Lobo's theorem for heronian triangles (Problem proposed by K.R.S. Sastry, Bangalore, India)

Article · September 2005

1 author:

Jesús Álvarez Lobo
Profesores de Enseñanza Secundaria

Problema 100. *Propuesto por K.R.S. Sastry, Bangalore, India.*

Un triángulo se llama *heroniano* si sus lados y área son enteros. Sea n un número natural dado. Demostrar que para $n = 1, 2, 3, \ldots$, existe al menos un triángulo heroniano que cumple la siguiente condición: dos de sus lados son números naturales consecutivos y su área es igual a n veces el perímetro.

Denotemos por H_n el triángulo heroniano que verifica que dos de sus lados son números naturales consecutivos y su área es n veces su perímetro.

Expresando en forma de terna los triángulos, donde las componentes representan las longitudes de los lados, demostraremos que una tal sucesión (H_n) de triángulos admite la siguiente **expresión general**:

$$\boxed{H_n = (4n+1, 4n(2n+1), 4n(2n+1)+1), \forall n \in \mathbb{N}^*}$$

En efecto, obviamente, para cada número natural n, sus lados son enteros, y dos de ellos son consecutivos. Además, como trivialmente se comprueba, H_n es un triangulo rectángulo (*pitagórico*):

$$\{4n(2n+1)+1\}^2 - \{4n(2n+1)\}^2 = \underbrace{\left[\{4n(2n+1)+1\}+\{4n(2n+1)\}\right]}_{8n(2n+1)+1} \cdot \underbrace{\left[\{4n(2n+1)+1\}-\{4n(2n+1)\}\right]}_{1} =$$

$$= 8n(2n+1)+1 = 16n^2+8n+1 = (4n+1)^2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Por tanto, el área de H_n es simplemente el semi-producto de sus dos lados menores (*catetos*).

Veamos cuál es la relación entre el área y el perímetro de H_n. Denotando por A_n y P_n, respectivamente, el área y el perímetro de H_n, se tiene:

$$\frac{A_n}{P_n} = \frac{\dfrac{(4n+1)\cdot 4n(2n+1)}{2}}{\{4n+1\}+\{4n(2n+1)\}+\{4n(2n+1)+1\}} = \frac{(4n+1)\cdot 2n(2n+1)}{8n(2n+1)+2(2n+1)} = \frac{2n(4n+1)(2n+1)}{2(4n+1)(2n+1)} = n, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Para probar la **no unicidad** en la expresión de H_n, veamos el siguiente **contraejemplo**:

Los triángulos $H_3 = (13, 84, 85)$, dado por la expresión general aquí presentada, y el (21, 20, 29), que no es generado por ésta, ambos son heronianos, verifican las condiciones del enunciado y el área de cada uno de ellos es el triple del correspondiente perímetro.

Observación: *La expresión general de H_n se deduce fácilmente de la teoría de las ternas pitagóricas desarrollada en la obra* ***TERNAS PITAGÓRICAS. Teoría de las Contracciones Diofantotriádicas.*** *Jesús Álvarez Lobo. ISBN: 84-8498-212-2. (No venal).*

Veamos una deducción directa para el término general de H_n. Denotando por c_n el cateto impar, se tiene:

$$H_n = (c_n, b_n, b_n+1) \equiv \left\{\begin{array}{l} H_n \ pitagórico \Rightarrow \quad c_n^2 = 2b_n + 1 \\ \quad A_n = nP_n \Rightarrow b_n c_n = 2n(2b_n + 1 + c_n) \end{array}\right\} \Rightarrow b_n c_n = 2n(c_n^2 + c_n) \overset{c_n \neq 0}{\Rightarrow} b_n = 2n(c_n+1)$$

$$\Rightarrow c_n^2 = 2\left[2n(c_n+1)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_n^2 - 4nc_n - (4n+1) = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} c_n = 4n+1 \\ c_n = -1 \notin \mathbb{N}^* \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow b_n = 2n\left[(4n+1)+1\right] \Rightarrow b_n = 4n(2n+1)$$

$$\Rightarrow \boxed{H_n = (4n+1, 4n(2n+1), 4n(2n+1)+1)}$$

ᘓᘐ