Boundedness of a function of Fibonacci numbers in generic form and its limit

Article · May 2009

1 author:

Jesús Álvarez Lobo
Profesores de Enseñanza Secundaria

Problema 160. Propuesto por José Luís Díaz Barrero, Barcelona, España.

Sea F_n el n-ésimo *número de Fibonacci*, definido por

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ \forall n \in \mathbb{N} \cap [2, +\infty).$$

Demuéstrese la desigualdad,

$$\frac{F_n^2 \left(F_{n+2} + 2F_{n+1}\right) + F_{n+1}^2 \left(F_{n+2} + F_n\right)}{2\left(F_n^3 + F_{n+1}^3\right) + 3F_n F_{n+1} F_{n+2}} < 1.$$

Solución de Jesús Álvarez Lobo. Oviedo. Asturias. España.

A fin de facilitar el seguimiento del desarrollo, denotemos

$$F(n) \equiv \frac{F_n^2 \left(F_{n+2} + 2F_{n+1}\right) + F_{n+1}^2 \left(F_{n+2} + F_n\right)}{2\left(F_n^3 + F_{n+1}^3\right) + 3F_n F_{n+1} F_{n+2}}.$$

Por la relación de recurrencia que define la *sucesión de Fibonacci*,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,\ \forall n \in \mathbb{N} \cap [2, +\infty),$$

y sustituyendo en $F(n)$ el término F_{n+2} por $F_{n+1} + F_n$, se tiene:

$$F(n) = \frac{F_n^2 \left(\left\{F_{n+1} + F_n\right\} + 2F_{n+1}\right) + F_{n+1}^2 \left(\left\{F_{n+1} + F_n\right\} + F_n\right)}{2\left(F_n^3 + F_{n+1}^3\right) + 3F_n F_{n+1} \left\{F_{n+1} + F_n\right\}}.$$

Realizando las operaciones indicadas, reduciendo y ordenando términos, se llega a la expresión,

$$F(n) = \frac{F_n^3 + 3F_n^2 F_{n+1} + 2F_n F_{n+1}^2 + F_{n+1}^3}{2F_n^3 + +3F_n^2 F_{n+1} + 3F_n F_{n+1}^2 + 2F_{n+1}^3},$$

cuyo numerador y denominador nos recuerdan el desarrollo del *cubo de un binomio*. En efecto, agrupando términos,

$$F(n) = \frac{\left(F_n + F_{n+1}\right)^3 - F_n F_{n+1}^2}{\left(F_n + F_{n+1}\right)^3 + F_n^3 + 2F_{n+1}^3},$$

quedando probada la desigualdad, $F(n) < 1$, como trivialmente se comprueba, ya que los *números de Fibonacci* se definen estrictamente positivos para $n > 0$.

Nótese que $F(n)$ también se puede expresar en la forma

$$F(n)=\frac{1-\dfrac{F_nF_{n+1}^2}{\left(F_n+F_{n+1}\right)^3}}{1+\dfrac{F_n^3+2F_{n+1}^3}{\left(F_n+F_{n+1}\right)^3}}<1,$$

resultando aún más evidente la desigualdad, puesto que se verifican las desigualdades

$$\frac{F_nF_{n+1}^2}{\left(F_n+F_{n+1}\right)^3}\geq 0,\ \frac{F_n^3+2F_{n+1}^3}{\left(F_n+F_{n+1}\right)^3}>0,$$

ya que, a lo sumo, $F_n = 0$, siendo, por definición, $F_{n+1} > 0$, $\forall n\in \mathbb{N}$.

ꟷ

Aunque no se pide, estudiemos la **convergencia de la sucesión** $\left(F(n)\right)_{n=0}^{\infty}$. A tal fin, escribamos el término general de ésta en la forma

$$F(n)=\frac{1-\dfrac{\left(F_{n+1}/F_n\right)^2}{\left(1+F_{n+1}/F_n\right)^3}}{1+\dfrac{1+2\left(F_{n+1}/F_n\right)^3}{\left(1+F_{n+1}/F_n\right)^3}}.$$

Definiendo, $\Phi(n)\equiv\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$, el término general es

$$F(n)=\frac{1-\dfrac{\Phi^2(n)}{\left[1+\Phi(n)\right]^3}}{1+\dfrac{1+2\Phi^3(n)}{\left[1+\Phi(n)\right]^3}}.$$

Así pues,

$$\lim_{x\to\infty}F(n)=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{\Phi^2(n)}{\left[1+\Phi(n)\right]^3}}{1+\dfrac{1+2\Phi^3(n)}{\left[1+\Phi(n)\right]^3}}=\frac{1-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\Phi^2(n)}{\left[1+\Phi(n)\right]^3}}{1+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2\Phi^3(n)}{\left[1+\Phi(n)\right]^3}}=\frac{1-\dfrac{\left[\lim\limits_{x\to\infty}\Phi(n)\right]^2}{\left[1+\lim\limits_{x\to\infty}\Phi(n)\right]^3}}{1+\dfrac{1+2\lim\limits_{x\to\infty}\left[\Phi(n)\right]^3}{\left[1+\lim\limits_{x\to\infty}\Phi(n)\right]^3}}.$$

Ahora bien, entre la pléyade de interesantes propiedades de la *sucesión de Fibonacci*, destaca la del famoso límite que establece una sorprendente vinculación entre el cociente de dos términos consecutivos de la *sucesión de Fibonacci* y el *número áureo*,

$$\lim_{x\to\infty} \Phi(n) = \Phi \ \text{(número áureo), donde } \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Esta relación asintótica fue probada por Barr y Schooling en "*The Field*" (14 de diciembre de 1912).

Por tanto,

$$\lim_{x\to\infty} F(n) = \frac{1-\dfrac{\Phi^2}{(1+\Phi)^3}}{1+\dfrac{1+2\Phi^3}{(1+\Phi)^3}} = \frac{(1+\Phi)^3-\Phi^2}{(1+\Phi)^3+2\Phi^3+1}.$$

Sustituyendo Φ por su valor y simplificando, se llega fácilmente al siguiente resultado:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} F(n) = \frac{\sqrt{5}}{4}}$$

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita: