PREMIERE PARTIE

Soit n > 6 ; ∈ à ℕ ; l'ensemble des entiers naturels.
Divisons n par 6 ==> n=6m+r, m et r ∈ à ℕ. r prend les valeurs des restes de la division soit 0, 1, 2, 3, 4 ou 5.
n ne peut **êtr**e premier si r=0, 2, 3 ou 4 car il sera respectivement divisible par ces derniers
Pour **êtr**e premier, le reste de sa division devra nécessairement **ê**tre égale à 1 ou 5,
C'est-à-dire que n soit de la forme 6m+1 ou 6m+5.
Si on considère la suite 6m+5 et si on définit son premier terme par 5, il sera la même chose que 6m-1, m commençant par la valeur entière 1.
Néant moins cette condition que le nombre premier soit de la forme 6m ± 1 n'est pas suffisante étant donné qu'il existe des entiers non premiers respectant la forme 6m ± 1.
Mr **Krafft**, le 12 avril 1798 devant l'académie des sciences impériales en Europe ; présenta son « essai sur les nombres premiers »… Il s'en sort qu'il fallait une deuxième condition suffisante pour que tout nombre de la forme 6m ± 1 soit premier :

a) Prenant le premier cas 6m+1 , la proposition se résume que **pour être premier , il faut points que m soit compris sous la forme 6xy+x+y ou 6xy-x-y** , autrement dit ,il faut que m ne soit pas un nombre composé et produit de (6x+1)(6y+1) ou (6x-1)(6y-1) qui donnent respectivement les formes précédentes de la proposition .

Démonstration :

1) Si N=6m+1 est un nombre composé de deux facteurs quelconques

6m+1 = (u+t) (v+z)

= uv + uz +tv +tz ; on suppose que l'un de ces quatre produis soit = 1

Soit tz =1 ; => t=1 et z=1 ou t=-1 et z= -1 .
=> 6m+1= uv + u +v +1 ou 6m+1= uv – u –v +1
=> 6m = uv + u +v ou 6m = uv – u –v
Vu que m est un entier > 0 => u et v doivent tout les deux étre > 0 ou tout les deux < 0 .
Soit 6m = uv + u + v divisible par 2 & 3 . uv +u+v d'abord divisible par 2 == > u & v doivent étre pairs == > u=2p & v=2q
= > 6m = 2p2q + 2p +2q == > 3m=2pq+p+q
= > 2pq+p+q doit être divisible aussi par 3 == >2pq+p+q = 3x

== > 2pq+p+q =pq +p (q+1) +q =3x == >p=3x et q=3x et (q+1)=3x == >q= 3x-1

Soit 6m = uv - u - v divisible par 2 & 3 . uv -u-v aussi divisible par 2 == > u & v doivent étre pairs == > u=2p & v=2q

== > 2pq-p-q =pq + q (p -1) - p =3y == > p=3y et q=3y et (p-1)=3y == >p= 3y+1
Donc trois suppositions ; soit p=3x & q=3y ou p=3x-1 & q=3y-1 ou p=3x+1 & q=3y+1
(x étant permutable avec y)

1°-supposition p=3x & q=3y :

3m=2pq+p+q == > 3m= 2.3x.3y +3x+3y

== > m=6xy+x+y

$3m=2pq-p-q$ == > $3m= 2.3x.3y -3x-3y$

== > $m=6xy-x-y$

2°-supposition $p=3x-1$ & $q=3y-1$

$3m=2pq+p+q$ == > $3m= 2.(3x-1).(3y-1) +(3x-1)+(3y-1)$

$= 6x-2\ \ (3y-1)\ \ +3x -1 +3y-1$

$3m= 18xy-6x-6y+2 +3x+3y-2\ = 18xy+3x+3y +2-2$

== > $m=6xy+x+y$

$3m=2pq-p-q$ == > $3m= 2.(3x-1).(3y-1) +(3x-1)+(3y-1)$

$= 6x-2\ \ (3y-1)\ \ +3x -1 +3y -1$

$3m= 18xy-6x-6y+2 +3x+3y-2\ =\ 18xy-3x-3y +2-2$

== > $m=6xy-x-y$

3°-supposition $p=3x+1$ & $q=3y+1$

$3m=2pq+p+q$ == > $3m= 2.(3x+1).(3y+1) -(3x+1)-(3y+1)$

$= 6x+2\ \ (3y+1)\ \ -(3x +1) -(3y +1)$

$3m= 18xy +6x+6y +2 -3x-1-3y-1\ =\ 18xy+3x+3y +2-2$

== > $m=6xy+x+y$

$3m=2pq-p-q$ == > $3m= 2.(3x+1).(3y+1) -(3x+1)-(3y+1)$

$= 6x+2\ \ (3y+1)\ \ -3x +1 -3y -1$

$3m= 18xy+6x+6y+2 -3x-1-3y-1\ =\ 18xy+3x+3y +2-2$

== > $m=6xy-x-y$

Donc $N=6m+1$ pour être premier , il faut points que m soit compris sous la forme $6xy+x+y$ ou $6xy-x-y$ .fin de démonstration.

b) Prenant le deuxième cas $6m-1$, la proposition dit que **pour être premier , il faut point que m soit compris sous la forme 6xy+x-y** , autrement dit ,il faut que m ne soit pas un nombre composé et produit de $(6x+1)(6y-1)$ ou $(6x-1)(6y+1)$ qui donnent $6xy+x-y$ de la proposition .

Démonstration :

2) Si $N=6m-1$ est un nombre composé de deux facteurs quelconques

$6m-1\ \ = (u+t)\ (v+z)$

$6m-1\ \ = uv + uz +tv +tz$; l'un de ces quatre produits peut être supposé $=- 1$

Soit $tz =-1$; => $t=1$ et $z=-1$ ou $t=-1$ et $z=1$.

=> $6m-1= uv - u +v -1$ ou $6m-1= uv + u -v -1$

=> $6m\ = uv - u +v$ ou $6m\ = uv + u -v$

Sachant que m est un entier > 0 => u et v doivent tout les deux être > 0 ou tout les deux < 0.

Soit $6m = uv + u - v$ divisible par 2 & 3. $uv +u-v$ pour être divisible par 2 == > u & v doivent être pairs == > $u=2p$ & $v=2q$

= > $6m = 2p2q + 2p -2q$ == > $3m=2pq+p-q$.

= > $2pq+p-q$ doit être divisible aussi par 3 == >$2pq+p-q = 3x$ (ou $= 3y$)

== > 2pq+p-q =pq +q (p-1) +p =3x == >p=3x et q=3y et (p-1)=3x == >p= 3x+1

Soit 6m = uv - u + v divisible par 2 & 3. == > uv –u+v divisible par 2 == > u & v doivent être pairs == > u=2p & v=2q

= > 6m = 2p2q - 2p+2q == > 3m=2pq-p+q .
= > 2pq-p+q devra être divisible aussi par 3 == >2pq-p+q = 3x (ou = 3y)

== >2pq-p+q =pq +pq -p+q = pq+p(q+1)-q=3y == > p=3x et q=3y et (q+1)=3y == >q= 3y-1

Donc deux suppositions ; soit p=3x & q=3y ou p=3x+1 & q=3y-1
(x étant permutable avec y)

1°-supposition p=3x & q=3y :
3m=2pq-p+q == > 3m= 2.3x.3y -3x+3y
== > m=6xy-x+y (1)

2°-supposition p=3x+1 & q=3y-1

3m=2pq-p+q == > 3m= 2.(3x-1).(3y+1) -(3x-1)+(3y+1)
= 6x-2 (3y+1) -3x +1 +3y+1
3m= 18xy+6x-6y-2 -3x+3y+2 = 18xy+3x-3y -2 +2
== > m=6xy+x-y (2)
A cause de la permutabilité de x & y les expressions (1) & (2) reviennent au même

Finalement : pour que N=6m-1 soit premier, il faut points que m soit compris sous la forme 6xy+x-y.

DEUXIEME PARTIE

1) Soit (Un) et (Vn) ; n ∈ N ; deux suites numériques distincts définis respectivement par

- Leurs termes généraux Un =6n+1 et Vn =6n-1
- Leurs premiers termes respectifs U_0 = 1 et V_1= 5

La forme explicite de Un et Vn va nous permettre facilement d'étudier leur variation : 6n+1 et 6n-1 définis dans N sont de la forme f(x) = ax+b ; leurs coefficient directeur a est de signe positif == > les deux suites sont strictement croissantes.
Leurs limites tendent vers +∞ quand n tend vers +∞ == > (Un) et (Vn) sont divergentes.

2) soit (Mn) une suite numérique dont on extrait 2 et seulement 2 sous-suites (M_{2n}) d'indices pairs ; et (M_{2n+1}) d'indice impairs
Posons M_{2n} = Un et M_{2n+1} = Vn :

Mn = { M_0;M_1 ;M_2 ;M_3 ; M_4 ; M_5 ; M_6; M_7 ;M_8 ;M_9 ;M_{10} ;M_{11} ; M_{12}…… ………..M_n }
= { U_0 ; V_1 ; U_1 ; V_2 ; U_2 ; V_3 ; U_3 ; V_4 ; U_4 ; V_5 ; U_5 ; V_6………….; Un ; V_{n+1} }
= {1 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 25 ; 29 ; 31 ; 35 ;…………………..; M_n}

Etudions la suite (Mn)
Si on prend les deux sous-suites (Un) et (Vn) chacune par rapport aux leurs indices initiaux, et leurs nouveau indices dans (Mn)

M_{2n} = Un et M_{2n+1} = Vn

- ∀ n ∈ N ; Un – Vn = 2
  Démonstration : == > Un – Vn = 6n+1 – (6n -1) = 2

== > Un > Vn == > $M_{2(n+1)} > M_{2n+1}$ == > $M_{2n+2} > M_{2n+1}$ == > $M_{n+1} > M_n$

- ∀ n ∈ N ; V_{n+1} - Un = 4
  Démonstration : == >6 (n+1) - 1 -(6n + 1) = 6n + 6 -1 -6n-1 = 4

= > V_{n+1} > Un == > $M_{2(n+1)+1} > M_{2n}$ == > $M_{2n+3} > M_{2n}$ == > $M_{n+3} > M_n$

∀ L'indice n pair portant Un et ∀ l'indice n impair portant Vn ; donc ∀ n∈ N ; Soit ($M_{n+1} = M_n + 2$) ou ($M_{n+1} = M_n + 4$) ***; donc*** $M_{n+1} > M_n$.

== > **que la suite** (Mn) est également strictement croissante ; après son premier terme 1 ; à raison de 4, puis de 2, puis de 4, puis de 2...

Autrement dit la suite (Mn) croisse sur une ligne de fonction 1+4+2 comme l'a bien exprimé Mostafa Chouar dans son site ; que je crois le premier qui a observé cette propriété sur une autre suite appelé Kn, générée par :
L'addition des carrés, des nombres entier depuis le carré de 1 jusqu'à +∞, ne donnant des nombres entier dans ℕ*, que quand le diviseur de l'addition, est un nombre premier p ≥ 5, ou un de ses multiples :
K_1 = 1
K_2 = $(1^2+2^2=5/2=2.5$
K_3 = $(1^2+2^2+3^2=11/3=3.333$
K_4 = $(1^2+2^2+3^2+4^2=27/4=6.75$
K_5 = $(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=55/5=11)$
K_6 = $(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2=91/6=15.16)$
K_7 = $(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2=140/7=7)$
K_8 = $(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2=204/8=25.50)$
K_9 = $(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2=285/9=31.166)$
K_{10} = $(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2+10^2=385/10=38.50)$
K_{11} = $(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2+10^2+11^2=506/11=46)$
K_{12} = $(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2+10^2+11^2+12^2=650/12=54.166)$
K_{13} = $(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2+10^2+11^2+12^2+13^2=819/13=63)$

$$Kn = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

(la Suite dont la division des sommes des carres par n premier, ou son multiple donne des entiers naturels)

Nous observons 2 & 3dans cette suite, la division de leurs somme des carrés donne des entiers avec des décimaux malgré qu'elles sont premiers, et la suite Kn traine en plus avec elles des nombres avec des décimales, et pour extraire les nombres premiers et leur multiples il faudra passer par chaque terme qui selon qu'il est entier ou pas, nous renvoie vers le diviseur nombre premier ou multiple de ce dernier ou composé ,cCe qui nécessite, un crible beaucoup plus important, on n'est pas sorti de l'auberge,

essayons de trouver une nouvelle Suite qui nous permettra de générer dans ses termes directement ces diviseurs nombres premier ou leurs multiples, marqués par un terme entier dans Kn ; ce qui nous amène d'ores déjà à penser que cette nouvelle suite qui contiendra tous les nombres premiers , **nécessairement** elle contiendra <u>beaucoup moins</u> de nombres composés ,ce qui est un petit pas en avant et tant mieux pour le future crible qui reste .

Mais avant démontrons la suite Kn = $\frac{(n+1)(2n+1)}{6}$; par laquelle tout à commencer :

La suite des carrés des n premiers entiers peut s'écrire sous la forme

$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots, (n-1)^2, n^2$.

Posons les trois suites S_n, S_n^2 et S_n^3.
S_n est la somme des n premiers entiers. $S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots \ldots + n$.
S_n^2 est la somme des n premiers carrés. $S_n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots \ldots + n^2$.
S_n^3 est la somme des n premiers cubes. $S_n^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots \ldots + n^3$.
Cherchons une formule pour la somme des n premiers carrés.
Il faut utiliser le développement du terme $(n+1)^3$ qui donne :

$(n+1)^3 = (n+1)(n+1)^2 = (n+1)(n^2+2n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$.
En appliquant cette formule à chaque cube de (n + 1) à 1, on obtient les égalités suivantes :

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$
$$n^3 = (n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1$$
$$(n-1)^3 = (n-2)^3 + 3(n-2)^2 + 3(n-2) + 1$$
$$(n-2)^3 = (n-3)^3 + 3(n-3)^2 + 3(n-3) + 1$$
...
...
$$(3)^3 = (2)^3 + 3(2)^2 + 3(2) + 1$$
$$(2)^3 = (1)^3 + 3(1)^2 + 3(1) + 1$$
$$(1)^3 = (0)^3 + 3(0)^2 + 3(0) + 1$$

En effectuant la somme membre à membre des égalités précédentes, en utilisant les notations définies plus haut, on obtient :

$$S_{n+1}^3 = S_n^3 + 3S_n^2 + 3S_n + n + 1$$

Il vient alors :

$$S_{n+1}^3 - S_n^3 = 3S_n^2 + 3S_n + n + 1$$

$(n + 1)^3 = 3S_n^{\ 2} + 3S_n + n + 1$

$3S_n^{\ 2} = (n + 1)^3 - 3S_n - n - 1$

Or, $\mathbf{S_n = 1 + 2 + ... + n = n (n + 1) / 2}$. D'où :

$3S_n^{\ 2} = (n + 1)^3 - 3[n (n + 1) / 2] - n - 1$

$6S_n^{\ 2} = 2(n3 + 3n^2 + 3n + 1) - 3n (n + 1) - 2n - 2$

$6S_n^{\ 2} = 2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 - 3n^2 - 3n - 2n - 2$

$6S_n^{\ 2} = 2n^3 + 3n^2 + n$

$6S_n^{\ 2} = n (2n2 + 3n + 1)$

$6S_n^{\ 2} = n (n + 1) (2n + 1).$

La suite des carrés des n premiers entiers s'écrit alors :

$\mathbf{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + n^2 = n (n + 1) (2n + 1) / 6}$

Ou encore : $\mathbf{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + n^2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

Ce qui nous intéresse ici c'est les quotients entiers de chaque terme divisé par son rang n.

Cette nouvelle suite aura comme terme général $\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$

Ce quotient ne générera des nombres premiers ou leurs multiples que quand il accepte la division par 2 et par 3 démonstrations :

pour que (n+1)(2n+1)/6 soit un nombre entier il est nécessaire que n+1 soit pair, donc n de la forme 2k+1
et alors (2k+1+1)(2(2k+1)+1)/6 = (2k+2)(4k+3)/6 = (k+1)(4k+3)/3 sera un nombre entier si et seulement si k+1 ou 4k+3 est un multiple de 3

k+1 multiple de 3 ➔ k = 3r - 1 et donc n = 2k+1 = 6r - 1
4k+3 multiple de 3 ➔ k = 3r et donc n = 2k+1 = 6r + 1

$(1+2^2+...+n^2)/n$ est un nombre entier si et seulement si n est de la forme $6r \pm 1$

C'est à dire que ce quotient générant indirectement, non seulement des nombres premiers mais des nombres composes (de la forme 6n+- 1). Des nombres composés beaucoup moins nombreux que ceux de l'ensemble des entiers naturels d'où peut être l'intérêt de cette suite. Mais elle est loin d'une fonction qui à partir de n, rang de la suite par exemple, nous donne directement le nombre premier ou son multiple

Essayons donc de trouver une suite-mère qui regroupe les deux suites 6n+1 et 6n-1 :

Posons (Gn) une suite numérique dont le premier terme $G_0 = 2$; et $\mathbf{G_n = G_{n-1}} + 2(-1)^{n-1}$

$(G_n) = \{G_0 ; G_1 ; G_2 ; G_3 ; G_4 ; G_5 ; \ldots\ldots ; G_n \}$
$= \{ 2 ; 4 ; 2 ; 4 ; 2 ; 4 ; \ldots\ldots \}$

Il est clair que si on prend le premier terme M_0 de notre suite (Mn) ; et si on lui ajoute le terme G_0 de la suite (Gn) plus la quantité $2(-1)°$; (..Issu de la suite de GRANDI) on retrouve M_1 ; c'est-à-dire que chaque terme de la suite (Mn) est définit par récurrence par son précédent à raison aussi du terme G_{n-1} :

$M_0 = 1$
$M_1 = M_0 + G_0 + 2(-1)^{\circ} = 5$
$M_2 = M_1 + G_1 + 2(-1)^1 = 7$
$M_3 = M_2 + G_2 + 2(-1)^2 = 11$
$M_4 = M_3 + G_3 + 2(-1)^3 = 13$
$M_5 = M_4 + G_4 + 2(-1)^4 = 17$
.
.
. .

$$==> \quad M_n = M_{n-1} + G_{n-1} + 2(-1)^{n-1}$$

Cette suite génère trois classes d'entiers naturels :

1- Les entiers **premiers** ; de la forme (6m+1) - comme nous avons vu dans la première partie - et qui ne sont pas de la forme 6xy+x+y & 6xy-x-y ; et ceux de la forme (6m-1) Qui ne soit pas compris dans la forme 6xy-x+y ou 6xy +x-y

2- les entiers **composés** de la forme 6m ±1 qui peuvent se présenter sous la forme :

a) - 6xy+x+y ou 6xy-x-y égalent respectivement à (6x +1) (6y+1) et (6x -1) (6y-1)
b) – 6xy-x+y ou 6xy+x-y égalent respectivement à (6x +1) (6y-1) et (6x -1) (6y+1)

Ces deux cas génèrent des multiples des nombres premiers de 1 à plusieurs facteurs puisque nous remarquions que ces facteurs sous la forme de 6m ±1 peuvent à leurs tour être décomposés en sous-facteurs présents sous la même forme, la décomposition continue jusqu'à l'infini.

3- les entiers composés de la forme 6m +1 dont les facteurs sont des **puissances** de nombres premiers sont ceux dont nécessairement x=y
$==> (6x-1)(6y-1) ==> (6x-1)^2$
Ou $(6x+1)(6y+1) ==> (6x+1)^2$

Si cette suite $\mathbf{M_n = M_{n-1} + G_{n-1} + 2(-1)^{n-1}}$; ou chaque terme est définit par les deux termes précédents de Mn et G_{n-1}, n'est pas totalement récurrente et dont on peut expliciter n'importe quel terme sans recours aux précédents ; en utilisant seulement quelques propriétés de ses sommes une fois définit :

*Une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée suite '**extraite**' de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une application strictement croissante $p: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $E_n = u_{p(n)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$*

Posons $u_n = Mn$, et extrayons dix sous-suites suivantes appelées E_1 à E_{10} :

$E_1 = M_{10n+1}$ $E_2 = M_{10n+2}$ $E_3 = M_{10n+3}$ $E_4 = M_{10n+4}$
$E_5 = M_{10n+5}$ $E_6 = M_{10n+6}$ $E_7 = M_{10n+7}$ $E_8 = M_{10n+8}$
$E_9 = M_{10n+9}$ $E_{10} = M_{10n+10}$

Selon la définition susmentionnée, p(n) est de la forme ax + b ; a=10 la variation de p(n) est de signe de a positif, c'est-à-dire que p(n) est strictement croissante, en plus ces dix suites couvrent la totalité de la suite (**Mn**) ; calculons les premiers termes de chaque suite et disposons les sur chaque ligne comme ci-dessous :
Autrement dit ; Si on calcule les termes de la première centaine de la suite **Mn** ; et on dispose chaque dizaine sur une première colonne et on commence à les observer comme nous nous a invité Mostafa Chouar dans son site :

1 - 31 - 61 - 91 - 121 - 151 - 181 …….	$E_1 = M_{10n+1}$
5 - 35 - 65 - 95 - 125 - 155 - 185 …….	$E_2 = M_{10n+2}$
7 - 37 - 67 - 97 - 127 - 157 - 187 …….	$E_3 = M_{10n+3}$
11 - 41 - 71 - 101 - 131 - 161 – 191….....	$E_4 = M_{10n+4}$
13 - 43 - 73 - 103 - 133 - 163 – 193……	$E_5 = M_{10n+5}$
17 - 47 - 77 - 107 - 137 - 167 – 197…….	$E_6 = M_{10n+6}$
19 - 49 - 79 - 109 - 139 - 169 – 199…….	$E_7 = M_{10n+7}$
23 - 53 - 83 - 113 - 143 - 173 – 203…….	$E_8 = M_{10n+8}$
25 - 55 - 85 - 115 - 145 - 175 – 205…….	$E_9 = M_{10n+9}$
29 - 59 - 89 - 119 - 149 - 179 – 209…….	$E_{10} = M_{10n+10}$

1)- On constate que la suite s'organise sur chaque ligne selon une suite arithmétique dont le premier terme est respectivement 1 puis 5 pour la 2° ligne …et dont les termes généraux $W_n = W_0 + \mathbf{r.m}$; m étant l'indice de la suite correspondant aux nombres de colonne
Et **r** = 30 sa raison constante pour les dix lignes
On peut facilement admettre le caractère explicite de chaque suite, de déduire sons terme général après étude de sa récurrence ; et que chaque propriété P(n) reste valable pour le terme suivant (P(n) == >P (n+1)), en fin, de calculer sa somme selon la formule usuelle :

$$Sm = \frac{(m+1)\,(W0 + Wm)}{2}$$

Et d'en déduire la somme total de la suite **Mn** en sommant les dix sous-suites des 10 lignes définis.

2) j'avais remarqué aussi qu'en faisant la somme de chaque colonne ; ces sommes s'organisent selon une suite arithmétique dont le premier terme C_0 égale à la somme de la

première colonne égale à 150 ; le terme général Cm= C_0 + **r.m** dont r la raison constante = 300, et m, le rang de la colonne, d'où l'on déduit facilement le terme général
Cm = 150+300m

	W_0	Wm	Sm
1 - 31 - 61 - 91 - 121 - 151 - 181 …….	1	1 +30.**m**	$15m^2 +16m+ 1$
5 - 35 - 65 - 95 - 125 - 155 - 185 …….	5	5 +30.**m**	$15m^2 +20m+ 5$
7 - 37 - 67 - 97 - 127 - 157 - 187 …….	7	7 +30.**m**	$15m^2 +22m+ 7$
11 - 41 - 71 - 101 - 131 - 161 – 191….....	11	11 +30.**m**	$15m^2 +26m+ 11$
13 - 43 - 73 - 103 - 133 - 163 – 193……	13	13 +30.**m**	$15m^2 +28m+ 13$
17 - 47 - 77 - 107 - 137 - 167 – 197…….	17	17+30.**m**	$15m^2 +32m+ 17$
19 - 49 - 79 - 109 - 139 - 169 – 199…….	19	19+30.**m**	$15m^2 +34m+ 19$
23 - 53 - 83 - 113 - 143 - 173 – 203…….	23	23+30.**m**	$15m^2 +38m+ 23$
25 - 55 - 85 - 115 - 145 - 175 – 205…….	25	25+30.**m**	$15m^2 +40m+ 25$
29 - 59 - 89 - 119 - 149 - 179 – 209…….	29	29+30.**m**	$15m^2 +44m+ 29$

150	450	750	1050	1350	1650	1950……….	**$150m^2 +300m+ 150$**
C0	C0+300	C1+300	C2+300	C3+300	C4+300	C5+300 ……..	

Cm = 150+300m

Calculons la somme de la suite **Cm** :

$$Sm = \frac{(m+1)\,(W_0 + Wm)}{2} = \frac{(m+1)\,(150+ 150+300m)}{2} = 150m^2 +300m+ 150$$

La somme des termes de la suite **Cm** est la même que la somme des dix sous-suites **Sm**

Posons   x ; l'indice des rangs de la suite **Mn** **et**   Y ; l'indice des rangs de la suite **Cm.**

$\forall$ y $\in$ N ; $\exists$ x $\in$ N / f(x) = y   ; f(x) est définie par y= ent(x/10)
ent (x/10) : c'est la partie entière de x divisé par 10 ; c'est une surjection car au moins 10 termes de **Mn** présents dans une colonne d'indice x ont une image y =ent(x/10).

Prenons un terme quelconque de **Mn** ; d'indice x ; pour calculer la valeur de **Mn** ,on doit emprunter la suite Cm en effectuant un changement d'indice , c'est-à-dire que la valeur de **Mn doit se situer dans la colonne Cm avec**   m= y = ent (x/10) ;
Or dans cette colonne on doit choisir parmi dix valeurs,

1)- connaissant le pas ou la raison qui est identique sur chaque colonne, à savoir +4+2+4+2+4+2+4+2+4 pour passer dans Mn de la première ligne à la dixième.

2) connaissant **q** ; le reste de la division de x par 10 ; qui peut varier de 0 à 9
Posons la quantité r = (x/10 – ent(x/10))*10 appelé « reste » qui nous donne respectivement toutes les valeurs possibles 0,1,2,3,4,5,6,7,8 ou 9.

3) connaissant la colonne **Cm** =**150+300(m)** dont m est remplacé par y = ent(x/10)

Posons **ù** =   (150 +300(ent(x/10)) /10 ou 15 +30(ent(x/10) qui représente la moyenne arithmétique théorique des dix termes de la colonne

ù devra être sommé par l' un des dix incréments de la colonne pour que, pour chaque x le rang du terme de Mn on tombe sur sa valeur exacte , cette propriété qui se répète périodiquement avec les mêmes incréments va nous permettre ,une fois défini ces 10 incréments , de dresser une table qui pour chacun des 10 r (r = (x/10 – ent(x/10))*10) va nous permettre de calculer la valeur du Mn qui siège dans le rang n :

====> **Mn = ù + i**

4) connaissant r, calculons, par récurrence les dix premiers termes de Mn, qui couvrent les 10 restes possibles pour enfin déduire les incréments i pour chaque r.

Pour une colonne quelconque, c'est une condition suffisante pour généraliser la propriété sur toute n ∈ ℕ, rang de la suite Mn,

E/ 1 ; **M30** = 89 :

------------ > *x=30 y= ent (30/10)= 3* r= (30/10 – ent(30/10))*10 = *0*
---------- > ***ù**= C(y)/10 = (150+300(y)/10) = 15+30(3)* ---------- > ***ù = 105***
Mn = ù + i ---------- > ***M30 = 105 -16 = 89***

E/ 2; **M31** = ***91*** :

------------ > *x=31 y= ent (31/10)= 3* r= (31/10 – ent(31/10))*10 = *1*
---------- > ***ù**= C(y)/10 = (150+300(y)/10) = 15+30(3)* ---------- > ***ù = 105***
Mn = ù + i ---------- > ***M34 = 105 -14 = 91***

E/3; **M32** = ***95*** :

------------ > *x=32 y= ent (32/10)= 3* r= (32/10 – ent(32/10))*10 = *2*
---------- > ***ù**= C(y)/10 = (150+300(y)/10) = 15+30(3)* ---------- > ***ù = 105***
Mn = ù + i ---------- > ***M32 = 105 - 10 = 95***

E/ 4; **M33** = ***97*** :

------------ > *x=33 y= ent (33/10)= 3* r= (33/10 – ent(33/10))*10 = *3*
---------- > ***ù**= C(y)/10 = (150+300(y)/10) = 15+30(3)* ---------- > ***ù = 105***
Mn = ù + i ---------- > ***M33 = 105 - 8 = 97***

E/5; **M34** = ***101*** :

------------ > *x=34 y= ent (34/10)= 3* r=(34/10 – ent(34/10))*10 = *4*
---------- > ***ù**= C(y)/10 = (150+300(y)/10) = 15+30(3)* ---------- > ***ù = 105***
Mn = ù + i ---------- > ***M34 = 105 - 4 = 101***

E/6; **M35**= ***103 :***

-------------- > *x=35 y= ent (35/10)= 3* r=(35/10 – ent(35/10))*10= *5*
---------- > ***ù**= C (y)/10 = 15+30(3)* ---------- > ***ù = 105***

Mn = **ù + i** ---------- > ***M35 = 105 -2 = 103***

E/7 ; **M36**=*107* **:**

--------------- > *x=36* *y= ent (36/10)= 3* r=(36/10 – ent(36/10))*10= *6*
---------- > ***ù***= *C (y)/10 = 15+30(3)* ---------- > ***ù = 105***
Mn = **ù + i** ---------- > ***M36 = 105 +2 = 107***

E/8 ; **M37**=*109* **:**

--------------- > *x=37* *y= ent (37/10)= 3* r=(37/10 – ent(37/10))*10= *7*
---------- > ***ù***= *C (y)/10 = 15+30(3)* ---------- > ***ù = 105***
Mn = **ù + i** ---------- > ***M37 = 105 +4 = 109***

E/9 ; **M38**=*113***:**

--------------- > *x=38* *y= ent (38/10)= 3* r=(38/10 – ent(38/10))*10= *8*
---------- > ***ù***= *C (y)/10 = 15+30(3)* ---------- > ***ù = 105***
Mn = **ù + i** ---------- > ***M38 = 105 +8 = 113***

E/10 ; **M39**=*115***:**

--------------- > *x=39* *y= ent (39/10)= 3* r=(39/10 – ent(39/10))*10= *9*
---------- > ***ù***= *C (y)/10 = 15+30(3)* ---------- > ***ù = 105***
Mn = **ù + i** ---------- > ***M39 = 105 +10 = 115***

Nous concluons qu'à chaque reste 0,1,2,3,4,5,6,7,8 ou 9 correspond respectivement les incréments i : **-16 ;-14 ;-10 ;-8 ;-4 ;-2 ; +2 ; +4 ; +8 :+10**

5) dressons une *table pour l'utilisation, en posant les restes de la division par 10, devant leur incréments correspondants **i** :*

TABLE des I

reste (x/10)	**i** incréments
0	-16
1	-14
2	-10
3	-8
4	-4
5	-2
6	2
7	4
8	8
9	10

Calcul explicite de quelques termes de **Mn** plus grands :

Exemple 1 ; $M_{2501\,074\,321\,113}$ = *7 503 223 263 337* ***(=151 * 32497 * 1529071)***

$M_{2501\,074\,321\,113}$---- > x=2501 074 321 113----- > y= *ent* (2501 074 321 113/10)= 2501 074 321 11
== > r= ((2501 074 321 113/10)- *ent* (2501 074 321 113/10)*10= 3
---------- > ***ù***= *C* (*y*)/10 = 15+30(250 107 432 111) ---------- > ***ù = 7 503 223 263 345***
Sur la Table ---------- > $M_{2\,501\,074\,321\,113}$ = ***7 503 223 263 345 -8 = 7 503 223 263 337***

Exemple 2; $M_{2\,956\,501\,806\,915\,547}$ = ***67 508 869 505 420 746 639(=7218436781 * 9352283819)***

$M_{2\,956\,501\,806\,915\,547}$-- - > x=2 956 501 806 915 547--- > y= *ent* (2 502 956 501 806 915 547/10)
= 2 250 295 650 180 691 554.7 ========> $r = 7$
---- > ***ù***= *C* (*y*)/10 = 15+30(2 250 295 650 180 691 554) --- > ***ù = 67 508 869 505 420 746 635***
Sur la Table des i **:**
--- > $M_{2\,956\,501\,806\,915\,547}$ = ***67 508 869 505 420 746 635 +4 = 67 508 869 505 420 746 639***

Nous allons maintenant chercher une fonction qui donne directement i en fonction de r
Autrement dit, on va procéder à une interpolation polynomiale pour trouver le polynôme $P_n(x)$; qui pour les dix valeurs de r, satisfasse le tableau suivant (issu de notre table) :

x0 =0	x1 =1	x2 = 2	x3 = 3	x4 = 4	x5 = 5	x6 = 6	x7 = 7	x8 = 8	x9 = 9
f(x0) =-16	f(x1) =-14	f(x2) =-10	f(x3) = -8	f(x4) = -4	f(x5) = -2	f(x6) = +2	f(x7)= +4	f(x1) =+8	f(x0) =+10

Utilisant l'interpolation de LA GRANGE celle-ci est déterminée par :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\, L_k(x) \qquad \text{avec} \qquad L_k(x) = \prod_{j=0,\, j\neq k}^{n} \frac{X - X_j}{X_k - X_j}$$

En ce qui concerne notre tableau nous allons calculer le polynôme de degré 9

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{9} f(x_k)\, L_k(x)$$

Commençant par poser les jalons du calcul de toutes les $L_k(x)$ (k= de 0 à 9)

$$L_0(x) = \frac{(x-x1)(x-x2)(x-x3)(x-x4)(x-x5)(x-x6)(x-x7)(x-x8)(x-x9)}{(x0-x1)(x0-x2)(x0-x3)(x0-x4)(x0-x5)(x0-x6)(x0-x7)(x0-x8)(x0-x9)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x0)(x-x2)(x-x3)(x-x4)(x-x5)(x-x6)(x-x7)(x-x8)(x-x9)}{(x1-x0)(x1-x2)(x1-x3)(x1-x4)(x1-x5)(x1-x6)(x1-x7)(x1-x8)(x1-x9)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x0)(x-x1)(x-x3)(x-x4)(x-x5)(x-x6)(x-x7)(x-x8)(x-x9)}{(x2-x0)(x2-x1)(x2-x3)(x2-x4)(x2-x5)(x2-x6)(x2-x7)(x2-x8)(x2-x9)}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x0)(x-x1)(x-x2)(x-x4)(x-x5)(x-x6)(x-x7)(x-x8)(x-x9)}{(x3-x0)(x3-x1)(x3-x2)(x3-x4)(x3-x5)(x3-x6)(x3-x7)(x3-x8)(x3-x9)}$$

$$L_4(x) = \frac{(x-x0)(x-x1)(x-x2)(x-x3)(x-x5)(x-x6)(x-x7)(x-x8)(x-x9)}{(x4-x0)(x4-x1)(x4-x2)(x4-x3)(x4-x5)(x4-x6)(x4-x7)(x4-x8)(x4-x9)}$$

$$L_5(x) = \frac{(x-x0)(x-x1)(x-x2)(x-x3)(x-x4)(x-x6)(x-x7)(x-x8)(x-x9)}{(x5-x0)(x5-x1)(x5-x2)(x5-x3)(x5-x4)(x5-x6)(x5-x7)(x5-x8)(x5-x9)}$$

$$L_6(x) = \frac{(x-x0)(x-x1)(x-x2)(x-x3)(x-x4)(x-x5)(x-x7)(x-x8)(x-x9)}{(x6-x0)(x6-x1)(x6-x2)(x6-x3)(x6-x4)(x6-x5)(x6-x7)(x6-x8)(x6-x9)}$$

$$L_7(x) = \frac{(x-x0)(x-x1)(x-x2)(x-x3)(x-x4)(x-x5)(x-x6)(x-x8(x-x9))}{(x7-x0)(x7-x1)(x7-x2)(x7-x3)(x7-x4)(x7-x5)(x7-x6)(x7-x8)(x7-x9)}$$

$$L_8(x) = \frac{(x-x0)(x-x1)(x-x2)(x-x3)(x-x4)(x-x5)(x-x6)(x-x7(x-x9))}{(x8-x0)(x8-x1)(x8-x2)(x8-x3)(x8-x4)(x8-x5)(x8-x6)(x8-x7)(x8-x9)}$$

$$L_9(x) = \frac{(x-x0)(x-x1)(x-x2)(x-x3)(x-x4)(x-x5)(x-x6)(x-x7(x-x8))}{(x9-x0)(x9-x1)(x9-x2)(x9-x3)(x9-x4)(x9-x5)(x9-x6)(x9-x7)(x9-x8)}$$

Après calcul des $L_k(x)$ et en application de la formule générale suivante du polynôme de Lagrange de degré 9 :

P9 (x) = f (x0). L0 (x) +f(x1). L1(x) +f(x2). L2 (x) +f(x3). L3 (x) +f(x4). L4 (x) +f(x5). L5 (x)+ f (x6). L6 (x) +f (x7). L7 (x) +f (x8). L8 (x) +f (x9). L9 (x)

= -16. **L0 (x)** -14. **L1(x)** -10. **L2 (x)** -8. **L3 (x)** -4. **L4 (x)** -2. **L5 (x)** +2. **L6 (x)** +4. **L7 (x)** +8. **L8 (x)** +10. **L9 (x)**

Nous obtenons :

$$\boxed{P_7(x) = -\frac{2}{2835}x^9 + \frac{1}{35}x^8 - \frac{92}{189}x^7 + \frac{68}{15}x^6 - \frac{3386}{135}x^5 + \frac{1256}{15}x^4 + \frac{92408}{70}x^3 + \frac{17504}{105}x^2 - \frac{22193}{315}x \quad -16}$$

Nous rappelons que ce polynôme nous permet d’exprimer tous les dix restes possibles de r par les dix valeurs d’incrémentation i de Mn : nous vérifions que P(r) = i

Notre polynôme remplaçant la « table des i » nous donne respectivement

P(0) = -16 ; P(1) = -14; P(2) = -10; P(3) = -8 ; P(4) = -4 ; P(5) = -2 ; P(6) = +2 ; P(7) = +4; P(8) = +8; P(9) = +10

1) Sachant que r, s’exprimant en fonction du rang x de la suite Mn (== > Mn, n ou x) :

r = **ent** [(x/10- ent (x/10))*10]

2) **ù =** (150 +300(ent(x/10)) /10) ou 15 + 30.Ent(x/10)

3) la suite Mx de rang x = **ù + i ,** sachant que i (incrément) = r porté par le polynôme P_9

== > Mx = **ù + i =** P_9 (r) + **ù** , avec r = ent [(x/10- ent (x/10))*10]

Remplaçant r par sa valeur exprimée en fonction du rang de la suite Mx (Mn)

r = **ent** [(x/10- ent (x/10))*10]

Appliquant ensuite notre formule **Mx =** P_9 (r) + **ù** il ne reste maintenant que d'exprimer Mx en fonction de son rang x (ou bien d'exprimer la suite Mn par son **terme général** et explicite ; en fonction de son rang n) :

$$\mathrm{Mx} = P_9(x) = -\frac{2}{2835}\,\mathbf{ent}\,[(x/10-\ \mathrm{ent}\,(x/10))*10]^9 + \frac{1}{35}\,\mathbf{ent}\,[(x/10-\ \mathrm{ent}\,(x/10))*10]^8 - \frac{92}{189}\,\mathbf{ent}\,[(x/10-\ \mathrm{ent}\,(x/10))*10]^7 + \frac{68}{15}\,\mathbf{ent}\,[(x/10-\ \mathrm{ent}\,(x/10))*10]^6 - \frac{3386}{135}\,\mathbf{ent}\,[(x/10-\ \mathrm{ent}\,(x/10))*10]^5 + \frac{1256}{15}\,\mathbf{ent}\,[(x/10-\ \mathrm{ent}\,(x/10))*10]^4 + \frac{92408}{70}\,\mathbf{ent}\,[(x/10-\ \mathrm{ent}\,(x/10))*10]^3 + \frac{17504}{105}\,\mathbf{ent}\,[(x/10-\ \mathrm{ent}\,(x/10))*10]^2 - \frac{22193}{315}\,\mathbf{ent}\,[(x/10-\ \mathrm{ent}\,(x/10))*10] \ -16 + 15 + 30.\mathrm{ent}(x/10)$$

Une fois déduit cette formule de Mx en fonction de son rang x , je l'ai monté sous Excel comme on peut vérifier ci-dessous par simple copier-coller ; Mx génère bien tout les nombres premiers à partir de 5 et leurs multiples sans ceux de 2 & 3 , ce qui est un petit pas pour réduire le champ ou sont enfermes les nombres premiers de N à N/3 comme nous irons montrer après ,en étudiant la DENSITE des nombres premiers dans Mn .

Mx sous Excel avec A=1, 2,3 ……x :

=SOMME(-2/2835*((A2/10-ENT(A2/10))*10)^9+1/35*((A2/10-ENT(A2/10))*10)^8-92/189*((A2/10-ENT(A2/10))*10)^7+68/15*((A2/10-ENT(A2/10))*10)^6-3386/135*((A2/10-ENT(A2/10))*10)^5+1256/15*((A2/10-ENT(A2/10))*10)^4-92408/567*((A2/10-ENT(A2/10))*10)^3+17504/105*((A2/10-ENT(A2/10))*10)^2-20303/315*((A2/10-ENT(A2/10))*10)-16+(15+30*(ENT(A2/10))))

Résultat ;   A=1., 2, 3,4,…….x.

rang de x	f(x)= Mn
1	1
2	5
3	7
4	11
5	13
6	17
7	19
8	23
9	25
10	29
11	31
12	35
13	37

14	41
15	43
16	47
17	49
18	53
19	55
20	59
21	61
22	65
.	.
.	.
999998	2999993
999999	2999995
1000000	2999999

TROISIEME PARTIE : la suite **Bn**

Après avoir défini la suite $Mn = Mn_{-1} + Gn_{-1} + 2(-1)^{n-1}$, ; de déduire une méthode pour déterminer explicitement tout terme à partir de l'étude des propriétés des dix sous- suites extraites de Mn et de leurs sommes…**nous remarquions aussi que les deux sous-suites extraites suivantes celles respectivement du 2° et de la 9° ligne :**

$$E_2 = M_{10n+2} = 5 + 30.\mathbf{m}$$
$$E_9 = M_{10n+9} = 25 + 30.\mathbf{m}$$

Ces deux sous suites présentent la particularité de ne générer que des multiples de 5 :
Ça se démontre rapidement par le fait que Leurs termes généraux E_2 ET E_2 sont factorisables par 5 $E_2 = 5(1 + 6.\mathbf{m})$ et $E_9 = 5(5 + 6.\mathbf{m})$, $\forall$ m $\in \mathbb{N}$

On peut donc imaginer une deuxième suite appelé **Bn** qui peut avoir la propriété d'être décomposée seulement par les huit autres sous-suites à part E_2 et E_9, toute en tenant compte du premier terme de la suite E_2, à savoir 5, qui est le seul premier dans E_2 .

nous constations que le pas ou la raison pour passer d'une ligne à la suivante qui était dans la suite **Mn de** +4+2+4+2+4+2+4+2+4 devra changer dans le cas de la suite **Bn** qui sera de +4+4+2+4+2+4+4, elles gardent comme même la propriété de la périodicité car dans tous les cas les sommes respectives, de chaque 10 termes dans **Mn** ou 8 termes dans **Bn ,** progressent suivant une suite arithmétique à raisons constantes respectives de 300 dans **Mn** et 240 dans **Bn**.cela reste un argument en faveur de la proposition qui va suivre .
Mais le fait qu'on a la « raison verticale » de **Mn** avec 4 qui s'alterne avec 2 ;respectant la règle de 1+4+2 est en quelque sorte perturbé dans le cas de **Bn** , qui devient 4+4+2+4+2+4+4 et rend la recherche d'une fonction pour trouver un terme générale de la suite **Bn** un peu périlleux . Je me contente pour l'instant de croire à l'existence de Bn car je peux explicitement connaitre n'importe lequel de ses termes, étant donné que **Bn** a gardé les

mêmes propriétés, à savoir l'alternance périodique des raisons de progression de **Mn** ; qui ont servi à calculer ses termes, seuls les données ont changé et mis à jour dans le nouveau tableau de Bn suivant :

	W_0	Wm	Sm
1 - 31 - 61 - 91 - 121 - 151 - 181 …….	1	1 +30.**m**	$15m^2$ +16m+ 1
7 - 37 - 67 - 97 - 127 - 157 - 187 …….	7	7 +30.**m**	$15m^2$ +22m+ 7
11 - 41 - 71 - 101 - 131 - 161 – 191….....	11	11 +30.**m**	$15m^2$ +26m+ 11
13 - 43 - 73 - 103 - 133 - 163 – 193……	13	13 +30.**m**	$15m^2$ +28m+ 13
17 - 47 - 77 - 107 - 137 - 167 – 197…….	17	17+30.**m**	$15m^2$ +32m+ 17
19 - 49 - 79 - 109 - 139 - 169 – 199…….	19	19+30.**m**	$15m^2$ +34m+ 19
23 - 53 - 83 - 113 - 143 - 173 – 203…….	23	23+30.**m**	$15m^2$ +38m+ 23
29 - 59 - 89 - 119 - 149 - 179 – 209…….	29	29+30.**m**	$15m^2$ +44m+ 29
120 360 600 840 1080 1320 1560……….			**$120m^2$ +240m+ 120**
C0 C0+240 C1+240 C2+240 C3+240 C4+240 C5+240 ……..			

Hm = 120+240m

Calculons la somme de la suite **Hm** :

$$\mathbf{Hm} = \frac{(m+1)\,(W_0 + Wm)}{2} = \frac{(m+1)\,(120+120+240m)}{2} = 120m^2 +240m+ 120 = Sm$$

La somme des termes de la suite **Hm** est la même que la somme des huit sous-suites **Sm**

CALCUL EXPLICITE DES TERMES DE LA SUITE **Bn**

1)- connaissant le pas ou la raison qui est identique sur chaque colonne, à savoir +4+4+2+4+2+4+4 pour passer dans Bn de la première ligne à la huitième.

2) connaissant **p** ; le reste de la division de x par 8 ; qui peut varier de 0 à 8 avec la particularité que p ≠4

Posons la quantité r = **ent** [(X/8- ent (X/8))*10] appelé « reste » qui nous donne respectivement toutes les valeurs possibles 0,1,2,3,5,6,7 ou 8.

3) connaissant la colonne **Cm =120+240(m)** dont m est remplacé par y = ent (x/8)

Posons **ù** = (120 +240(ent(x/8)) /8 ou 15 +30(ent(x/8)) qui représente la moyenne arithmétique théorique des huit termes de la colonne (la même que dans Mn) .

ù devra être sommé par l' un des huit incréments de la colonne pour que, pour chaque x ,le rang du terme de Bn, on tombe sur sa valeur exacte , cette propriété qui se répète périodiquement avec les mêmes incréments-comme dans Mn- va nous permettre ,une fois défini ces 8 incréments , de dresser une table qui pour chacun des 8 r , va nous permettre de calculer la valeur du Bn qui est hébergée dans le rang n :

====> **Bn = ù + i**

4) connaissant r, calculons, par récurrence les huit premiers termes de Bn , qui couvrent les 8 restes possibles pour enfin déduire les incréments i pour chaque r.
Pour une colonne quelconque, c'est une condition suffisante pour généraliser la propriété sur toute n ∈ ℕ, rang de la suite Bn :

E/ 1 ; **B_9**= *31*

-------------- > *x=9 y= ent (9/8) = 2 r=* **ent** [(16/8- ent (16/8))*10]= 1
---------- > ***ù***= (15 +30(1)) ---------- > ***ù = 45***
Bn = ù + i ---------- > ***B_9 = 45 -14 = 31***

E/ 2 ; **B_{10}**= *37*

-------------- > *x=10 y= ent (10/8) = 1 r=* **ent** [(16/8- ent (16/8))*10]= 2
---------- > ***ù***= (15 +30(1)) ---------- > ***ù = 45***
Bn = ù + i ---------- > ***B_{10} = 45 -8 = 37***

E/ 3 ; **B_{11}**= *41*

-------------- > *x=11 y= ent (11/8) = 1 r=* **ent** [(11/8- ent (11/8))*10]= 3
---------- > ***ù***= (15 +30(1)) ---------- > ***ù = 45***
Bn = ù + i ---------- > ***B_{11} = 45 -4 = 41***

E/ 4 ; **B_{12}**= *43*

-------------- > *x=12 y= ent (12/8) = 1 r=* **ent** [(12/8- ent (12/8))*10]= 5
---------- > ***ù***= (15 +30(1)) ---------- > ***ù = 45***
Bn = ù + i ---------- > ***B_{12} = 45 -2 = 43***

E/ 5 ; **B_{13}**= *47*

-------------- > *x=13 y= ent (13/8) = 1 r=* **ent** [(13/8- ent (13/8))*10]= 6
---------- > ***ù***= (15 +30(1)) ---------- > ***ù = 45***
Bn = ù + i ---------- > ***B_{13} = 45 +2 = 47***

E/ 6 ; **B_{14}**= *49*

-------------- > *x=14 y= ent (14/8) = 1 r=* **ent** [(14/8- ent (14/8))*10]= 7
---------- > ***ù***= (15 +30(1)) ---------- > ***ù = 45***
Bn = ù + i ---------- > ***B_{17} = 45 +4 = 49***

E/ 7 ; **B_{15}**= *53*

--------------- > *x=15* *y= ent (15/8) = 1* *r=* **ent** [(15/8- ent (15/8))*10]= 8

---------- > ***ù***= (15 +30(1)) ---------- > ***ù* = *45***

Bn = ù + i ---------- > ***B_{15}* = *45* *+8* = *53***

E/ 8 ; **B_{16}**= ***59***

--------------- > *x=16* *y= ent(16/8) = 2* *r=* **ent** [(16/8- ent (16/8))*10]= 0

---------- > ***ù***= (15 +30(2)) ---------- > ***ù* = *75***

Bn = ù + i ---------- > ***B_{16}* = *75* *-16* = *59***

Nous concluons qu'à chaque reste 0, 1, 2, 3, 5, 6,7ou 8 correspond respectivement les incréments i **-16 ;-14 ;-8 ;-4 ;-2 ; +2 ; +4 ; +8**

5) dressons une *table pour l'utilisation de Bn, en posant les restes de la division par 8, devant leur incréments correspondants **i** :*

TABLE des I

reste (x/8)	i incréments
0	-16
1	-14
2	-8
3	-4
5	-2
6	+2
7	+4
8	+8

D'où la construction de la **table des i** pour incrémenter **ù ;** le terme **Bn** recherché **= ù + i (avec ù** = (15 +30(ent(x/8)) .

Exemple avec un rang supérieur : **M 558 112 378 995 468 223**= **2092921421233009984**

--------------- > *x=*558112378995468223 *y= ent (*558112378995468223*/8)=* 72640473744335000,00

r= **ent** [(558112378995468223/8- ent (558112378995468223/8))*10]= 0

---------- > ***ù***= (15 +30(72640473744335000)) ---------- > ***ù*** = 2092921421233010000,00

Bn = ù + i ---------- > $M_{558112378995468223} = 2092921421233010000 - 16$

$= 2092921421233009984$

Nous allons maintenant chercher une fonction -comme dans Mn-qui donne directement i en fonction de r
Autrement dit, on va procéder à une interpolation polynomiale pour trouver le polynôme $P_n(x)$; qui pour les huit valeurs de r, satisfasse le tableau suivant :

x0 =0	x1 =1	x2 = 2	x3 = 3	x4 = 5	x5 = 6	x6 = 7	x7 = 8
f(x0) =-16	f(x1) =-14	f(x2) = -8	f(x3) = -4	f(x4) = -2	f(x5) = +2	f(x6) = +4	f(x7)= +8

Utilisant l'interpolation de LA GRANGE celle-ci est déterminée par :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\, L_k(x) \qquad \text{avec} \qquad L_k(x) = \prod_{j=0,\, j\neq k}^{n} \frac{X - X_j}{X_k - X_j}$$

En ce qui concerne notre tableau nous allons calculer le polynôme de degré 7

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{7} f(x_k)\, L_k(x)$$

Commençant par poser les jalons du calcul de toutes les $L_k(x)$ (k= de 0 à 7)

$$L_0(x) = \frac{(x-x1)(x-x2)(x-x3)(x-x4)(x-x5)(x-x6)(x-x7)}{(x0-x1)(x0-x2)(x0-x3)(x0-x4)(x0-x5)(x0-x6)(x0-x7)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x0)(x-x2)(x-x3)(x-x4)(x-x5)(x-x6)(x-x7)}{(x1-x0)(x1-x2)(x1-x3)(x1-x4)(x1-x5)(x1-x6)(x1-x7)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x0)(x-x1)(x-x3)(x-x4)(x-x5)(x-x6)(x-x7)}{(x2-x0)(x2-x1)(x2-x3)(x2-x4)(x2-x5)(x2-x6)(x2-x7)}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x0)(x-x1)(x-x2)(x-x4)(x-x5)(x-x6)(x-x7)}{(x3-x0)(x3-x1)(x3-x2)(x3-x4)(x3-x5)(x3-x6)(x3-x7)}$$

$$L_4(x) = \frac{(x-x0)(x-x1)(x-x2)(x-x3)(x-x5)(x-x6)(x-x7)}{(x4-x0)(x4-x1)(x4-x2)(x4-x3)(x4-x5)(x4-x6)(x4-x7)}$$

$$L_5(x) = \frac{(x-x0)(x-x1)(x-x2)(x-x3)(x-x4)(x-x6)(x-x7)}{(x5-x0)(x5-x1)(x5-x2)(x5-x3)(x5-x4)(x5-x6)(x5-x7)}$$

$$L_6(x) = \frac{(x-x0)(x-x1)(x-x2)(x-x3)(x-x4)(x-x5)(x-x7)}{(x6-x0)(x6-x1)(x6-x2)(x6-x3)(x6-x4)(x6-x5)(x6-x7)}$$

$$L_7(x) = \frac{(x-x0)(x-x1)(x-x2)(x-x3)(x-x4)(x-x5)(x-x6)}{(x7-x0)(x7-x1)(x7-x2)(x7-x3)(x7-x4)(x7-x5)(x7-x6)}$$

Après calcul des $L_k(x)$ et en application de la formule générale suivante du polynôme de Lagrange de degré 7 :

P7 (x) = f (x0). L0 (x) +f(x1) .L1(x) +f(x2). L2 (x) +f(x3). L3 (x)+f(x4). L4 (x)+f(x5). L5 (x)+ f (x6). L6 (x) +f (x7).L7 (x)
= -16. L0 (x) -14 .L1(x) -8. L2 (x) -4. L3 (x) -2.L4 (x) +2. L5 (x) +4. L6 (x) +8.L7 (x)
²

Nous obtenons :

$$P_7(x) = \frac{1}{360}x^7 - \frac{1}{14}x^6 + \frac{218}{315}x^5 - \frac{257}{84}x^4 + \frac{14233}{2520}x^3 - \frac{157}{84}x^2 + \frac{23}{35}x - 16$$

Nous rappelons que ce polynôme nous permet d'exprimer toutes les huit restes possibles de r par les huit valeurs d'incrémentation i de Bn : nous vérifions que P(r) = i
Notre polynôme remplaçant la « table des i » nous donne respectivement
P(0) = -16 ; P(1) = -14 ; P(2) = -8 ; P(3) = -4 ; P(5) = -2 ; P(6) = +2 ; P(7) = +4 ; P(8) = +8

1) Sachant que s'exprimant en fonction du rang x de la suite Bx (== > Bn , n ou x) ;
   r = **ent** [(x/8- ent (x/8))*10]

2) **ù** = (120 +240(ent(x/8)) /8 ou **ù** = 15 +30.ent(x/8)

3) la suite Bx de rang x = **ù + i** , sachant que i (incrément) = P(r)

== > Bx = **ù + i** = P(r) + **ù**
Remplaçant r par sa valeur exprimée en fonction du rang de la suite Bx (Bn)
r = **ent** [(x/8- ent (x/8))*10]
il nous reste maintenant que d'exprimer Bx en fonction de son rang x (ou bien d'exprimer la suite Bn par son **terme général** et explicite ; en fonction de son rang n) :

$$Bx = \frac{1}{360}.\mathbf{ent}\ [(x/8-\ ent\ (x/8))*10]^7 - \frac{1}{14}.\mathbf{ent}\ [(x/8-\ .ent\ (x/8))*10]^6 + \frac{218}{315}\mathbf{ent}\ [(x/8-\ ent\ (x/8))*10]^5 - \frac{257}{84}\mathbf{ent}\ [(x/8-\ ent\ (x/8))*10]^4 + \frac{14233}{2520}.\mathbf{ent}\ [(x/8-\ ent\ (x/8))*10]^3 - \frac{157}{84}.\mathbf{ent}\ [(x/8-\ ent\ (x/8))*10]^2 + \frac{23}{35}.\mathbf{ent}\ [(x/8-\ ent\ (x/8))*10] - 16 + 15 + 30(ent(x/8)$$

Une fois déduit cette formule de Bx en fonction de son rang x , je l'ai monté sous Excel comme on peut vérifier ci-dessous par simple copier coller ; Bx génère bien tout les nombres premiers à partir de 7 et leurs multiples sans ceux de 2 & 3 comme dans Mn , mais aussi en soustrayons les multiples de 5 , ce qui est un petit pas pour réduire le champ ou sont enfermes les nombres premiers de N à moins de N/3 comme nous allons montrer en étudiant la DENSITE des nombres premiers dans Mn et Bn .

Bx sous Excel avec A=1, 2,3 ……x :
=SOMME(1/360*(ENT(((A2/8)-ENT((A2/8)))*10))^7-1/14*(ENT(((A2/8)-ENT((A2/8)))*10))^6+218/315*(ENT(((A2/8)-ENT((A2/8)))*10))^5-257/84*(ENT(((A2/8)-ENT((A2/8)))*10))^4+14233/2520*(ENT(((A2/8)-ENT((A2/8)))*10))^3-157/84*(ENT(((A2/8)-ENT((A2/8)))*10))^2+23/35*(ENT(((A2/8)-ENT((A2/8)))*10))-16)+15+30*(ENT(A2/8))

Résultat :

x= rang Bx	f(x) = Bx
1	1
2	7
3	11
4	13
5	17
6	19
7	23
8	29
9	31
10	37
11	41
12	43
13	47
14	49
15	53
16	59
17	61

Vous remarquez que la suite Bn est aussi génèrée par une fonction polynomiale analogue à celle de Mn , j'ai suivi la même démarche pour remplacer sa « table des i » par un polynôme et d'exprimer Bx en fonction de son rang x , l'intérêt s'est estompé dans Bn et ses huit sous-suites extraites qui ouvre un champ d'investigation ,en les comparant , pouvaient nous aider à dégager, peut être les lois générales qui nous permettent de trouver le moyen de se débarrasser de toutes les autres multiples , pour ne laisser que les nombres premiers .

DENSITE DES PREMIERS DANS LA SUITE (Mn)

Tous a démarré à partir de la constante de NEPER   e, dont EULER avait démontré le développement comme une série des inverses des factorielles des entiers naturels en exprimant   toute exponentielle de base a par un « polynôme de l'exposant »
Passant à la démonstration telle qu'elle a été rapportée par H. Lehning ,avec une présentation complète, car c'est grâce à cette série   que j'ai pu approcher le dénombrement des nombres premiers dans   la suite Mn , objet de ce papier .

$$a^x \quad = \quad A + Bx \; + Cx^2 + \; Dx^3 \; + \; Ex^4 \; + \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (10a)$$

En posant x=0 ==> A=1 et en cherchant à exprimer tous les coefficients en B :

$$a^{2x} \quad = \quad 1 + B(2x) \; + C(2x)^2 \qquad + \; D(2x)^3 \; + \; E(2x)^4 \; + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a^{2x} \quad = \quad 1 + 2B\,x + 4C\,x^2 \; + 8D\,x^3 \; + \; 16E\,x^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (11a)$$

Selon la propriété des puissances $a^{2x} = a^{x2}$

Euler pose $a^{x2} = (\quad A + B\,x + C\,x^2 + D\,x^3 + E\,x^4 + \ldots\ldots)^2$; avec A=1

D'où $1 + 2B\,x + 4C\,x^2 + 8D\,x^3 + 16E\,x^4 + \ldots = (1 + B\,x + C\,x^2 + D\,x^3 + E\,x^4 + \ldots\ldots)^2$

Développant le terme de droite :

$= (1 + B\,x + C\,x^2 + D\,x^3 + E\,x^4 + \ldots\ldots).\,(1 + B\,x + C\,x^2 + D\,x^3 + E\,x^4 + \ldots\ldots)$

$= 1 + B\,x + C\,x^2 + D\,x^3 + E\,x^4 + \ldots\ldots + B\,x + B^2\,x^2 + BC\,x^3 + BD\,x^4 + BE\,x^5 + \ldots$

$+ C\,x^2 + BCx^3 + C^2\,x^4 + CDx^5 + CE\,x^6 + \ldots$

$+ D\,x^3 + BD\,x^4 + BC\,x^5 + D^2\,x^6 + DE\,x^7 + \ldots$

$+ E\,x^4 + BE\,x^5 + CE\,x^6 + DE\,x^7 + E^2\,x^8 + \ldots$

$= 1 + 2B\,x + (B2 + 2C)\,x^2 + (2D + 2BC)\,x^3 + (2E + 2BD + C^2)\,x^4 + (BE + BC + CD)\,x^5 + \ldots$

(11a) ==> $2B\,x = 2B\,x$; $4C = B2 + 2C$ ==> $C = B^2/2$; $8D = 2D + 2BC$ ==> $D = B^3/6$

==> $16E = 2E + 2BD + C^2$ ==> $E = B^4/24$ ....

Remplaçant dans (10a) les coefficients exprimés en fonction de B ; en mettant A =1

$$a^x \quad = \quad 1 + Bx + (B^2/2)\,x^2 + (B^3/6)\,x^3 + (B4/24)\,x^4 \; + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Euler observa que les dénominateurs de la suite progressent selon les valeurs de la factorielle en posant la valeur unitaire B= 1 pour x= 1 il obtient ;

$$e \quad = \quad 1 + 1/1! + 1/2! + 1/3! + 1/4! + 1/5! + 1/6! + \ldots\ldots\ldots\ldots + 1/n! \quad (1)$$

$$e \quad = \quad 1 + 1/1 + 1/2 + 1/6 + 1/24 + 1/120 + 1/720 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 1/n!$$

Soit X une sous-suite quelconque de N / ∀ n & k ∈ N, k>n

X= (n1, n2, n3,.........., k)

Multiplions les deux égalités de (1) par X :

$$X\,e \quad = \quad 2X + X/2! + X/3! + X/4! + X/5! + X/6! + \ldots\ldots\ldots\ldots + X/n! \qquad (2)$$

Observant les termes de cette suite entre eux et plus particulièrement ce que représentent les termes à partir du 2° par rapport à X :

X /2! Ou X/2, entre 1 et 2 nous comptons 1 multiples de 2 ; La proportion des multiples de 2 dans X égale à 1/2 = 1/2

X /3! ou X/6, entre 1 et 6 nous comptons 2 multiples de 3 ; La proportion des multiples de 3 dans X égale à 2/6 = 1/3

X /4! ou X/24, entre 1 et 24 nous comptons 6 multiples de 4 ; La proportion des multiples de 4 dans X égale à 6/24 = 1/4

X /5! ou X/120, entre 1 et 120 nous comptons 24 multiples de 6 ; La proportion des multiples de 5 dans X égale à 24/720 = 1/5

1 /6! ou X/720, entre 1 et 720 nous comptons 120 multiples de 6 ; La proportion des multiples de 6 dans X égale à 120/720 = 1/6

1 /7! ou X/5040, entre 1 et 5040 nous comptons 720 multiples de 7 ; la proportion des multiples de 7 dans X égale à 720/5040= 1/7

1 /8! ou X/40320, entre 1 et 40320 nous comptons 5040 multiples de 8 ; la proportion des multiples de 8 dans X égale à 5040/40320 = 1/8

1 /9! ou X/362880, entre 1 et 362880 nous comptons 40320 multiples de 9 ; La *<u>proportion des multiples de 9</u> dans X égale à 40320 /362880 = 1/9*
1 /10! ou X/3628800, entre 1 et 3628800 nous comptons 362880 multiples de10 . ; La *<u>proportion des multiples de 10</u> dans X égale à 362880/36288000 = 1/10*

Nous déduisons que chaque terme factoriel lui correspond par bijection la proportion du multiple qu'il porte n, dans l'intervalle [1,1/n !] : 1/n = (n-1) !/n ! , Chaque terme de l'expression (1) représente donc par le biais d'une autre unité factorielle la proportion des multiples n qu'il porte

Soit X une sous-suite quelconque de N / ∀ n & k ∈ N, k>n

X= (n1, n2, n3,………., k)

Multiplions les deux égalités de (1) par X :

X e = 2 X + X /2! + X /3! + X /4! + X /5! + X /6! +………… +X /n ! (2)

X(e-1) = X + X /2! + X /3! + X /4! + X /5! + X /6! +………… +X /n ! (2)

Otant les multiples de 2 et de 3 de part et d'autre :

X - X /(e-1) .2! - X /(e-1) .3! = 2X/(e-1) + X /(e-1) .4! + X /(e-1) .5! + X /(e-1) .6! +………… +X /(e-1) .n!

X (1 - 1/(e-1) .2 - 1/(e-1) .6) = 2X/(e-1) + X /(e-1) .4! + X /(e-1) .5! + X /(e-1) .6! +………… +X /(e-1) .n!

X(12(e-1) - 6 - 2)/12 e -12 = 2X/(e-1) + X /(e-1) .4! + X /(e-1) .5! + X /(e-1) .6! +………… +X /(e-1) .n !

X(12e-20)/12 e -12 = 2X/(e-1) + X /(e-1) .4! + X /(e-1) .5! + X /(e-1) .6! +………… +X /(e-1) .n !

X(3e- 5)/3 e – 3 = 2X/(e-1) + X /(e-1) .4! + X /(e-1) .5! + X /(e-1) .6! +………… +X /(e-1) .n !

X. (3e-5) /3(e-1) = 2X/(e-1) + X /(e-1) .4! + X /(e-1) .5! + X /(e-1) .6! +………… +X /(e-1) .n!

X = 2X.3(e-1)/(e-1) (3e-5) + X 3(e-1)/(e-1) (3e-5).4! + ……. +X 3(e-1)/(e-1) (3e-5)..n!

X. = 6X/ (3e-5) + 3X/ (3e-5).4! + 3X/ (3e-5).5! + 3X/ (3e-5).6! +………… +3X/ (3e-5) .n! (3)

Comme nous considérons la partie
{3X/ (3e-5).4! + 3X/ (3e-5).5! + 3X/ (3e-5).6! +………… +3X/ (3e-5) .n!} Comme la somme des proportions par rapport au premier terme {6X/ (3e-5)} et que cette fois les proportions réelles sont exprimées par les proportions factoriels, posons l'expression (3) :

X = X.6/3e-5) +X 3/3e-5) 4! +X 3/3e-5) 5! +X 3/3e-5) 6! +……..+X(3/3e-5) .n! (3)

Multiplions de part et d'autres l'égalité par une quantité quelconque ; soit : $\frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2}$X = =3π. X. /3e-5) +$\frac{\pi}{2}$X 3/3e-5) 4! +$\frac{\pi}{2}$X 3/3e-5) 5! +$\frac{\pi}{2}$X 3/3e-5) 6! +……..+$\frac{\pi}{2}$X(3/3e-5) .n! (3)

il existe une suite M tel que M soit égale à X .

M = =3π. **M**. /3e-5) +$\frac{\pi}{2}$**M** 3/3e-5) 4! +$\frac{\pi}{2}$**M** 3/3e-5) 5! +$\frac{\pi}{2}$**M** 3/3e-5) 6! +……..+$\frac{\pi}{2}$**M** (3/3e-5) .n! (5)

A= 3π. **M**. /3e-5)

B= $\frac{\pi}{2}$**M** 3/3e-5) 4! +$\frac{\pi}{2}$**M** 3/3e-5) 5! +$\frac{\pi}{2}$**M** 3/3e-5) 6! +……..+$\frac{\pi}{2}$**M** (3/3e-5) .n!

Partant du principe que :

1) - M ne contient pas les multiples de 2 & 3 (qui, intuitivement, constituent à elles seuls les 2/3 de l'ensemble N des entiers naturels ; et le 1/3 restant constitue la suite M.)

2) la partie $3\pi.\mathbf{M}.$ /3e-5) représente le <u>sous -ensemble </u>A à partir duquel sont définis les proportions

3) la partie {$\frac{\pi}{2}$**M** 3/3e-5) 4! +$\frac{\pi}{2}$**M** 3/3e-5) 5! +$\frac{\pi}{2}$**M** 3/3e-5) 6! +........+$\frac{\pi}{2}$**M** (3/3e-5) .n! }
Constitue le <u>sous-ensemble B</u> qui représente les proportions de multiples des nombres par rapport au <u>sous -ensemble </u>A ($3\pi.\mathbf{M}.$ /3e-5)

4) - Le sous -ensemble A= **<u>doit être disjoint</u>** par rapport à B : A∩ B=∅, cette conditions nous impose nécessairement A=(x1, x2,………….xn) devra correspondre à l'ensemble des nombres premiers, et B= (m1, m2,…………….mn) = l'ensemble des multiples des nombres premiers ,sans ceux de 2 & 3.

Ceci étant posés, et sachant qu'un nombre premier ne peut être un multiple de premier , et qu'un nombre composé ne peut être premier, d'où A∩ B=∅.

5) **La dis conjonction de ces deux sous-ensembles A et B est une condition suffisante avec celle énoncée en 1) à savoir que M ne contient pas les multiples de 2 & 3. Pour que, nécessairement M = A+ B**

On posant notre suite Mn=M :

Mn = { Mn. (3π /3e-5)**)** + **Mn** ($\frac{3\pi}{2}$/3e-5) 4! + ($\frac{3\pi}{2}$/3e-5).5! + ($\frac{3\pi}{2}$/3e-5).6! +........+ ($\frac{3\pi}{2}$/3e-5).n! **) }** **(6):**

Avec A=(x1, x2,………….xn) l'ensemble des nombres premiers = **Mn. (** 3π /3e-5**)** **(7)**

, et B= (m1, m2,………….mn) = à l'ensemble des multiples des nombres premiers
= Mn ($\frac{3\pi}{2}$/3e-5) 4! + ($\frac{3\pi}{2}$/3e-5).5! + ($\frac{3\pi}{2}$/3e-5).6! +........+ ($\frac{3\pi}{2}$/3e-5).n!)
On déduit à partir de l'expression **(7)** que :

$\frac{\mathbf{3\pi}}{\mathbf{(3e-5)}}$ = représente donc la densité dont nous devons tenir compte pour appliquer le théorème des nombres premiers qui annonce que : *le nombre $\pi(x)$ des nombres premiers inferieurs ou égaux à x, est équivalent lorsque le réel x tend vers +∞ au quotient de x par son logarithme népérien soit :*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)} \ (x \to +\infty),$$

D' où la PROPOSITION finale qui nous permet de déduire le rapport dans la suite Mn des nombres premiers, sachant que le nombre de nombres premiers dans $\mathbb{N}$,fluctue autour de la proportion de 1/ln(n) :

Le Quotient des nombres premiers dans Mn appelé P(n) tend vers :

$P(n) = \frac{3\pi}{(3e-5)\ln(n)}$ **quand n tend vers** $+\infty$

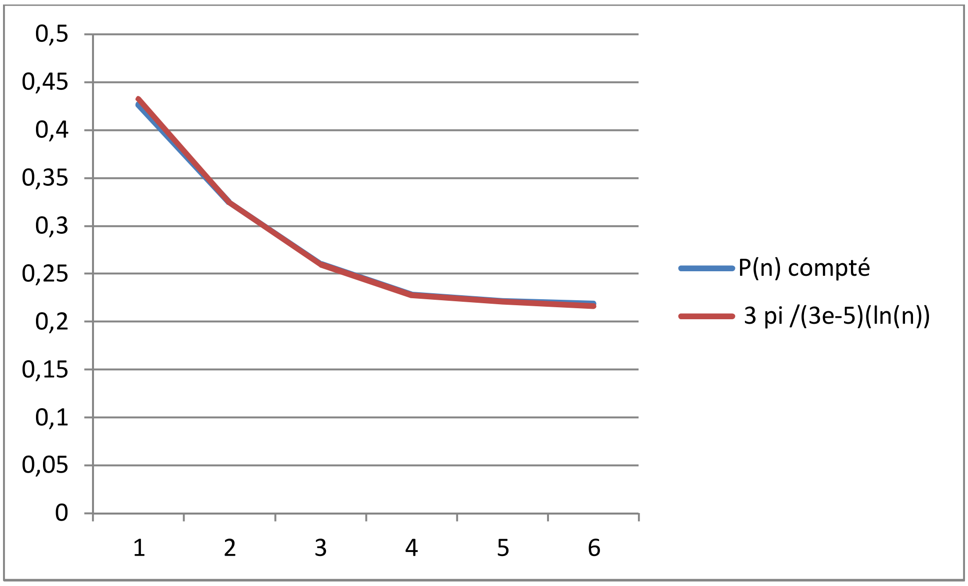
*(=SOMME ((3*3,14))/ ((3*2,71828)-5)*(1/LN(A3)): formule Excel)*

*Tableau des de P(n) comptés dans **Mn** / déduits par la formule*

(Par exemple : P(10000)=3244/10000=0.3244 .....ext)

n	P(n) compté	3 pi / (3e-5)(ln(n))
1000	0,42659	0,432251611
10000	0,3244	0,324188708
100000	0,25997	0,259350967
500000	0,228308	0,227541965
750000	0,221361	0,220721925
1000000	0,218815	0,216125806

Comparaison graphique des P(n) comptés dans Mn / déduits par la formule



Nous remarquions que localement, le quotient déduit par la formule est presque identique aux P(n) comptés. Voyons maintenant la densité des nombres premiers en ce qui concerne notre suite Bn qui devait être supérieur à celui de Mn puisque Bn est débarrassé des multiples de 5.

DENSITE DES PREMIERS DANS LA SUITE (Bn)

Nous rappelions que la suite Mn peut être décomposée en 10 sous-suites extraites :

$E_1 = M_{10n+1}$ $E_2 = M_{10n+2}$ $E_3 = M_{10n+3}$ $E_4 = M_{10n+4}$
$E_5 = M_{10n+5}$ $E_6 = M_{10n+6}$ $E_7 = M_{10n+7}$ $E_8 = M_{10n+8}$
$E_9 = M_{10n+9}$ $E_{10} = M_{10n+10}$

Nous rappelions aussi que la suite Bn avait été obtenue à partir de Mn en soustrayons de Mn deux sous-suites extraites :

$E_2 = M_{10n+2}$ Dont le terme général est = 5 +30.**m**

$E_9 = M_{10n+9}$ Dont le terme général est = 25 +30.**m** , tous les deux ne génèrent que les multiples de 5, partant du principe que chaque sous-suite produit un dixième des termes de la suite-mère Mn (1/10) et que Bn composée de 8 sous-suites ne contient que (8/10) ou 4/5 termes de Mn , comme la différence de 1/5 est constituée par des multiples de 5 , et puisque le nombre des nombres premiers est le même dans Mn & Bn , cela implique que seul la densité ou le quotient des nombre premiers a changé dans Bn , elle s'est accrue donc du 1/5 :

Autrement dit P(n) de Bn = P(n) de Mn plus 1/5° P(n) de Mn

Posons Q(n) : la densité ou le quotient des nombres premiers dans Bn

$$\mathbf{Q(n)} = P(n) + 1/5^* P(n) ===> \mathbf{Q(n)} = P(n) + P(n)/5$$

$$===> \mathbf{Q(n)} = \frac{\mathbf{3\pi}}{(3e-5)\mathbf{ln(n)}} + \frac{\mathbf{3\pi}}{\mathbf{5}.(3e-5)\mathbf{ln(n)}}$$

$$\mathbf{Q(n)} = \frac{\mathbf{15\pi}}{\mathbf{5}.(3e-5)\mathbf{ln(n)}} + \frac{\mathbf{3\pi}}{\mathbf{5}.(3e-5)\mathbf{ln(n)}}$$

$$\mathbf{Q(n)} = \frac{\mathbf{18\pi}}{\mathbf{5}.(3e-5)\mathbf{ln(n)}}$$

$$\mathbf{Q(n)} = \frac{\mathbf{18\pi}}{(15e-25)\mathbf{ln(n)}}$$

Finalement , la Proposition 2 :

Le Quotient des nombres premiers dans Bn appelé Q(n) tend vers :

$$Q(n) = \frac{\mathbf{18\pi}}{\mathbf{(15e-25)ln(n)}} \quad \textbf{quand n tend vers} +\infty$$

*2 °   tableau des Q(n) comptés dans **Bn** / déduits par la formule*

(Par exemple : Q(1000)=523/1000=0.523.....ext)

n	Q(n) compté	18pi/(15e-25)(ln(n)
1000	0,523	0,521903989
10000	0,3967	0,391427992
100000	0,31904	0,313142394
500000	0,280584	0,274735955
750000	0,272308	0,266501386
1000000	0,266753	0,260951995