Published in *Recreatii Matematice*, Anul XX, nr. 1 ian - iunie 2018, Iasi, Romania, pp. 16-18

Două probleme de minim geometric

I. PĂTRAŞCU[1], *F. SMARANDACHE*[2]

Abstract. In this Note two problems of geometric minima are solved. The first is: given a proper angle xAy and a fixed point P in its interior, construct a straight line BC through P with $B \in (Ax$ and $C \in (Ay$ such that the perimeter of the triangle ABC to be minimal. The second one is related to the first: Let xAy be a proper angle and $\mathcal{C}(J)$ be a circle tangent to its sides. Construct a tangent BC to this circle for $B \in (Ax$ and $C \in (Ay$ such that the circle to be inscribed in the triangle ABC and the perimeter of the triangle ABC to be minimal.

Keywords: angle, triangle, circle, minimal perimeter

MSC 2010: 51M04.

În acest articol rezolvăm două probleme de minim geometric; prima este din [1], iar pe a doua am formulat-o în legătură cu prima.

Enunţul primei probleme este următorul:

Problema 1. *Se dă un unghi propriu xAy şi P un punct fixat în interiorul său. Construiţi prin P o secantă BC, cu $B \in (Ax$ şi $C \in (Ay$, astfel ca triunghiul ABC să aibă perimetrul minim.*

Pentru rezolvarea problemei, folosim următoarea:

Lemă. *Dacă xAy este un unghi propriu şi $\mathcal{C}(J)$ este un cerc tangent laturilor $(Ax$ şi $(Ay$, fixat, iar BC este o tangentă la acest cerc astfel încât cercul să fie A-exînscris triunghiului ABC, atunci perimetrul triunghiului ABC este constant.*

Demonstraţia Lemei. Fie D şi E punctele de tangentă cu $(Ax$ respectiv $(Ay$ ale cercului $\mathcal{C}(J)$ şi fie BC o tangentă oarecare la acest cerc în condiţiile enunţului (vezi *Fig. 1*). Notăm cu T contactul tangentei BC cu cercul. Cu ajutorul teoremei tangentelor duse dintr-un punct exterior la un cerc, avem că: $BD = BT$, $CT = CE$ şi $AD = AE$. Cum perimetrul triunghiului ABC este $AB+BC+AC = AB+BT+TC+AC$, avem că $AB+BC+AC = AB+AC+BD+CE = AD + AE = 2AD =$ constant.

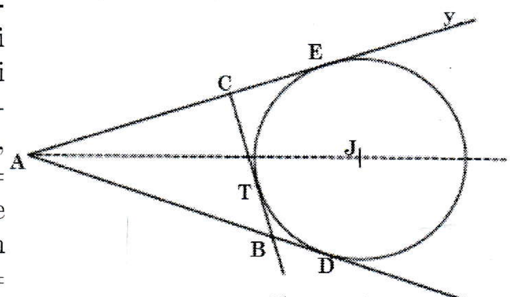

Fig. 1

Rezolvarea problemei

Afirmăm că triunghiul ABC de perimetru minim pentru care BC trece prin P este acela în care BC este tangent în P cercului ce trece prin P şi este tangent laturilor $(Ax$ şi $(Ay$ ale unghiului dat.

Din Lemă, am văzut că perimetrul triunghiului ABC (orice triunghi cu BC tangentă cercului) este constant şi egal cu $2AD$. Să arătăm că orice triunghi $AB'C'$ cu $B'C'$ secantă ce trece prin P este mai mare decât perimetrul triunghiului ABC.

Putem construi o secantă $B''C'' \parallel B'C'$ care să fie tangentă cercului $\mathcal{C}(J)$

[1]Profesor, Colegiul Naţional ,,Fraţii Buzeşti", Craiova, Romania; *patrascu.ion@yahoo.com*

[2]Profesor, University of New Mexico, Gallup, NM, USA; *fsmarandache@gmail.com*

şi acesta din urmă să fie A-exînscris triunghiului $AB''C''$. Perimetrul triunghiului $AB''C''$ este egal cu cel al triunghiului ABC (conform lemei), deci cu $2AD$. Evident că perimetrul triunghiului $AB'C'$ este mai mare decât perimetrul triunghiului $AB''C''$ (vezi *Fig. 2*), în consecinţă triunghiul ABC are perimetrul minim.

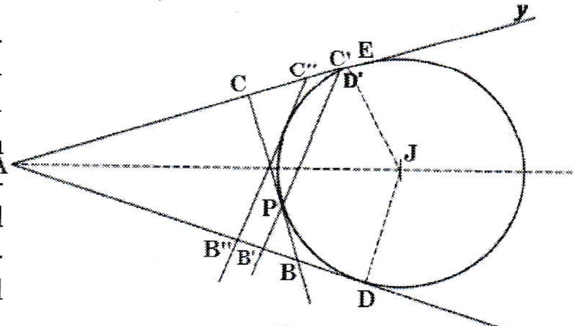

Fig. 2

Deoarece problema propusă cere construcţia secantei BC, deci implicit a cercului ce trece prin P şi este tangent laturilor $(Ax$ şi $(Ay$ ale unghiului, prezentăm două metode de a realiza construcţia cercului.

Prima construcţie

Presupunem problema rezolvată, fie deci $\mathcal{C}(J)$ tangent laturilor $(Ax$ şi $(Ay$ ce va trece prin P.

Centrul J al cercului este situat pe bisectoarea $(Az$ a unghiului xAy, deci cercul va trece şi prin punctul Q simetricul lui P faţă de $(Az$. Notăm $\{R\} = PQ \cap (Ax$. Puterea punctului R faţă de cercul $\mathcal{C}(J,\ JP)$ furnizează $RP \cdot RQ = RD^2$ (D punctul de tangenţă cu $(Ax$ al cercului, vezi *Fig. 3*).

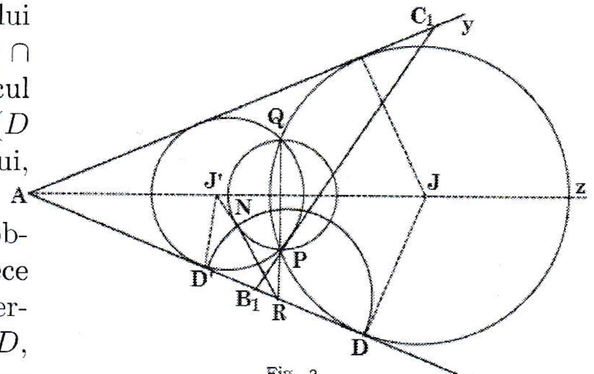

Fig. 3

Dacă vom construi punctul D, problema este practic rezolvată, deoarece cunoaştem trei puncte P, Q, D pe cercul căutat. Pentru a construi punctul D, putem proceda astfel: Construim un cerc arbitrar care trece prin P şi Q; construim tangenta RN din R la acest cerc şi construim cercul $\mathcal{C}(R,\ RN)$; acesta va intersecta $(Ax$ în două puncte D şi D'.

Problema are două soluţii: cercul circumscris triunghiului DPQ şi cercul circumscris triunghiului $D'PQ$. Tangenta în P la cel din urmă cerc notată în figură, B_1C_1, formează cu A un triunghi în care cercul $D'PQ$ este înscris.

Putem arăta ca mai înainte că perimetrul acestui triunghi este mai mare decât al triunghiului ABC în care BC este tangenta în P la cercul DPQ.

A doua construcţie

Construim un cerc tangent laturilor $(Ax$ şi $(Ay$. Fie J_1 centrul său. Notăm M_1M_2 intersecţiile acestui cerc cu (AP). Construim $PJ \parallel J_1M_1$, $J \in (Az$ şi $PJ' \parallel J_1M_2$, $J' \in (Az$ (vezi *Fig. 4*). Cercurile $\mathcal{C}(J',\ J'P)$, fiind omotetice cercului $\mathcal{C}(J_1,\ M_1)$ prin omotetiile corespunzătoare, sunt cele căutate.

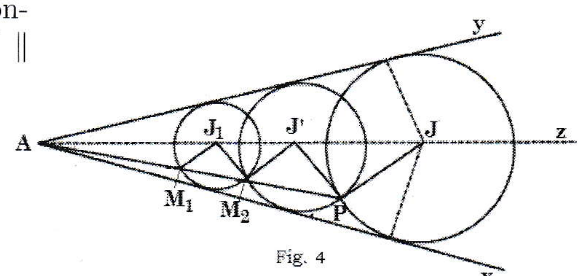

Fig. 4

Observaţie. Lema şi Problema analizate ne-au condus la următoarea problemă de minim:

Problema 2. *Fie xAy un unghi propriu dat şi fie $\mathcal{C}(J)$ un cerc tangent laturilor $(Ax$ şi $(Ay$ fixat. Construiţi o tangentă BC la cerc, $B \in (Ax$,$C \in (Ay$ astfel ca cercul dat să fie cerc înscris al triunghiului ABC, iar ABC să aibă perimetrul minim.*

Rezolvarea problemei. Să considerăm o tangentă $B'C'$ la cercul $\mathcal{C}(J)$ şi cercul A-exînscris triunghiului $AB'C'$ de centru J'. Dacă D şi D' sunt contactele cercurilor $\mathcal{C}(J)$ şi $\mathcal{C}(J')$ cu $(Ax$, avem că: Perimetrul triunghiului $AB'C'$ este egal cu $2AD + 2B'C'$ şi tot el este egal cu $2AD'$ (vezi *Fig. 5*). Pentru ca perimetrul triunghiului $AB'C'$ să fie minim, este necesar ca $B'C'$ să fie minimă, şi cum $B'C' = AD' - AD$, iar AD este constantă, este necesar ca AD' să fie minimă. Dacă vom nota $J'D' = x$, $JD = r$ şi $m\widehat{xAy} = 2\varphi$, avem: $\sin\varphi = \dfrac{x-r}{JJ'}$, deci $JJ' = \dfrac{x-r}{\sin\varphi}$. Deoarece

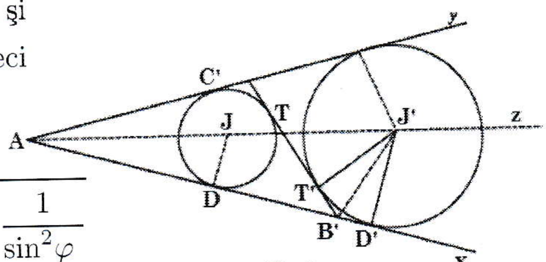

Fig. 5

$$DD' = \sqrt{JJ'^2 + (x-r)^2} = (x-r)\sqrt{1 + \frac{1}{\sin^2\varphi}}$$

găsim că minimul lui DD' se atinge odată cu minimul lui $x = J'D'$. Aceasta se întâmplă când cercul de centru J' este tangent cercului de centru J. În acest caz, BC este tangentă comună acestor cercuri şi este perpendiculară pe $(Az$, bisectoarea $\sphericalangle xAy$.

Bibliografie

1. **F. G.-M.**, *Exercices de Géométrie*, huitième édition, Librairie générale de l'enseignement libre, 77 Ruse de Vaugirard. Paris (6).