Teoria Względności

Kosmologia Relatywistyczna

10

Linki do moich publikacji naukowych i popularnonaukowych, e-booków oraz audycji telewizyjnych i radiowych są dostępne w bazie ORCID pod adresem internetowym:

http://orcid.org/0000-0002-5007-306X

Zbigniew Osiak (Tekst)

TEORIA WZGLĘDNOŚCI
Kosmologia Relatywistyczna

Małgorzata Osiak (Ilustracje)

Portret autora zamieszczony na okładkach przedniej i tylnej
Rafał Pudło

Wydawnictwo: Self Publishing

ISBN: 978-83-272-3798-9

e-mail: zbigniew.osiak@gmail.com

TEORIA WZGLĘDNOŚCI

Kosmologia Relatywistyczna

dr Zbigniew Osiak

Portrety wykonała

Małgorzata Osiak

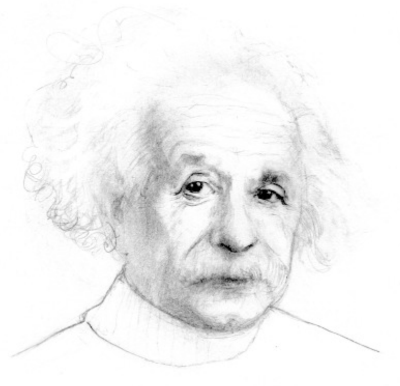
Plan wykładu

Plan wykładu

Równania

Plan wykładu

I powstała OTW



Albert Einstein
(1879-1955)

•25 listopada 1915 na posiedzeniu Królewskiej Pruskiej Akademii Nauk Albert Einstein przedstawił pracę Równania polowe grawitacji.

•Kończyła ona trwający osiem lat etap tworzenia Ogólnej Teorii Względności.

•A. Einstein: *Die Feldgleichungen der Gravitation.*
Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften **2**, 48 (1915) 844-847. *Równania polowe grawitacji*.

- W ramach OTW pole grawitacyjne opisywane jest dziesięcioma wielkościami, będącymi składowymi tensora metrycznego, spełniającymi rolę potencjałów grawitacyjnych.

- Pole grawitacyjne jest wynikiem deformacji czasoprzestrzeni, która zależy od rozkładu gęstości energii wszelakiej postaci. Informacje o źródłach pola grawitacyjnego zawiera tensor energii-pędu.

- Rozwiązanie dziesięciu równań pola Einsteina, przy zadanych dziesięciu składowych tensora energii-pędu, polega na znalezieniu dziesięciu składowych tensora metrycznego spełniających te równania.

Model Einsteina: „materia bez ruchu”

•8 lutego 1917 na posiedzeniu Akademii Einstein zaprezentował pracę Problemy kosmologii i ogólna teoria względności.

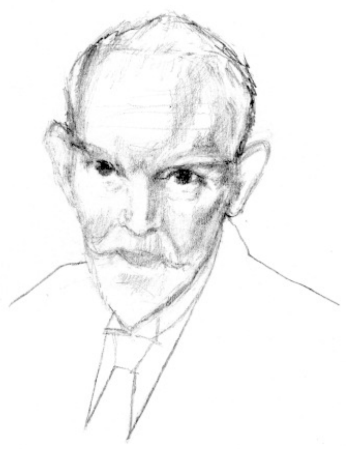
•Przedstawił w niej model Wszechświata statycznego, jednorodnego, skończonego (ale nieograniczonego), o stałej niezależnej od czasu krzywiźnie **przestrzeni**.

•Aby rozwiązać problem warunków granicznych, zaproponował równania pola grawitacyjnego z członem kosmologicznym.

•Model Wszechświata Einsteina pozostawał w zgodzie z ówczesnymi obserwacjami astronomicznymi.

•8 lutego 1917 uważany jest za datę powstania Kosmologii Relatywistycznej.

•A. Einstein: *Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie.*
Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften **1**, 6 (1917) 142-152.
Kosmologiczne rozważania nad ogólną teorią względności.



Willem de Sitter
(1872-1934)

• A już 31 marca 1917 Willem de Sitter na posiedzeniu Królewskiej Akademii Nauk w Amsterdamie przedłożył rozwiązanie opisujące Wszechświat bez materii, traktowany jako **czasoprzestrzeń** o stałej krzywiźnie.

• W. de Sitter: *Over de relativiteit der traagheid: Beschouwingen naar aanleiding van Einstein's laatste hypothese.* Verslag [van de gewone vergaderingen der wis-en natuurkundige afdeeling] der Koninklijke Akademie van Wetenschappen [te Amsterdam] **25**, 9 (31 Maart 1917) 1268-1276. *O względności inercji: uwagi dotyczące ostatnich hipotez Einsteina.*

• W. de Sitter: *Over de kromming der ruimte.* Verslag [van de gewone vergaderingen der wis-en natuurkundige afdeeling] der Koninklijke Akademie van Wetenschappen [te Amsterdam] **26**, 2 (30 Juni 1917) 222-236. *O krzywiźnie przestrzeni.*

Impas

- Impas w nowo powstałej kosmologii relatywistycznej trwał aż pięć lat.

Aleksander A. Friedman
(1888-1925)

•29 czerwca 1922 do redakcji Zeitschrift für Physik wpłynęła praca Friedmana zatytułowana O krzywiźnie przestrzeni.

•Autor rozpatrzył przestrzeń jako sferę o dodatniej krzywiźnie, stałej względem współrzędnych przestrzennych, ale zmieniającej się w czasie.

•Spoczywająca względem układu współrzędnych materia, jednorodnie wypełniająca przestrzeń, potraktowana została jako pył bezciśnieniowy.

•A. A. Friedman: *Über die Krümmung des Raumes.* Zeitschrift für Physik **10**, 6 (1922) 377-386. *O krzywiźnie przestrzeni.*

- Dziesięć równań pola, dzięki tym założeniom, redukuje się do dwóch tzw. równań Friedmana.

- Z analizy równań Friedmana między innymi wynika, że w przypadku znikającej stałej kosmologicznej i gęstości materii we Wszechświecie większej od tzw. gęstości krytycznej, początkowo rozszerzający się Wszechświat, po pewnym czasie zacznie się kurczyć.

•Dwa lata później w 1924 Friedman opublikował pracę O możliwości świata o stałej ujemnej krzywiźnie, w której przestrzeń została potraktowana jako pseudosfera o ujemnej krzywiźnie, stałej względem współrzędnych przestrzennych, ale zmieniającej się w czasie.

•Przypomnijmy, pseudosfera powstaje przez obrót traktrysy względem podstawy i wygląda jak dwie trąbki połączone ich większymi krawędziami.

•W tym przypadku z równań Friedmana wynika, że dla znikającej stałej kosmologicznej i gęstości mniejszej od gęstości krytycznej, Wszechświat nieustannie się rozszerza.

•A. A. Friedmann: *Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes.* Zeitschrift für Physik **21**, 5 (1924) 326-332. *O możliwości świata o stałej ujemnej krzywiźnie.*

- Einstein zbyt impulsywnie zareagował na teorię Friedmana.
- W polemicznej bardzo krótkiej notatce stwierdził (1922) między innymi:
- Wyniki dotyczące niestacjonarnego świata, zawarte w pracy Friedmana, wydają mi się podejrzane. W rzeczywistości okazuje się, że podane w niej rozwiązanie nie spełnia równań pola.

- A. Einstein: *Bemerkung zu der Arbeit von A. Friedman. "Über die Krümmung des Raumes".* Zeitschrift für Physik **11** (1922) 326. *Uwaga do pracy A. Friedmana. „O krzywiźnie przestrzeni".*

Noblista zmienia zdanie

- Kilka miesięcy później twórca OTW, odwołał (1923) swoje błędne poglądy dotyczące teorii Friedmana.

- W poprzedniej uwadze poddałem krytyce pracę Friedmana. Jednakże moja krytyka oparta była na błędzie w obliczeniach. Uważam, że wyniki Friedmanna są prawidłowe i przedstawiają nowy świat.

- W 1931 Einstein wyznał, że bardziej przykrej pomyłki, niż dotyczącej oceny pracy Friedmana, w swoim życiu nie popełnił.

- A. Einstein: *Notiz zu der Bemerkung zu der Arbeit von A. Friedman. "Über die Krümmung des Raumes".* Zeitschrift für Physik **16** (1923) 228. *Notatka o uwadze do pracy A. Friedmana. "O krzywiźnie przestrzeni".*

Prawo Hubble'a

Edwin P. Hubble
(1889-1953)

- W 1929, czyli cztery lata po śmierci Friedmana, Edwin Powell Hubble oznajmił światu o swoim odkryciu:

- Galaktyki oddalają się z prędkością radialną proporcjonalną do ich odległości od obserwatora.

$$z \overset{\text{df}}{=} \frac{\lambda_{\text{observed}}}{\lambda_{\text{emitted}}} - 1 = \text{poczerwienienie}$$

$$z \sim x \quad \text{obserwacje Hubble'a}$$

$$z = \frac{v}{c} \quad \text{nierelatywistyczne prawo Dopplera}$$

$$v = Hx \quad \text{prawo Hubble'a,} \quad H \approx 2{,}27 \cdot 10^{-18}\,\text{s}^{-1}$$

- E. P. Hubble: *A Relation Between Distance and Radial Velocity Among Extra-galactic Nebulae.*
Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America **15** (1929) 168-173.
Związek między odległością i prędkością radialną mgławic pozagalaktycznych.

Ekspansja w przestrzeni czy ekspansja przestrzeni?

•Galaktyki oddalają się z prędkością radialną proporcjonalną do ich odległości od obserwatora.

[czy]

•Rozszerzanie się przestrzeni powoduje, że obserwujemy pozorną ucieczkę galaktyk.

Arno A. Penzias
(1933-)

Robert W. Wilson
(1936-)

•Innym eksperymentalnym potwierdzeniem teorii Friedmana było odkrycie w 1965 przez Penziasa i Wilsona, że:

•Cały Wszechświat wypełniony jest izotropowym promieniowaniem elektromagnetycznym w zakresie mikrofalowym, odpowiadającym temperaturze 3,5 stopni Kelvina, nazwanym promieniowaniem tła.

•W 1978 otrzymali za to obaj Nagrodę Nobla z fizyki.

•A. A. Penzias and R. W. Wilson: *A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 MHz.* Astrophysical Journal **142** (1965) 419-421. *Pomiar nadwyżki temperatury anteny przy 4080 MHz.*

Georges H. J. E. Lemaître
(1894-1966)

- W modelach Friedmana pojawia się początkowa osobliwość, w której objętość wszechświata jest równa zeru, a jego gęstość nieskończoności.
- Pierwszą hipotezę, łączącą tę osobliwość z aktem kreacji wszechświata, wysunął w 1931 Lemaître.

- G. E. Lemaître: *The Begining of the World: from the Point of View of Quantum Theory*. Nature **127**, 3210 (May 9. 1931) 706.
Początek świata: z punktu widzenia teorii kwantowej.

Wielki Wybuch

George Gamow
(1904-1968)

- Istnienie promieniowania tła (reliktowego, szczątkowego), jako pozostałości po Wielkim Wybuchu (początkowym akcie w ekspansji Wszechświata), postulowane było przez wielu uczonych, między innymi w 1948 przez Gamowa.

- Gamow w latach dwudziestych studiował u Friedmana na Uniwersytecie Petersburskim.

- G. Gamow: *The Evolution of the Universe.* Nature **162**, 4122 (October 30, 1948) 680-682. *Ewolucja wszechświata.*

Ralph Asher Alpher
(1921-2007)

Robert C. Herman
(1914-1997)

- Alpher i Herman oszacowali obecną temperaturę mikrofalowego promieniowania tła na około 5 K. Wyniki opublikowali w prestiżowych czasopismach, w 1948 oraz w 1949. Mimo to, przez szesnaście lat nie zostały one zauważone.

- R. A. Alpher and R. C. Herman: *Evolution of the Universe.*
Nature **162**, 4124 (November 13, 1948) 774-775. *Ewolucja wszechświata.*

- R. A. Alpher and R. C. Herman: *Remarks on the Evolution of the Expanding Universe.*
Physical Review **75**, 7 (April 1, 1949) 1089-1095.
Uwagi o ewolucji rozszerzającego się wszechświata.

Ile lat istnieje Wszechświat?

- Wiek Wszechświata w teorii Friedmana można interpretować jako proporcjonalny do odwrotności stałej Hubble'a.

$$k = 0, \quad p = 0, \quad \Lambda = 0, \quad t = \frac{3}{2}\frac{1}{H}, \quad H \approx 2{,}27 \cdot 10^{-18}\,s^{-1}$$

- Wszechświat rozszerza się już od prawie czternastu miliardów lat.

Dlaczego niebo w nocy jest ciemne?

Heinrich W. M. Olbers
(1758-1840)

- Niebo w nocy jest ciemne ponieważ wiek Wszechświata, jak to wynika z teorii Friedmana, jest skończony i światło z odległych gwiazd jeszcze nie zdążyło dotrzeć do nas, a ponadto jego widmo jest przesunięte ku czerwieni.

- W czasach kiedy żył Olbers (1758-1840) uważano, że Wszechświat jest statyczny, jednorodny i nieskończony w czasie i przestrzeni, dlatego uznał on ciemność nieba nocą za paradoks (1826).

- Paradoks ten nazywany jest paradoksem Olbersa lub paradoksem fotometrycznym.

Kosmologiczne rozwiązanie Einsteina jest niestabilne

Sir Arthur Stanley Eddington
(1882-1970)

•Arthur Stanley Eddington w 1930 udowodnił, że kosmologiczne rozwiązanie Einsteina jest niestabilne.

•A. S. Eddington: *On the Instability of Einstein's Spherical World.*
Montly Notices of the Royal Astronomical Society **90** (05/1930) 668-678. *O niestabilności sferycznego świata Einsteina.*

Czy możliwy jest ruch bez materii?

- W 1925 Lemaître i w 1928 Robertson wykazali, że w modelu de Sittera **przestrzeń** ulega ekspansji.
- Dzięki tej własności Wszechświat de Sittera uważany jest jako graniczny przypadek bardziej realistycznych modeli.

- G. E. Lemaître: *Note on de Sitter's Universe.* Journal of Mathematics and Physics (MIT) **4** (1925) 188-192.
Uwaga o Wszechświecie de Sittera.

- H. P. Robertson: *On Relativistic Cosmology.* Philosophical Magazine and Journal of Science **5** (1928) 835-848.
O kosmologii relatywistycznej.

Sukces ma wielu ojców

Aleksander A. Friedman
(1888-1925)

Georges H. J. E. Lemaître
(1894-1966)

Howard P. Robertson
(1903-1961)

Arthur Geoffrey Walker
(1909-2001)

Sukces ma wielu ojców

- W 1927 Lemaître uzyskał wyniki analogiczne jak Friedman w pracy z 1922.
- W 1929 Robertson uogólnił wzory dotyczące metryki czasoprzestrzeni zawarte w obu pracach Friedmana, zapisując je w postaci jednego wyrażenia.
- Podobne wyniki uzyskał również Walker.
- W XXI wiecznych pracach młodych kosmologów spotyka się coraz częściej określenie “metryka FLRW” czyli metryka Friedmana-Lemaître’a-Robertsona-Walkera.

• A. A. Friedman:
Über die Krümmung des Raumes.
Zeitschrift für Physik **10**, 6 (1922) 377-386.
O krzywiźnie przestrzeni.

• A. A. Friedmann:
Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes.
Zeitschrift für Physik **21**, 5 (1924) 326-332.
O możliwości świata o stałej ujemnej krzywiźnie.

• G. E. Lemaître:
Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant, rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extragalactiques.
Annales de la Société Scientifique de Bruxelles A **47** (1927) 29-39.
Jednorodny wszechświat o stałej masie i rosnącym promieniu wyjaśniający prędkość radialną mgławic pozagalaktycznych.
Istnieje angielski przekład.
Abbé G. Lemaître:
A Homogeneous Universe of Constant Mass and Increasing Radius accounting for the Radial Velocity of Extra-galactic Nebulae.
Montly Notices of the Royal Astronomical Society **91** (03/1931) 483-490.

• H. P. Robertson:
On the Foundations of Relativistic Cosmology.
Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America **15** (1929) 822-829.
O podstawach kosmologii relatywistycznej.

• A. G. Walker:
On Milne's theory of world-structure.
Proceedings of London Mathematical Society **42** (1937) 90-127. [Received 18 June, 1936. - Read 18 June, 1936.]
O teorii Milne'a struktury świata.
Strona 121, wzór (90).

Równania kosmologiczne Heckmanna

Otto H. L. Heckmann
(1901-1983)

- Otto Hermann Leopold Heckmann w 1931 uogólnił kosmologiczne równania Friedmana i Lemaître'a. A następnie w 1932 poddał je dokładnej analizie.

- Friedman przyjmował tensor energii-pędu dla pyłu bezciśnieniowego, a Heckmann podobnie jak Lemaître – dla cieczy doskonałej.

- O. Heckmann: *Über die Metrik des sich ausdehnenden Universums.*
Nachrichten [von der Königlich Gesellschaft der Wissenschaften zu] Göttingen [Mathematisch-physikalische Klasse] (1931) 126-130.

- O. Heckmann: *Die Ausdehnung der Welt in ihrer Abhängigkeit von der Zeit.*
Nachrichten [von der Königlich Gesellschaft der Wissenschaften zu] Göttingen [Mathematisch-physikalische Klasse] (1932) 97-106.

Artykuł przeglądowy Robertsona


Howard P. Robertson
(1903-1961)

•Howard Percy Robertson w 1933 dokonał twórczego przeglądu osiągnięć kosmologii relatywistycznej w latach 1917-1932.

•Przypomniał, że Wszechświat Einsteina jest czterowymiarowym cylindrem o promieniu R, zanurzonym w pięciowymiarowej przestrzeni, którego oś pokrywa się z kierunkiem kosmicznego czasu (wszechświat cylindryczny). Wszechświat de Sittera jest czterowymiarową przestrzenią o stałej krzywiźnie (wszechświat sferyczny).

•H. P. Robertson: *Relativistic Cosmology.* Reviews of Modern Physics **5** (January, 1933) 62-90. *Kosmologia relatywistyczna.*

Odmłodzony Newton

Sir William Hunter McCrea
(1904 -1999)

Edward Arthur Milne
(1896-1950)

- W 1934 William Hunter McCrea i Edward Arthur Milne wyprowadzili w ramach teorii Newtona równania Friedmana, interpretując w nich inaczej krzywiznę przestrzeni.

- W 1933 Milne sformułował zasadę kosmologiczną:
Własności Wszechświata nie zależą od położenia obserwatora i od czasu dokonywania obserwacji.

- W. H. McCrea and E. A. Milne: *Newtonian Universes and the Curvature of Space.* Quarterly Journal of Mathematics **5** (1934) 73-80.
Newtonowskie Wszechświaty i krzywizna przestrzeni.

Czy stała grawitacyjna jest stała?


Paul A. M. Dirac
(1902-1984)

- W 1937 Paul Adrien Maurice Dirac sformułował hipotezę, że uniwersalne stałe fizyczne są funkcjami czasu. W szczególności stała grawitacyjna maleje odwrotnie proporcjonalnie do wieku Wszechświata, co pozwala zrozumieć jego ekspansję.

- P. A. M. Dirac: *The Cosmological Constants.* Nature **139** (1937) 323.

Teoria Stanu Stacjonarnego

Herman Bondi
(1919-2005)

Thomas Gold
(1920-2004)

- W 1948 Herman Bondi i Thomas Gold zaproponowali model stanu stacjonarnego Wszechświata, oparty o dwa założenia:

- Własności Wszechświata nie zależą od położenia obserwatora i od czasu dokonywania obserwacji (zasada kosmologiczna).

- We Wszechświecie zachodzi ciągła kreacja materii.

- K. Bondi and T. Gold: *The Steady-State Theory of the Expanding Universe.* Montly Notices of the Royal Astronomical Society **108** (1948) 252-272.
Teoria stanu stacjonarnego rozszerzającego się Wszechświata.

Fred Hoyle
(1915-2001)

- Inną wersję Teorii Stanu Stacjonarnego, bazującą na modyfikacji równań pola OTW, przedstawił również w 1948 Hoyle.
- Modyfikacja ta polegała na dodaniu C-członu, opisującego kreację materii, aby wytłumaczyć ekspansję.
- Od Hoyle'a pochodzi żartobliwa nazwa **Wielki Wybuch** dla konkurencyjnej teorii.
- Hipotezę stanu stacjonarnego można nazwać teorią ciągle zachodzących Mikro Wybuchów.

- F. Hoyle: *A New Model for Expanding Universe.* Montly Notices of the Royal Astronomical Society **108** (1948) 372-382.
Nowy model rozszerzającego się Wszechświata.

A może Wszechświat wiruje?

Kurt Gödel
(1906-1978)

- W 1949 Kurt Gödel opisał model Wszechświata o stałym promieniu przestrzennym, w którym materia wiruje wokół osi przechodzącej przez środek masy.

- Rozwiązanie Gödela wymieniliśmy jako przykład ilustrujący możliwości OTW, która dopuszcza istnienie różnych wirtualnych modeli Wszechświata.

- Fakt, że żyjemy we Wszechświecie friedmanowskim, wydaje się być jedynie dziełem przypadku.

- K. Gödel: *An Example of a New Type of Cosmological Solutions of Einstein's Field Equations of Gravitaion.* Reviews of Modern Physics **21**, 3 (July, 1949) 447-450. *Przykład nowego typu kosmologicznych rozwiązań równań pola grawitacyjnego Einsteina.*

- K. Gödel: *Rotating Universes in General Relativity Theory.* Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Edited by L. M. Graves et al. Cambridge, Mass. **1** (1952) 175. *Wirujące Wszechświaty w ogólnej teorii względności.*

Klasyfikacja modeli kosmologicznych

Luigi Bianchi
(1856-1928)

Abraham Haskel Taub
(1911-1999)

- Luigi Bianchi w 1898 podał kompletną klasyfikację klas izometrii trójwymiarowych rozmaitości Riemanna, dzieląc je na dziewięć typów, oznaczonych rzymskimi cyframi I-IX.

- Abraham Haskel Taub w 1951 wykorzystał typy Bianchi do klasyfikacji przestrzennie jednorodnych kosmologicznych rozwiązań równań pola grawitacyjnego Einsteina.

- L. Bianchi: *Sugli spazi a tre dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti.* Memorie di Matematica e di Fisica della Societa Italiana delle Scienze **XI** (1898) 267-352.

- A. H. Taub: *Empty Spacetimes Admitting a Three-Parameter Group of Motions.* Annals of Mathematics **53**, 3 (1951) 472-490.

Hermann C. H. Weyl
(1885-1955)

Aleksiej Z. Pietrow
(1910-1972)

- Weyl zdefiniował w 1918 nowy tensor czwartego rzędu, nazywany tensorem krzywizny konforemnej lub tensorem Weyla.

- Pietrow pokazał w 1954, że istnieją trzy i tylko trzy rodzaje pól grawitacyjnych w próżni (trzy typy Pietrowa). Podział ten wynika z własności tensora Weyla.

- Hermann Weyl: *Reine Infinitesimalgeometrie.* Mathematische Zeitschrift **2** (1918) 384-411. [Strona 404]

- А. З. Петров: *Классификация пространств определямых полями тяготения.* Ученые записки Казанского государственного университета **114**, 8 (1954) 55-69.

- А. З. Петров: *Пространства Эйнштейна.* Физматгиз, Москва 1961. [463 strony]

Asymetria barionowa

Andriej D. Sacharow
(1921-1989)

- Andriej Dymitrowicz Sacharow postulował w 1967, że podczas Wielkiego Wybuchu wystąpiła nadwyżka materii nad antymaterią.
- Ta tzw. asymetria barionowa [na każdy miliard antybarionów utworzyło się miliard i jeden barionów] umożliwiła powstanie Wszechświata.
- Inaczej mówiąc, w promieniowaniu reliktowym powinniśmy obserwować miliard fotonów na każdy barion we Wszechświecie.
- W przypadku braku asymetrii barionowej materia i antymateria uległyby anihilacji.

- A. D. Sakharov: *Violation of CP Invariants, C Asymmetry, and Baryon Assymetry of the Universe.* Soviet Physics, "JETP Letters" **5** (1967) 32-35.
Naruszenie CP niezmienniczości, C asymetria i barionowa asymetria Wszechświata.

Problem płaskości

James E. Peebles
(1935-)

Robert H. Dicke
(1916-1997)

- James Edwin Peebles i Robert Henry Dicke w 1979, zwrócili uwagę na “problem płaskości”.
- W sekundę po Wielkim Wybuchu gęstość materii we Wszechświecie powinna być zbliżona z dokładnością do piętnastego miejsca po przecinku do wartości krytycznej, czyli takiej przy której staje się on płaski.
- W przeciwnym przypadku nastąpiłby Wielki Kolaps lub stan rozrzedzenia uniemożliwiający powstanie galaktyk.

- R. H. Dicke and P. J. E. Peebles: *The Big Bang Cosmology - Enigmas and Nostrums.* [in:] *General relativity: An Einstein centenary survey*. Edited by S. W. Hawking and W. Israel. Cambridge University Press 1979. [Strony 504-517].

Kosmologia wielkiego wybuchu - zagadki i panacea (i próba ich rozwiązania).

Problem horyzontu

Charles W. Misner
(1932-   )

- Termiczne promieniowanie tła jest izotropowe, jego długość nie zależy od kierunku obserwacji.
- Aby to było możliwe, różne obszary przestrzeni powinny znajdować się w równowadze termicznej.
- Ale jak mogą oddziaływać ze sobą dwa źródła położone symetrycznie względem nas po przeciwnych stronach na horyzoncie obserwowalnego Wszechświata, skoro w chwili dotarcia do Ziemi światło zdążyło pokonać dopiero połowę odległości między nimi?
- Paradoks ten, nazwany problemem horyzontu, stawiało wielu kosmologów, w tym Charles William Misner.

- C. W. Misner: *Mixmaster Universe*. Physical Review Letters **22** (1969) 1071-1074.

Wszechświat inflacyjny

Alan H. Guth
(1947-)

- W 1981 Alan Harvey Guth zaproponował scenariusz wydarzeń jakie miały miejsce w 10^{-35} sekundy po Wielkim Wybuchu.

- Nastąpił wtedy gwałtowny (inflacyjny) wzrost promienia obserwowalnego Wszechświata.

- Podczas inflacji gęstość zmalała do wartości krytycznej. Ponieważ przed inflacją Wszechświat był niezwykle mały, zdążyła ustalić się w nim równowaga termiczna.

- Dzięki temu obecnie obserwowalny Wszechświat jest prawie płaski, a promieniowanie tła izotropowe.

- A. H. Guth: *Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems.* Physical Review D **23**, 2 (15 January 1981) 347-356. *Wszechświat inflacyjny: Możliwe rozwiązania problemów horyzontu i płaskości.*

•W 1976 NASA powołała trzy zespoły badawcze w celu dokonania pomiarów kosmicznego mikrofalowego promieniowania tła przyrządami umieszczonymi na satelicie COBE. Na czele tych zespołów stanęli George F. Smoot, John C. Mather oraz Michael G. Hauser, odpowiedzialni odpowiednio za:

•Sporządzenie mapy przestrzennego rozkładu temperatury kosmicznego mikrofalowego promieniowania tła.

•Ustalenie czy widmo tego promieniowania jest krzywą charakterystyczną dla promieniowana ciała doskonale czarnego.

•Detekcję promieniowania podczerwonego pochodzącego od wczesnych galaktyk.

•Cosmic Background Explorer został wystrzelony 18 listopada 1989. Wstępne wyniki pomiarów, wykonanych przez aparaturę Badacza Tła Kosmicznego, znane już były dwa miesiące później. Okazało się, że widmo kosmicznego promieniowania tła pokrywa się niemal idealnie z widmem ciała doskonale czarnego o temperaturze 2,735 K z błędem 0,06 K.

•Według innych danych z lat 1991/1992 pochodzących z COBE w naszej galaktyce występuje efekt kwadrupolowy, a w przestrzennym rozkładzie temperatury promieniowania tła istnieją znikome fluktuacje.

Satelita COBE

•Grupa COBE: J. C. Mather i współpracownicy:
A Preliminary Measurements of the Cosmic Microwave Background Spectrum by the Cosmic Background Explorer (COBE) Satellite.
Astrophysical Journal Letters **354** (May 10, 1990) L37-L40.
Wstępne pomiary spektrum kosmicznego mikrofalowego tła uzyskane przez satelitę COBE.

•Grupa COBE: G. F. Smoot i współpracownicy:
First results of the COBE satellite measurement of the anisotropy of the cosmic microwave background radiation.
Advances in Space Research **11**, 2 (1991) 193-205.
Pierwsze wyniki pomiaru anizotropii kosmicznego mikrofalowego promieniowania tła uzyskane przez satelitę COBE.

•Grupa COBE: G. F. Smoot i współpracownicy:
Structure in the COBE differential microwave radiometer first-year maps.
Astrophysical Journal **396**, 1 (Sept. 1, 1992) L1-L5.

Satelita COBE

John C. Mather
(1946-)

George.F. Smoot
(1945-)

Michael G. Hauser
(19??-)

Mather i Smoot otrzymali w 2006 Nagrodę Nobla z fizyki
“za odkrycie, że kosmiczne mikrofalowe promieniowanie tła charakteryzuje się widmem ciała doskonale czarnego oraz anizotropią”.

- W 1998 Saul Perlmutter oraz niezależnie Brian P. Schmidt i Adam G. Riess odkryli gwałtowny wzrost poczerwienienia światła docierającego do Ziemi z bardzo odległych źródeł.

- Ponieważ uczeni ci są zwolennikami Teorii Wielkiego Wybuchu opartej o kosmologiczne rozwiązanie Friedmana, zinterpretowali swoje obserwacje jako gwałtowny wzrost szybkości ekspansji Wszechświata, który nastąpił około 5 mld lat temu.

- Saul Perlmutter et al.: *Discovery of a supernova explosion at half the age of the Universe.* Nature **391** (01 January 1998) 51-54.
- Adam G. Riess et al.: *Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant.* The Astronomical Journal **116**, 3 (09/1998) 1009-1038.

Przyspieszający Wszechświat

Saul Perlmutter
(1959-)

Brian P. Schmidt
(1967-)

Adam G. Riess
(1969-)

Perlmutter, Schmidt i Riess otrzymali w 2011 Nagrodę Nobla z fizyki "za odkrycie przyspieszającej ekspansji Wszechświata na podstawie obserwacji odległych supernowych".

- Teoria Wielkiego Wybuchu bazująca na rozwiązaniu kosmologicznym Friedmana uporała się z paradoksem fotometrycznym Olbersa, obserwacjami i prawem Hubble'a oraz mikrofalowym promieniowaniem tła.

- Rozwiązanie problemów płaskości i horyzontu wymagało zastosowania „protezy intelektualnej" o inflacyjnej fazie kreacji Wszechświata.

- Teoria Wielkiego Wybuchu „poległa" przy próbie interpretacji gwałtownego wzrostu szybkości ekspansji Wszechświata. Ratunek w postaci postulatu o istnieniu ciemnej energii wydaje się być kolejną „protezą intelektualną".

Zasada antropiczna

- Brandon Carter jest autorem zasady antropicznej: Wszechświat powinien mieć takie własności by mogło w nim powstać, trwać i rozwijać się życie.

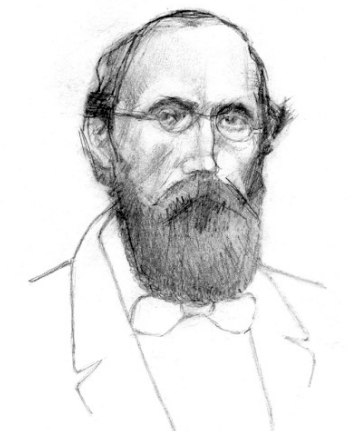
- Jest to bardzo optymistyczna zasada, stanowiąca drogowskaz w badaniach z zakresu kosmologii.

Brandon Carter
(1942-)

- Brandon Carter: *Large Number Coincidences and the Anthropic Principle in Cosmology.* [in:] Confrontation of Cosmological Theories with Observational Data (1973).

Równania

Twórcy rachunku tensorowego



Georg F. B. Riemann
(1826-1866)

Elwin B. Christoffel
(1829-1900)

Gregorio Ricci-Curbastro
(1853-1925)

Luigi Bianchi
(1856-1928)

Élie J. Cartan
(1869-1951)

Tulio Levi-Civita
(1873-1941)

Marcell Grossmann
(1878-1936)

Hermann C. H. Weyl
(1885-1955)

Twórcy rachunku tensorowego

•G. F. Riemann: *Über die Hyphothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.* Wykład habilitacyjny wygłoszony10 czerwca 1854 roku w Getyndze. *O hipotezach, które leżą u podstaw geometrii.*

•B. Riemann: *Über die Hyphothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.* (Mitgetheilt durch R. Dedekind)Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen **13** (1868) 133-152.

•E. B. Christoffel: *Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades.* Journal für die reine und angewandte Mathematik [Crelle's Journal] **70** (1869) 46-70.
O przekształceniach jednorodnych form różniczkowych drugiego stopnia.

•G. Ricii et T. Levi-Civita: *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications.* Mathematische Annalen **54** (1901) 125-201. [Padoue, Décembre 1899.]
Metody absolutnego rachunku różniczkowego i ich zastosowania.

•L. Bianchi: *Sui simboli a quattro indici e sulla curvatura di Riemann.*
Atti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, Rendiconti, **11** (1902) 3-7.
Znajdują się tu słynne tożsamości Bianchi[ego].

•E. J. Cartan: *Sur une généralisation de la notion de courboure de Riemann et les espaces à torsion.* Comptes Rendus [hebdomadaires des séances] de l'Académie des sciences, Paris **174** (1922) 593-595. [Séance du lundi 27 février 1922.]

•A. Einstein, M. Grossmann: *Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation.* Zeitschrift für Mathematik und Physik **62**, 3 (1913) 225-261.
Zarys uogólnionej teorii względności i teorii grawitacji.

•T. Levi-Civita: *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura Riemanniana.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **42** (1917) 173-205. [Adunanza del 24 dicembre 1916.]

•Hermann Weyl: *Reine Infinitesimalgeometrie.* Mathematische Zeitschrift **2** (1918) 384-411. [Strona 404]

$$R_{\mu\nu}=\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}+\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}-\Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha},\quad \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}}+\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}\right)=\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}=g^{\sigma\alpha}\left[{}^{\mu\ \nu}_{\ \alpha}\right],\quad \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}=\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu},\quad \left[{}^{\mu\ \nu}_{\ \alpha}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}}+\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\right)$$

$$\begin{aligned}R_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\Bigg[&\frac{\partial g^{\alpha\sigma}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^{\mu}}+g^{\alpha\sigma}\frac{\partial^{2}g_{\alpha\sigma}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}-\frac{\partial g^{\alpha\sigma}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\sigma}}-g^{\alpha\sigma}\frac{\partial^{2}g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\sigma}\partial x^{\nu}}+\\&-\frac{\partial g^{\alpha\sigma}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}}-g^{\alpha\sigma}\frac{\partial^{2}g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\alpha}}+\frac{\partial g^{\alpha\sigma}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}}+g^{\alpha\sigma}\frac{\partial^{2}g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}\partial x^{\alpha}}\Bigg]+\\&+\frac{1}{4}g^{\beta\sigma}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\alpha}}+\frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\sigma}}\right)g^{\alpha\lambda}\left(\frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^{\nu}}+\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\beta}}-\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\lambda}}\right)+\\&-\frac{1}{4}g^{\beta\sigma}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}}+\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}\right)g^{\alpha\lambda}\left(\frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^{\alpha}}+\frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\beta}}-\frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^{\lambda}}\right)\end{aligned}$$

$$g^{\mu\nu}=g^{-1}\Delta^{\mu\nu},\quad \Delta^{\mu\nu}=(-1)^{\mu+\nu}M^{\mu\nu}$$

•Z.Osiak: *Ogólna Teoria Względności.* ISBN: 978-83-272-3515-2

$$
\begin{aligned}
g^{11} &= g^{-1}\left(g_{22}g_{33}g_{44} + g_{23}g_{24}g_{34} + g_{23}g_{24}g_{34} - g_{24}g_{24}g_{33} - g_{22}g_{34}g_{34} - g_{23}g_{23}g_{44}\right)\\
g^{22} &= g^{-1}\left(g_{11}g_{33}g_{44} + g_{13}g_{14}g_{34} + g_{13}g_{14}g_{34} - g_{14}g_{14}g_{33} - g_{11}g_{34}g_{34} - g_{13}g_{13}g_{44}\right)\\
g^{33} &= g^{-1}\left(g_{11}g_{22}g_{44} + g_{12}g_{14}g_{24} + g_{12}g_{14}g_{24} - g_{14}g_{14}g_{22} - g_{11}g_{24}g_{24} - g_{12}g_{12}g_{44}\right)\\
g^{44} &= g^{-1}\left(g_{11}g_{22}g_{33} + g_{12}g_{13}g_{23} + g_{12}g_{13}g_{23} - g_{13}g_{13}g_{22} - g_{11}g_{13}g_{23} - g_{12}g_{12}g_{33}\right)\\
g^{12} &= g^{-1}\left(g_{14}g_{24}g_{33} + g_{12}g_{34}g_{34} + g_{13}g_{23}g_{44} - g_{12}g_{33}g_{44} + g_{14}g_{23}g_{34} + g_{13}g_{24}g_{34}\right)\\
g^{13} &= g^{-1}\left(g_{12}g_{23}g_{44} + g_{14}g_{22}g_{34} + g_{13}g_{24}g_{24} - g_{14}g_{23}g_{24} - g_{12}g_{24}g_{34} - g_{13}g_{22}g_{44}\right)\\
g^{14} &= g^{-1}\left(g_{14}g_{23}g_{23} + g_{12}g_{24}g_{33} + g_{13}g_{22}g_{34} - g_{12}g_{23}g_{34} - g_{14}g_{22}g_{33} - g_{13}g_{23}g_{24}\right)\\
g^{23} &= g^{-1}\left(g_{11}g_{23}g_{44} + g_{12}g_{14}g_{34} + g_{13}g_{14}g_{24} - g_{11}g_{23}g_{44} - g_{12}g_{14}g_{34} - g_{13}g_{14}g_{24}\right)\\
g^{24} &= g^{-1}\left(g_{11}g_{23}g_{34} + g_{12}g_{14}g_{33} + g_{13}g_{13}g_{24} - g_{13}g_{14}g_{23} - g_{11}g_{24}g_{33} - g_{12}g_{13}g_{34}\right)\\
g^{34} &= g^{-1}\left(g_{13}g_{14}g_{22} + g_{11}g_{23}g_{24} + g_{12}g_{12}g_{34} - g_{11}g_{22}g_{34} - g_{12}g_{14}g_{23} - g_{12}g_{13}g_{24}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g = {} & g_{11}\left(g_{22}g_{33}g_{44} + g_{23}g_{24}g_{34} + g_{23}g_{24}g_{34} - g_{24}g_{24}g_{33} - g_{22}g_{34}g_{34} - g_{23}g_{23}g_{44}\right)+\\
& + g_{12}\left(g_{14}g_{24}g_{33} + g_{12}g_{34}g_{34} + g_{13}g_{23}g_{44} - g_{12}g_{33}g_{44} - g_{14}g_{23}g_{34} - g_{13}g_{24}g_{34}\right)+\\
& + g_{13}\left(g_{12}g_{23}g_{44} + g_{14}g_{22}g_{34} + g_{13}g_{24}g_{24} - g_{14}g_{23}g_{24} - g_{12}g_{24}g_{34} - g_{13}g_{22}g_{44}\right)+\\
& + g_{14}\left(g_{14}g_{23}g_{23} + g_{12}g_{24}g_{33} + g_{13}g_{22}g_{34} - g_{12}g_{23}g_{34} - g_{14}g_{22}g_{33} - g_{13}g_{23}g_{24}\right)
\end{aligned}
$$

$$R_{\mu\nu} = -\kappa\left(T_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right) \quad \text{lub} \quad R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\kappa T_{\mu\nu}$$

$$T \overset{\text{df}}{=} g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}, \qquad R \overset{\text{df}}{=} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$$

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} = 2{,}073 \cdot 10^{-43} \frac{s^2}{kg \cdot m}$$

$$\left(R_{\lambda\mu} - \tfrac{1}{2} g_{\lambda\mu} R\right)_{;\mu} = 0$$

•Z.Osiak: *Ogólna Teoria Względności.* ISBN: 978-83-272-3515-2

- Tensor energii-pędu dla pyłu

$$T_{\alpha\beta} = \left(pc^{-2} + \rho \right) \tilde{v}_{\alpha} \tilde{v}_{\beta} + g_{\alpha\beta} p$$

- Tensor energii-pędu dla cieczy doskonałej

$$T_{\alpha\beta} = \rho \, \tilde{v}_{\alpha} \tilde{v}_{\beta} + g_{\alpha\beta} p$$

$$\tilde{v}_{\alpha} = g_{\alpha\lambda} \tilde{v}^{\lambda}, \quad \tilde{v}^{\lambda} = ic \frac{dx^{\lambda}}{ds}$$

- Z.Osiak: *Ogólna Teoria Względności.* ISBN: 978-83-272-3515-2

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0$$

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

•Z.Osiak: *Ogólna Teoria Względności.* ISBN: 978-83-272-3515-2

$$R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\Lambda = -\kappa\left(T_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right), \quad T \overset{df}{=} g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}$$

$$ds^2 = \left(\delta_{\alpha\beta} + \frac{x^\alpha x^\beta}{a^2 - x^\lambda x^\lambda} \right) dx^\alpha dx^\beta + dx^4 dx^4, \quad (\alpha, \beta, \lambda = 1, 2, 3)$$

$$T_{\mu\nu} = \rho \, \tilde{v}_\mu \tilde{v}_\nu, \quad \tilde{v}_1 = \tilde{v}_2 = \tilde{v}_3 = 0, \quad \tilde{v}_4 = c, \quad x^4 = ict$$

$$\Lambda = \tfrac{1}{2} \kappa \rho c^2 = a^{-2}$$

•Z.Osiak: *Ogólna Teoria Względności.* ISBN: 978-83-272-3515-2

Kosmologiczne rozwiązanie Einsteina we współrzędnych sferycznych

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) + \left(d x^4\right)^2, \quad x^4 = ict$$

•Z.Osiak: *Ogólna Teoria Względności.* ISBN: 978-83-272-3515-2

Interpretacja stałej kosmologicznej

$$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\kappa T_{\mu\nu}$$

$$\Big\downarrow \quad T_{\mu\nu} = \rho\, \tilde{v}_\mu \tilde{v}_\nu + g_{\mu\nu} p$$

$$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu} \kappa p = -\kappa \rho \tilde{v}_\mu \tilde{v}_\nu$$

$$\Big\downarrow \quad \Lambda = -\kappa p > 0, \qquad T^*_{\mu\nu} = \rho\, \tilde{v}_\mu \tilde{v}_\nu$$

$$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R - g_{\mu\nu} \Lambda = -\kappa T^*_{\mu\nu}$$

•Z.Osiak: *Ogólna Teoria Względności.* ISBN: 978-83-272-3515-2

$$R_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = -\kappa\left(T_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right)$$

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \frac{x^{\mu} x^{\nu}}{a^{2} - x^{\alpha} x^{\alpha}} \quad (\mu, \nu, \alpha = 1,2,3,4), \quad x^{4} = ict$$

$$T_{\mu\nu} = 0, \quad (\mu, \nu = 1,2,3,4), \quad T = 0$$

$$\Lambda = \frac{3}{a^{2}}, \quad \rho = 0$$

•Z.Osiak: *Ogólna Teoria Względności.* ISBN: 978-83-272-3515-2

$$R_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2} g_{\alpha\beta} R - g_{\alpha\beta}\Lambda = -\kappa T_{\alpha\beta}$$

$$ds^2 = \left(\frac{L}{1 + \frac{1}{4} kr^2} \right)^2 \left[\left(dx^1\right)^2 + \left(dx^2\right)^2 + \left(dx^3\right)^2 \right] + \left(dx^4\right)^2$$

$$T_{\alpha\beta} = \left(pc^{-2} + \rho \right) \tilde{v}_\alpha \tilde{v}_\beta + g_{\alpha\beta} p$$

$$\tilde{v}_1 = \tilde{v}_2 = \tilde{v}_3 = 0, \quad \tilde{v}_4 = ic$$

•Z.Osiak: *Ogólna Teoria Względności.* ISBN: 978-83-272-3515-2

$$ds^2 = \left(\frac{L}{1+\frac{1}{4}kr^2}\right)^2 \left[\left(dx^1\right)^2 + \left(dx^2\right)^2 + \left(dx^3\right)^2\right] + \left(dx^4\right)^2$$

$$x^4 = ict$$

$$L = L(t) = \text{bezwymiarowy czynnik skali}$$

$$r^2 = \left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 + \left(x^3\right)^2$$

$$a^2 = \text{kwadrat promienia krzywizny przestrzeni}$$

$$k = \frac{1}{a^2}$$

$$\operatorname{sgn} k = -1,\ 0,\ +1$$

Równania pola przestrzenno-przestrzenne i czasowo-czasowe zapiszemy tak, by pojawiła się w nich stała Hubble'a.

$$\frac{c^2k}{L^2}+\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2+\frac{2}{L}\frac{\partial^2 L}{\partial t^2}-c^2\Lambda=-c^2\kappa p\,,\qquad \frac{c^2k}{L^2}+\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2-\tfrac{1}{3}c^2\Lambda=\tfrac{1}{3}\kappa\rho c^4$$

$$H\overset{\mathrm{df}}{=}\frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial t}$$

H = współczynnik hubble'owskiego rozszerzania się Wszechświata (stała Hubble'a)

$$\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{1}{L}\frac{\partial^2 L}{\partial t^2}-\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2=\frac{1}{L}\frac{\partial^2 L}{\partial t^2}-H^2\,,\qquad \frac{1}{L}\frac{\partial^2 L}{\partial t^2}=H^2+\frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\boxed{\begin{gathered}2\frac{\partial H}{\partial t}+3H^2=-\frac{c^2k}{L^2}-c^2\kappa p+c^2\Lambda\\[2ex] H^2=\tfrac{1}{3}\kappa\rho c^4-\frac{c^2k}{L^2}+\tfrac{1}{3}c^2\Lambda\end{gathered}}$$

Jeżeli $k=0$, $p=0$, $\Lambda=0$, to $H=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{t}$.

Jeżeli $k=0$, $\Lambda=0$, to $H=c^2\sqrt{\tfrac{1}{3}\kappa\rho}$.

$$H\approx 2{,}27\cdot 10^{-18}\,\mathrm{s}^{-1}$$

•Z.Osiak: *Ogólna Teoria Względności.* ISBN: 978-83-272-3515-2

$$\frac{c^2k}{L^2}+\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2+\frac{2}{L}\frac{\partial^2 L}{\partial t^2}-c^2\Lambda=-c^2\kappa p\,,\qquad \frac{c^2k}{L^2}+\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2-\tfrac{1}{3}c^2\Lambda=\tfrac{1}{3}\kappa\rho c^4$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t^2}+\left[\tfrac{1}{2}\kappa c^2\left(\tfrac{1}{3}\rho c^2+p\right)-\tfrac{1}{3}c^2\Lambda\right]L=0$$

$$L=\overline{L}+\Delta L$$

$$\frac{\partial^2 \Delta L}{\partial t^2}+\left[\tfrac{1}{2}\kappa c^2\left(\tfrac{1}{3}\rho c^2+p\right)-\tfrac{1}{3}c^2\Lambda\right]\Delta L+\left[\tfrac{1}{2}\kappa c^2\left(\tfrac{1}{3}\rho c^2+p\right)-\tfrac{1}{3}c^2\Lambda\right]\overline{L}=0$$

$$a=\left[\tfrac{1}{2}\kappa c^2\left(\tfrac{1}{3}\rho c^2+p\right)-\tfrac{1}{3}c^2\Lambda\right]\,,\qquad b=\left[\tfrac{1}{2}\kappa c^2\left(\tfrac{1}{3}\rho c^2+p\right)-\tfrac{1}{3}c^2\Lambda\right]\overline{L}=a\overline{L}$$

$$\frac{\partial^2 \Delta L}{\partial t^2}+a\,\Delta L+b=0$$

Prawa zachowania pędu i energii

Prawa zachowania opisane są przez znikanie dywergencji tensora energii-pędu.

$$T_{\alpha\beta;\beta} = \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} T_{\mu\beta} - \Gamma^{\mu}_{\beta\beta} T_{\alpha\mu} = 0$$

$$T_{\alpha\beta} = \left(pc^{-2} + \rho\right) \tilde{v}_{\alpha} \tilde{v}_{\beta} + g_{\alpha\beta} p$$

$$\tilde{v}^{1} = \tilde{v}^{2} = \tilde{v}^{3} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial x^{1}} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x^{2}} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x^{3}} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3\left(\rho + \frac{p}{c^{2}}\right)\frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial L^{3}}{\partial t} = 3L^{2}\frac{\partial L}{\partial t}, \quad \frac{\partial\left(\rho L^{3}\right)}{\partial t} = 3\rho\rho^{2}\frac{\partial L}{\partial t} + L^{3}\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\frac{\partial\left(\rho L^{3}\right)}{\partial t} + \frac{p}{c^{2}}\frac{\partial L^{3}}{\partial t} = 0$$

•Z.Osiak: *Ogólna Teoria Względności.* ISBN: 978-83-272-3515-2

Przeważa energia związana z materią: $p = 0$

$$\frac{\partial\left(\rho L^3\right)}{\partial t} = 0, \quad \rho = \frac{A}{L^3}, \quad A = \mathrm{const} > 0$$

Przypadek $\operatorname{sgn} k = 0, \quad \Lambda = 0$

$$\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2 = H^2 = \tfrac{1}{3}\kappa\rho c^4 \quad \text{lub} \quad \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2 = \frac{\frac{1}{3}\kappa A c^4}{L}, \quad \rho = \rho_c = \frac{3H^2}{\kappa c^4}$$

$$L\uparrow, \quad \frac{\partial L}{\partial t}\downarrow$$

L zwiększa się z malejącą szybkością.

Przypadek $\operatorname{sgn} k = -1, \quad \Lambda = 0$

$$\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2 = H^2 = \tfrac{1}{3}\kappa\rho c^4 + \frac{c^2}{\left|a^2\right| L^2} \quad \text{lub} \quad \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2 = \frac{\frac{1}{3}\kappa A c^4}{L} + \frac{c^2}{\left|a^2\right|}, \quad \rho < \rho_c = \frac{3H^2}{\kappa c^4}$$

$$L\uparrow, \quad \frac{\partial L}{\partial t}\downarrow$$

L zwiększa się z malejącą szybkością.

Przypadek $\operatorname{sgn} k = +1, \quad \Lambda = 0$

$$\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2 = H^2 = \tfrac{1}{3}\kappa\rho c^4 - \frac{c^2}{a^2 L^2} \quad \text{lub} \quad \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2 = \frac{\frac{1}{3}\kappa A c^4}{L} - \frac{c^2}{a^2}, \quad \rho > \rho_c = \frac{3H^2}{\kappa c^4}$$

Po pewnym czasie czynnik L przestaje się zwiększać i zaczyna się zmniejszać.

Przeważa energia związana z promieniowaniem: $p = \frac{1}{3}\rho c^2$.

$$\frac{\partial\left(\rho L^3\right)}{\partial t} + \frac{1}{3}\rho\frac{\partial L^3}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial\left(\rho L^4\right)}{\partial t} = L\frac{\partial\left(\rho L^3\right)}{\partial t} + \frac{1}{3}\rho L\frac{\partial L^3}{\partial t}$$

$$\frac{\partial\left(\rho L^4\right)}{\partial t} = 0\,, \quad \rho = \frac{B}{L^4}, \quad B = \mathrm{const} > 0$$

Przypadek $\mathrm{sgn}\, k = 0, \quad \Lambda = 0$

$$\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2 = H^2 = \frac{1}{3}\kappa\rho c^4 \quad \text{lub} \quad \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2 = \frac{\frac{1}{3}\kappa B c^4}{L^2}, \quad \rho = \rho_c = \frac{3H^2}{\kappa c^4}$$

$$L\uparrow, \quad \frac{\partial L}{\partial t}\downarrow$$

L zwiększa się z malejącą szybkością.

Przypadek $\mathrm{sgn}\, k = -1, \quad \Lambda = 0$

$$\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2 = H^2 = \frac{1}{3}\kappa\rho c^4 + \frac{c^2}{|a^2|L^2} \quad \text{lub} \quad \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2 = \frac{\frac{1}{3}\kappa B c^4}{L^2} + \frac{c^2}{|a^2|}, \quad \rho < \rho_c = \frac{3H^2}{\kappa c^4}$$

$$L\uparrow, \quad \frac{\partial L}{\partial t}\downarrow$$

L zwiększa się z malejącą szybkością.

Przypadek $\mathrm{sgn}\, k = +1, \quad \Lambda = 0$

$$\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2 = H^2 = \frac{1}{3}\kappa\rho c^4 - \frac{c^2}{a^2L^2} \quad \text{lub} \quad \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2 = \frac{\frac{1}{3}\kappa B c^4}{L^2} - \frac{c^2}{a^2}, \quad \rho > \rho_c = \frac{3H^2}{\kappa c^4}$$

Po pewnym czasie czynnik L przestaje się zwiększać i zaczyna się zmniejszać.

•Z.Osiak: *Ogólna Teoria Względności.* ISBN: 978-83-272-3515-2

$$\hat{v}^{\alpha} \stackrel{df}{=} ic\frac{d\hat{x}^{\alpha}}{ds}$$

$$\hat{x}^{\alpha} = \int_{0}^{x^{\alpha}} BL dx^{\alpha}, \quad (\alpha = 1,2,3), \quad \hat{x}^{4} = x^{4}$$

$$\hat{v}^{\alpha} = ic\int_{0}^{x^{\alpha}} \frac{dBL}{ds} d\,x^{\alpha}, \quad (\alpha = 1,2,3)$$

$$v^{\alpha} = ic\frac{dx^{\alpha}}{ds} \stackrel{zał}{=} 0, \quad \frac{dx^{\alpha}}{ds} = 0, \quad (\alpha = 1,2,3), \quad \frac{dx^{4}}{ds} = 1$$

$$\frac{dBL}{ds} = \frac{\partial BL}{\partial t}\frac{dt}{ds} + \frac{\partial BL}{\partial x^{1}}\frac{dx^{1}}{ds} + \frac{\partial BL}{\partial x^{2}}\frac{dx^{2}}{ds} + \frac{\partial BL}{\partial x^{3}}\frac{dx^{3}}{ds} = \frac{\partial BL}{\partial t}\frac{1}{ic}\frac{dx^{4}}{ds} = \frac{1}{ic}B\frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\hat{v}^{\alpha} = \frac{\partial L}{\partial t}\int_{0}^{x^{\alpha}} B dx^{\alpha} = \frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial t}\int_{0}^{x^{\alpha}} BL dx^{\alpha}$$

$$H \stackrel{df}{=} \frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial t} = \text{stała (parametr) Hubble'a}, \quad \hat{x}^{\alpha} = \int_{0}^{x^{\alpha}} BL dx^{\alpha}, \quad (\alpha = 1,2,3)$$

$$\boxed{v^{\alpha} = H\,x^{\alpha}} \qquad H \approx 2{,}27 \cdot 10^{-18} s^{-1}$$

$$z \overset{df}{=} \frac{\lambda_o}{\lambda_e} - 1$$

$$\lambda_o = \lambda_e \left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

$$z = \frac{v}{c}$$

$$z \overset{df}{=} \frac{\lambda_o}{\lambda_e} - 1$$

$$\lambda_o = \lambda_e \frac{1 + \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$z = \frac{1 + \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1$$

•Z.Osiak: *Ogólna Teoria Względności.* ISBN: 978-83-272-3515-2

$$z \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\lambda_o}{\lambda_e} - 1$$

$$\lambda_o = L_o \lambda$$

$$\lambda_e = L_e \lambda$$

$$z = \frac{L_o}{L_e} - 1$$

•Z.Osiak: *Ogólna Teoria Względności.* ISBN: 978-83-272-3515-2

$$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} \overline{R} - g_{\mu\nu}\Lambda = -\kappa T_{\mu\nu}$$

$$ds^2 = -\left(dx^1\right)^2 + \tfrac{1}{2} e^{2bx^1} \left(dx^2\right)^2 - \left(dx^3\right)^2 + 2e^{bx^1} dx^2 dx^4 + \left(dx^4\right)^2$$

$$ds^2 \geq 0, \quad x^4 = ct, \quad b = \frac{1}{R}, \quad T_{\mu\nu} = \rho v_\mu v_\nu$$

$$\left(v^1, v^2, v^3, v^4\right) = \left(0,0,0,c\right), \quad \left(v_1, v_2, v_3, v_4\right) = \left(0, ce^{bx^1}, 0, c\right)$$

$$R = \frac{1}{c\sqrt{\kappa\rho}}, \quad \Lambda = \frac{1}{2R^2}$$

•Z.Osiak: *Ogólna Teoria Względności.*
ISBN: 978-83-272-3515-2

Kosmologiczne rozwiązanie Gödela we współrzędnych cylindrycznych

$$ds^2 = -\left(\cos^2\varphi - \tfrac{1}{2}e^{2br\cos\varphi}\sin^2\varphi\right)dr^2 - r^2\left(\sin^2\varphi - \tfrac{1}{2}e^{2br\cos\varphi}\cos^2\varphi\right)d\varphi^2 - \left(dx^3\right)^2 + \left(dx^4\right)^2 +$$
$$+ 2r\sin\varphi\cos\varphi\left(1 + \tfrac{1}{2}e^{2br\cos\varphi}\right)drd\varphi + 2e^{br\cos\varphi}\sin\varphi\, drdx^4 + 2re^{br\cos\varphi}\cos\varphi\, d\varphi dx^4$$

Dla $\varphi = 0$ oraz $\varphi = 2\pi$

$$ds^2 = -dr^2 + \tfrac{1}{2}r^2e^{2br}\,d\varphi^2 - \left(dx^3\right)^2 + \left(dx^4\right)^2 + 2re^{br}\,d\varphi dx^4 .$$

Po pełnym obrocie układu współrzędnych, przy ustalonym r, metryka nie zmienia się.

Uwzględniając, że

$$T = \frac{2\pi R}{c} \quad \text{oraz} \quad R = \frac{1}{c^2\sqrt{\kappa\rho}},$$

dla okresu obrotu Wszechświata otrzymujemy

$$T = \frac{2\pi}{c^2\sqrt{\kappa\rho}} \approx 1{,}5\cdot 10^5[\mathrm{m}^{-\frac{3}{2}}\cdot \mathrm{s}\cdot \mathrm{kg}^{\frac{1}{2}}]\frac{1}{\sqrt{\rho}} .$$

•Z.Osiak: *Ogólna Teoria Względności.*
ISBN: 978-83-272-3515-2

$$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} R g_{\mu\nu} + C_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}$$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \left(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta^2 d\varphi^2\right) e^{\frac{2ct}{a}}$$

$$\left(R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} R g_{\mu\nu}\right)_{;\nu} = 0, \quad -\kappa T_{\mu\nu;\nu} = C_{\mu\nu;\nu} \neq 0$$

- Wszechświat stale się rozszerza, ponieważ wszędzie w nim kreowana jest materia.

$$R_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = -\kappa T_{\alpha\beta}, \quad \kappa = 8\pi G c^{-4} = 2{,}073 \cdot 10^{-43} \, s^2 kg^{-1} m^{-1}$$

$$ds^2 = L^2 \left[\left(dx^1\right)^2 + \left(dx^2\right)^2 + \left(dx^3\right)^2 + \left(dx^4\right)^2 \right]$$

$x^4 = ict, \quad L = L(t)$ = bezwymiarowy czynnik skali

$$T_{\alpha\beta} = \left(pc^{-2} + \rho\right) \tilde{v}_\alpha \tilde{v}_\beta + g_{\alpha\beta} p = \left(pc^{-2} + \rho\right) g_{\mu\alpha} g_{\beta\nu} \tilde{v}^\mu \tilde{v}^\nu + g_{\alpha\beta} p$$

$$T_{\bullet\bullet} = \mathrm{diag}\left(L^2 p, L^2 p, L^2 p, T_{44} \right), \quad T_{44} = -L^2 \rho c^2$$

- Czynnik skali Wszechświata rośnie w czasie liniowo, gdy $p = \tfrac{1}{3}\rho c^2$ i kwadratowo, gdy $p = 0$.

•Z.Osiak: *Ogólna Teoria Względności.* ISBN: 978-83-272-3515-2

Konforemna zmiana metryki polega na przejściu w każdym punkcie przestrzeni od metryki
$g_{\alpha\beta}$ do metryki $\bar{g}_{\alpha\beta} = e^{2\sigma} g_{\alpha\beta}$, $\sigma = \sigma(x^1, x^2, x^3, x^4)$. Przy czym $d\bar{s}^2 = \bar{g}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = e^{2\sigma} g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = e^{2\sigma} ds^2$, $e^{2\sigma} > 0$,

TWIERDZENIE

Jeżeli przestrzeń Riemanna ma stałą krzywiznę K, to tensor Weyla $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ tej przestrzeni jest tożsamościowo równy zeru.

DOWÓD

$$C_{\alpha\beta\mu\nu} \overset{df}{=} R_{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{1}{n-2}\left(g_{\alpha\mu} R_{\beta\nu} + g_{\beta\nu} R_{\alpha\mu} - g_{\alpha\nu} R_{\beta\mu} - g_{\beta\mu} R_{\alpha\nu}\right) + \frac{g^{\kappa\lambda} R_{\kappa\lambda}}{(n-1)(n-2)}\left(g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu} - g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu}\right)$$

$$n = 4$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = K\left(g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu}\right)$$

$$R_{\beta\nu} = g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\nu\mu} = -g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\mu\nu} = -3K g_{\beta\nu}$$

$$R_{\alpha\mu} = g^{\beta\nu} R_{\beta\alpha\mu\nu} = -g^{\beta\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu} = -3K g_{\alpha\mu}$$

$$R_{\beta\mu} = g^{\alpha\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu} = -3K g_{\beta\mu}$$

$$R_{\alpha\nu} = g^{\beta\mu} R_{\beta\alpha\nu\mu} = g^{\beta\mu} R_{\alpha\beta\mu\nu} = -3K g_{\alpha\nu}$$

$$R = g^{\kappa\lambda} R_{\kappa\lambda} = -3K g_{\kappa\lambda} g^{\kappa\lambda} = -12K$$

$$C_{\alpha\beta\mu\nu} = K\left(g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu}\right) + \frac{3}{2} K\left(-2 g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} + 2 g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu}\right) - 2K\left(g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu} - g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu}\right) = 0$$

TWIERDZENIE

Tensor $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ można konforemnie przekształcić w tensor $\bar{R}_{\alpha\beta\mu\nu}$, którego wszystkie składowe są równe zeru wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie składowe **tensora Weyla** $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ są równe zeru.

Przestrzenie Einsteina

- Przestrzeniami Einsteina, oznaczanymi przez G_n , nazywamy n-wymiarowe rozmaitości Riemanna (n > 2), o dowolnej sygnaturze metryki, spełniające warunek

$$R_{\alpha\beta} = \kappa g_{\alpha\beta},$$

gdzie κ jest stałą wielkością (może być zerem).

- Każda przestrzeń Riemanna o stałej krzywiźnie jest przestrzenią Einsteina.

- Przykładem przestrzeni Einsteina jest przestrzeń de Sittera.

• А. З. Петров: *Пространства Эйнштейна.* Физматгиз, Москва 1961. [463 strony]

Teoria Względności

Kosmologia Relatywistyczna

10