Aplicação do zero e sincronização de números Primos

Teorema e Condição dos Primos Gêmeos

Pereyra, P.H.©

pereyraph@gmail.com

Resumo

É estabelecida uma condição discreta para números primos gêmeos utilizando o teorema de Wilson. Por sincronização é obtida uma equação diofantina linear que implica pelo teorema de Bertrand Chebyshev na existência de infinitos números primos gêmeos.

Nota: este artigo contém programação algébrica avançada de matemática elementar, aconselha-se leitura repetida.

O teorema Bertrand Chebyschev [2] localiza no mínimo um número primo P tal que

$$n < P < 2n \qquad n \in N \tag{1}$$

para $n > 1$.

Queremos mostrar que sempre existe um número primo gêmeo [5] P no intervalo dado por (1).

TEOREMA

Existe um número primo gêmeo P no intervalo $n < P < 2n \;\; n \in N$ para $n > 1$, parametrizado como $P = (2i + 1)$ ou como $P = (2i + 3)$ para algum $i \in N,\; i > 0$.

DEMONSTRAÇÂO

Para isto estabelecemos a condição de primos gêmeos pelo teorema de Wilson [3] para algum $i \in N,\; i > 0$ como números ímpares

$$(2i)! + 1 = A(2i + 1) \qquad A \in Z \tag{2}$$

e

$$(2i + 2)! + 1 = B(2i + 3) \qquad B \in Z \tag{3}$$

de onde subtraindo (2) de (3) resulta a equação diofantina linear [1],[4]

$$B(2i + 3) - A(2i + 1) = (2i + 2)! - (2i)! \tag{4}$$

que possui soluções inteiras [1],[4] (A, B) já que $mdc\big((2i + 1), (2i + 3)\big) = 1$.

Surge aqui a dificuldade de que o fato de (4) possuir soluções inteiras (A, B) não garante que $(2i + 1)$ e $(2i + 3)$ serão primos gêmeos.

Devemos mostrar então que escolhendo um primo P como $P = (2i + 1)$ ou como $P = (2i + 3)$ no intervalo dado por (1) para algum *n,* sempre é possível sincronizar um primo gêmeo de maneira que o primo *P* escolhido também é gêmeo.

Considerando $P = (2i + 1)$ como primo localizado no intervalo dado por (1) para algum *n* e somando para algum $K \in Z$ $(A - K)$ unidades de $(2i + 1)$ do lado direito e esquerdo de (4) resulta

$$B(2i + 3) + (A - A - K)(2i + 1) = (2i + 2)! + 1 - K(2i + 1) \qquad (5)$$

e

$$B(2i + 3) - K(2i + 1) = (2i + 2)! + 1 - K(2i + 1) \qquad (6)$$

que possui solução inteira [1],[4] (B, K) já que $mdc\big((2i + 1), (2i + 3)\big) = 1$, logo

$$B(2i + 3) = (2i + 2)! + 1 \qquad (7)$$

sincroniza um primo gêmeo $(2i + 3)$.

Vemos que o primo localizado no intervalo dado por (1) para algum *n* poderia também ser considerado como $P = (2i + 3)$ onde somando para algum $K \in Z$ $(-B + K)$ unidades de $(2i + 3)$ do lado direito e esquerdo de (4) resulta

$$(B - B + K)(2i + 3) - A(2i + 1) = K(2i + 3) - (2i)! - 1 \qquad (8)$$

e

$$K(2i + 3) - A(2i + 1) = K(2i + 3) - (2i)! - 1 \qquad (9)$$

que possui solução inteira [1],[4] (K, A) já que $mdc\big((2i + 1), (2i + 3)\big) = 1$, logo

$$A(2i + 1) = (2i)! + 1 \qquad (10)$$

sincroniza um primo gêmeo $(2i + 1)$.

Este resultado mostra que sempre existirá um primo gêmeo no intervalo dado por (1) para algum *n,* parametrizado como $P = (2i + 1)$ ou como $P = (2i + 3)$.

Colocamos exclusivamente a parametrização como $P = (2i + 1)$ ou como $P = (2i + 3)$ pois os primos gêmeos podem estar localizados no intervalo dado por (1) para diferentes valores de n (consecutivos). Como por exemplo $n = 5$, $5 < 7 < 10$, vemos que com $i = 2$ o primo gêmeo é parametrizado como $2.2 + 3 = 7$ e seu correspondente como $2.2 + 1 = 5$ que não está localizado no mesmo intervalo.

Por (1) concluímos que existem infinitos primos gêmeos.

Segue que a existência de primos gêmeos é uma condição necessária para a validade do teorema de soluções de equações diofantinas lineares [1],[4] , e o teorema de Bertrand Chebyshev implica que existem infinitos primos gêmeos. Podemos afirmar que a existência de um primo *P* no intervalo dado por (1) implica que existe também neste intervalo um primo gêmeo.

Fica demonstrado o teorema.

Denomina-se aqui esta técnica de sincronização também como aplicação do zero.

Referências:

[1] Elementary Number Theory , Edmund Landau

[2] http://mathworld.wolfram.com/BertrandsPostulate.html

[3] http://mathworld.wolfram.com/WilsonsTheorem.html

[4] http://mathworld.wolfram.com/DiophantineEquation.html

[5] http://mathworld.wolfram.com/TwinPrimes.html

Versão 6