PMO33.2. Problema del Duelo Matemático 08 (Olomouc, Chorzow, Graz).

Article · January 2009

1 author:

Jesús Álvarez Lobo
Profesores de Enseñanza Secundaria

PMO33.2. Problema del Duelo Matemático 08 (Olomouc, Chorzow, Graz).

Determinar todas las ternas (x, y, z) de enteros positivos que verifiquen la igualdad

$$3 + x + y + z = xyz.$$

Solución de Jesús Álvarez Lobo. Oviedo. Asturias. España.

Denotemos una solución genérica de esta ecuación diofántica como $(x, y, z) \in \left(\mathbb{Z}^+\right)^3$.

Probemos primero que ninguna de estas ternas puede tener un par de componentes iguales. A tal fin, supongamos, sin pérdida de generalidad, que (x, y, y) es una solución de la ecuación propuesta. Entonces, ésta será de la forma

$$x + 2y + 3 = xy^2,$$

es decir,

$$x = \frac{2y+3}{y^2-1} \geq 1, \qquad \text{..............................} \text{ ①}$$

y dado que $y \geq 1$, esta inecuación es equivalente a $2y + 3 \geq y^2 - 1$, o bien,

$$y^2 - 2y - 4 \leq 0,$$

cuyo conjunto solución es $y \in \left[1,\ 1+\sqrt{5}\right] \cap \mathbb{Z}$, y puesto que $y \in \left[1,\ 1+\sqrt{5}\right] \subset [1,\ 4)$, el conjunto factible para y estará incluido en

$$y \in \{1, 2, 3\}. \qquad \text{..............................} \text{ ②}$$

Sustituyendo en ① los valores de $y = z$ dados por la ②, se tiene:

$$\boxed{x = \frac{2y+3}{y^2-1}} \begin{cases} y = z = 1 \Rightarrow x = \dfrac{5}{0} \notin \mathbb{Z}^+ \\ y = z = 2 \Rightarrow x = \dfrac{7}{3} \notin \mathbb{Z}^+ \\ y = z = 4 \Rightarrow x = \dfrac{9}{8} \notin \mathbb{Z}^+ \end{cases}$$

Es decir, la hipótesis de que dos componentes de una solución son iguales conduce a la contradicción de que una componente no es entera, por lo que no existe tal solución. En consecuencia, las tres componentes de las ternas solución necesariamente toman valores distintos.

Consideremos ahora una solución particular $(\lambda, \mu, \nu) \in \left(\mathbb{Z}^+\right)^3 \,|\, \lambda < \mu < \nu$, condición que, evidentemente, no supone pérdida de generalidad. Entonces,

$$\nu = \frac{\lambda + \mu + 3}{\lambda\mu - 1} \geq 3, \qquad \text{..............................} \text{ ③}$$

y dado que $\lambda\mu - 1 > 0$, esta inecuación es equivalente a $\lambda + \mu + 3 \geq 3\lambda\mu - 3$, de donde

$$2 \leq \mu \leq \frac{\lambda+6}{3\lambda-1}, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{④}$$

ya $1 \leq \lambda < \mu \in \mathbb{Z}^+$.

Ahora bien,

$$2 \leq \mu \leq \frac{\lambda+6}{3\lambda-1} \Rightarrow \frac{\lambda+6}{3\lambda-1} \geq 2 \overset{\lambda\geq 1}{\Rightarrow} \lambda+6 \geq 6\lambda-2 \Rightarrow \lambda \leq \frac{8}{5} \Rightarrow \boxed{\lambda = 1}$$

Sustituyendo este valor de λ en la ④, se obtiene la siguiente acotación para μ:

$$2 \leq \mu \leq \frac{7}{2},$$

por lo que el conjunto factible para μ estará incluido en

$$\mu \in \{2, 3\}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{⑤}$$

Sustituyendo en ③ los valores de μ dados por la ⑤, se tiene:

$$\boxed{\nu = \frac{\lambda+\mu+3}{\lambda\mu-1}} \begin{cases} \boxed{\lambda=1}, \boxed{\mu=2} \Rightarrow \boxed{\nu=6} \in \mathbb{Z}^+ \\ \lambda=1,\ \mu=3 \Rightarrow \nu = \frac{7}{2} \notin \mathbb{Z}^+ \end{cases}$$

En definitiva, la única solución posible en $(\mathbb{Z}^+)^3$ de la ecuación $3+x+y+z=xyz$, salvo orden de las componentes, es $(x=1,\ y=2,\ z=6)$.

Trivialmente, por simple permutación (dada la simetría de la expresión), se obtienen otras cinco, resultando en total **seis soluciones**, número de permutaciones de 1, 2, 3:

$$\boxed{S_1 = (x=1,\ y=2,\ z=6)}$$
$$\boxed{S_2 = (x=1,\ y=6,\ z=2)}$$
$$\boxed{S_3 = (x=2,\ y=1,\ z=6)}$$
$$\boxed{S_4 = (x=2,\ y=6,\ z=1)}$$
$$\boxed{S_5 = (x=6,\ y=2,\ z=1)}$$
$$\boxed{S_6 = (x=6,\ y=1,\ z=2)}$$

***Jesús Álvarez Lobo**. Oviedo. Asturias. España.* J3A3L3@gmail.com