Cota superior para el producto del sumatorio de los recíprocos de n números reales mayores o iguales que 1 por el producto de é....

Jesús Álvarez Lobo
Profesores de Enseñanza Secundaria

Problema 103. *Propuesto por José Luis Díaz Barrero. Barcelona. España.* ***Solución de J. Álvarez Lobo.***

Sean $a_1,\ a_2, \ldots\ a_n$ (n ≥ 2) n números reales mayores o iguales que 1. Pruébese que

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)\left(\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)\right)\geq 2n^2.$$

La desigualdad se verifica para *n* = 2. En efecto, sean $x = a_1$, $y = a_2$. Definamos la función

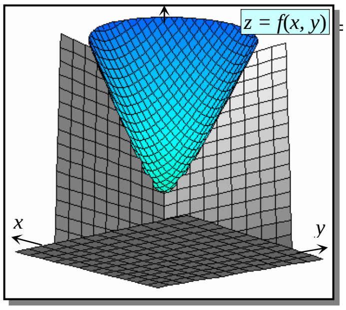
$$f(x,\ y)=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(1+x)(1+y);\ x,\ y\in[1,\to).$$

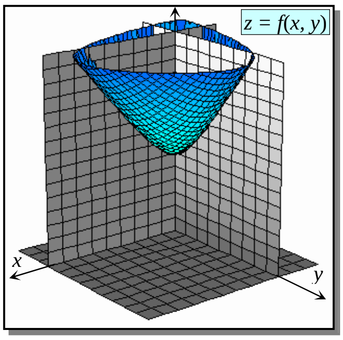
Obviamente,

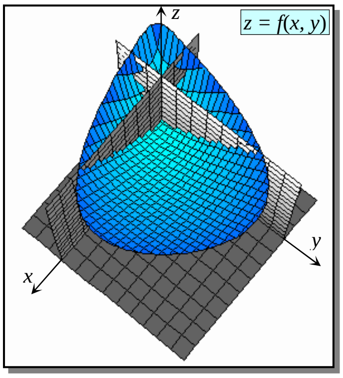
$$f(x,\ y)=\left(\sum_{k=1}^{n=2}\frac{1}{a_k}\right)\left(\prod_{k=1}^{n=2}(1+a_k)\right).$$

Veamos que $f(x,\ y)\geq 2n^2=8.$

Puesto que f es derivable en todo su dominio de definición, los únicos puntos críticos, si existen, son los puntos estacionarios (extremos locales o relativos); utilizaremos el vector gradiente de f para detectar éstos. Se tiene:







$$=\left(\frac{(x^2-y)(y+1)}{x^2y},\ \frac{(y^2-x)(x+1)}{xy^2}\right),$$

luego,

$$\nabla f(x,\ y)=(0,\ 0)\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$$

Además,

$$f_x(1,1)\,f_y(1,1)-f_{xy}^2(1,1)=\frac{2(y+1)}{x^3}\cdot\frac{2(x+1)}{y^3}-\left(-\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}\right)\Bigg|_{x=1,\ y=1}=12>0,$$

por lo que el punto (1, 1) es un mínimo local, que además es un mínimo global (absoluto) pues (1, 1) es un punto frontera, y en ésta es el único punto crítico. En efecto, la frontera de f son las trazas de la superficie $f(x, y)$ sobre los planos $y = 1$ y $x = 1$, es decir las líneas de ecuación

$$f(x,1)=\left(\frac{1}{x}+1\right)(1+x)(1+1)=2\left(x+\frac{1}{x}+2\right);\ x\in[1,\to),$$

$$f(1,\ y)=\left(1+\frac{1}{y}\right)(1+1)(1+y)=2\left(y+\frac{1}{y}+2\right);\ y\in[1,\to),$$

y se tiene:

$$f'(x,1)=2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=0\Leftrightarrow x=1,\ \text{si}\ x\in[1,\to),$$

$$f'(1,\ y)=2\left(1-\frac{1}{y^2}\right)=0\Leftrightarrow y=1,\ \text{si}\ y\in[1,\to).$$

En consecuencia,

$$f(x,\ y)\geq f(1,1)=8=2n^2,\ \text{para}\ n\ =\ 2.$$

Es decir, la desigualdad objeto de demostración se cumple para el primer valor de n para el que ha sido establecida.

Mediante **inducción completa** sobre n probaremos que la desigualdad se verifica para cualquier $n \geq 2$.

Hipótesis de inducción:

$$\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{a_k}\right)\left(\prod_{k=1}^{m}(1+a_k)\right)\geq 2m^2, \forall a_k\in\mathrm{R}: a_k\geq 1.$$

Se ha de probar, utilizando la hipótesis de inducción, que

$$\left(\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{a_k}\right)\left(\prod_{k=1}^{m+1}(1+a_k)\right)\geq 2(m+1)^2.$$

En efecto,

$$\left(\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{a_k}\right)\left(\prod_{k=1}^{m+1}(1+a_k)\right)=\left(\frac{1}{a_{m+1}}+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{a_k}\right)\left((1+a_{m+1})\prod_{k=1}^{m}(1+a_k)\right)=$$

$$=\frac{1+a_{m+1}}{a_{m+1}}\prod_{k=1}^{m}(1+a_k)+(1+a_{m+1})\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{a_k}\right)\left(\prod_{k=1}^{m}(1+a_k)\right)\overset{①}{\geq}$$

$$\geq\prod_{k=1}^{m}(1+a_k)+2\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{a_k}\right)\left(\prod_{k=1}^{m}(1+a_k)\right)\overset{②}{\geq}$$

$$\geq\prod_{k=1}^{m}(1+a_k)+2\cdot 2m^2=2m^2+(2m)m+\prod_{k=1}^{m}(1+a_k)\overset{③}{\geq}$$

$$\geq 2m^2+4m+\prod_{k=1}^{m}(1+a_k)\overset{④}{\geq}$$

$$\geq 2m^2+4m+2=2(m^2+2m+1)=2(m+1)^2.$$

Es decir,

$$\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{a_k}\right)\left(\prod_{k=1}^{m}(1+a_k)\right)\geq 2m^2\Rightarrow\left(\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{a_k}\right)\left(\prod_{k=1}^{m+1}(1+a_k)\right)\geq 2(m+1)^2,$$

y de aquí que

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)\left(\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)\right)\geq 2n^2, \forall n\in\mathrm{N}: n\geq 2, \forall a_k\in\mathrm{R}: a_k\geq 1.$$

Observaciones. En la anterior cadena de desigualdades se ha utilizado:

① $a_{m+1}\geq 1>0\Rightarrow\dfrac{1+a_{m+1}}{a_{m+1}}\geq 1, 1+a_{m+1}\geq 2.$

② $\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{a_k}\right)\left(\prod_{k=1}^{m}(1+a_k)\right)\geq 2m^2$ *(hipótesis de inducción).*

③ $m\geq 2.$

④ $a_k\geq 1\Rightarrow 1+a_k\geq 2, \forall k\in\mathrm{N}: k\geq 2.$

Generalización. La desigualdad propuesta admite la siguiente generalización (demostración análoga):

▣ $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)\left(\prod_{k=1}^{n}(\lambda+a_k)\right)\geq 2\lambda n^2, \forall\lambda, a_k\in\mathrm{R}: \lambda, a_k\geq 1, \forall n\in\mathrm{N}: n\geq 2.$

Formas equivalentes. Por simples cambios de variable en la anterior, se deducen las desigualdades:

▣ $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)\left(\prod_{k=1}^{n}(\lambda-a_k)\right)\leq -2\lambda n^2, \forall\lambda, a_k\in\mathrm{R}: \lambda\geq 1, a_k\leq -1, \forall n\in\mathrm{N}: n\geq 2.$

▣ $\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\prod_{k=1}^{n}\left(\lambda+\frac{1}{a_k}\right)\right)\geq 2\lambda n^2, \forall\lambda, a_k\in\mathrm{R}: \lambda\geq 1, 0<a_k\leq 1, \forall n\in\mathrm{N}: n\geq 2.$

▣ $\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\prod_{k=1}^{n}\left(\lambda-\frac{1}{a_k}\right)\right)\leq -2\lambda n^2, \forall\lambda, a_k\in\mathrm{R}: \lambda\geq 1, -1\leq a_k<0, \forall n\in\mathrm{N}: n\geq 2.$

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI