Conjecture généralisée sur la répartition des nombres premiers

Réjean Labrie
(13 février 2018)
(labrierejean@gmail.com)

Résumé: Soit N, n et k des entiers plus grands que 1. Alors pour tout N il existe un seuil minimal k tel que pour n>=N, si on découpe la suite des entiers consécutifs de 1 à n*(n+k) en n+k tranches de longueur n, on trouve toujours au moins un nombre premier dans chacune des tranches.

Il s'ensuit que π(n*(n+k)) > π(n*(n+k-1)) > π(n*(n+k-2)) > π(n*(n+k-3)) > … > π(2n) > π(n) où π(n) est la quantité de nombres premiers plus petits ou égal à n.

Abstract: Let N, n and k be integers larger than 1. Then for all N there exists a minimum threshold k such that for n>=N, if we cut the sequence of consecutive integers from 1 to n*(n+k) into n+k slices of length n, we always find at least a prime number in each slice.

It follows that π(n*(n+k)) > π(n*(n+k-1)) > π(n*(n+k-2)) > π(n*(n+k-3))> ...> π(2n)> π(n) where π(n) is the quantity of prime numbers smaller than or equal to n.

****

Pour illustrer cette conjecture prenons N=2 dont le seuil k associé est le nombre 2 (voir le tableau à la fin de cet article). Alors pour tout n>=N on a n+2 tranches de longueur n qui contiennent chacune au moins un nombre premier. Ainsi pour n=2 on a 2+2=4 tranches de longueur 2 contenant chacune un nombre premier. Cet exemple correspond à la première conjecture que je publiais en octobre 2017, qui était en fait un cas particulier de la conjecture généralisée décrite dans le résumé ci-haut.

Maintenant regardons le cas N=24 qui a comme seuil k le nombre 147. Alors pour tout n>=N on a n+147 tranches de longueur n. Si on prend n=30 ça implique que l'on 30+147=177 tranches de longueur 30, chacune contenant au moins un nombre premier.

Cette nouvelle conjecture est aussi une généralisation de la conjecture énoncée par Opperman en 1882 à l'effet que π(n^2+n) > π(n^2) > π(n^2-n) pour n>1. Il poussait ainsi un peu plus loin la conjecture de Legendre voulant qu'il y ait au moins un nombre premier entre 2 carrés parfaits.

Concernant cette conjecture généralisée, j'ai vérifié les 4002 premières tranches de longueur 1 à 4000 et on a effectivement toujours au moins un nombre premier pour chacune des tranches. Il est raisonnable de penser que si l'on poursuivait avec des valeurs de n supérieures à 4000 la conjecture demeurerait vraie puisque qu'en augmentant la valeur de n on allonge la longueur d'une tranche ce qui augmente les chances d'y trouver plus de nombres premiers. Bien que cette conjecture soit vérifiée par l'expérience, je suis toujours à la recherche d'une démonstration formelle.

****

Tableau des premières valeurs pour le seuil k en fonction de la valeur N.

N	Seuil k
2	2
3	2
4	2
5	4
6	4
7	4
8	4
9	4
10	10
11	18
12	20
13	20
14	20
15	20
16	35
17	35
18	35
19	35
20	35
21	35
22	35
23	35
24	147
25	147
26	152
27	152
28	263
29	263
30	330
31	335
32	335
33	387
34	387
35	387
36	387
37	387
38	425

39	425
40	425
41	425
42	425
43	494
44	494
45	494
46	494
47	494
48	494
49	494
50	494
51	494
52	494
53	494
54	494
55	494
56	494
57	494
58	1761
59	1761
60	1844
61	1844
62	1844
63	1844
64	1844
65	1844
66	1844
67	1844
68	1844
69	1844
70	1844
71	1844
72	1844
73	1844
74	1844
75	1844
76	1844
77	1844
78	1844
79	1844
80	1844
81	1844

82	3565
83	3565
84	3565
85	3565
86	3565
87	3565
88	3565
89	3565
90	3565
91	3565
92	3565
93	3565
94	3565
95	3565
96	3565
97	3565
98	3565
99	3565
100	3565
101	3565
102	12006
103	12006
104	12006
105	12006
106	12006
107	12006
108	12006
109	12006
110	12006
111	12006
112	12006
113	12896
114	12896
115	12896
116	12896
117	12896
118	12896
119	12896
120	12896
121	15581
122	15581
123	15581
124	15581

125	15581
126	15581
127	15581
128	15581
129	28853
130	28853
131	28853
132	28853
133	32391
134	32391
135	32391
136	32391
137	32391
138	32391
139	32391
140	32391
141	32391
142	32391
143	32391
144	75458
145	75458
146	75458
147	75458
148	114292
149	114292
150	125324
151	125324
152	125324
153	125324
154	125324
155	125324
156	125324
157	116852
158	116852
159	116852
160	116852
161	116852
162	116852
163	116852
164	116852
165	116852
166	116852
167	110617

168	110617
169	110617
170	110617
171	110617
172	110617
173	107184
174	107184
175	107184
176	107184
177	107184
178	107184
179	107184
180	107184
181	107184
182	107184
183	107184
184	107184
185	107184
186	107184
187	107184
188	107184
189	107184
190	107184
191	107184
192	107184
193	107184
194	107184
195	242506
196	555712