{1}{n}$$

$$a_n = \frac{v_n^2}{R_n} \sim \frac{1}{n^4}$$

$$F_n = m_e a_n \sim a_n \sim \frac{1}{n^4}$$

$$L_n = m_e v_n R_n \sim v_n R_n \sim n$$

$$W_{kn} = \frac{m_e v_n^2}{2} \sim v_n^2 \sim \frac{1}{n^2}$$

$$W_{pn} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o R_n} \sim -\frac{1}{n^2}$$

$$W_n = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_o R_n} \sim -\frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} R_n &\sim n^2 \\ T_n &\sim n^3 \\ v_n &\sim \frac{1}{n} \\ p_n &\sim \frac{1}{n} \\ a_n &\sim \frac{1}{n^4} \\ F_n &\sim \frac{1}{n^4} \\ L_n &\sim n \\ W_{kn} &\sim \frac{1}{n^2} \\ W_{pn} &\sim -\frac{1}{n^2} \\ W_n &\sim -\frac{1}{n^2} \end{aligned}}$$

n = główna liczba kwantowa, czyli numer dozwolonej stacjonarnej orbity
R_n = promień n-tej dozwolonej stacjonarnej orbity
T_n = okres obiegu n-tej dozwolonej stacjonarnej orbity
v_n = prędkość elektronu na n-tej stacjonarnej orbicie
p_n = pęd elektronu na n-tej stacjonarnej orbicie
a_n = przyspieszenie dośrodkowe elektronu na n-tej stacjonarnej orbicie
F_n = siła dośrodkowa działająca na elektron na n-tej stacjonarnej orbicie
L_n = moment pędu elektronu na n-tej stacjonarnej orbicie
W_{kn} = energia kinetyczna atomu wodoru, gdy elektron znajduje się na n-tej orbicie
W_{pn} = energia potencjalna atomu wodoru, gdy elektron znajduje się na n-tej orbicie
W_n = energia całkowita atomu wodoru, gdy elektron znajduje się na n-tej orbicie

KONDENSATOR PŁASKI

1 KONDENSATOR PŁASKI I JEGO POJEMNOŚĆ

- **Kondensator płaski** stanowi układ dwóch płaskich równoległych płytek metalowych, zwanych jego okładkami, naładowanych ładunkami o takich samych wartościach bezwzględnych, ale przeciwnych znakach.

U = napięcie między okładkami kondensatora
Q = ładunek na dodatniej okładce kondensatora

- **Pojemnością C kondensatora** nazywamy stosunek ładunku Q na okładce dodatniej do napięcia U między okładkami.

$$\boxed{C = \frac{Q}{U}}$$

UWAGA

Dla danego kondensatora: $C = \text{const}$, $U \sim Q$.

- Kondensator płaski modelowany jest dwoma nieskończonymi płaszczyznami równoległymi naładowanymi różnoimiennymi ładunkami o gęstościach powierzchniowych $+\sigma$ i $-\sigma$.

Z prawa Gaussa wynika, że w obszarze między tymi płaszczyznami:

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_o \varepsilon_r} \quad \text{lub} \quad E = \frac{Q}{\varepsilon_o \varepsilon_r S}},$$

a na zewnątrz $E = 0$.

E = natężenie pola elektrycznego w obszarze między okładkami kondensatora
σ = gęstość powierzchniowa ładunku, czyli stosunek ładunku Q zgromadzonego na danej powierzchni do pola S tej powierzchni
$\sigma = Q/S$
ε_o = przenikalność dielektryczna próżni
$\varepsilon_o = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ F/m
ε_r = względna przenikalność dielektryczna ośrodka lub stała dielektryczna, czyli liczba mówiąca ile razy pojemność danego kondensatora z dielektrykiem, znajdującym się między jego okładkami, jest większa od pojemności tego kondensatora, gdy między jego okładkami jest próżnia

$\varepsilon_r \geq 1$
$\varepsilon_r = 1$ tylko dla próżni
$\varepsilon_r > 1$ dla wszystkich dielektryków
$\varepsilon_r = 1{,}00059$ dla powietrza

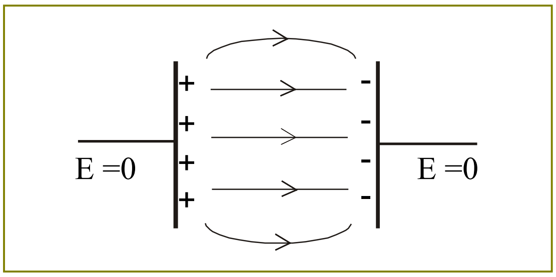
$$C = \frac{Q}{U} \qquad E = \frac{U}{d} \qquad E = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d}}$$

S = pole powierzchni jednej okładki kondensatora
d = odległość między okładkami kondensatora

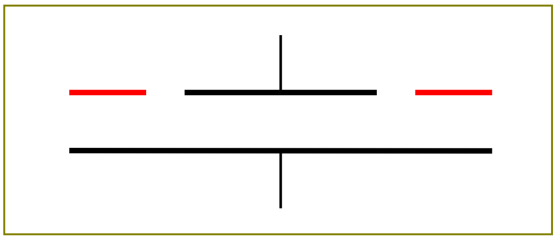
UWAGA

Ostatni wzór jest tym dokładniejszy, im d^2 jest mniejsze od S.

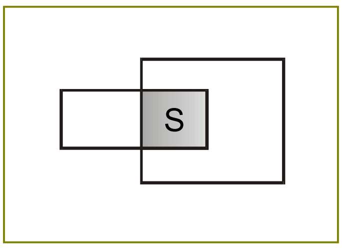
- Na zewnątrz kondensatora nie ma pola elektrycznego, E = 0. Wewnątrz kondensatora pole elektryczne jest jednorodne. Na brzegach okładek kondensatora pole elektryczne bywa niejednorodne.



W celu zlikwidowania niejednorodności pola elektrycznego na brzegach okładek kondensatora płaskiego stosuje się w praktyce pierścień ochronny.

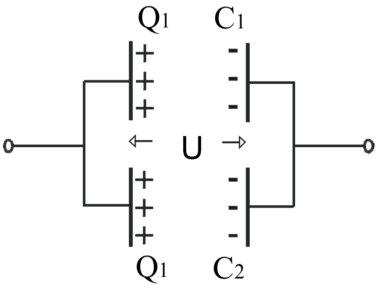


- Jeżeli kondensator tworzą płytki różnego kształtu i wielkości, to przy przybliżonym obliczaniu pojemności za S podstawiamy pole tzw. powierzchni czynnej, czyli wspólnej części płyt znajdujących się nad sobą.



2 POŁĄCZENIA KONDENSATORÓW

- **Połączenie równoległe kondensatorów**

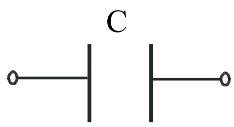


$C_1 = Q_1/U$

$C_2 = Q_2/U$

$C = (Q_1+Q_2)/U$

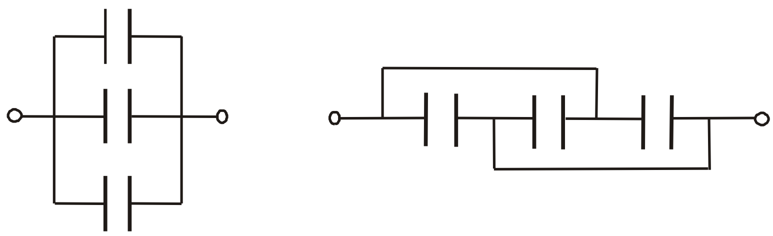
$\Rightarrow$



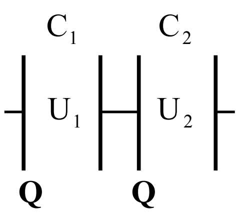
$\boxed{C = C_1+C_2}$

W połączeniu równoległym kondensatorów napięcie na każdym kondensatorze jest takie samo, a pojemność zastępcza jest równa sumie pojemności poszczegól nych kondensatorów.

UWAGA
Połączenie równoległe trzech kondensatorów można przedstawić na różne sposoby:



- **Połączenie szeregowe kondensatorów**

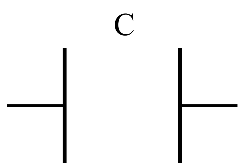


$C_1 = Q/U_1$

$C_2 = Q/U_2$

$C = Q/(U_1 + U_2)$

$\Rightarrow$



$\boxed{1/C = (1/C_1) + (1/C_2)}$

UWAGA

Korzystając ze wzoru $\boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$, pamiętaj o odwróceniu wyniku $\boxed{\frac{1}{C} \rightarrow C}$

lub używaj postaci $\boxed{C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}}$.

W połączeniu szeregowym kondensatorów ładunek na każdej okładce jest co do bezwzględnej wartości taki sam, a odwrotność pojemności zastępczej jest równa sumie odwrotności pojemności poszczególnych kondensatorów.

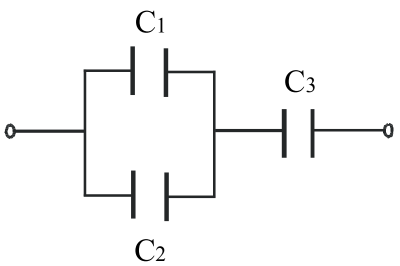
TWIERDZENIE
W przypadku połączenia szeregowego n identycznych kondensatorów, każdy o pojemności C, pojemność zastępcza jest n-krotnie mniejsza niż C.

$$C_{zast} = \frac{C}{n}$$

TWIERDZENIE
W połączeniu szeregowym dowolnej liczby różnych kondensatorów pojemność zastępcza jest mniejsza od najmniejszej pojemności w sieci.

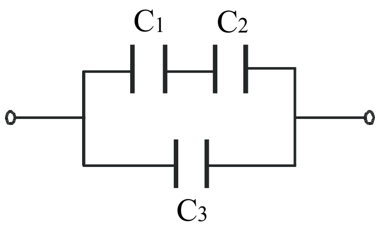
- **Połączenia mieszane kondensatorów szeregowo-równoległe**

Poniżej podamy dwa proste przykłady połączeń mieszanych kondensatorów szeregowo-równoległych. Obliczenie pojemności zastępczej polega na kolejnym upraszczaniu danej sieci kondensatorów.

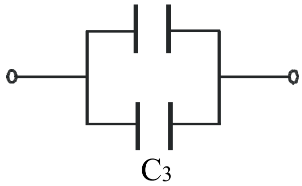


$$C_{12} = C_1 + C_2$$

$$C_{123} = \frac{(C_1+C_2)C_3}{C_1+C_2+C_3}$$

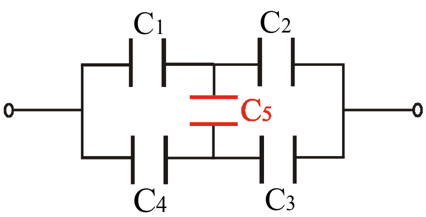


$$C_{12} = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$$



$$C_{123} = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2} + C_3$$

- **Połączenia mostkowe kondensatorów**



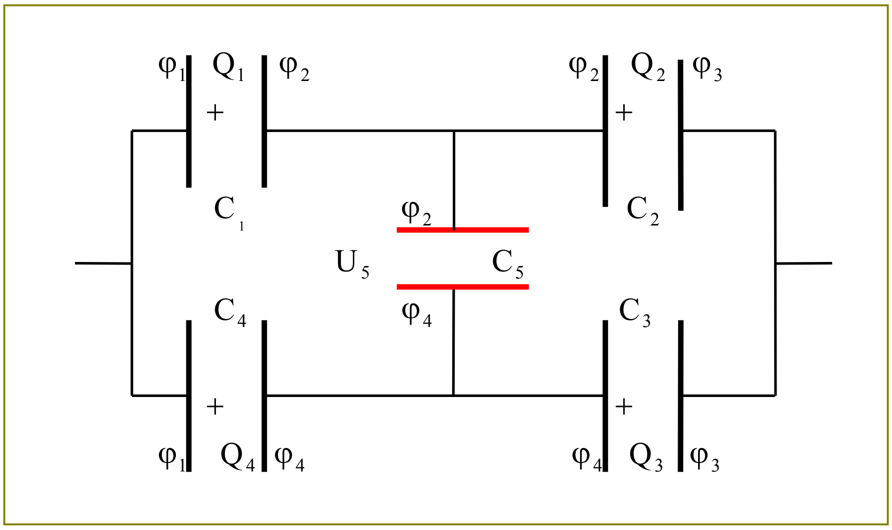
Sieć ta jest przykładem mostkowego połączenia kondensatorów. W przypadku, gdy $C_1C_3 = C_2C_4$, kondensator C_5 można pominąć, redukując sieć do połączenia szeregowo-równoległego.

TWIERDZENIE

$$\boxed{U_5 = 0 \;\Leftrightarrow\; C_1C_3 = C_2C_4}$$

DOWÓD

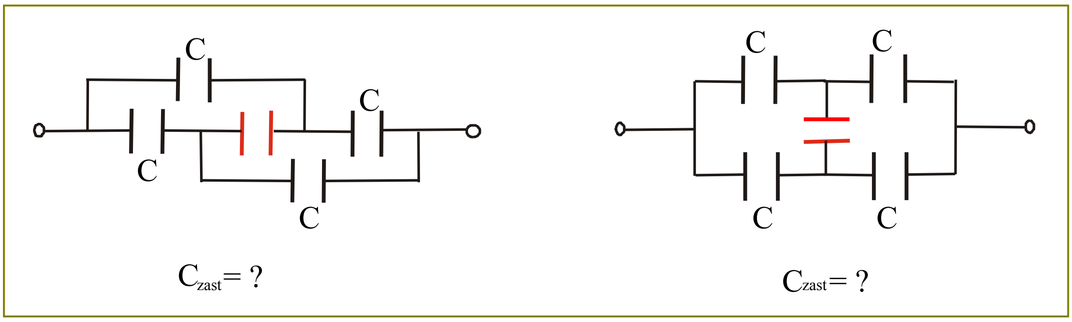
$$U_5 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\varphi_2 = \varphi_4 = \varphi$$
$$Q_1 = Q_2$$
$$Q_3 = Q_4$$
$$C_1 = \frac{Q_1}{\varphi_1 - \varphi}$$
$$C_2 = \frac{Q_2}{\varphi - \varphi_3}$$
$$C_3 = \frac{Q_3}{\varphi - \varphi_3}$$
$$C_4 = \frac{Q_4}{\varphi_1 - \varphi}$$



$$\Rightarrow \quad \boxed{C_1 \cdot C_3 = C_2 \cdot C_4}$$

PRZYKŁAD

Najbardziej popularna ilustracja omawianego twierdzenia:



Oba układy są identyczne. Ponieważ $C \cdot C = C \cdot C$, kondensator czerwony można pominąć. Pojemność zastępcza zredukowanej sieci wynosi C.

PRZYKŁAD

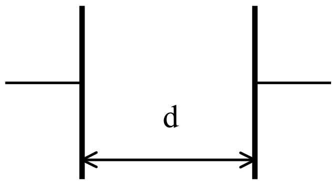
Niekiedy pojawia się bardziej wyrafinowany przykład w postaci następującego pytania. Czy istnieje sieć utworzona z nieparzystej liczby kondensatorów taka, że usunięcie z niej jednego kondensatora nie zmieni pojemności zastępczej?

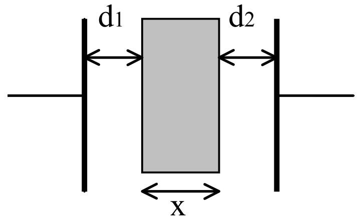
- **Zwarty kondensator**

Zwarty kondensator nie jest kondensatorem.

- **Kondensator z płytką metalową między okładkami**

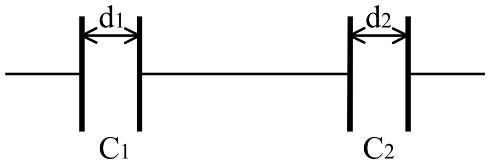
Jak zmieni się pojemność kondensatora po włożeniu między jego okładki płytki metalowej o grubości x?





$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \qquad\qquad d_1 + x + d_2 = d \quad \Rightarrow \quad d_1 + d_2 = d - x$$

Po włożeniu płytki metalowej układ można rozpatrywać jako dwa kondensatory połączone szeregowo.



$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1}\ , \qquad C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_2}\ .$$

$$C_x = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\varepsilon_o S}{d_1 + d_2} = \frac{\varepsilon_o S}{d - x}\ , \qquad \frac{C_x}{C} = \frac{d}{d - x}\ .$$

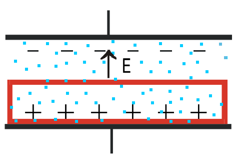
$$\boxed{C_x = \frac{C \cdot d}{d - x} \qquad \text{lub} \qquad C_x = \frac{C}{1 - \frac{x}{d}}}$$

3 POJEMNOŚĆ PŁASKIEGO KONDENSATORA Z WARSTWAMI RÓŻNYCH DIELEKTRYKÓW

Wykorzystując prawo Gaussa, obliczymy ponownie natężenie pola elektrycznego w kondensatorze z jednorodnym dielektrykiem całkowicie wypełniającym przestrzeń między okładkami kondensatora.

- **Opis powierzchni Gaussa**

Powierzchnia Gaussa jest w tym przypadku powierzchnią prostopadłościanu, którego jedna para ścian równoległych jest równoległa do okładek kondensatora. Pole powierzchni każdej z tych ścian jest identyczne z polem powierzchni okładki kondensatora.



- **Obliczanie strumienia natężenia pola elektrycznego**

Strumień natężenia przez ściany powierzchni Gaussa prostopadle do okładek jest równy zeru ze względu na równoległość wektora natężenia do tych ścian. Niezerowy strumień otrzymujemy jedynie dla jednej ze ścian powierzchni Gaussa równoległej do okładek. Całkowity strumień natężenia pola elektrycznego przez powierzchnię Gaussa wynosi:

$$\Phi_E = E \cdot S\ .$$

Na mocy twierdzenia Gaussa:

$$\Phi_E = E \cdot S = \frac{Q}{\varepsilon_o \varepsilon_r} \qquad \text{lub} \qquad \boxed{E = \frac{Q}{\varepsilon_o \varepsilon_r S}}\ .$$

UWAGA
W przypadku płaskiego kondensatora, wypełnionego równoległymi warstwami różnych jednorodnych dielektryków, natężenie pola w każdej warstwie wynosi:

$$\boxed{E_i = \frac{Q}{\varepsilon_o \varepsilon_i S}}\ .$$

- **Pojemność kondensatora z dwoma szeregowymi warstwami różnych dielektryków**

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2}$$

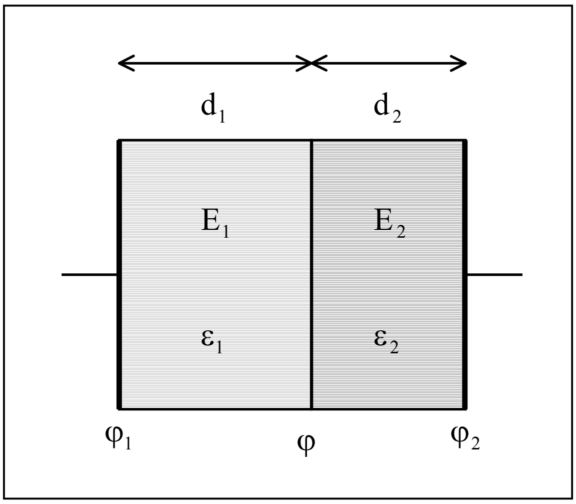
$$E_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi}{d_1}$$

$$E_2 = \frac{\varphi - \varphi_2}{d_2}$$

$$E_1 = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}$$

$$E_2 = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_2 S}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{C = \frac{\varepsilon_0 S}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}}} \quad \Leftarrow$$



$\Uparrow$

Rozwiązanie można również uzyskać traktując ten układ jako dwa kondensatory połączone szeregowo $\quad C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}{d_1}$, $\quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 S}{d_2}$, $\quad C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$.

- **Pojemność kondensatora z wieloma szeregowymi warstwami różnych dielektryków**

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 S}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} + \cdots + \frac{d_n}{\varepsilon_n}}}$$

- **Pojemność kondensatora z płytką dielektryczną o grubości x w środku**

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} + \frac{d_3}{\varepsilon_3}}$$

$$\varepsilon_1 = 1$$

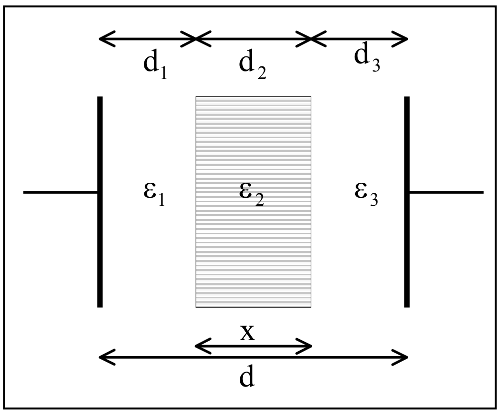
$$\varepsilon_2 = \varepsilon_r$$

$$\varepsilon_3 = 1$$

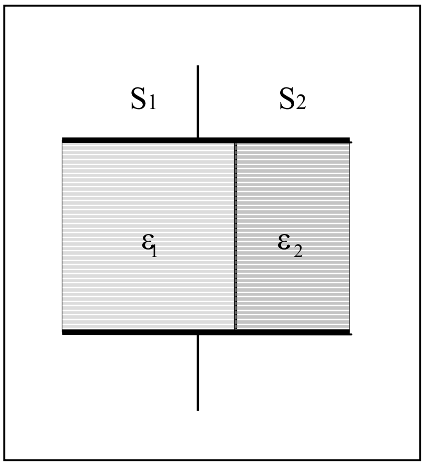
$$d_2 = x$$

$$d_1 + d_2 = d - x$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{C = \frac{\varepsilon_o S}{\frac{x}{\varepsilon_r} + d - x}} \quad \Leftarrow$$



- **Pojemność kondensatora z dwoma równoległymi warstwami różnych dielektryków**



Układ ten można potraktować jako dwa kondensatory połączone równolegle o pojemnościach C_1 i C_2.

$$C_1 = \frac{\varepsilon_o \varepsilon_1 S_1}{d}, \quad C_2 = \frac{\varepsilon_o \varepsilon_2 S_2}{d}, \quad C = C_1 + C_2$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_o (\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2)}{d}}$$

4 ENERGIA POLA ELEKTRYCZNEGO W KONDENSATORZE

- **Energia** W_e **pola elektrycznego w kondensatorze** jest równa energii doprowadzonej do kondensatora w procesie ładowania go lub jest równa co do bezwzględnej wartości ciepłu jakie wydziela się w oporniku zwierającym kondensator.

Energia pola elektrycznego w kondensatorze jest równa pracy jaką muszą wykonać siły zewnętrzne, aby ładunek z jednej okładki przenieść na drugą. W związku z przeniesieniem ładunku dQ między okładkami siły zewnętrzne wykonują pracę $dW_e = UdQ$.

$$dW_e = UdQ$$

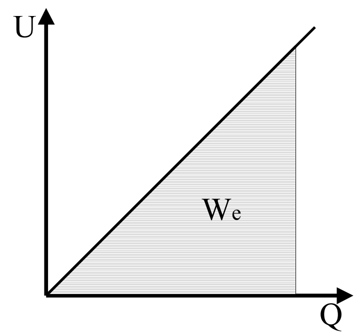
$$C = \frac{Q}{U}$$

$$\int_0^Q QdQ = \frac{1}{2}Q^2$$

$$\Rightarrow \quad W_e = \int_0^Q UdQ = \int_0^Q \frac{Q}{C}dQ = \frac{1}{C}\int_0^Q QdQ = \frac{Q^2}{2C}$$

$$\boxed{W_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} = \frac{QU}{2}}$$

Energia W_e pola elektrycznego w kondensatorze jest równa polu powierzchni pod wykresem U od Q.



$$\boxed{W_e = \frac{QU}{2}}$$

- **Różne postacie wzoru na energię pola elektrycznego w kondensatorze**

$$W_e = \frac{QU}{2}, \quad C = \frac{Q}{U}, \quad C = \frac{\varepsilon_o \varepsilon_r S}{d}, \quad E = \frac{U}{d}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{W_e = \frac{Q^2}{2C}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_e = \frac{d\,Q^2}{2\,\varepsilon_o \varepsilon_r S}}$$

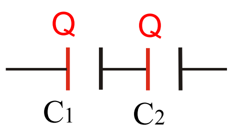
$$\Rightarrow \quad \boxed{W_e = \frac{CU^2}{2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_e = \frac{\varepsilon_o \varepsilon_r S\,U^2}{2d}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{W_e = \frac{1}{2}\varepsilon_o \varepsilon_r S\,d\,E^2}$$

- **Jak energia pola elektrycznego w danym kondensatorze zależy od jego pojemności**

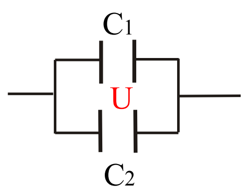
1. w połączeniu szeregowym kondensatorów?
2. w połączeniu równoległym kondensatorów?



$$W = \frac{Q^2}{2C}$$

$$\boxed{W \sim \frac{1}{C}}$$

$$\frac{1}{W_2} = \frac{C_2}{C_1}$$



$$W = \frac{CU^2}{2}$$

$$\boxed{W \sim C}$$

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

W połączeniu szeregowym kondensatorów więcej energii gromadzi się w kondensatorze o mniejszej pojemności.
W połączeniu równoległym kondensatorów więcej energii gromadzi się w kondensatorze o większej pojemności.

UWAGA
Całkowita energia układu kondensatorów jest równa sumie energii zgromadzonych w poszczególnych kondensatorach układu.

5 GĘSTOŚĆ OBJĘTOŚCIOWA ENERGII POLA ELEKTRYCZNEGO

- Poprzednio otrzymaliśmy dla energii pola elektrycznego w kondensatorze wyrażenie

$$W_e = \frac{1}{2}\varepsilon_o\varepsilon_r S \cdot d \cdot E^2 \ .$$

$Sd = V =$ objętość przestrzeni między okładkami kondensatora, w której zgromadzona jest energia pola elektrycznego

Energia jednorodnego pola elektrycznego jest w tej objętości rozłożona równomiernie z gęstością objętościową energii w równą:

$$\boxed{w \overset{df}{=} \frac{W_e}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon_o\varepsilon_r E^2}$$

UWAGA
Wzór ten jest poprawny dla dowolnego jednorodnego pola elektrycznego lub dla niejednorodnego pola elektrycznego w odpowiednio małym obszarze.

- Pole elektrostatyczne, czyli pole elektryczne, którego natężenie jest stałe w czasie, stanowi szczególny przypadek pola elektromagnetycznego. Najbardziej spektakularnym wynikiem teorii pola elektromagnetycznego, rozwiniętej przede wszystkim przez Maxwella, było odkrycie fal elektromagnetycznych.

6 SIŁA WZAJEMNEGO PRZYCIĄGANIA SIĘ OKŁADEK KONDENSATORA

- Aby wyznaczyć siłę wzajemnego przyciągania się dwóch okładek kondensatora płaskiego, przyrównamy pracę, jaką wykonują siły elektryczne przy zmianie odległości między okładkami kondensatora, do zmiany energii pola elektrycznego w kondensatorze.

$$\boxed{\begin{aligned} W_{sił\ el} &= -\Delta W_e \\ W_{sił\ el} &= -F_{el}\Delta d \\ \Delta W_e &= \frac{Q^2\Delta d}{2\varepsilon_o\varepsilon_r S} \\ Q &= CU \\ C &= \frac{\varepsilon_o\varepsilon_r S}{d} \\ E &= \frac{Q}{\varepsilon_o\varepsilon_r S} \end{aligned}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_{el} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_o\varepsilon_r S}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_{el} = \frac{1}{2}QE}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{F_{el} = \frac{\varepsilon_o\varepsilon_r S U^2}{2d^2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{U = d\sqrt{\frac{2F_{el}}{\varepsilon_o\varepsilon_r S}}}$$

ZASTOSOWANIE
W oparciu o wzór na U została opracowana przez Kelvina w roku 1860 metoda pomiaru napięcia przy pomocy tzw. elektrometru bezwzględnego, zwanego też woltomierzem absolutnym lub wagą napięcia.

7 DWA STANY NAŁADOWANEGO KONDENSATORA: ZE ŹRÓDŁEM (U=CONST) I BEZ ŹRÓDŁA (Q= CONST)

- **Jak zmiana parametrów** ε_r, S, d, x **wpływa na** C, Q, U, W_e, E?

Płaski kondensator powietrzny naładowano i

I. odłączono od źródła stałego napięcia.
II. pozostawiono ze źródłem stałego napięcia.

Następnie w każdym przypadku:

1. włożono dielektryk do wnętrza kondensatora, ε_r wzrosło.
2. wyjęto dielektryk z wnętrza kondensatora, ε_r zmalało.
3. zwiększono powierzchnię okładek kondensatora, lub dołączono równolegle nie naładowany kondensator, S wzrosło.
4. zmniejszono powierzchnię okładek kondensatora, S zmalało.
5. oddalono okładki kondensatora, d wzrosło.
6. zbliżono okładki kondensatora, d zmalało.
7. włożono płytkę metalową do wnętrza kondensatora, x wzrosło.
8. wyjęto płytkę metalową z wnętrza kondensatora, x zmalało.

Zbadaj jak w skutek tego zachowały się w każdym przypadku:

A. pojemność kondensatora, C.
B. ładunek na okładkach kondensatora, Q.
C. napięcie między okładkami kondensatora, U.
D. energia pola elektrycznego w kondensatorze, W_e.
E. natężenie pola elektrycznego w kondensatorze, E.

- Z faktu, że naładowany kondensator odłączony od źródła charakteryzuje Q = const, a pozostawiony ze źródłem U = const, oraz z relacji zestawionych w pionowej ramce, uzyskujemy odpowiedzi na tytułowe pytanie.

$$C = \frac{\varepsilon_o \varepsilon_r S}{d}$$

$$C_x = \frac{C}{1 - \frac{x}{d}}$$

$$C = \frac{Q}{U}$$

$$W_e = \frac{QU}{2}$$

$$W_e = \frac{CU^2}{2}$$

$$W_e = \frac{Q^2}{2C}$$

$$E = \frac{U}{d}$$

$\Rightarrow$

Kondensator bez źródła

Q = const

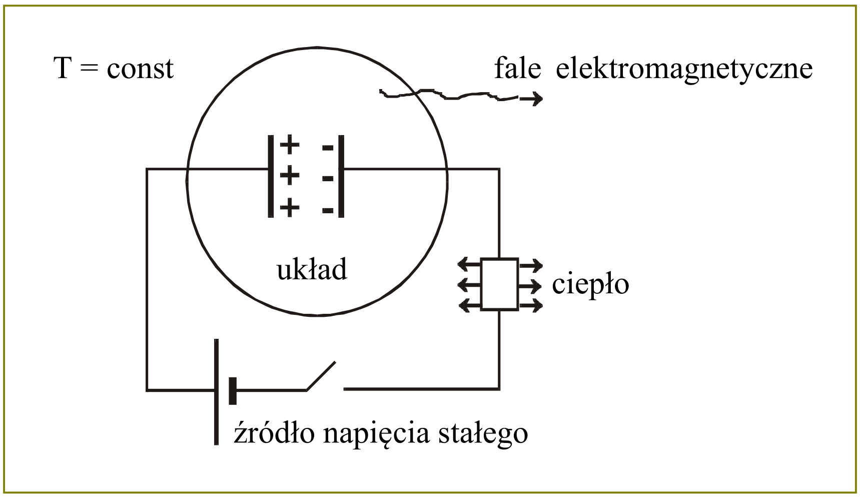
	C	U	W_e	E
$\varepsilon_r \downarrow$	$\downarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
$\varepsilon_r \uparrow$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
S $\downarrow$	$\downarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
S $\uparrow$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
d $\downarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	const
d $\uparrow$	$\downarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	const
x $\downarrow$	$\downarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	
x $\uparrow$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	

Kondensator ze źródłem

U = const

	C	Q	W_e	E
$\varepsilon_r \downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	const
$\varepsilon_r \uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	const
S $\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	const
S $\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	const
d $\downarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
d $\uparrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
x $\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	
x $\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	

8 BILANS ENERGII POLA ELEKTRYCZNEGO W KONDENSATORZE



- Dla izotermicznych zmian stanu układu i przy założeniu, że zmiana energii kinetycznej ciał układu jest do pominięcia, mamy:

$$\boxed{\Delta W_e = \Delta W_z + \Delta W_a + \Delta W_c + \Delta W_f}$$

ΔW_e = zmiana energii pola elektrycznego w kondensatorze

ΔW_z = zmiana energii związana z pracą wykonaną przez siły zewnętrzne podczas:
wkładania dielektryka −
wyjmowania dielektryka +
zwiększania powierzchni −
zmniejszania powierzchni +
oddalania okładek +
zbliżania okładek −
wkładania płytki metalowej −
wyjmowania płytki metalowej +

$\Delta W_z = W_{sił\ zew}$

$F_{zew} = -F_{el}$

ΔW_a = zmiana energii związana z:
ładowaniem akumulatora −
rozładowaniem akumulatora +

$\Delta W_a = \mathcal{E}\Delta Q$

$\mathcal{E}$ = siła elektromotoryczna

ΔW_c = zmiana energii związana z wydzielaniem się ciepła Joule'a-Lenza w przewodach w wyniku przepływu prądu elektrycznego −

$\Delta W_c = -Q_{JL}$

ΔW_f = zmiana energii związana z emisją fal elektromagnetycznych −

\+ oznacza, że dany składnik jest dodatni

− oznacza, że dany składnik jest ujemny

- Rozpatrzmy przypadek, dla którego wydzielanie się ciepła Joule'a-Lenza i emisję fal elektromagnetycznych można zaniedbać. Równanie bilansu energii pola elektrycznego w kondensatorze redukuje się wtedy do postaci:

$$\boxed{\Delta W_e = W_{sil\,zew} + \mathcal{E}\Delta Q}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\boxed{\begin{gathered}\Delta W_e = \frac{1}{2}C_2U^2 - \frac{1}{2}C_1U^2 \\ \Delta Q = C_2U - C_1U\end{gathered}} \qquad \boxed{\begin{gathered}U = \text{const} = \mathcal{E} \\ \Delta W_e = W_{sil\,zew} + U\Delta Q\end{gathered}} \qquad \boxed{\begin{gathered}Q = \text{const} \\ \Delta W_e = W_{sil\,zew}\end{gathered}}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\boxed{U\Delta Q = 2\Delta W_e} \;\Rightarrow\; \boxed{\begin{gathered}U = \text{const} \\ \Delta W_e = -W_{sil\,zew}\end{gathered}}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\boxed{U\Delta Q = -2W_{sil\,zew}}$$

UWAGA

Relacja $U\Delta Q = -2\, W_{sił\ zew}$ lub $\Delta W_a = -2\, \Delta W_z$ ma następującą interpretację. Wkład do energii pola elektrycznego w kondensatorze, pochodzący od pracy sił zewnętrznych, jest co do wartości bezwzględnej dwa razy mniejszy, ale przeciwnego znaku niż wkład pochodzący od kondensatora. Inaczej mówiąc: jak siły zewnętrzne zabiorą kondensatorowi energię, to akumulator doda mu dwa razy więcej. Jak siły zewnętrzne dadzą kondensatorowi energię, to akumulator zabierze mu dwa razy więcej.

Kondensator płaski o pojemności C naładowano i odłączono od źródła stałego napięcia.

1. Jaką pracę muszą wykonać siły zewnętrzne, aby n - razy zmienić odległość między okładkami kondensatora ? (Jeżeli d wzrośnie n razy, to n > 1. Jeżeli d zmaleje n razy, to n < 1.)

$$\begin{aligned} &Q = \text{const} \\ &W_{\text{sil zew}} = \Delta W_e \\ &\Delta W_e = \frac{Q^2}{2C_2} - \frac{Q^2}{2C_1} \\ &C_1 = \frac{\varepsilon_o \varepsilon_r S}{d} = C \\ &C_2 = \frac{\varepsilon_o \varepsilon_r S}{nd} = \frac{C}{n} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_{\text{sil zew}} = (n-1)\frac{Q^2}{2C}}$$

UWAGA Jeżeli d wzrośnie dwa razy, to n = 2 . Jeżeli d zmaleje dwa razy, to $n = \frac{1}{2}$.

2. Jaką pracę muszą wykonać siły zewnętrzne, aby włożyć płytkę metalową o grubości x między okładki kondensatora?

$$\begin{aligned} &Q = \text{const} \\ &W_{\text{sil zew}} = \Delta W_e \\ &\Delta W_e = \frac{Q^2}{2C_2} - \frac{Q^2}{2C_1} \\ &C_1 = C \\ &C_2 = \frac{Cd}{d-x} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_{\text{sil zew}} = -\frac{Q^2}{2C}\cdot\frac{x}{d}}$$

UWAGA Płytka metalowa jest wciągana do kondensatora.

3. Jaką pracę muszą wykonać siły zewnętrzne, aby włożyć dielektryk między okładki kondensatora?

$$\begin{aligned} &Q = \text{const} \\ &W_{\text{sil zew}} = \Delta W_e \\ &\Delta W_e = \frac{Q^2}{2C_2} - \frac{Q^2}{2C_1} \\ &C_1 = \frac{\varepsilon_o S}{d} = C \\ &C_2 = \frac{\varepsilon_o \varepsilon_r S}{d} = \varepsilon_r C \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_{\text{sil zew}} = \frac{Q^2}{2C}\cdot\frac{1-\varepsilon_r}{\varepsilon_r}}$$

UWAGA Dielektryk jest wciągany do kondensatora.

4. Jaką pracę muszą wykonać siły zewnętrzne, aby wyjąć dielektryk z kondensatora?

$$
\begin{aligned}
&Q = \text{const} \\
&W_{\text{sil zew}} = \Delta W_e \\
&\Delta W_e = \frac{Q^2}{2C_2} - \frac{Q^2}{2C_1} \\
&C_1 = \frac{\varepsilon_o \varepsilon_r S}{d} = C \\
&C_2 = \frac{\varepsilon_o S}{d} = \frac{C}{\varepsilon_r}
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\boxed{W_{\text{sil zew}} = \frac{Q^2}{2C}(\varepsilon_r - 1)}
$$

UWAGA Dielektryk jest wciągany do kondensatora.

Kondensator płaski o pojemności C naładowano do napięcia U i pozostawiono z akumulatorem. Wydzielanie się ciepła Joule'a-Lenza i emisję fal elektromagnetycznych zaniedbujemy.

1. Jaką pracę muszą wykonać siły zewnętrzne, aby n-razy zmienić odległość między okładkami kondensatora?

$$
\begin{aligned}
&U = \text{const} \\
&W_{\text{sil zew}} = -\Delta W_e \\
&\Delta W_e = \frac{C_2 U^2}{2} - \frac{C_1 U^2}{2} \\
&C_1 = \frac{\varepsilon_o \varepsilon_r S}{d} = C \\
&C_2 = \frac{\varepsilon_o \varepsilon_r S}{nd} = \frac{C}{n}
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\boxed{W_{\text{sil zew}} = \frac{1}{2} CU^2 \cdot \frac{n-1}{n}}
$$

UWAGA Jeżeli d wzrośnie dwa razy, to $n = 2$. Jeżeli d zmaleje dwa razy, to $n = 1/2$.

2. Jaką pracę muszą wykonać siły zewnętrzne, aby włożyć płytkę metalową o grubości x między okładki kondensatora?

$$
\begin{aligned}
&U = \text{const} \\
&W_{\text{sil zew}} = -\Delta W_e \\
&\Delta W_e = \frac{C_2 U^2}{2} - \frac{C_1 U^2}{2} \\
&C_1 = C, \quad C_2 = \frac{Cd}{d-x}
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\boxed{W_{\text{sil zew}} = -\frac{1}{2} CU^2 \cdot \frac{d}{d-x}}
$$

UWAGA Płytka metalowa jest wciągana do kondensatora.

3. Jaką pracę muszą wykonać siły zewnętrzne, aby włożyć dielektryk między okładki kondensatora?

$$U = \text{const}$$
$$W_{\text{sil zew}} = -\Delta W_e$$
$$\Delta W_e = \frac{C_2U^2}{2} - \frac{C_1U^2}{2}$$
$$C_1 = \frac{\varepsilon_o S}{d} = C$$
$$C_2 = \frac{\varepsilon_o \varepsilon_r S}{d} = \varepsilon_r C$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{W_{\text{sil zew}} = \frac{1}{2}CU^2\left(1 - \varepsilon_r\right)}$$

UWAGA
Dielektryk jest wciągany do kondensatora.

4. Jaką pracę muszą wykonać siły zewnętrzne, aby wyjąć dielektryk z kondensatora?

$$U = \text{const}$$
$$W_{\text{sil zew}} = -\Delta W_e$$
$$\Delta W_e = \frac{C_2U^2}{2} - \frac{C_1U^2}{2}$$
$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d} = C$$
$$C_2 = \frac{\varepsilon_o S}{d} = \frac{C}{\varepsilon_r}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{W_{\text{sil zew}} = \frac{1}{2}CU^2 \cdot \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}}$$

UWAGA
Dielektryk jest wciągany do kondensatora.

DIELEKTRYKI

1 POLARYZACJA DIELEKTRYKÓW

- W dotychczasowych rozważaniach traktowaliśmy dielektryk makroskopowo, jako ośrodek nie przewodzący prądu elektrycznego, charakteryzowany przez stałą dielektryczną ε_r, nie wnikając w budowę cząsteczkową tej grupy materiałów.
- **Polaryzacja dielektryków**

Przy braku zewnętrznego pola elektrycznego w dielektryku niepolarnym każda cząsteczka ma moment dipolowy równy zeru, a w dielektryku polarnym suma momentów dipolowych wszystkich cząsteczek jest równa zeru pomimo, że każda cząsteczka ma różny od zera trwały moment dipolowy. Polaryzacja dielektryka polega na tym, że w zewnętrznym polu elektrycznym pojawia się w dielektryku różny od zera sumaryczny moment dipolowy cząsteczek. W zewnętrznym polu elektrycznym każda cząsteczka dielektryka niepolarnego uzyskuje indukowany (wymuszony) elektryczny moment dipolowy $\boldsymbol{\mu}_{ind}$ skierowany wzdłuż natężenia pola elektrycznego.

$$\boxed{\boldsymbol{\mu}_{ind} = \varepsilon_0 \alpha \mathbf{E}_{ef}}$$

α = polaryzowalność cząsteczki
$[\alpha]$ = m^3
Polaryzowalność α cząsteczki nie zależy od temperatury, gęstości oraz ciśnienia.
$\boldsymbol{\mu}_{ind} = q\mathbf{l}$
q = sumaryczny dodatni ładunek wszystkich jąder w cząsteczce
$\mathbf{l}$ = wektor poprowadzony od środka ciężkości elektronów w cząsteczce do środka ciężkości dodatnich ładunków jąder atomowych
$\mathbf{E}_{ef}$ = natężenie efektywnego pola elektrycznego, czyli pola, które faktycznie działa na daną cząsteczkę dielektryka, będącego sumą pola zewnętrznego i pól pozostałych cząsteczek
Pole efektywne nazywane jest niekiedy polem lokalnym lub skutecznym.

W dielektrykach polarnych zewnętrzne jednorodne pole elektryczne powoduje ustawienie się momentów dipolowych cząsteczek wzdłuż pola elektrycznego, czemu przeszkadza ich chaotyczny ruch cieplny. Zewnętrzne pole elektryczne powoduje również powstawanie w cząsteczkach dodatkowego indukowanego momentu dipolowego.

Na powierzchniach granicznych spolaryzowanego dielektryka, prostopadłych do natężenia zewnętrznego pola elektrycznego, pojawiają się związane ładunki elektryczne będące źródłem pola elektrycznego o natężeniu mającym taki sam kierunek, ale przeciwny zwrot niż natężenie zewnętrznego pola elektrycznego. Wypadkowe natężenie pola elektrycznego w obszarze dielektryka jest sumą wektorową natężeń obu pól. Oczywiście, wartość wypadkowego natężenia jest mniejsza od wartości natężenia zewnętrznego, jednorodnego, stałego w czasie pola elektrycznego.

UWAGA
Jeżeli źródłem pola elektrycznego jest płaski kondensator podłączony do źródła stałego napięcia, a jednorodny dielektryk całkowicie wypełnia przestrzeń między okładkami kondensatora, to natężenie pola wewnątrz dielektryka jest takie samo jak między okładkami kondensatora bez tego dielektryka. Jeżeli źródłem pola elektrycznego jest płaski kondensator naładowany i odłączony od źródła stałego napięcia, a jednorodny dielektryk całkowicie wypełnia przestrzeń między okładkami kondensatora, to natężenie pola wewnątrz dielektryka jest ε_r razy mniejsze od natężenia pola między okładkami kondensatora bez tego dielektryka.

2 ZALEŻNOŚĆ STAŁEJ DIELEKTRYCZNEJ OD TEMPERATURY I INNYCH PARAMETRÓW

- W dielektrykach niepolarnych cząsteczki nie mają trwałych momentów dipolowych, w dielektrykach polarnych cząsteczki mają trwałe momenty dipolowe.
- **Wektor polaryzacji**

Wektorem polaryzacji lub polaryzacją **P** nazywamy wektor będący sumą momentów dipolowych wszystkich cząsteczek dielektryka podzieloną przez jego objętość.

$$\boxed{\mathbf{P} = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\mu}_i}$$

N = liczba cząsteczek zawartych w objętości V
V = objętość dielektryka

Dla dielektryka niepolarnego znajdującego się w polu elektrycznym:

$$\boxed{\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\mu}_i = N\boldsymbol{\mu}_{ind} \\ \boldsymbol{\mu}_{ind} = \varepsilon_0\alpha\mathbf{E}_{ef} \\ n = \dfrac{N}{V}\end{array}} \Rightarrow \boxed{\mathbf{P} = n\varepsilon_0\alpha\mathbf{E}_{ef}}$$

$\boldsymbol{\mu}_{ind}$ = indukowany moment dipolowy jednej cząsteczki
n = koncentracja cząsteczek
n = stosunek liczby cząsteczek N, zawartych w objętości V, do objętości V
α = polaryzowalność cząsteczki
$\mathbf{E}_{ef}$ = natężenie efektywnego pola elektrycznego

Wektor polaryzacji spełnia empiryczną relację:

$$\boxed{\mathbf{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\mathbf{E}}.$$

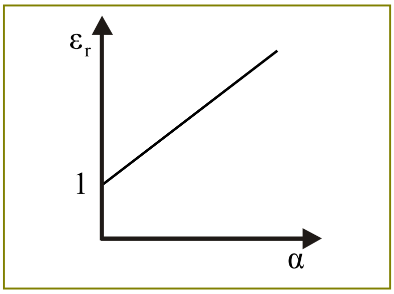
E = natężenie wypadkowego pola elektrycznego w dielektryku

I już jesteśmy gotowi do otrzymania zapowiadanych w tytule zależności.

- **Stała dielektryczna niepolarnych gazów rozrzedzonych**

$$\mathbf{P} = n\varepsilon_0\alpha\mathbf{E}_{ef}$$
$$\mathbf{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon_r = 1 + n\alpha}$$
$$\mathbf{E}_{ef} = \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon_r = 1 + \frac{N_A\alpha}{M}\cdot d}$$
$$n = \frac{N_A \cdot d}{M}$$
$$n = \frac{p}{kT} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon_r = 1 + \frac{\alpha}{k}\cdot\frac{p}{T}}$$

d = gęstość dielektryka, $[d] = kg\ m^{-3}$
M = masa cząsteczkowa, $[M] = kg\ kmol^{-1}$
N_A = liczba Avogardo = $6{,}022 \cdot 10^{26}\ kmol^{-1}$
p = ciśnienie, $[p] = Pa$
k = stała Boltzmanna = $1{,}38 \cdot 10^{-23}\ J\ K^{-1}$



Polaryzowalność α nie zależy od temperatury, ciśnienia oraz gęstości i dlatego stała dielektryczna ε_r niepolarnych gazów rozrzedzonych jest liniową funkcją gęstości.

- **Stała dielektryczna niepolarnych gazów, cieczy i kryształów**

Przypomnijmy, w dotychczasowych rozważaniach $\mathbf{E}$ oznaczało natężenie wypadkowego pola w dielektryku, będącego sumą pola pochodzącego od źródeł zewnętrznych i pola pochodzącego od ładunków pojawiających się wskutek polaryzacji na zewnętrznej powierzchni dielektryka. Aby polepszyć zgodność relacji teoretycznych z doświadczeniem, wprowadza się do wzorów tzw. natężenie $\mathbf{E}_{ef}$ efektywnego pola elektrycznego, czyli pola, które faktycznie działa na daną cząsteczkę dielektryka, będącego suma pola zewnętrznego i pól pozostałych cząsteczek. Zgodnie z teorią Lorentza, przyjmujemy dla natężenia pola efektywnego równania

$$\boxed{\mathbf{E}_{ef} = \mathbf{E} + \frac{1}{3\varepsilon_0}\cdot\mathbf{P}} \quad \text{lub} \quad \boxed{\mathbf{E}_{ef} = \frac{\varepsilon_r + 2}{3}\cdot\mathbf{E}}\ .$$

$$\mathbf{P} = n\varepsilon_0\alpha\mathbf{E}_{ef} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{n\alpha}{3}}$$
$$\mathbf{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\mathbf{E}$$
$$\mathbf{E}_{ef} = \frac{\varepsilon_r + 2}{3}\cdot\mathbf{E}$$

Równanie Mossottiego-Clausiusa.

$$n = \frac{N_A \cdot d}{M} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\cdot\frac{M}{d} = \frac{N_A\alpha}{3}}$$

- **Stała dielektryczna polarnych gazów rozrzedzonych, gdy $\mu E \ll kT$**

$$\mathbf{P} = \left(n\varepsilon_0\alpha + \frac{n\mu^2}{3kT} \right)\mathbf{E}_{ef}$$

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\mathbf{E}$$

$$\mathbf{E}_{ef} = \mathbf{E}$$

$\Rightarrow$

Równanie Langevina-Debye'a

$$\boxed{\varepsilon_r = 1 + n\left(\alpha + \frac{\mu^2}{3kT\varepsilon_0} \right)}$$

$\boldsymbol{\mu}$ = moment dipolowy trwałego dipola przy braku pola elektrycznego
k = Stała Boltzmanna

- **Stała dielektryczna polarnych gazów, gdy $\mu E \ll kT$**

$$\mathbf{P} = \left(n\varepsilon_0\alpha + \frac{n\mu^2}{3kT} \right)\mathbf{E}_{ef}$$

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\mathbf{E}$$

$$\mathbf{E}_{ef} = \frac{\varepsilon_r + 2}{3} \cdot \mathbf{E}$$

$$n = \frac{N_A \cdot d}{M}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{n}{3}\left(\alpha + \frac{\mu^2}{3kT\varepsilon_0} \right)$$

Równanie Mossottiego-Clausiusa-Langevina-Debye'a

$\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \cdot \frac{M}{d} = \frac{N_A}{3}\left(\alpha + \frac{\mu^2}{3kT\varepsilon_0} \right)}$$

d = gęstość dielektryka
M = masa cząsteczkowa
N_A = liczba Avogardo
α = polaryzowalność cząsteczki
$\boldsymbol{\mu}$ = moment dipolowy trwałego dipola przy braku pola elektrycznego
k = Stała Boltzmanna
n = koncentracja cząsteczek

W przypadku dielektryków polarnych w stanie gazowym zgodnie, z prawem Mossottiego-Clausiusa-Langevina-Debye'a, wzrost temperatury powoduje zmniejszenie się stałej dielektrycznej.

Wielkość $\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \cdot \frac{M}{d}$ bywa nazywana polaryzacją molową.

3 WARUNKI GRANICZNE

- **Granica dielektryka z dielektrykiem**

Na nienaładowanej powierzchni granicznej dwóch stykających się ze sobą dielektryków muszą być spełnione podane poniżej warunki graniczne dla składowych wektorów natężenia pola elektrycznego stycznych (równoległych) i normalnych (prostopadłych) do powierzchni granicznej.

WARUNEK 1

Składowe styczne natężeń pól po obu stronach powierzchni granicznej są takie same.

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{rot}\mathbf{E} = 0 \\ \mathbf{D} = \varepsilon_o \varepsilon_r \mathbf{E} \end{array}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} E_{2t} = E_{1t} \\ \dfrac{D_{2t}}{\varepsilon_2} = \dfrac{D_{1t}}{\varepsilon_1} \end{array}}$$

UWAGA

Założyliśmy, że $\mathrm{rot}\mathbf{E} = 0$. Wynika to z potencjalności stałego pola wektora $\mathbf{E}$.

WARUNEK 2

Składowe normalne natężeń pól po obu stronach powierzchni granicznej są odwrotnie proporcjonalne do stałych dielektrycznych ośrodków.

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{div}\mathbf{D} = \rho \\ \rho = 0 \\ \mathbf{D} = \varepsilon_o \varepsilon_r \mathbf{E} \end{array}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} D_{2n} = D_{1n} \\ \varepsilon_2 E_{2n} = \varepsilon_1 E_{1n} \end{array}}$$

UWAGA

Założyliśmy, że gęstość powierzchniowa ładunków swobodnych σ na powierzchni granicznej jest równa zeru. W przeciwnym przypadku warunek graniczny dla składowych normalnych natężeń pól elektrycznych przyjmuje postać:

$$\varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}.$$

- **Granica dielektryka z przewodnikiem**

Na granicy między dielektrykiem a przewodnikiem składowa styczna wektora natężenia pola jest równa zeru.

$$\boxed{\begin{array}{l} E_{2t} = E_{1t} \\ \varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_o} \\ E_{1t} = 0, \quad E_{1n} = 0 \\ 1 \ = \ \text{metal}, \ 2 \ = \ \text{dielektryk} \end{array}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} E_{2t} = 0 \\ E_{2n} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_o \varepsilon_2} \end{array}}$$

σ = gęstość ładunków swobodnych na powierzchni przewodnika

UWAGA

Na granicy dielektryka z przewodnikiem wektor natężenia pola elektrycznego jest prostopadły do powierzchni przewodnika.

4 DIELEKTRYKI O RÓŻNYCH KSZTAŁTACH W JEDNORODNYM STAŁYM POLU ELEKTRYCZNYM

- Dla kilku brył wzór na natężenie pola elektrycznego wewnątrz bryły ma podobną strukturę.

$$\boxed{\mathbf{E}_{in} = \frac{\mathbf{E}_o}{1 + n\left(\frac{\varepsilon_{in}}{\varepsilon_{ex}} - 1\right)}}.$$

n = współczynnik depolaryzacji
$\mathbf{E}_{in}$ = natężenie pola elektrycznego w bryle o stałej dielektrycznej ε_{in}
$\mathbf{E}_o$ = natężenie zewnętrznego pola elektrycznego w próżni
ε_{ex} = stała dielektryczna ośrodka, w którym znajduje się rozważana bryła
ε_{in} = stała dielektryczna bryły

Ponieważ

$$P = \varepsilon_o\left(\frac{\varepsilon_{in}}{\varepsilon_{ex}} - 1\right)E_{in},$$

mamy też

$$\boxed{\mathbf{E}_{in} = \mathbf{E}_o - \frac{1}{\varepsilon_o}n\mathbf{P}}.$$

Kula	$n = \frac{1}{3}$	$\mathbf{E}_{in} = \frac{3\varepsilon_{ex}\mathbf{E}_o}{2\varepsilon_{ex} + \varepsilon_{in}}$
Długi walec o osi prostopadłej do $\mathbf{E}_o$	$n = \frac{1}{2}$	$\mathbf{E}_{in} = \frac{2\varepsilon_{ex}\mathbf{E}_o}{\varepsilon_{ex} + \varepsilon_{in}}$
Walec o osi równoległej do $\mathbf{E}_o$	$n = 0$	$\mathbf{E}_{in} = \mathbf{E}_o$
Płytka płasko równoległa prostopadła do $\mathbf{E}_o$	$n = 1$	$\mathbf{E}_{in} = \frac{\varepsilon_{ex}\mathbf{E}_o}{\varepsilon_{in}}$

Pole wewnątrz każdej z tych brył jest jednorodne i równoległe do pola zewnętrznego.

- Dielektryk uzyskuje w zewnętrznym polu elektrycznym wskutek polaryzacji różny od zera moment dipolowy $\boldsymbol{\mu}^* = V\mathbf{P}$ i zachowuje się jak dipol elektryczny. Moment sił działających na taki dipol spowoduje, że ustawi się on tak, by wektory $\boldsymbol{\mu}^*$ i $\mathbf{E}_o$ były równoległe. Jeżeli zewnętrzne pole elektryczne jest niejednorodne, to rozpatrywany dielektryk dozna jeszcze działania siły w kierunku silniejszego pola.

PRZYKŁAD
Źródłem niejednorodnego pola elektrycznego są laski szklane lub ebonitowe oraz kawałki bursztynu naelektryzowane przez pocieranie. Przyciągają one drobne skrawki różnych dielektry-

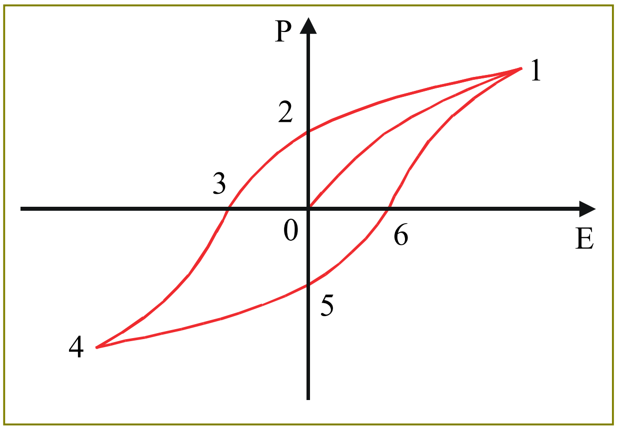
5 FERROELEKTRYKI

- **Ferroelektrykami** nazywamy dielektryki krystaliczne, które przy braku zewnętrznego pola elektrycznego składają się z domen, czyli małych spolaryzowanych obszarów. Ze względu na chaotyczne rozmieszczenie domen, ich wypadkowy moment dipolowy, a tym samym całkowita polaryzacja są równe zeru. W zewnętrznym polu elektrycznym ferroelektryki ulegają polaryzacji, która polega na powiększaniu się domen i obrocie ich momentów dipolowych w kierunku pola.

Ferroelektrykami są na przykład tytanian baru $(BaTiO_3)$, sól Seignette'a, czyli winian sodowo potasowy $(NaKC_4O_6 \cdot 4H_2O)$, kwaśny fosforan potasu (KH_2PO_4), oraz RbH_2PO_4, CsH_2PO_4, RbH_2AsO_4, KH_2AsO_4, CsH_2AsO_4, $KTaO_3$, $NaTaO_3$, $KNbO_3$, $PbTiO_3$, $LiTaO_3$, $LiNbO_3$, $Cd_7Nb_2O_7$.

Stałe dielektryczne ferroelekryków zależą nieliniowo od temperatury i natężenia zewnętrznego pola elektrycznego.

- **Histereza dielektryczna** jest zależnością polaryzacji **P** ferroelektryka od natężenia **E** zewnętrznego pola elektrycznego. Danej wartości natężenia E odpowiadają różne wartości polaryzacji P w zależności od jej wcześniejszej wartości. Ferroelektryki posiadają „pamięć".



0 = stan początkowy
1 i 4 = polaryzacja nasycenia
2 i 5 = polaryzacja szczątkowa
3 i 6 = koercja

Pole powierzchni pętli histerezy jest proporcjonalne do ciepła wydzielonego w ferroelektryku podczas jednego obiegu $(1-2-3-4-5-6-1)$.

- **Temperaturą Curie** (punktem Curie) nazywamy temperaturę, powyżej której ferroelektryk przechodzi w stan właściwy dla normalnego dielektryka polarnego. Niektóre ferroelektryki posiadają dwa punkty Curie. Górny punkt Curie i dolny punkt Curie, to temperatura odpowiednio powyżej i poniżej której ferroelektryk traci swe własności.

W temperaturze Curie ferroelektryki osiągają bardzo duże wartości stałej dielekrycznej rzędu $10^3 \div 10^6$.

PRĄD ELEKTRYCZNY STAŁY W METALACH

1 PRĄD ELEKTRYCZNY PRZEWODNICTWA

- **Prądem elektrycznym** nazywamy uporządkowany ruch ładunków elektrycznych. Dalej zajmować się będziemy tzw. prądem przewodnictwa lub prądem przewodzenia, czyli uporządkowanym ruchem swobodnych ładunków w ośrodkach przewodzących pod wpływem zewnętrznego pola elektrycznego.

Ośrodek przewodzący	Nośniki prądu
metale, stopy metali, węgiel	elektrony
półprzewodniki	elektrony i dziury
elektrolity	jony ujemne i dodatnie
gazy	jony ujemne i dodatnie oraz elektrony

UWAGA
Wewnątrz metalu $E = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy metal jest odosobniony i nie istnieje różna od zera różnica potencjałów między dowolnymi jego punktami.

- **Natężeniem** I **prądu elektrycznego** nazywamy stosunek ładunku Q, przepływającego przez poprzeczny przekrój przewodnika, do czasu t tego przepływu.

$$\boxed{I = \frac{Q}{t}}$$

Natężenie prądu elektrycznego jest skalarem.

$$[I] = \frac{1C}{1s} = 1A = 1\,\text{amper}.$$

PRZYKŁAD
Jeżeli w przewodniku płynie prąd o natężeniu jednego ampera, to przez przekrój poprzeczny tego przewodnika w czasie jednej sekundy przepływa $6{,}25 \cdot 10^{18}$ elektronów.

$$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}C \quad \Rightarrow \quad C = 6{,}25 \cdot 10^{18} e$$

- **Prądem stałym**, jakim będziemy się dalej zajmować, nazywamy prąd, którego natężenie jest stałe w czasie.

- **Kierunek przepływu prądu elektrycznego** przyjęto umownie oznaczać strzałką skierowaną od punktu przewodnika o potencjale wyższym do punktu przewodnika o potencjale niższym. Tak określony kierunek prądu zgadza się z kierunkiem ruchu dodatnich nośników prądu. Ujemne nośniki prądu poruszają się w kierunku przeciwnym do umownego kierunku prądu.

- **Gęstością** j **prądu elektrycznego** nazywamy stosunek natężenia prądu I do pola powierzchni S przekroju poprzecznego przewodnika, na którym to przekroju rozkład prądu jest równomierny.

$$\boxed{j = \frac{I}{S}}$$

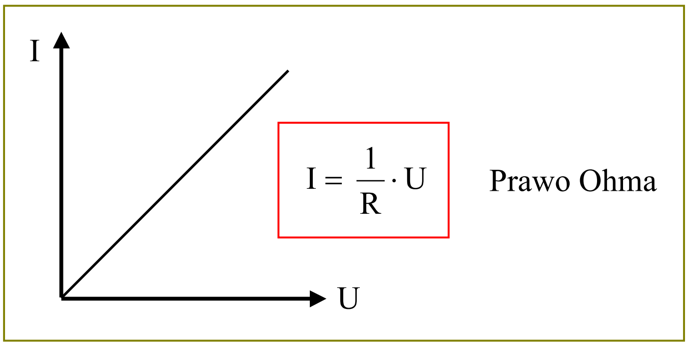
Gęstość prądu elektrycznego jest wektorem o kierunku prądu elektrycznego.

$$[j] = \frac{1A}{1m^2} \; .$$

2 PRAWO OHMA

- **Prawo Ohma**

Dla przewodników metalowych obserwuje się doświadczalnie liniową zależność między napięciem U przyłożonym do końców przewodnika a natężeniem I prądu płynącego w przewodniku. Relacja ta zwana jest **prawem Ohma**.



$R =$ opór elektryczny lub rezystancja

$$R = \frac{U}{I}$$

$$[R] = \frac{1V}{1A} = 1\Omega = 1\,\text{om}$$

$$R \approx 0 \div 10^6\,\Omega$$

UWAGA

Dla danego przewodnika : $R = \text{const}, \quad I \sim U$.

Prawo Ohma bywa zapisane także w innej postaci:

$$\boxed{I = G \cdot U} \; .$$

$G =$ przewodnictwo elektryczne lub konduktancja

$$G = \frac{1}{R}$$

$$[G] = \frac{1}{1\Omega} = \frac{1A}{1V} = 1S = 1\,\text{simens}$$

- **Zależność oporu od długości, przekroju i rodzaju materiału przewodnika metalowego**

$$\boxed{R = \frac{\rho l}{S}} \quad \text{lub} \quad \boxed{R = \frac{1}{\gamma S}}$$

l = długość przewodnika
S = pole powierzchni przekroju poprzecznego przewodnika
ρ = opór elektryczny właściwy lub rezystywność
$[\rho] = 1\Omega\,\mathrm{m} = 1$ omometr
γ = przewodnictwo elektryczne właściwe lub konduktywność

$$\gamma = \frac{1}{\rho}$$

$$[\gamma] = \frac{1}{1\Omega\cdot\mathrm{m}} = \frac{1\mathrm{S}}{1\mathrm{m}}$$

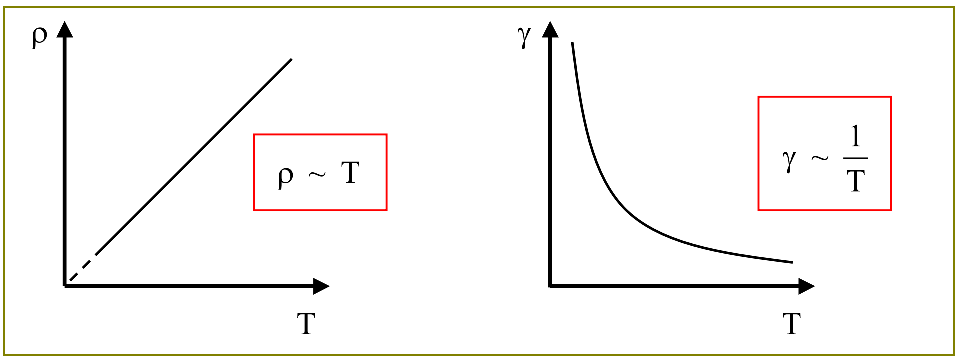
- **Prawo Ohma w postaci lokalnej**

$$j = \frac{I}{S}, \quad I = \frac{U}{R}, \quad U = E\cdot l, \quad R = \frac{l}{\gamma S} \quad \Rightarrow \quad \boxed{j = \gamma E}$$

3 ZALEŻNOŚĆ OPORU WŁAŚCIWEGO OD TEMPERATURY

- Opór elektryczny właściwy zależy liniowo od temperatury, z pominięciem niskich i wysokich temperatur. Dla wielu metali spełniona jest relacja:

$$\boxed{\rho = \frac{1}{273}\cdot\rho_{273}\cdot T}.$$



- Badając doświadczalnie zależność oporu właściwego od temperatury, wyznacza się tzw. **współczynnik temperaturowy oporu właściwego** α .

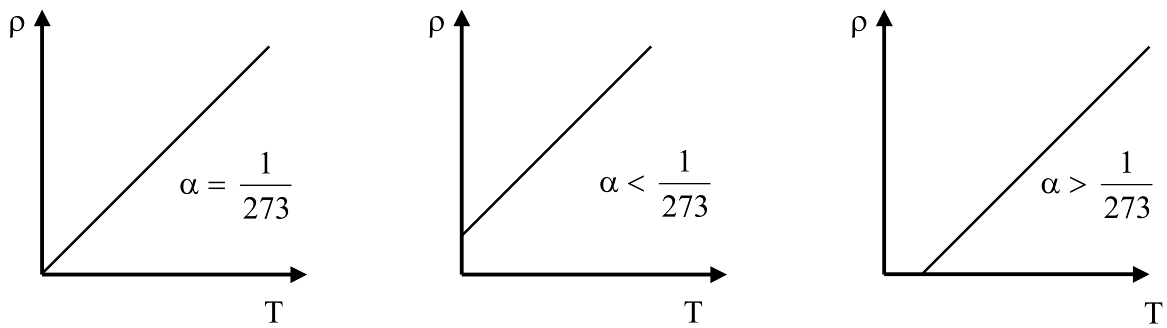
$$\alpha = \frac{1}{\rho_{273}} \cdot \frac{\rho - \rho_{273}}{T - 273}$$

T = temperatura w skali Kelvina
ρ_{273} = opór właściwy w temperaturze 273 K
$[\alpha] = \frac{1}{K}$.

Współczynnik temperaturowy oporu właściwego α ma prostą interpretację, która staje się widoczna, gdy wzór definicyjny zapisać w postaci:

$$\rho = \rho_{273} \cdot (1 - \alpha \cdot 273) + \rho_{273} \cdot \alpha \cdot T$$.

- **Nadprzewodnictwo**



W niskich temperaturach bliskich zera bezwzględnego opór niektórych metali nagle spada do zera. Zjawisko to, odkryte przez Kamerlingh-Onnesa w 1911 roku, nazwano nadprzewodnictwem.

- **Prawo Wiedemanna-Franza-Lorenza**

Stosunek współczynnika przewodnictwa cieplnego K do przewodnictwa elektrycznego właściwego γ dla wszystkich metali jest proporcjonalny do temperatury bezwzględnej T.

$$\frac{K}{\gamma} = L \cdot T$$

L = liczba Lorenza

4 PRAWO JOULE`A-LENZA

- **Prawo Joule`a – Lenza**

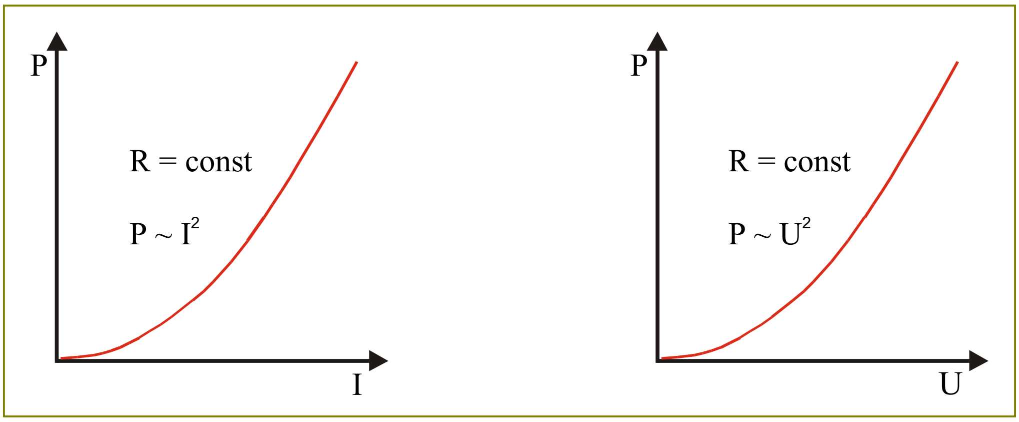
Podczas przepływu prądu elektrycznego przez przewodnik wydziela się w nim ciepło, którego wartość W jest proporcjonalna do kwadratu natężenia prądu I^2, oporu przewodnika R, oraz czasu przepływu t.

$$\boxed{W = I^2 \cdot R \cdot t}$$

- **Moc P ciepła wydzielonego w przewodniku**

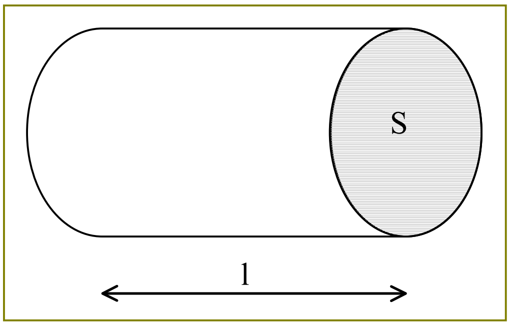
$$P = \frac{W}{t}$$
$$W = I^2 \cdot R \cdot t$$
$$I = \frac{U}{R}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{P = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R} = I \cdot U}$$



- **Prawo Joule`a – Lenza w postaci lokalnej**

$$\omega = \frac{P}{S \cdot l}$$
$$P = I^2 \cdot R$$
$$R = \rho \cdot \frac{l}{S}$$
$$\gamma = \frac{1}{\rho}$$
$$j = \frac{I}{S}$$
$$j = \gamma \cdot E$$

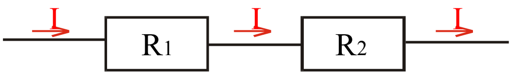


$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega = \rho \cdot j^2 = \frac{1}{\gamma} \cdot j^2 = \gamma \cdot E^2}$$

ω = gęstość mocy ciepła wydzielonego w przewodniku
ω = stosunek mocy wydzielonego ciepła do objętości, w której się ona wydzieliła

- **Jak moc ciepła wydzielonego w danym przewodniku zależy od jego oporu**

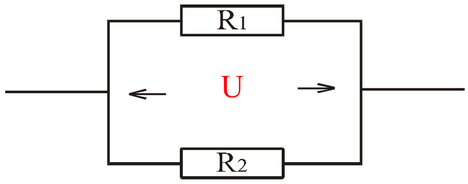
1. w połączeniu szeregowym przewodników?
2. w połączeniu równoległym przewodników?



$$P = I^2 R$$

$$\boxed{P \sim R}$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{R_1}{R_2}$$



$$P = \frac{U^2}{R}$$

$$\boxed{P \sim \frac{1}{R}}$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

W połączeniu szeregowym przewodników więcej ciepła wydziela się w przewodniku o większym oporze.
W połączeniu równoległym przewodników więcej ciepła wydziela się w przewodniku o mniejszym oporze.

5 SUKCESY I PORAŻKI KLASYCZNEJ ELEKTRONOWEJ TEORII PRZEWODNICTWA ELEKTRYCZNEGO W METALACH

- W metalach w stanie stałym swobodne elektrony, zachowujące się jak gaz doskonały, poruszają się chaotycznie z prędkością średnią $v_{śr} \sim 10^6 \frac{m}{s}$ między drgającymi jonami dodatnimi tworzącymi sieć krystaliczną. Jeżeli do końców przewodnika przyłożymy stałą różnicę potencjałów, to pole elektryczne powstałe w przewodniku spowoduje uporządkowany ruch elektronów wzdłuż przewodnika z prędkością $v_u \sim 10^{-4} \frac{m}{s}$, zwaną **prędkością unoszenia**.

UWAGA
Zmiany natężenia pola elektrycznego wzdłuż drutu rozchodzą się z prędkością światła rzędu $10^8 \frac{m}{s}$ nadając niemal jednocześnie wszystkim elektronom przewodnictwa składową prędkość wzdłuż drutu $v_u \sim 10^{-4} \frac{m}{s}$.

PRZYKŁAD
Prędkość średnia $v_{śr}$ bezwładnego ruchu cieplnego elektronów w temperaturze pokojowej w nieobecności pola elektrycznego wynosi:

$$\frac{m\, v_{śr}^2}{2} = \frac{3kT}{2}$$
$$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot \frac{J}{K}$$
$$m = 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot kg$$
$$T = 293\, K$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_{śr} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \approx 1{,}3 \cdot 10^6 \frac{m}{s}}$$

- **Związek gęstości prądu z prędkością unoszenia**

$$j = \frac{I}{S}$$
$$I = \frac{Q}{t}$$
$$Q = nSle$$
$$t = \frac{l}{v_u}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{j = env_u}$$

v_u = prędkość unoszenia elektronów przewodnictwa
Sl = objętość przewodnika cylindrycznego o długości l i polu powierzchni przekroju poprzecznego S
n = gęstość elektronów swobodnych przewodnictwa
nSl = liczba elektronów swobodnych w przewodniku
$n = N_A d/M$
N_A = liczba Avogadro
d = gęstość metalu
M = masa molowa lub cząsteczkowa metalu
e = ładunek elektronu

- **Prędkość maksymalna i prędkość unoszenia**

Na elektron o masie m i ładunku e, w stałym polu elektrycznym o natężeniu E, wewnątrz metalu działa siła F = eE = ma, która nadaje mu przyśpieszenie a:

$$a = \frac{eF}{m} \ .$$

Elektron będzie tylko przyśpieszany w czasie jaki upływa od zderzenia do kolejnego zderzenia z jonami sieci krystalicznej. Średni czas τ między kolejnymi zderzeniami wynosi:

$$\tau = \frac{\lambda}{v_{śr}} \ .$$

$v_{śr}$ = średnia prędkość ruchów termicznych elektronów przewodnictwa
λ = średnia droga swobodna elektronów przewodnictwa

Pod koniec swobodnego przebiegu, odbywającego się ruchem jednostajnie przyśpieszonym, elektron uzyskuje prędkość:

$$v_{max} = a\tau$$
$$\tau = \frac{\lambda}{v_{śr}}$$
$$a = \frac{eE}{m}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{v_{max} = \frac{eE}{m} \cdot \frac{\lambda}{v_{śr}}}$$

Średnią prędkość, z jaką elektron porusza się w czasie swobodnego przebiegu, można traktować jako prędkość unoszenia.

$$\boxed{v_u = \frac{v_{max}}{2} = \frac{eE}{2m} \cdot \frac{\lambda}{v_{śr}}}$$

- **Mikroskopowa interpretacja prawa Ohma**

$$j = env_u$$
$$v_u = \frac{eE}{2m} \cdot \frac{\lambda}{v_{śr}}$$
$$j = \gamma E$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{j = \frac{e^2 n\lambda}{2mv_{śr}} \cdot E}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\gamma = \frac{e^2 n\lambda}{2mv_{śr}}}$$

- **Mikroskopowa interpretacja prawa Joule`a – Lenza**

Zderzający się z siecią elektron przekazuje jej energię kinetyczną E_k . Mnożąc tę energię przez częstotliwość zderzeń elektronów z siecią $v_{śr}/\lambda$ i przez gęstość elektronów n , otrzmamy gęstość mocy przekazanej energii od wszystkich elektronów.

$$E_k = \frac{mv_{max}^2}{2}$$
$$v_{max} = \frac{eE}{m} \cdot \frac{\lambda}{v_{śr}}$$
$$\omega = E_k \cdot \frac{v_{śr}}{\lambda} \cdot n$$
$$\omega = \gamma E^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega = \frac{e^2 n\lambda}{2mv_{śr}} \cdot E^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\gamma = \frac{e^2 n\lambda}{2mv_{śr}}}$$

- **Mikroskopowa interpretacja prawa Wiedemanna – Franza – Lorenza**

Zakładając, że przewodnictwo cieplne metali związane jest z gazem elektronów swobodnych, możemy wyznaczyć współczynnik przewodnictwa cieplnego K metali, wykorzystując relację dla współczynnika przewodnictwa cieplnego gazów, kładąc w niej liczbę stopni swobody $i = 3$.

$$K = \frac{1}{3} v_{śr} \lambda C_v d$$
$$C_v = \frac{iR}{2n}$$
$$i = 3$$
$$R = N_A k$$
$$n = \frac{N_A d}{M}$$
$$\gamma = \frac{e^2 n\lambda}{2mv_{śr}}$$
$$\frac{mv_{śr}^2}{2} = \frac{3kT}{2}$$
$$\frac{K}{\gamma} = LT$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{K = \frac{1}{2} nkv_{śr}\lambda}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{K}{\gamma} = \frac{3k^2}{e^2} \cdot T}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{L = \frac{3k^2}{e^2}}$$

- **Zależność przewodnictwa elektrycznego właściwego γ od temperatury T**

Klasyczna elektronowa teoria przewodnictwa elektrycznego metali nie radzi sobie z wyjaśnieniem doświadczalnej zależności przewodnictwa elektrycznego właściwego γ od temperatury T.

$$\gamma = \frac{ne^2\lambda}{2mv_{śr}^2} \qquad \frac{mv_{śr}^2}{2} = \frac{3kT}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\gamma \approx \frac{1}{\sqrt{T}}}$$

Relacja doświadczalna: $\boxed{\gamma \sim 1/T}$

- **Prawo Dulonga-Petita**

Inna wpadka klasycznej teorii elektronowej dotyczy ciepła właściwego molowego C metali. Zgodnie z tą teoria energia wewnętrzna metalu jest sumą energii drgań sieci krystalicznej $3NRT$ i energii chmury elektronowej $1{,}5NRT$, gdzie N jest liczbą moli metalu, a R stałą gazową. Z pierwszej zasady termodynamiki

$$\Delta\left(3NRT + 1{,}5NRT\right) = CN\Delta T$$

wynika, że
$$C = 4{,}5\,R\,.$$

Przypomnijmy treść doświadczalnego **prawa Dulonga-Petita**.
Ciepło właściwe molowe C krystalicznych ciał stałych wynosi $3R$.

$$\boxed{C = 3\,R}$$

I znów relacja teoretyczna nie zgadza się z relacją doświadczalną.

- **Porównanie relacji empirycznych z teoretycznymi**

Prawo	Relacja empiryczna	Relacja teoretyczna	Współczynnik
Ohma	$j = \gamma E$	$j = \frac{e^2 n\lambda}{2mv_{śr}} \cdot E$	$\gamma = \frac{en\lambda}{2mv_{śr}}$
Joule'a-Lenza	$\omega = \gamma E^2$	$\omega = \frac{e^2 n\lambda}{2mv_{śr}} \cdot E^2$	$\gamma = \frac{en\lambda}{2mv_{śr}}$
Wiedemanna-Franza	$\frac{K}{\gamma} = LT$	$\frac{K}{\gamma} = \frac{3k^2}{e^2} \cdot T$	$L = \frac{3k^2}{e^2}$
	$\gamma \approx \frac{1}{T}$	$\gamma \approx \frac{1}{\sqrt{T}}$	
Dulonga-Petita	$C = 3R$	$C = 4{,}5R$	

Z porównania relacji empirycznych i teoretycznych otrzymaliśmy interpretacje mikroskopowe dla przewodnictwa elektrycznego właściwego γ i liczby Lorenza L.

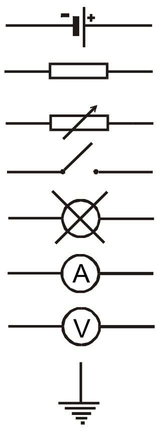
OBWODY PRĄDU STAŁEGO

1 ELEMENTY OBWODÓW ELEKTRYCZNYCH

- **Podstawowymi elementami obwodów elektrycznych** są źródła energii elektrycznej i odbiorniki tej energii. Źródło napięcia charakteryzuje jego opór wewnętrzny R_w i siła elektromotoryczna $\mathcal{E}$.

Siłą elektromotoryczną $\mathcal{E}$ źródła nazywamy różnicę potencjałów na jego zaciskach, gdy przez źródło nie płynie prąd**.**

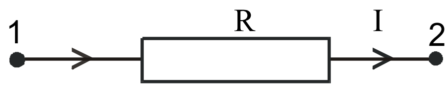
- **Symbole niektórych elementów obwodów elektrycznych**



źródło stałego napięcia
opornik, rezystor
opornik z możliwością regulacji oporu
wyłącznik
żarówka
amperomierz
woltomierz
uziemienie

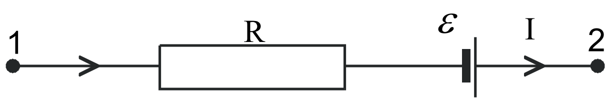
- **Węzeł, gałąź, oczko**

Węzłem obwodu elektrycznego nazywamy punkt, w którym spotykają się co najmniej trzy elementy obwodu.
Gałęzią obwodu elektrycznego nazywamy jeden lub kilka elementów połączonych względem siebie szeregowo. Natężenie prądu płynącego przez każdy element gałęzi jest takie samo. Na początku i końcu gałęzi znajdują się zaciski. Gałęzie obwodu dzielimy na pasywne i aktywne.
Gałęzią pasywną nazywamy gałąź nie zawierającą źródeł.



$\varphi_1 - \varphi_2 = U_{12} = IR > 0$

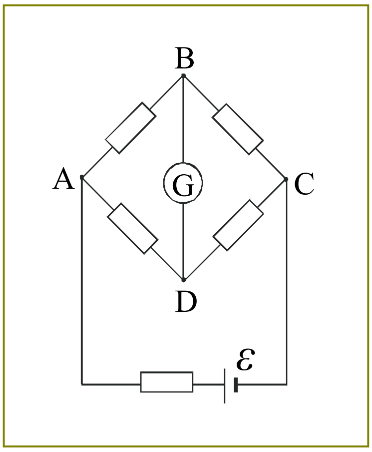
Gałęzią aktywną nazywamy gałąź zawierającą źródło.



$\varphi_1 - \varphi_2 = U_{12} = IR - \mathcal{E} > 0$

Oczkiem obwodu elektrycznego nazywamy fragment obwodu bez rozgałęzień, tworzący zamkniętą drogę dla przepływu prądu.

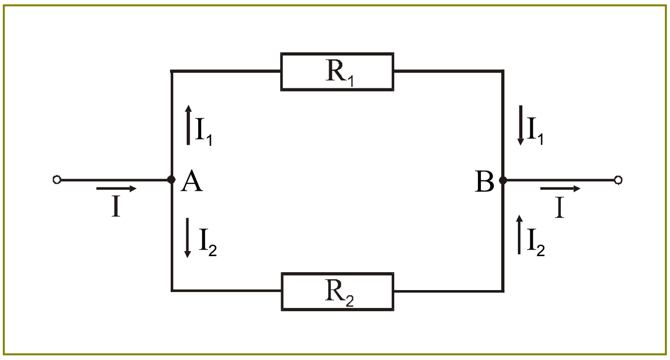
PRZYKŁAD



W mostku Wheatstone'a znajdujemy:
4 węzły,
6 gałęzi,
7 oczek.
Gałąź AC jest aktywna.
Gałęzie AB, BC, CD, DA i BD są pasywne.

2 OBWÓD JEDNOOCZKOWY BEZ ŹRÓDŁA

- **Obwód jednooczkowy bez źródła** jest fragmentem większego obwodu. W pozostałej części obwodu musi znajdować się źródło napięcia.



Relacje między wielkościami, opisującymi stan obwodu jednooczkowego, znajdujemy z praw Kirchhoffa i Ohma.

$$\boxed{I = I_1 + I_2}$$

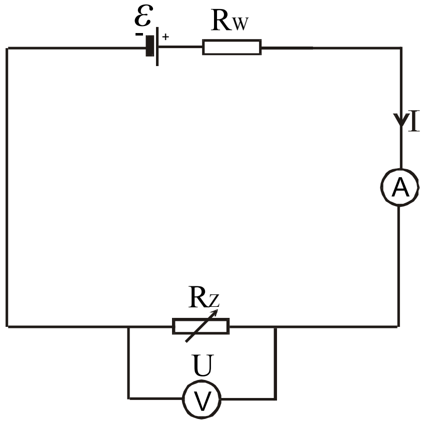
$$\boxed{I_1 R_1 = I_2 R_2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi_A - \varphi_B = U_1 = U_2}$$

$$\Downarrow$$

W mały opór wpływa duży prąd.
W duży opór wpływa mały prąd.

3 OBWÓD JEDNOOCZKOWY Z JEDNYM ŹRÓDŁEM

- **Prawa Kirchhoffa, Ohma i Joule'a-Lenza**

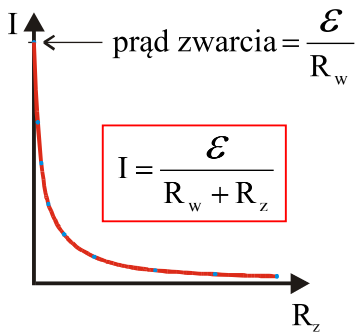


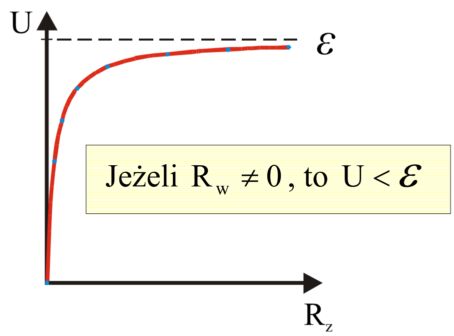
$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_w + R_z}$$ prawo Kirchhoffa

$$U = IR_z$$ prawo Ohma

$$P = I^2R$$ prawo Joule'a - Lenza

- **Wzajemne relacje między I, U i R_z**





$$U = IR_z$$
$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_w + R_z}$$
$$\Downarrow$$
$$U = \frac{\mathcal{E} R_z}{R_w + R_z}$$

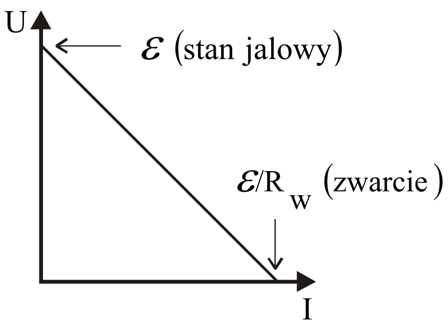
R_z	I	U
↑	↓	↑
↓	↑	↓

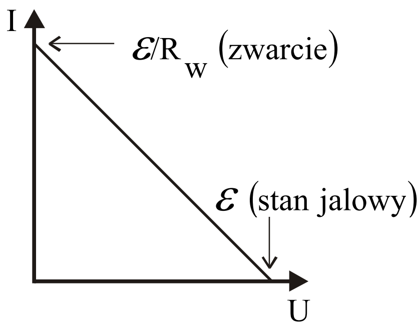
$\Rightarrow$ Zmiana oporu odbiornika R_z powoduje przeciwne względem siebie zmiany wskazań amperomierza i woltomierza.

Dane źródło: $\mathcal{E}$ = const, R_w = const.
Różne odbiorniki: R_z zmienia się.

$\mathcal{E} = IR_w + IR_z$ $\quad\quad$ $U = IR_z$

$$U = \mathcal{E} - IR_w \quad \Leftarrow \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\mathcal{E} - U}{R_w}$$





- **Różne relacje dla P_z, P_w, P_c i η**

$$U = IR_z \qquad I = \frac{\mathcal{E}}{R_W + R_Z}$$

$$\Downarrow$$

$$U = \mathcal{E} - IR_W \qquad I = \frac{\mathcal{E} - U}{R_W} \qquad U = \frac{\mathcal{E} R_Z}{R_W + R_Z} \qquad R_Z = \frac{UR_W}{\mathcal{E} - U}$$

$$P = I^2 R \qquad P_C = P_W + P_Z \qquad \eta = \frac{P_Z}{P_C}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{P_z = I^2 R_z} \quad \boxed{P_z = \frac{U^2}{R_z}} \quad \boxed{P_z = IU}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{P_z = \frac{\mathcal{E}^2 R_z}{(R_w + R_z)^2}} \quad \boxed{P_z = I\mathcal{E} - I^2 R_w}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{P_Z = \frac{U(\mathcal{E} - U)}{R_W}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{P_w = I^2 R_w} \quad \boxed{P_w = \frac{\mathcal{E}^2 R_w}{(R_w + R_z)^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{P_W = \frac{(\mathcal{E} - U)^2}{R_W}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{P_c = I^2 (R_w + R_z)} \quad \boxed{P_c = I\mathcal{E}} \quad \boxed{P_c = \frac{\mathcal{E}^2}{R_w + R_z}} \quad \boxed{P_C = \frac{(\mathcal{E} - U)\mathcal{E}}{R_W}}$$

$$\boxed{\eta = \frac{U}{\mathcal{E}}} \quad \boxed{\eta = \frac{P_c - P_w}{P_c}} \quad \boxed{\eta = \frac{R_z}{R_w + R_z}}$$

$$\boxed{P_z = \eta \mathcal{E} I} \quad \boxed{P_z = (\eta - \eta^2) \cdot \frac{\mathcal{E}^2}{R_w}}$$

P_z = moc ciepła wydzielonego w oporze odbiornika R_z
P_w = moc ciepła wydzielonego w oporze wewnętrznym R_w
P_c = moc ciepła wydzielonego w całym obwodzie
η = sprawność źródła

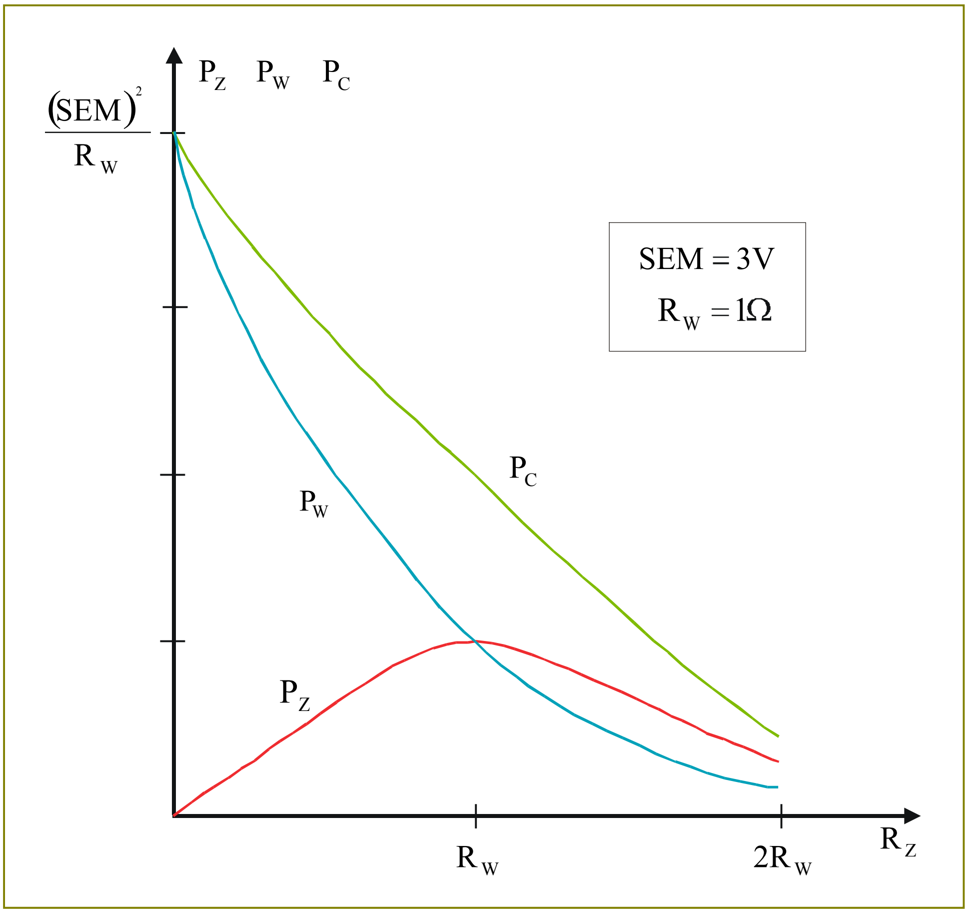
$\mathcal{E}^2/R_w$ = moc ciepła wydzielonego w oporze wewnętrznym R_w podczas zwarcia
Jest to największa moc jaka może wydzielić się w obwodzie, szkoda tylko, że w źródle, a nie w odbiorniku.

- **Wykresy P_z, P_w i P_c od R_z**

$$P_z = \frac{\mathcal{E}^2 R_z}{(R_w + R_z)^2}$$

$$P_w = \frac{\mathcal{E}^2 R_w}{(R_w + R_z)^2}$$

$$P_c = \frac{\mathcal{E}^2}{R_w + R_z}$$



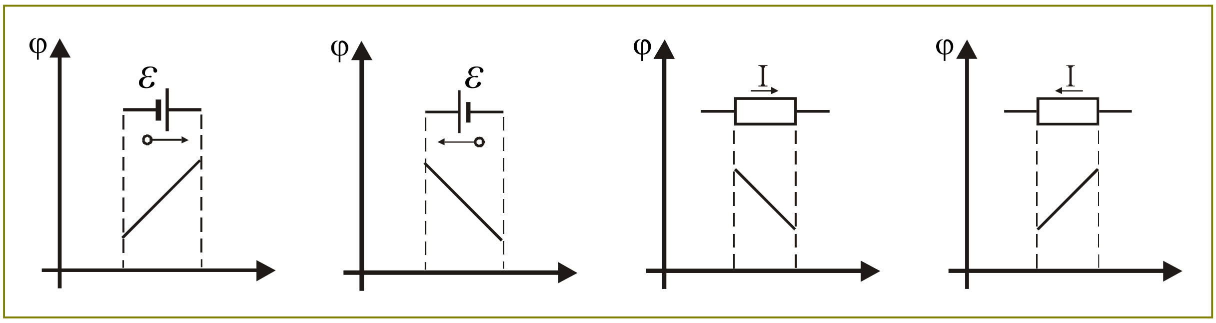
$$R_z = R_w \quad \Leftrightarrow \quad P_z = \max = \frac{1}{4} \cdot \frac{\mathcal{E}^2}{R_w}$$

- **Charakterystyczne stany pracy źródła**

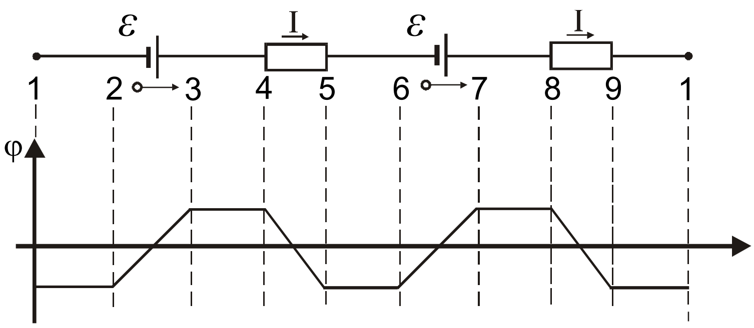
STAN	R_z	U	I	P_z	P_w	P_c	η	UWAGI
jałowy źródła	∞	$\mathcal{E}$	0	0	0	0		obwód otwarty
zwarcia źródła	0	0	$\frac{\mathcal{E}}{R_w}$	0	$\frac{\mathcal{E}^2}{R_w}$	$\frac{\mathcal{E}^2}{R_w}$	0	zwarty odbiornik
dopasowania odbiornika do źródła	R_w	$\frac{1}{2}\mathcal{E}$	$\frac{1}{2}\frac{\mathcal{E}}{R_w}$	$\frac{1}{4}\frac{\mathcal{E}^2}{R_w}$	$\frac{1}{4}\frac{\mathcal{E}^2}{R_w}$	$\frac{1}{2}\frac{\mathcal{E}^2}{R_w}$	$\frac{1}{2}$	

4 WYKRES ZMIENNOŚCI POTENCJAŁÓW W OCZKU

- **Wykres zmienności potencjałów** w obwodzie jednooczkowym lub w oczku obwodu wielooczkowego sporządzamy według poniższego odwzorowania.



PRZYKŁAD



Wykresy takie są bardzo przydatne przy rozważaniach jakościowych.

5 PRAWA KIRCHHOFFA

Do analizy złożonych obwodów składających się z dowolnej liczby węzłów, gałęzi, oczek, oporników i źródeł wykorzystuje się dwa prawa Kirchhoffa.

- **Pierwsze prawo Kirchhoffa**

Dla każdego węzła obwodu

$$\boxed{\sum_k I_k = 0}$$

suma natężeń prądów spotykających się w węźle, wziętych z odpowiednimi znakami, jest równa zeru.

Konwencja znakowa:

1. Jeżeli k-ty prąd wpływa do węzła, to piszemy $+I_k$.
2. Jeżeli k-ty prąd wypływa z węzła, to piszemy $-I_k$.

- **Pierwsze prawo Kirchhoffa** bywa formułowane także w postaci mniej abstrakcyjnej.

Suma natężeń prądów wpływających do węzła jest równa sumie natężeń prądów wypływających z węzła.

- **Drugie prawo Kirchhoffa**

Dla każdego oczka obwodu

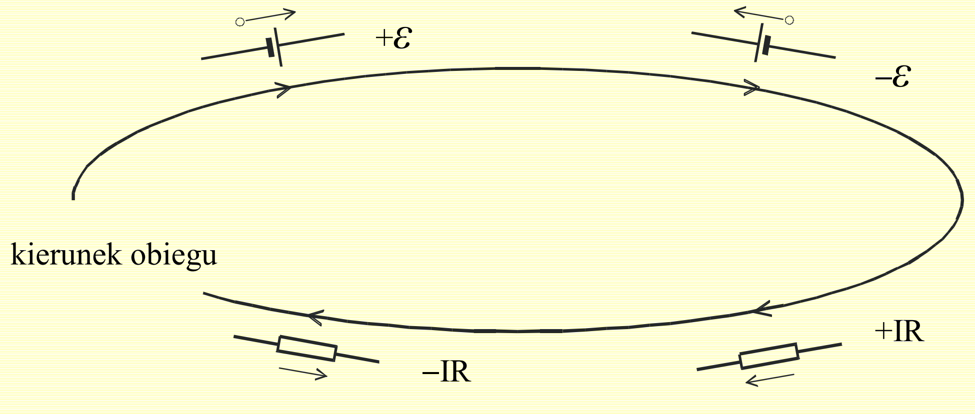
$$\boxed{\sum_i \mathcal{E}_i = \sum_k I_k R_k}$$

suma wszystkich sił elektromotorycznych wziętych z odpowiednimi znakami jest równa sumie wszystkich iloczynów $I_k R_k$ wziętych z odpowiednimi znakami.

Konwencja znakowa:

1. Obieramy kierunek obchodzenia oczka.
2. Gdy przechodzimy przez źródło w kierunku SEM, to piszemy $+\mathcal{E}$.

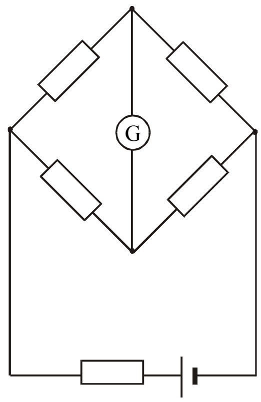
   W przypadku przeciwnym piszemy $-\mathcal{E}$.
3. Gdy przechodzimy przez opór w kierunku płynięcia prądu, to piszemy +IR.
   W przypadku przeciwnym piszemy –IR.



- **Praktyczne wskazówki dotyczące układania równań Kirchhoffa dla danego obwodu**

1. Zaznaczamy kierunki wszystkich sił elektromotorycznych.
2. W każdej gałęzi zaznaczamy dowolny kierunek przepływu prądu. Jeżeli po rozwiązaniu równań Kirchhoffa otrzymamy dla danej gałęzi ujemny prąd, oznaczać to będzie, że przyjęliśmy niewłaściwy kierunek przepływu prądu.
3. Wybieramy dany kierunek obchodzenia oczek, na przykład, zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara.
4. Jeżeli sieć ma **W** węzłów i **G** gałęzi, to wygodnie jest napisać w oparciu o pierwsze prawo Kirchhoffa **W – 1** niezależnych równań i w oparciu o drugie prawo Kirchhoffa **G – W + 1** niezależnych równań, pamiętając by każde nowe oczko zawierało co najmniej jedną nową gałąź nie należącą do wcześniej analizowanych oczek.

PRZYKŁAD



W obwodzie tym znajdujemy:
4 węzły, **W** = 4,
6 gałęzi, **G** = 6,
7 oczek.

Można napisać 11 równań, w tym 6 niezależnych, 3 równania niezależne w oparciu o pierwsze prawo Kirchhoffa oraz 3 równania niezależne w oparciu o drugie prawo Kirchhoffa. Liczba niezależnych równań powinna być równa liczbie gałęzi.

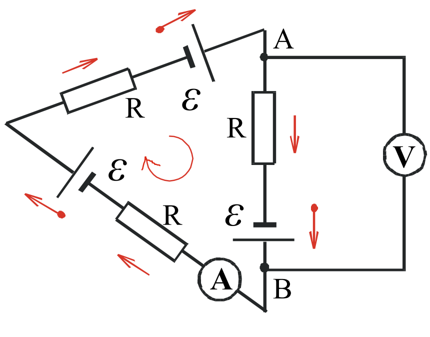
- **Obliczanie różnicy potencjałów**

Różnica potencjałów w punktach A i B należących do danego oczka jest równa sumie wszystkich iloczynów $I_k R_k$, wziętych z odpowiednimi znakami, napotkanych na drodze od A do B, pomniejszonej o sumę wszystkich sił elektromotorycznych napotkanych na drodze od A do B, wziętych z odpowiednimi znakami.

$$\boxed{\varphi_A - \varphi_B = \sum_{A\to B} I_k R_k - \sum_{A\to B} \mathcal{E}_i}$$

$A \to B$ na drodze od A do B

PRZYKŁAD



Oblicz wskazanie amperomierza i woltomierza.
$R = 1\Omega$
$\mathcal{E} = 1V$
$I = ?$
$\varphi_A - \varphi_B = ?$

ROZWIĄZANIE

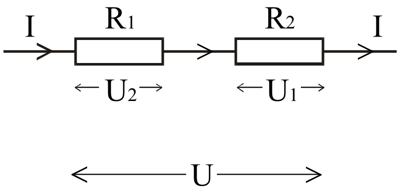
$3\mathcal{E} = 3IR$, $I = \mathcal{E}/R = 1A$, $\varphi_A - \varphi_B = IR - \mathcal{E} = 0$.

- **Uziemienie.**

Jeden punkt obwodu można uziemić, ponieważ nie wpływa to na wartości natężeń prądów w obwodzie. Zgodnie z umową, potencjał uziemionego punktu jest równy zeru.

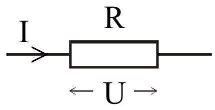
6 POŁĄCZENIA OPORNIKÓW

- **Połączenie szeregowe oporników**



$U_1 = I R_1$
$U_2 = I R_2$
$U = U_1 + U_2$
$U = I R$

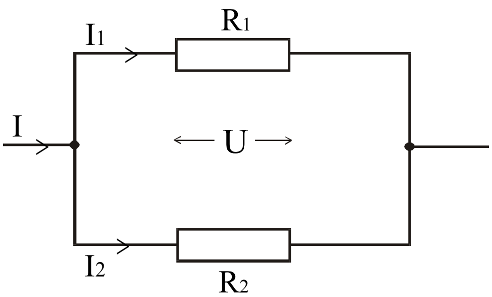
$\Rightarrow$



$\boxed{R = R_1 + R_2}$

W połączeniu szeregowym oporników natężenie prądu płynącego przez każdy opornik jest takie samo, a opór zastępczy jest równy sumie oporów poszczególnych oporników.

- **Połączenie równoległe oporników**



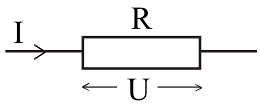
$I_1 = \dfrac{U}{R_1}$

$I_2 = \dfrac{U}{R_2}$

$I = I_1 + I_2$

$I = \dfrac{U}{R}$

$\Rightarrow$



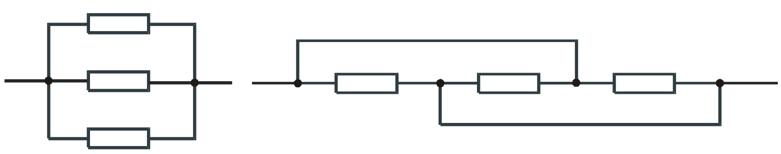
$\boxed{\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}}$

UWAGA
Korzystając ze wzoru $\boxed{\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}}$, pamiętaj o odwróceniu wyniku $\boxed{\dfrac{1}{R} \to R}$

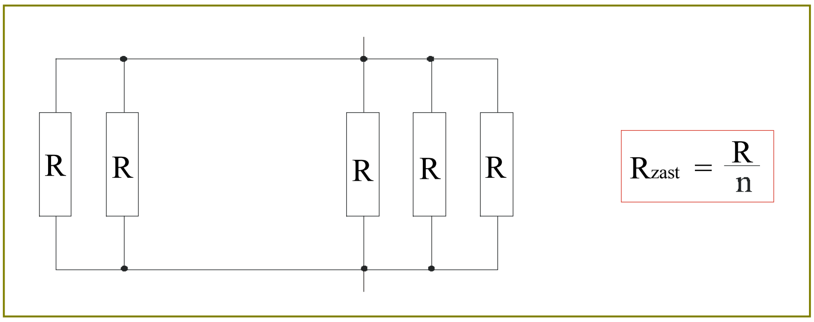
lub używaj postaci $\boxed{R = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$.

W połączeniu równoległym oporników napięcie na każdym oporniku jest takie samo, a odwrotność oporu zastępczego jest równa sumie odwrotności oporów poszczególnych oporników.

UWAGA
Połączenie równoległe trzech oporników można przedstawić na różne sposoby:



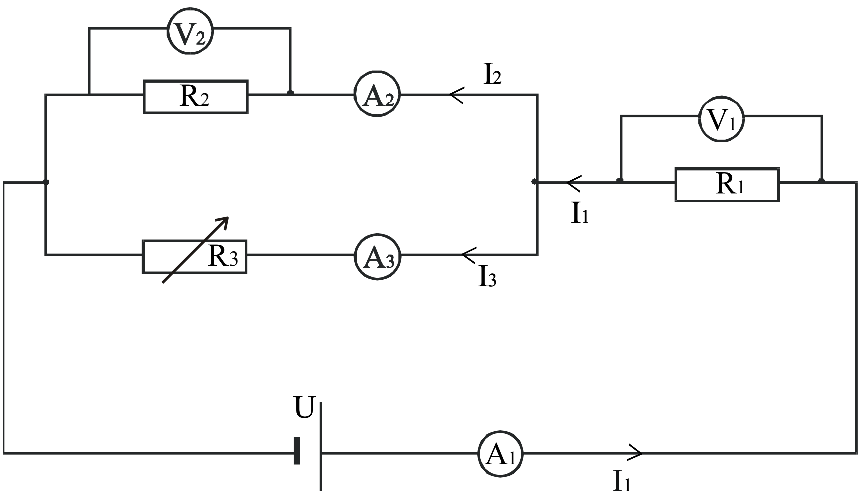
TWIERDZENIE
W przypadku połączenia równoległego n jednakowych oporników, każdy o oporze R , opór zastępczy jest n-krotnie mniejszy niż R.



TWIERDZENIE
W połączeniu równoległym dowolnej liczby różnych oporników opór zastępczy jest mniejszy od najmniejszego oporu w sieci.

TWIERDZENIE
W połączeniu równoległym oporników usunięcie dowolnego opornika lub zwiększenie wartości jego oporu powoduje wzrost oporu zastępczego układu.

PRZYKŁAD
Zbadaj jak zachowują sie wskazania mierników A_1 , V_1 , V_2 , A_2 i A_3 po usunięciu opornika R_3 lub po zwiększeniu jego wartości.



$R_{zast} \nearrow$

$I_1 = \frac{U}{R_{zast}} \Rightarrow I_1 \searrow$

$U_1 = I_1 R_1 \Rightarrow U_1 \searrow$

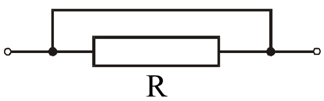
$U = U_1 + U_2 \Rightarrow U_2 \nearrow$

$U_2 = I_2 R_2 \Rightarrow I_2 \nearrow$

$I_1 = I_2 + I_3 \Rightarrow I_3 \searrow$

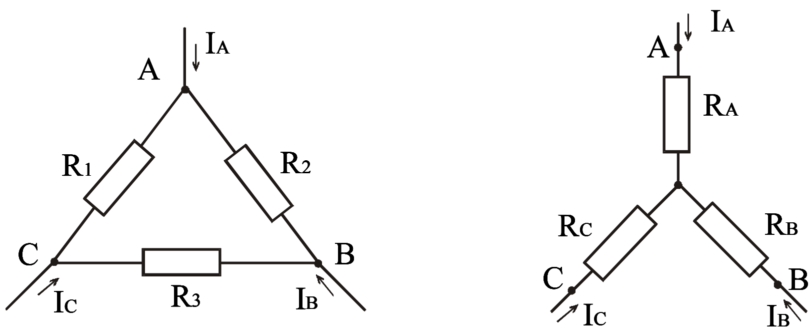
- **Połączenia mieszane oporników szeregowo-równoległe**
  W przypadku mieszanych szeregowo-równoległych połączeń oporników obliczanie oporu zastępczego polega na kolejnym upraszczaniu danej sieci.

- **Zwarty opornik**



Zwarty opornik nie jest opornikiem.
Opór zastępczy takiego układu jest równy zeru.

- **Transformacja trójkąta w gwiazdę i vice versa**



Połączenie oporników z lewej strony nazywamy połączeniem w trójkąt lub trójkątem. Połączenie z prawej strony nazywamy połączeniem w gwiazdę lub gwiazdą. Wyznaczenie oporów w gwieździe, gdy dane są opory w trójkącie, nazywamy **transformacją trójkąta w gwiazdę**. Wyznaczenie oporów w trójkącie, gdy dane są opory w gwieździe, nazywamy **transformacją gwiazdy w trójkąt**.

Trójkąt i gwiazda są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy opory pomiędzy każdą parą węzłów w trójkącie i w gwieździe są jednakowe przy odłączonym węźle trzecim, czyli gdy do węzła trzeciego nie wpływa prąd.

$$I_A = 0: \quad \frac{(R_1 + R_2) R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = R_B + R_C$$

$$I_B = 0: \quad \frac{(R_2 + R_3) R_1}{R_1 + R_2 + R_3} = R_A + R_C$$

$$I_C = 0: \quad \frac{(R_1 + R_3) R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = R_A + R_B$$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

Transformacja trójkata w gwiazdę.

$$R_A = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_B = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_C = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Transformacja gwiazdy w trójkąt.

$$R_1 = R_A + R_C + \frac{R_A R_C}{R_B}$$

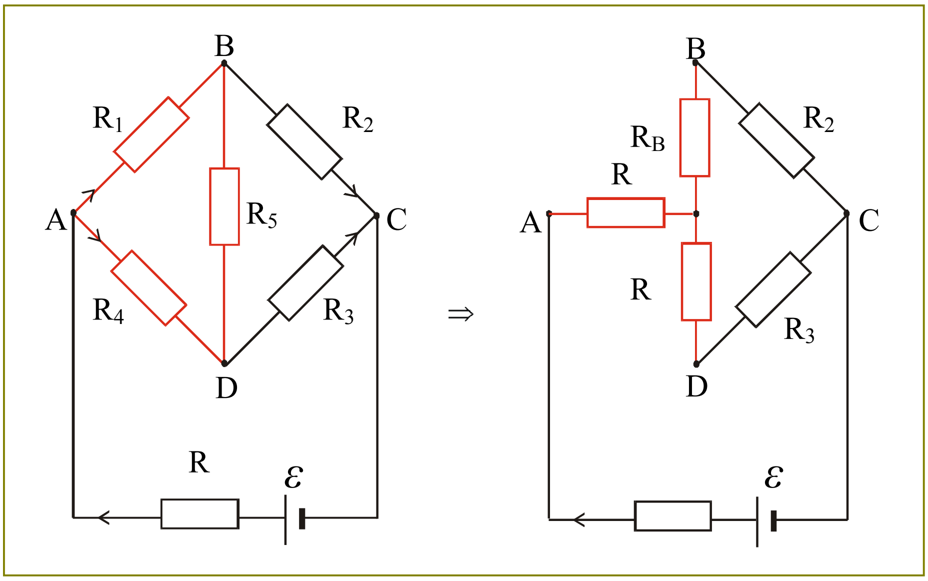
$$R_2 = R_A + R_B + \frac{R_A R_B}{R_C}$$

$$R_3 = R_B + R_C + \frac{R_B R_C}{R_A}$$

UWAGA

Opór danej gałęzi gwiazdy jest równy iloczynowi oporów dwóch gałęzi trójkąta, spotykających się w węźle należącym do danej gałęzi gwiazdy, podzielonemu przez sumę oporów wszystkich gałęzi trójkąta.
Opór danej gałęzi trójkąta jest równy sumie oporów dwóch gałęzi gwiazdy, łączących parę węzłów należących do danej gałęzi trójkąta, plus iloczyn tych oporów gwiazdy podzielony przez opór trzeciej gałęzi gwiazdy.

PRZYKŁAD
Wyznacz w mostku Wheatstone`a opór zastępczy między punktami A i C.



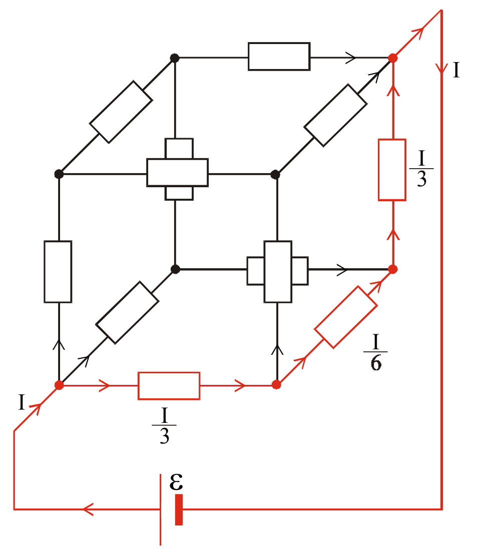
W mostku Wheatstone`a nie ma połączeń szeregowych ani równoległych, są natomiast połączenia w trójkąt. Dokonamy transformacji trójkąta ABD w równoważną gwiazdę:

$$R_A = \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4 + R_5}, \quad R_B = \frac{R_1 R_5}{R_1 + R_4 + R_5}, \quad R_D = \frac{R_4 R_5}{R_1 + R_4 + R_5}.$$

Opór zastępczy między punktami A i C wynosi

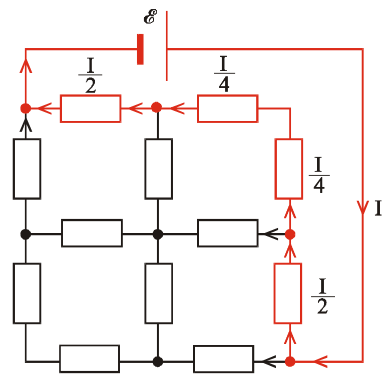
$$\boxed{R_{AC} = R_A + \frac{(R_B + R_2)(R_D + R_3)}{R_B + R_D + R_2 + R_3}}.$$

- **Symetryczne połączenia oporników**



$$\mathcal{E} = \frac{I}{3}R + \frac{I}{6}R + \frac{I}{3}R$$

$$\mathcal{E} = I\left(\frac{R}{3} + \frac{R}{6} + \frac{R}{3}\right), \quad R_{zast} = \frac{5}{6}R$$



$$\mathcal{E} = \frac{I}{2}R + \frac{I}{4}R + \frac{I}{4}R + \frac{I}{2}R$$

$$\mathcal{E} = I\left(\frac{R}{2} + \frac{R}{4} + \frac{R}{4} + \frac{R}{2}\right), \quad R_{zast} = \frac{3}{2}R$$

7 MOSTEK WHEATSTONE`A

- **Stan równowagi mostka Wheatstone`a**

Mówimy, że mostek Wheatstone`a jest w równowadze lub jest zrównoważony, gdy różnica potencjałów między punktami B i D jest równa zeru, $U_{BD} = 0$, a przez galwanometr nie płynie prąd, $I_G = 0$.

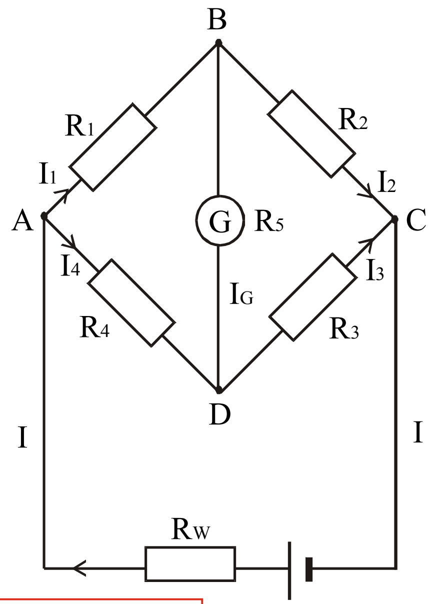
$U_{BD} = 0$
$I_G = 0$
$\Downarrow$
$I_1 = I_2$
$I_3 = I_4$

$U_{AB} = U_{AD}$
$U_1 = U_4$
$I_1R_1 = I_4R_4$

$U_{BC} = U_{DC}$
$U_2 = U_3$
$I_2R_2 = I_3R_3$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_4}{R_3}$$

$R_1R_3 = R_2R_4$ $\Rightarrow$ $\boxed{I_G = 0 \Leftrightarrow R_1R_3 = R_2R_4}$



- **Przekątna pomiarowa i przekątna zasilania**

W zrównoważonym mostku Wheatstone`a można zamienić miejscami galwanometr (przekątna pomiarowa) i źródło (przekątna zasilania).

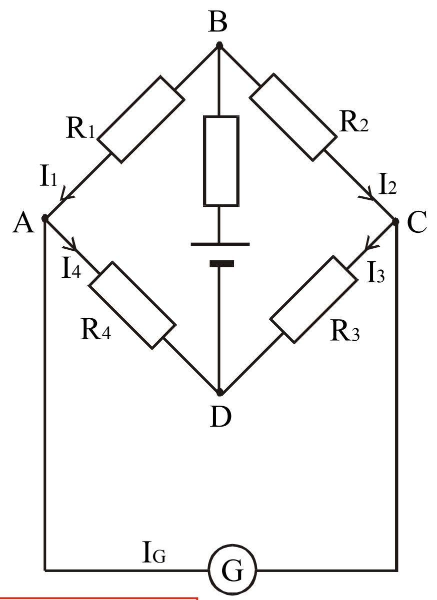
$U_{AC} = 0$
$I_G = 0$
$\Downarrow$
$I_1 = I_4$
$I_2 = I_3$

$U_{AD} = U_{CD}$
$U_4 = U_3$
$I_4R_4 = I_3R_3$

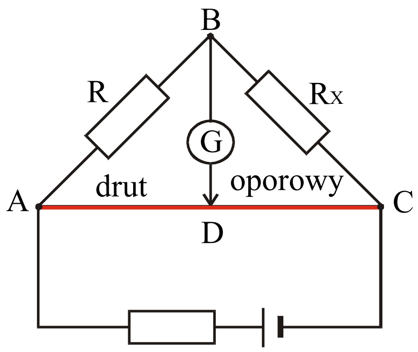
$U_{BA} = U_{BC}$
$U_1 = U_2$
$I_1R_1 = I_2R_2$

$$\frac{R_4}{R_1} = \frac{R_3}{R_2}$$

$R_1R_3 = R_2R_4$ $\Rightarrow$ $\boxed{I_G = 0 \Leftrightarrow R_1R_3 = R_2R_4}$



- **Zastosowanie**



Mostek Wheatstone'a wykorzystywany jest do pomiarów oporów powyżej 1 Ω. Pomiary mniejszych oporów obarczane są zbyt dużym błędem ze względu na opory przewodów łączących i opory występujące na stykach. Z warunków równowagi mostka można obliczyć opór nieznany, znając wartości trzech pozostałych. W praktyce stosowany jest mostek, w którym dwa oporniki zastępuje się drutem oporowym.

Zapisując warunek równowagi dla mostka, możemy zastąpić opory odpowiednich części drutu ich długościami.

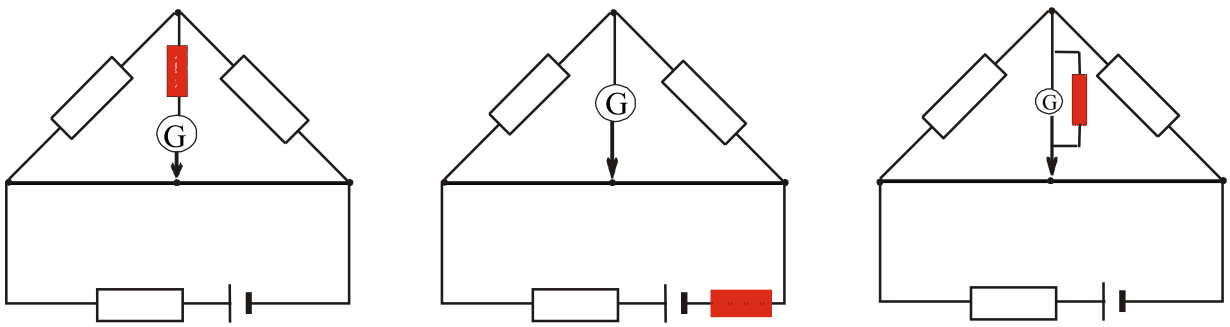
$$
\begin{aligned}
AC &= c \\
AD &= s \\
DC &= c - s \\
R_x \cdot s &= R \cdot (c - s)
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\boxed{R_x = R \cdot \left(\frac{c - s}{s} \right)}
$$

- **Zero na skali galwanometru**

Galwanometr powinien mieć położenie zerowe na środku skali, ponieważ prąd w gałęzi z miernikiem może płynąć w jedną lub drugą stronę.

- **Opór zabezpieczający**

Aby zabezpieczyć galwanometr przed zbyt dużym prądem, w przypadku nie zrównoważenia mostka, stosuje się opór zabezpieczający, włączając go na różne sposoby.



- **Minimalny błąd pomiaru**.

W jakim położeniu suwaka pomiar jest najdokładniejszy?

$$
\begin{aligned}
R_x &= R \cdot \left(\frac{c - s}{s} \right) \\
\Delta R_x &= \left| \frac{dR_x}{ds} \right| \cdot \Delta s \\
\left| \frac{dR_x}{ds} \right| &= \frac{R \cdot c}{s^2}
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{\Delta s}{s \cdot (c - s)}
$$

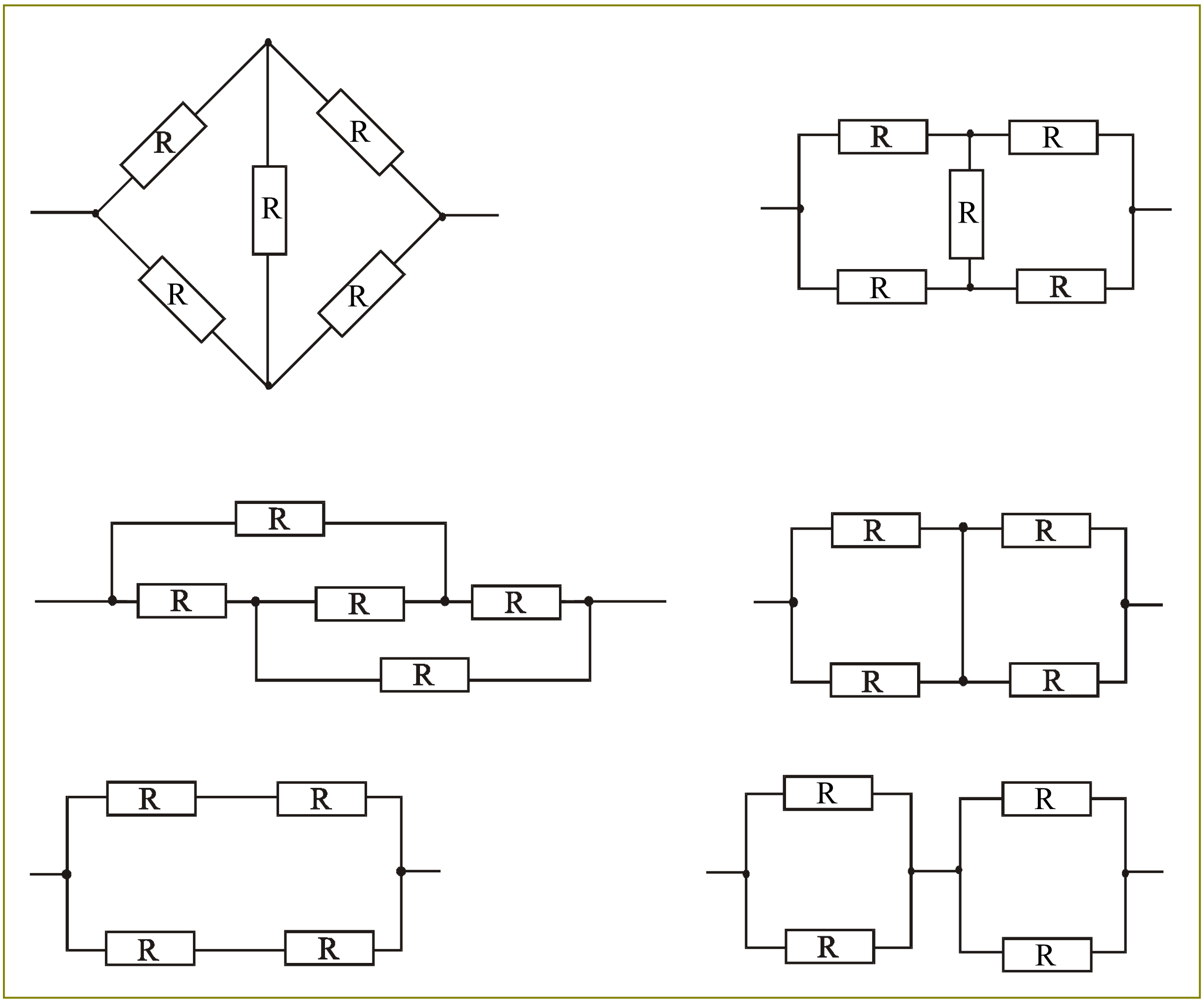
$$\Downarrow$$

$$
\boxed{\frac{\Delta R_x}{R_x} = \min \quad \Leftrightarrow \quad s \cdot (c - s) = \max \quad \Leftrightarrow \quad s = \frac{1}{2} \cdot d}
$$

Jeżeli w momencie zrównoważenia mostka suwak znajduje się na środku drutu oporowego, to pomiar oporu obarczony jest najmniejszym błędem.

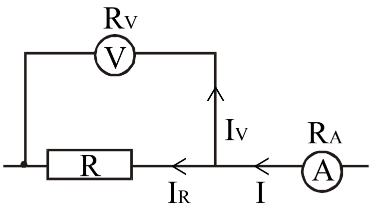
PRZYKŁAD

Korzystając z twierdzenia o stanie równowagi mostka, można łatwo sprawdzić, że opór zastępczy każdego poniżej podanego układu wynosi R.



8 POMIAR OPORU METODĄ TECHNICZNĄ

- Zbadajmy błędy jakie popełniamy, mierząc opór danego opornika jako iloraz wskazania woltomierza i amperomierza.



$I = I_R + I_V$

$I_R \cdot R = I_V R_V$

$R^* = \frac{V}{A} = \frac{I_R \cdot R}{I_R + I_V}$

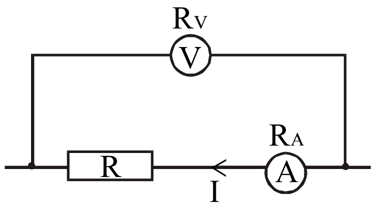
$\Downarrow$

$\boxed{R^* = \frac{R}{1 + \frac{R}{R_V}}}$ lub $\frac{1}{R^*} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_V}$

$\Downarrow$

$R^* < R$

$R^* \approx R \Leftrightarrow R_V \gg R$



$R^* = \frac{V}{A} = \frac{IR + IR_A}{I}$

$R^* = R + R_A$

$\Downarrow$

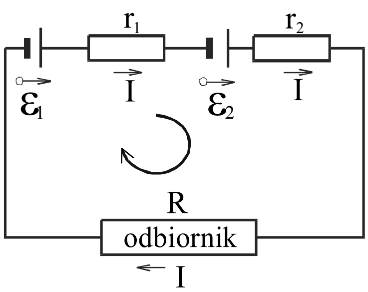
$R^* > R$

$R^* \approx R \Leftrightarrow R_A \ll R$

R = dokładna wartość oporu
R* = zmierzona wartość oporu

9 POŁĄCZENIA ŹRÓDEŁ NAPIĘCIA

- **Połączenia szeregowe źródeł napięcia**



$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = Ir_1 + Ir_2 + IR$

$\Downarrow$

$I = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{r_1 + r_2 + R}$

$I = \frac{\mathcal{E}_{zast}}{r_{zast} + R}$

$\Rightarrow$

$\mathcal{E}_{zast} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$

$r_{zast} = r_1 + r_2$

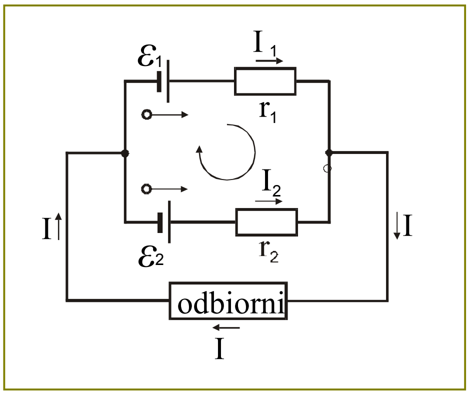
W połączeniu szeregowym źródeł natężenie prądu płynącego przez każde źródło jest takie samo. Siła elektromotoryczna źródła zastępczego jest równa sumie sił elektromotorycznych poszczególnych źródeł. Opór źródła zastępczego jest sumą oporów poszczególnych źródeł.

UWAGA
W rozpatrywanym powyżej przypadku założyliśmy zgodność sił elektromotorycznych poszczególnych źródeł. W przypadku ogólnym należy pamiętać o konwencji znakowej przyjętej przy omawianiu drugiego prawa Kirhchoffa.

- Przy szeregowym połączeniu n identycznych źródeł, każde o sile elektromotorycznej $\mathcal{E}$, oporze wewnętrznym r, siła elektromotoryczna $\mathcal{E}_{zast}$ i opór r_{zast} źródła zastępczego wynoszą:

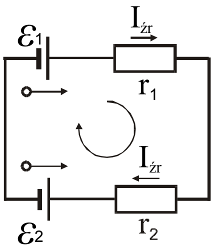
$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{E}_{zast} &= n\cdot\mathcal{E}\\ r_{zast} &= n\cdot r\end{aligned}}\ .$$

- **Połączenie równoległe dwóch różnych źródeł napięcia**



Przy odłączonym odbiorniku, w oczku utworzonym z obu źródeł płynie prąd o natężeniu $I_{źr}$.

$$\begin{aligned}I &= I_1 + I_2\\ \mathcal{E}_1 &= I_1 r_1 + IR\\ \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 &= I_1 r_1 - I_2 r_2\\ I &= \frac{\mathcal{E}_{zast}}{r_{zast} + R}\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\dfrac{\mathcal{E}_1 r_1 + \mathcal{E}_2 r_2}{r_1 + r_2}}{\dfrac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} + R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned}\mathcal{E}_{zast} &= \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 + r_2}\\ r_{zast} &= \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}\end{aligned}}$$



$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 &> \mathcal{E}_2\\ \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 &= I_{źr} r_1 + I_{źr} r_2\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_{źr} = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{r_1 - r_2}}$$

UWAGA
Połączenie równoległe różnych źródeł jest nieekonomiczne, ponieważ źródła rozładowują się. Aby tego uniknąć, w praktyce stosuje się połączenia równoległe identycznych źródeł.

- Przy równoległym połączeniu n identycznych źródeł, każde o sile elektromotorycznej $\mathcal{E}$ i oporze wewnętrznym r, siła elektromotoryczna $\mathcal{E}_{zast}$ i opór wewnętrzny r_{zast} źródła zastępczego wynoszą:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{E}_{zast} &= \mathcal{E} \\ r_{zast} &= \frac{r}{n} \end{aligned}}\ .$$

Połączenie równoległe identycznych źródeł zwiększa sprawność źródła zastępczego.

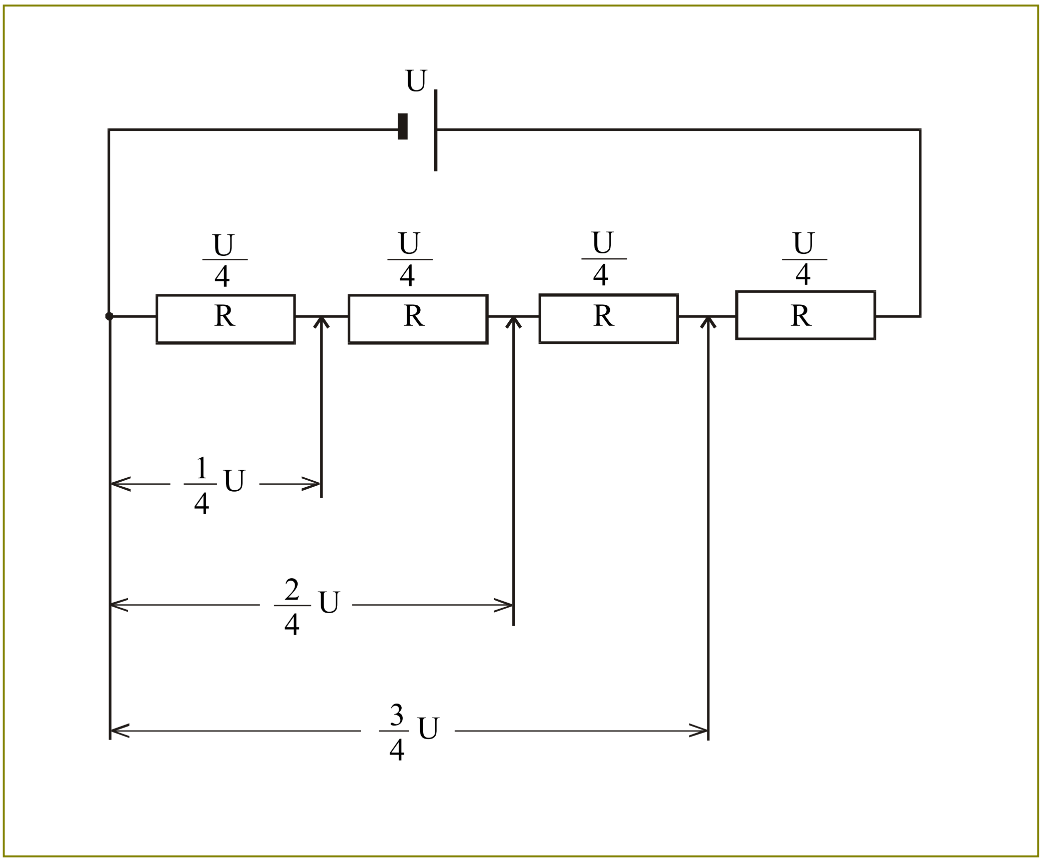
- **Połączenia mieszane źródeł**

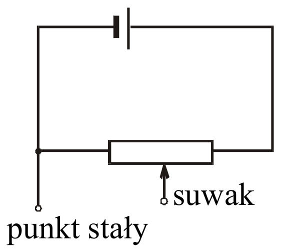
Obliczanie parametrów źródła zastępczego polega na kolejnym upraszczaniu danej sieci źródeł.

10 POTENCJOMETR

- **Nieobciążony potencjometr - rozważania jakościowe**

Potencjometr jest układem regulującym napięcie, tworzymy go spinając źródło stałego napięcia odpowiednio dużym oporem, aby zminimalizować moc wydzielanego w nim ciepła. Zasada działania potencjometru wyjaśniona jest na rysunku poniżej.

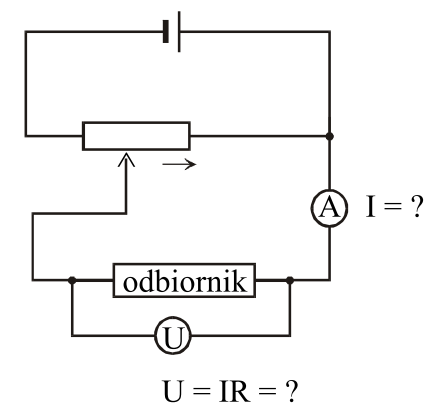




Jeżeli suwak oddala się od punktu stałego, to napięcie na zaciskach wyjściowych potencjometru rośnie.

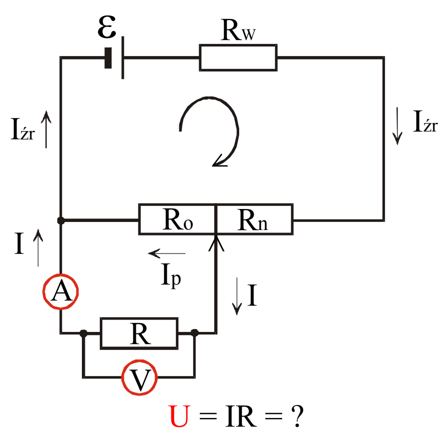
Jeżeli suwak zbliża się do punktu stałego, to napięcie na zaciskach wyjściowych potencjometru maleje.

PRZYKŁAD



Po przesunięciu suwaka potencjometru w prawo napięcie podane z końcówek potencjometru na odbiornik zmaleje, co spowoduje zmniejszenie się natężenia prądu płynącego przez odbiornik.

- **Obciążony potencjometr - rozważania ilościowe**



$$I_{\acute{z}r} = I + I_p$$
$$\mathcal{E} = I_{\acute{z}r}R_w + I_{\acute{z}r}R_n + IR$$
$$0 = IR - I_pR_o$$
$$U = IR$$

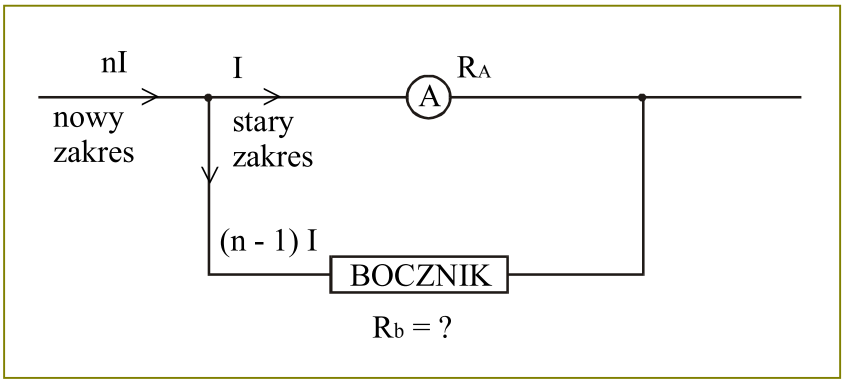
$$\Downarrow$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_w\left(1 + \frac{R}{R_o}\right) + R_n + R\left(1 + \frac{R_n}{R_o}\right)}$$

$$U = \frac{\mathcal{E}}{(R_w + R_n)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_o}\right) + 1}$$

11 AMPEROMIERZ I WOLTOMIERZ

- **Rozszerzanie zakresu pomiarowego amperomierza**



$$IR_A = (n-1)IR_b$$

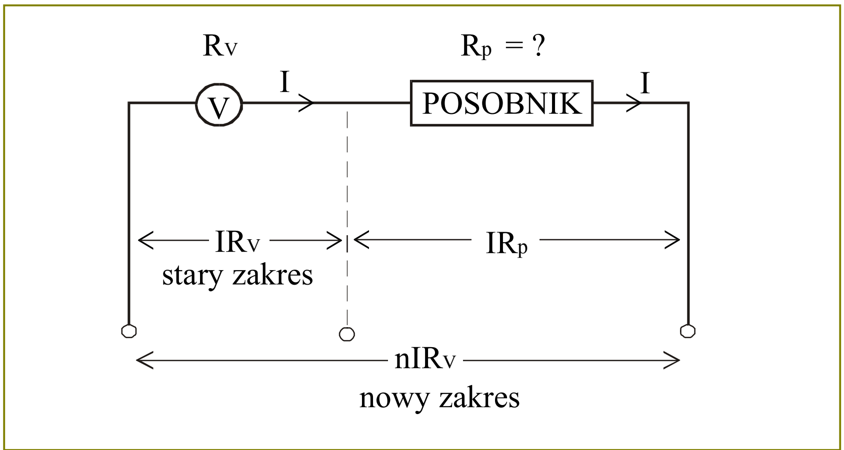
$$R_b = \frac{R_A}{n-1}$$

$$n = \frac{\text{nowy zakres}}{\text{stary zakres}}$$

Bocznik przyłączany równolegle względem amperomierza.

R_A = opór wewnętrzny amperomierza
R_b = opór bocznika
I = stary zakres pomiarowy amperomierza
nI = nowy zakres pomiarowy amperomierza

- **Rozszerzanie zakresu pomiarowego woltomierza**



$$nIR_V = IR_V + IR_p$$

$$R_p = R_V(n-1)$$

$$n = \frac{\text{nowy zakres}}{\text{stary zakres}}$$

Posobnik przyłączamy szeregowo względem woltomierza.

R_V = opór wewnętrzny woltomierza
R_p = opór posobnika
nIR_V = nowy zakres pomiarowy woltomierza
IR_V = stary zakres pomiarowy woltomierza

- **Jak z amperomierza zrobić woltomierz i vice versa?**

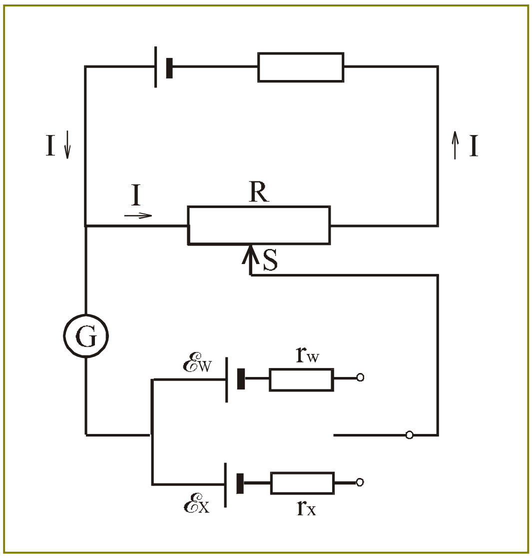
Idealny amperomierz powinien mieć opór wewnętrzny nieskończenie mały, aby na mierniku nie pojawiało się napięcie.

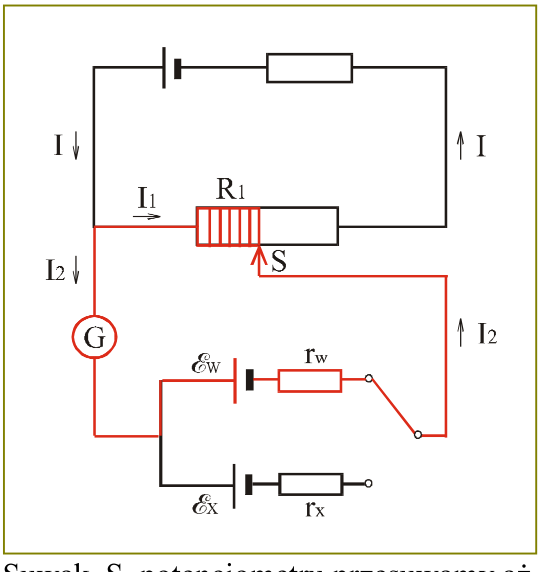
Idealny woltomierz powinien mieć opór wewnętrzny nieskończenie wielki, aby do gałęzi z miernikiem nie wpływał żaden prąd.

Amperomierz można przerobić na woltomierz dołączając do niego szeregowo bardzo duży opór.
Woltomierz można przerobić na amperomierz przyłączając do niego równolegle bardzo mały opór.

12 KOMPENSACYJNA METODA POMIARU SIŁY ELEKTROMOTORYCZNEJ ŹRÓDŁA

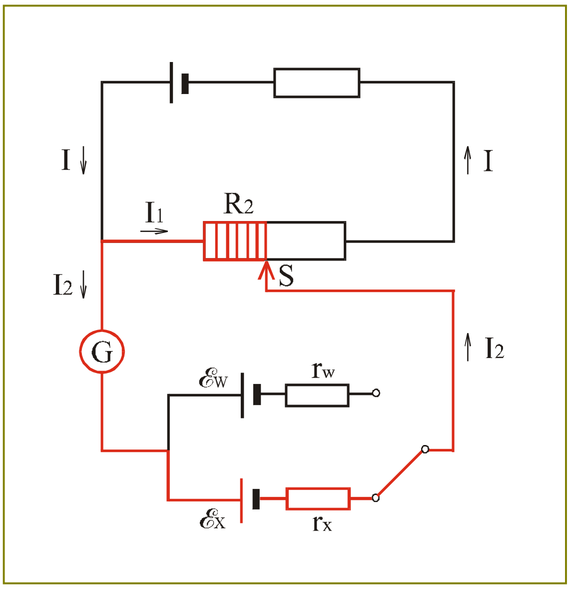
- **Kompensacyjna metoda pomiaru siły elektromotorycznej** polega na porównaniu nieznanej siły elektromotorycznej $\mathcal{E}_X$ badanego źródła ze znaną siłą elektromotoryczną $\mathcal{E}_W$ źródła wzorcowego.





$$\mathcal{E}_w = I_1R_1 - I_2R_w$$
$$I = I_1 + I_2$$
$$I_2 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\mathcal{E}_w = I_1R_1}$$

Suwak S potencjometru przesuwamy aż do wyzerowania galwanometru, $I_2 = 0$. Siła elektromotoryczna $\mathcal{E}_W$ zostaje wtedy skompensowana przez napięcie na oporze R_1.



$$\mathcal{E}_x = I_1R_2 - I_2r_x$$
$$I = I_1 + I_2$$
$$I_2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{E}_x = IR_2$$

Suwak potencjometru przesuwamy aż do wyzerowania galwanometru, $I_2 = 0$. Siła elektromotoryczna $\mathcal{E}_x$ zostaje wtedy skompensowana przez napięcie na oporze R_2 .

$$\mathcal{E}_x = IR_2$$
$$\mathcal{E}_w = IR_1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathcal{E}_x}{\mathcal{E}_w} = \frac{R_2}{R_1}$$

UWAGA

$\mathcal{E}_x,\ \mathcal{E}_w \le IR$.

Zbigniew Osiak

Należę do pokolenia fizyków, dla których idolami byli Albert Einstein, Lew Dawidowicz Landau i Richard P. Feynman. Einstein zniewolił mnie potęgą swej intuicji. Landaua podziwiam za rzetelność, precyzję i prostotę wywodów oraz instynktowne wyczuwanie istoty zagadnienia. Feynman urzekł mnie lekkością narracji i subtelnym poczuciem humoru.