KVANTUMGRAVITÁCIÓ
A TITIUS-BODE SZABÁLY

Sarkadi Dezső

2013. március 17.

A mai fizikában fokozott érdeklődés mutatkozik a gravitáció feltételezett kvantumos tulajdonságának elméleti megalapozására és kísérleti igazolására. A kutatások végső célja egy véglegesnek tekinthető, általánosan elfogadott kvantumgravitációs elmélet megteremtése. A jelen munkában a kétszázötven éves múltra visszatekintő *Titius-Bode* szabályt vizsgáljuk meg, azt feltételezve, hogy ez a tapasztalati tény a gravitáció kvantumos tulajdonságának egy kulcsfontosságú bizonyítéka.

Kulcsszavak: *Titius-Bode* szabály, *Bohr-Sommerfeld* kvantálás, *de Broglie* anyaghullám, kvantumgravitáció.

1. Bevezetés

Napjainkban fokozott érdeklődés tapasztalható a gravitáció kvantumos tulajdonságának kimutatása iránt, mind elméleti, mind kísérleti területen. A jelenleg favorizált Standard Modell, mely az alapvető fizikai kölcsönhatásokat önti egységes elméleti keretbe, egyedül a gravitációs kölcsönhatást nem tartalmazza. A probléma gyökerét az a tény jelenti, hogy a gravitáció legfejlettebb elmélete, az einsteini általános relativitáselmélet sem szemléletében, sem matematikai megfogalmazásában nem kapcsolható össze a mai fizika csúcspontját jelentő kvantummechanikával.

Az utóbbi évtizedek legismertebb próbálkozásai a négydimenziós (relativisztikus) téridő dimenziószámának növelésével kapcsolatosak, melynek célja a gravitáció és a többi alapvető kölcsönhatás egységes elméleti leírása. Ezek a különböző *húrelméletek*, illetve *membránelméletek*, melyek igencsak komplikált matematikai eszközöket használnak, ráadásul kísérleti alátámasztásuk is reménytelennek tűnnek, mivel feltételezett hatásaik túl kicsi téridő tartományokra korlátozódnak. Egyszerűbb elméleti megfontolások szerint a gravitációs tér kvantuma, ha egyáltalán létezik ilyen, egy kettes spinű, tömegnélküli „graviton" nevű részecske lenne, a foton analógiájára. A graviton közvetlen kimutatására vonatkozó kísérletek azonban ez idáig sikertelenek maradtak, valószínűleg annak elméletileg megbecsült, rendkívül kicsiny energiája miatt.

Úgy tűnik, az eddig bevetett kvantummechanikai, illetve kvantum-térelméleti módszerek ez idáig nem vezettek átütő sikerre, az eltelt hosszú idejű próbálkozások sikertelensége arra ösztönöz bennünket, hogy egészen más fizikai meggondolásokkal közelítsük meg a problémát. Mintegy kétszázötven éve ismeretes a Naprendszer bolygóira megtalált, ún. *Titius-Bode szabály* [1.1, 1.2, 1.3], amely a bolygók Naptól való távolságait közelítőleg *exponenciálisan kvantált* függvénnyel írja le. A bolygók ún. fél-nagytengelyei *csillagászati egységben*:

$$a_n \cong 0.4 + 0.3 \cdot 2^n;\ (n = -\infty, 0, 1, 2, \ldots). \tag{1.1}$$

A *Merkur,* a legbelső bolygó esetén az *n* kitevő mínusz végtelen (azaz ebben az esetben a második tag zérus), a többi bolygó esetén nem-negatív egész-számok szerepelnek a képletben. Speciálisan a Föld esetében *n = 1,* mely a Föld keringési sugarára (az ellipszis fél-nagytengelyére) a= *1* egységnyi értéket ad, a csillagászati távolság definíciójának megfelelően.

Az **1. Táblázat** a T-B szabály szerint számított bolygótávolságokat tartalmazza, a számítás relatív hibái százalékban vannak feltüntetve. A T-B szabály *relatív szórása* elég nagy, 33 százalékos, a durva eltérések különösen a külső Neptunusz és a Plútó bolygóknál tapasztalhatók.

1. Táblázat: A Titius-Bode szabály szemléltetése

Planet	Real distance	Calculated distance	Relative error
Mercury	0.39	0.4	2.56%
Venus	0.72	0.7	2.78%
Earth	1	1	0%
Mars	1.52	1.6	5.26%
Ceres	2.77	2.8	1.08%
Jupiter	5.2	5.2	0%
Saturn	9.54	10	4.82%
Uranus	19.2	19.6	2.08%
Neptune	30.06	38.8	29.08%
Pluto	39.44	77.2	95.74%

Az elmúlt évszázadokban és a közelmúlt évtizedeiben számos próbálkozás történt a T-B szabály fizikai hátterének megfejtésére. Zavaró az a tény, miszerint a Naprendszer bolygóinak holdjaira a T-B szabály a maga eredeti formájában csak részben vagy egyáltalán nem teljesül, mindenesetre a közös vonás exponenciális távolságeloszlást tükröz [1.4].

A fizikusok, csillagászok túlnyomó része nem lát semmiféle új fizikai törvényszerűséget a T-B szabályban, ugyanis a Naprendszer az évmilliárdok során kaotikus állapotok, disszipációs folyamatok, sorozatos tömegütközések következtében alakult ki, azaz a döntő szerepet a véletlenek játszották. Ugyanakkor a fizikusok egy része elfogadja, hogy léteznek szabályossági tendenciák, melyeket „pályarezonanciák" néven értelmeznek [1.5]. Ennek lényege, hogy hosszú idő alatt a bolygók közötti gravitációs csatolások következtében a pályasugarak arányaira egyszerű racionális számarányok alakultak ki: 1:2, 2:3, 2:5, stb.

Jelen munka szerzője és néhány fizikus mélyebb fizikai törvényt sejt a T-B szabály hátterében. A dolgozat célja a T-B szabály egy újabb lehetséges fizikai alátámasztása. A T-B szabályt a gravitáció kvantumos tulajdonságával próbáljuk megnyugtató módon értelmezni, amely során új, alapvető felismerésekre jutunk a kvantummechanika makroszkopikus megnyilvánulása tekintetében. Nem zárható ki, hogy az itt bemutatott makroszkopikus kvantálási modell a jövőben egy végleges kvantumgravitációs elmélet kiinduló pontja lehet. Nem mi vagyunk az elsők, akik a gravitációt összekapcsolják a kvantummechanika makroszkopikus megnyilvánulásával [1.6,…,1.10].

2. Az exponenciális közelítés

Számos szerző a szakirodalomban egyetért abban, hogy a bolygótávolságok, illetve a holdtávolságok a Naprendszeren belül matematikai szempontból jó közelítésben exponenciális eloszlást mutatnak [2.1, 2.2, 2.3]. A szerzők többsége azt is elismeri, hogy ez nem lehet a véletlen műve, de az exponenciális távolságeloszlás fizikai okát általában nem keresik. Jelenlegi helyzetben a tapasztalt exponenciális távolságeloszlásokra nincs igazán megnyugtató fizikai elmélet.

A Naprendszerünk évmilliárdok során alakult ki, és azt mindenki elfogadja, hogy ebben a folyamatban döntően a véletlen játszott szerepet. Ugyanakkor ez a hosszú időszak egyben azt is lehetővé tette, hogy a gravitációnak eddig ismeretlen tulajdonsága miatt a bolygókra, a bolygók holdjainak többségére közelítőleg exponenciális távolságeloszlás valósulhatott meg. Kézenfekvő dolog ennek tükrében egy exponenciális függvény illesztése az ismert bolygótávolságokra, ez meg is történt a közelmúltban számos szerzőnél. Mi is elvégeztük a bolygótávolságok exponenciális illesztését:

$$a_n = a_0\alpha^n;\ (n = 1, 2, 3, \ldots 10), \tag{2.1}$$

ahol az *n = 1* érték a legbelső bolygó (a Merkúr) távolságához tartozik. Pontosabban a képlet az ellipszis pályák *fél-nagytengelyeire* lett illesztve, melyeket a jelen munkában röviden bolygótávolságoknak nevezzük. Az illesztést az **1. Táblázatban** feltüntetett tíz bolygóra végeztük el, és a távolságokra csillagászati egységekben számolva a következő eredményt kaptuk:

$$a_0 = 0.2108\ldots;\ \alpha = 1.7078\ldots;\ \sigma = 0.130\ldots = 13\%. \tag{2.2}$$

A bolygótávolságok σ szórása sem túl nagynak, sem túl kicsinek nem mondható, de határozottan jobb, mint az eredeti T-B szabály szerinti számítás szórása. Ha tartjuk magunkat ahhoz, hogy az exponenciális eloszlás nem lehet véletlen, ez a 13 százalékos szórásérték csak megerősíti a meggyőződésünket.

Természetesen megvizsgáltuk annak hatását, hogy némely, a sorból nagyon „kilógó" bolygókat elhagytuk az illesztésből. Példaképpen bemutatunk még két számítási eredményt. Az egyik számításban elhagytuk az Uránusz és Neptunusz bolygókat:

$$a_0 = 0.2211\ldots;\ \alpha = 1.6799\ldots;\ \sigma = 0.099\ldots = 9.9\%. \tag{2.3}$$

A legutolsó számításnál öt bolygót hagytunk el; éspedig a Vénusz, Mars, Szaturnusz, Uránusz, Neptunusz bolygókat. A kapott illesztési eredmény:

$$a_0 = 0.2207\ldots;\ \alpha = 1.6778\ldots;\ \sigma = 0.052\ldots = 5.2\%. \tag{2.4}$$

Az eredmények azt is mutatják, hogy az a_0, illetve az α illesztési konstansok a „hibás" bolygók elhagyásával sem változnak lényegesen, ugyanakkor a pontosság némileg javult. Ezek a vizsgálatok is hozzájárultak azon vélekedésemhez, miszerint a T-B szabály hátterében valóban egy ismeretlen fizikai törvény állhat.

3. A T-B szabály pontosítása

Az előző részben a bolygótávolságokra illesztett exponenciális függvények egyetlen „kvantumszámot" tartalmaztak, ezzel kapcsolatban felmerül az a kérdés, hogy létezhetnek-e olyan két, vagy akár több kvantumszámot tartalmazó távolságfüggvények, melyek lényegesen pontosabb bolygótávolság számításra lennének alkalmasak. A kérdés matematikai oldala azt jelenti, hogy vajon találhatunk-e olyan, két, vagy több kvantumváltozót tartalmazó függvényt, amely képes a bolygótávolságokat lényegesen pontosabban visszaadni, mint az egyszerű T-B szabály, vagy akár az (1.1) exponenciális képlet. A kérdés másik oldala, mely az előzőnél sokkal fontosabb, hogy az esetleg megtalált, több kvantumváltozós függvényhez hogyan kapcsolható valamilyen valóságos, vagy valóságosnak vélt fizikai magyarázat. Több kvantumváltozós bolygótávolság leírásokat találtam az Interneten, melyek többé-kevésbé foglalkoznak a matematikai eredményük fizikai hátterével is [3.1,…,3.4].

A T-B szabály fizikai hátterének vizsgálatával, más fizikai problémák mellett, évek óta foglalkozom. Az utóbbi időben erősebben foglalkoztatott a bolygótávolságok exponenciális eloszlásának problémája, mivel hasonló eredményre jutottam az egyik, még koránt sem lezárt magfizikai elméletemben is [3.5]. Persze, első hallásra furcsának tűnik, hogy mi köze lehet a magfizikának a gravitációhoz köthető T-B szabályhoz. Amint azt azonban a jelen munkában látni fogjuk, nem állhat túl messzire a fizikának ez a két területe Elég csak arra gondolnunk, hogy fontos tudományos értékű tény az, hogy mindkét kölcsönhatás *töltés-független*, legalábbis a mai ismereteink szerint. Ez utóbbi megjegyzés azért is lényeges, mivel sokan a mai napig a gravitációt elektromágneses eredetűnek gondolják. Sajnos minden ilyen elméleti próbálkozás végül hibásnak bizonyult.

Az elmúlt rövid időszakban matematikai szempontból két, meglepően jó matematikai függvényt találtam a bolygótávolságokra. Ezek mindegyike két kvantumszámot tartalmaz, melyeket a hidrogén atom analógiájára *fő-kvantumszámnak (n)*, illetve *perdület kvantumszámnak (j)* neveztem el. A vizsgált példákon keresztül megerősödött bennem az a meggyőződés, hogy a T-B szabály hátterében valóban egy „makroszkopikus kvantummechanika" áll. Az eddig vizsgált, sikeresnek ítélt kvantált távolságfüggvények a következők:

1./ Az első példa mindössze két illesztési paramétert tartalmazó távolságfüggvény:

$$a_n \;\cong\; a_0\left(\alpha^n + \alpha^j\right);\;\left(n = 1,2,\ldots N;\, j = 0,1,\ldots N-1\right). \tag{3.1}$$

Az illesztésnél mind tíz, az **1.-es Táblázatban** feltüntetett távolságadattal számoltunk. Az illesztett paraméterek értékei és a modell relatív szórása:

$$a_0 = 0.143913\ldots;\; \alpha = 1.746846\ldots;\; \sigma = 0.0271\ldots = 2.71\%. \tag{3.2}$$

Hogy a fentieket pontosan értsük, minden egyes bolygó távolságához két kvantumszámot rendelünk, melyek bolygókra specifikusak. Ez a meglepően egyszerű, mindössze két illesztési paramétert tartalmazó függvény lényegesen jobban közelíti a valós bolygótávolságokat, mint a T-B szabály (1.1) formulája. A képletnek egyetlen hibája, hogy *j = 0* esetben nem adja vissza az egy-kvantumszámos exponenciális függvényt, melyet a második fejezetben vizsgáltunk.

2./ A második példa távolságfüggvénye három illesztési paramétert tartalmaz (**2. Táblázat**):

$$a_n \;\cong\; a_0\alpha^n\beta^{-j};\;\left(n = 1,2,\ldots N;\, j = 0,1,\ldots N-1\right). \tag{3.3}$$

Látható, hogy ez a képlet *j = 0* esetben visszaadja az előző fejezetben vizsgált, egy-kvantumszámos exponenciálisfüggvényt. Az illesztés ugyancsak pontos a bolygótávolságokra, a relatív szórás kereken 2.3 százalékos:

$$a_0 = 0.220153\ldots;\; \alpha = 1.813371\ldots;\; \beta = 1.157176\ldots;\; \sigma = 0.0228\ldots = 2.28\%. \tag{3.4}$$

2. Táblázat: A T-B szabály két-kvantumszámos általánosítása

Planet	n	j	Real distance	Calculated distance	Relative error
Mercury	1	0	0.39	0.3992	2.36%
Venus	2	0	0.72	0.7239	0.55%
Earth	3	2	1	0.9804	-1.96%
Mars	4	3	1.52	1.5363	1.07%
Ceres	5	3	2.77	2.7859	0.57%
Jupiter	6	3	5.2	5.0518	-2.85%
Saturn	7	3	9.54	9.1608	-3.97%
Uranus	8	2	19.2	19.2230	0.12%
Neptune	9	3	30.06	30.1236	0.21%
Pluto	10	5	39.44	40.7939	3.43%

Megjegyzés: A távolságfüggvények illesztését Monte-Carlo módszerrel végeztem. A relatív szórás kiszámítására a következő képletet használtam:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{a_n - a'_n}{a_n}\right)^2}. \tag{3.5}$$

A képletben a_n a valós bolygótávolságokat, a'_n a számított távolságokat jelöli, *N = 10* pedig a számításba vett bolygók száma.

4. Az anyag hullámtermészetéről

A jelen munka célja a gravitáció kvantumelméletének egy alternatív megalapozása. A harmadik fejezetben ismertetett bolygótávolság képletek a kvantumszámok tekintetében a hidrogénatom kvantummechanikai modelljére emlékeztetnek. Az a tény, hogy a bolygók két kvantumszámmal jellemezhető, exponenciálisan kvantált pályákat foglalnak el, önmagában véve még semmiféle genetikus kapcsolatot nem jelent a modern fizika kvantummechanikájával. Mindazonáltal megmutatjuk, hogy a közelítőleg exponenciálisan kvantált bolygópályák mégis csak szervesen kapcsolhatók a kvantummechanikához, pontosabban annak egy korábbi verziójához, és pedig a **régi kvantumelmélethez**. A kiinduló pontunk a kvantummechanika megszületése előtt ismert *Bohr-Sommerfeld* (B-S) kvantálási elmélet [4.1, 4.2, 4.3]. A B-S elmélet szerint a zárt fizikai rendszerek kvantálása a következő szabály szerint történik:

$$S = \oint p_i dq_i = n_i h;\; (i = 1,2,3,\ldots;\; n_i = 1,2,3,\ldots), \tag{4.1}$$

ahol *S* egy *hatás dimenziójú* (energia x idő) skalármennyiség (*hatásintegrál*), p_i a részecskék impulzus-komponensei, q_i a részecskék koordinátái, *i* a rendszer szabadsági foka, *h* pedig az elemi hatáskvantum, mely Planck állandó néven ismert. A régi kvantumelmélet feltételezte, hogy a mikrovilágban csak az elemi kvantum néhányszorosa fordulhat elő, aminek következménye a klasszikus mechanikától való jelentős eltérés.

A körintegrál feltételezi, hogy a fizikai rendszer részecskéinek mozgása korlátos tértartományban történik és periodikus, azaz a helykoordináták az idő periodikus függvényei. Az integrálást minden egyes koordináta szerint egy teljes periódusra kell elvégezni. Ugyancsak fontos követelmény, hogy a fizikai rendszer zárt legyen, azaz energiája időben állandó legyen.

A B-S elmélet kezdeti sikerei nagy reményeket tápláltak a kvantumos jelenségek megértésében, sikerült levezetni a *kvantált harmonikus oszcillátor* ismert energiaszintjeit, és talán a legfontosabb eredmény: *Arnold Sommerfeld* (1868-1951) német fizikus relativisztikus képletével sikerült a Bohr-féle atommodellt pontosítani. A „relativisztikus atommodell" bevetésével ugyanis sikerült a hidrogénspektrum finomszerkezetének értelmezése, és amely a napig helytálló eredménynek bizonyult. Ugyanakkor a B-S kvantálás a legnagyobb igyekezet ellenére sem volt alkalmas a két-, illetve többelektronos atomok spektrumának leírására, erre még várni kellett az 1920-as évek közepére, az „igazi" kvantummechanika megszületésére.

Az első nagy áttörést 1925-ben W. Heisenberg korszakalkotó cikke jelentette, amelyben sikerült megtalálni a kvantumjelenségek leírásának működőképes matematikai modelljét. Heisenberg az alapvető fizikai mennyiségekhez (impulzushoz, koordinátához) végtelen dimenziós mátrixokat rendelt, innen az elnevezés: *mátrix-mechanika*. 1926-ban jelent meg E. Schrödinger dolgozata, amely a kvantummechanika hullámegyenletes változatát vezette be (*hullám-mechanika*), melyről már a kezdetben maga Schrödinger kimutatta, hogy az ekvivalens Heisenberg mátrix-mechanikájával. A hullámmechanika alapgondolata *Louis de Broglie* francia fizikustól származott, aki már 1924-ben megalkotta az elektron hullámelméletét, akkoriban még különösebb tudományos visszhang nélkül [4.4]. Ma már a de Broglie-féle anyaghullám fogalom teljesen elfogadott a fizikus társadalomban.

De Broglie anyaghullám ötlete a relativitáselmélet alapján született. Planck legfontosabb eredménye szerint a hőmérsékleti sugárzás kísérletileg ismert törvényei csak az energia kvantumosságával értelmezhetők:

$$E = h\nu \equiv \hbar\omega. \tag{4.2}$$

Itt h továbbra is a Planck állandót jelöli, ν a sugárzás frekvenciája, $\hbar = h/2\pi$ és $\omega = 2\pi\nu$ az ún. *körfrekvencia.*

A relativitáselméletben az energia és a három impulzuskomponens négyes-vektort alkot, ez az ún. *négyes-impulzus vektor:*

$$p_\mu = \left\{E/c, p_x, p_y, p_z\right\}. \tag{4.3}$$

Planck törvénye az E energiához a hőmérsékleti sugárzás (az elektromágneses hullám) ω frekvenciáját rendeli (4.2) szerint, vajon milyen fizikai mennyiségek rendelhetők a fenti képletben szereplő impulzus komponensekhez? A relativitáselméletben az elektromágneses hullámhoz rendelt négyes-vektor az ún. *négyes-hullámszám vektor*, melynek időkomponense éppen a frekvencia:

$$k_\mu = \left\{k_0 = \omega/c,\ k_x = 2\pi/\lambda_x,\ k_y = 2\pi/\lambda_y,\ k_z = 2\pi/\lambda_z\right\}. \tag{4.4}$$

A λx,y,z mennyiségek az elektromágneses hullám térkomponensei (a hullámhossz koordináta-vetületei). Planck törvényének relativisztikus általánosítása a fentiek alapján csak a következő alakú lehet (ez volt de Broglie felismerése):

$$p_\mu = \hbar k_\mu. \tag{4.5}$$

Elektromágneses hullámok esetén a nyugalmi tömeg (a fotonok tömege) zérus, a négyes-impulzus négyzetére ezért a következő egyenlet teljesül:

$$p_\mu p^\mu = \hbar^2 k_\mu k^\mu = 0. \tag{4.6}$$

De Broglie feltételezte, hogy ennek az egyenletnek ugyancsak teljesülni kell a nyugalmi tömeggel rendelkező részecskékre, speciálisan az elektronokra is. A relativitáselmélet szerint a fenti egyenlet nem-zérus nyugalmi tömeg esetén a következőre módosul:

$$p_\mu p^\mu = \hbar^2 k_\mu k^\mu = m^2 c^2. \tag{4.7}$$

Ez esetben ez az egyenlet a tömeghez rendel hullámokat, amelyeket mai elnevezéssel anyaghullámoknak nevezzük. De Broglie-nak ezt a fontos eredményét a tankönyvek többsége a következő, egyszerűsített alakban közli (ez az ún. de Broglie-féle hullámhossz):

$$\lambda = h/p = h/mv, \tag{4.8}$$

ahol p a tömeggel rendelkező részecske impulzusa, m a részecske tömege és v a sebessége. Az egyszerű számítások azt mutatják, hogy makroszkopikus testek esetén a hullámhossz megfigyelhetetlenül rövid. Elektronok esetén viszont sikerült az anyaghullámok kimutatása speciális interferencia kísérlettel [4.5].

5. A „hullámgravitációs" hipotézis

A kvantummechanika elsöprő sikerei elhomályosították a kezdeti kvantummechanika eredményeit, így a Bohr-Sommerfeld (B-S) kvantálási szabály végül megmaradt *fizikatörténeti érdekességnek*. Fontos észrevenni, hogy a B-S kvantálás kezdeti időszakaszában fel sem merült az anyaghullám fogalma, pedig már akkor tudni lehetett, hogy a hidrogénatom ún. megengedett pályáin az elektron állóhullámonként öleli körül a protont. Erről a bevezető tankönyvekben olvashatunk, a részletekbe itt nem megyünk bele. Érthető módon, de Broglie anyaghullám elméletében már nem vették figyelembe a B-S kvantálás elavultnak számító módszerét. Pedig ez igen érdekes eredményre vezet. Használjuk továbbra is a relativisztikus jelöléseket, ekkor az anyaghullámokra felírható, formailag relativisztikus B-S kvantálás a következőt jelenti:

$$S = \oint p_\mu dx^\mu = \hbar \oint k_\mu dx^\mu = \sum_{\mu=0}^{3} n_{(\mu)} = nh;\ (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{5.1}$$

Itt S az anyaghullámhoz rendelt hatásintegrál, mely a képlet szerint a h Planck állandónak (az *elemi hatáskvantumnak*) csak egészszámú többszöröse lehet.

A B-S kvantálásnál az impulzus komponensek kifejezhetők a koordináták függvényeként, kérdés, hogy az anyaghullám *hullámszám vektora* hogyan függ a téridő koordinátáktól. Fontos észrevenni, hogy az (5.1) egyenlet mindkét oldala *hatás dimenziójú* (energia x idő), ezért a körintegrál csak dimenziótlan mennyiség lehet. A hullámszám négyes-vektor legegyszerűbb választása ennek a feltételnek a tükrében csak a következő lehet:

$$k_\mu \Rightarrow 2\pi\left\{1/x_0,\,1/x_1,\,1/x_2,\,1/x_3\right\}, \tag{5.2}$$

ahol a téridő négyes-vektora szokásosan a következőt jelöli:

$$x_\mu = \left\{x_0,\,x_1,\,x_2,\,x_3\right\} = \left\{ct,\,x,\,y,\,z\right\}. \tag{5.3}$$

A fenti definíciók alapján a B-S kvantálási feltétel a következő lesz:

$$S = \hbar\oint k_\mu dx^\mu = h\oint\frac{dx_\mu}{x_\mu} = h\sum_{\mu=0}^{3} n_{(\mu)} = nh;\ (n = 1,2,3,...). \tag{5.4}$$

Meglepő módon a Planck állandó a B-S kvantálási feltételből „kiesik”, azaz nem lehet olyan meghatározó szerepe, mint ahogy azt az atom- és molekulafizikában, a magfizikában, részecskefizikában, stb. már megszoktuk. A B-S kvantálási szabályt makroszkopikus fizikai rendszerek esetében a következő formában fogjuk alkalmazni:

$$S = D_{(\mu)}\oint\frac{dx_\mu}{x_\mu} = C\sum_{\mu=0}^{3} n_{(\mu)} = Cn > 0;\ (n = 1,2,3,...). \tag{5.5}$$

Itt S neve most a *makroszkopikus hatásintegrál*, a $D_{(\mu)}$ dimenzionáló tényező és C hatás dimenziójú állandó, mely utóbbiról csak anynyit követelünk meg, hogy értéke csak pozitív lehet. A szokásos téridő metrikát alkalmazva, ez a feltétel a következő alakba is írható:

$$S = S_T + S_R = D_{(0)}\oint\frac{dx_0}{x_0} - D_{(a)}\sum_{a=1}^{3}\oint\frac{dx_a}{x_a} = Cn > 0;\ \left(n = 1,2,3,...\right). \tag{5.6}$$

Az (5.6) kvantumfeltétel további két kvantumfeltétellel ekvivalens:

$$S_T = D_{(0)}\oint\frac{dx_0}{x_0} = Cn;\ \ \left(n = n_{(0)} = 1,2,3,..\right); \tag{5.6a}$$

$$S_R = -D_{(a)}\sum_{a=1}^{3}\oint\frac{dx_a}{x_a} = -C\sum_{a=1}^{3} n_{(a)} \equiv -Cj;\ \left(j = 0,1,2,..,n-1\right). \tag{5.6b}$$

(A j kvantumszám maximális értéke láthatóan csak *n – 1* lehet, amely biztosítja a hatásintegrál pozitív tulajdonságát.)

Vizsgáljuk meg egyelőre a B-S kvantumfeltétel (5.6a) időkomponensét. A körintegrál jelen esetben azt jelenti, hogy a mozgás periodikus, véges periódus-időkkel:

$$S_T = D_T\oint\frac{dx_0}{x_0} \equiv D_T\int_{T_0}^{T}\frac{dt}{t} = C\cdot n;\ \left(n = 1,2,3,...;\ D_T \equiv D_{(0)}\right). \tag{5.7}$$

Legyen az anyaghullám sebessége konstans v értékű, ekkor ez az integrál távolság-dimenziójú mennyiségekre transzformálható. Vezessük be a következő változókat:

$$R_0 = vT_0;\ R_A = vT;\ dt = dr/v;\ 1/t = v/r, \tag{5.8}$$

amelyek figyelembevételével:

$$S_T = D_T\int_{T_0}^{T}\frac{dt}{t} = D_T\int_{R_0}^{R_A}\frac{dr}{r} = Cn;\ \left(n = 1,2,3,...\right). \tag{5.9}$$

Fontos észrevenni, hogy az anyaghullám sebessége a hatásintegrálból „kiesett”, azaz S_T nem függ az anyaghullám sebességétől.
Tekintettel arra, hogy a T-B szabály a Naprendszer centrális gravitációs erőterére vonatkozik, az (5.6b) térbeli kvantumfeltételről feltételezhetjük, hogy *annak csak radiális függése van*:

$$S_R = D_{(a)}\sum_{a=1}^{3}\oint\frac{dx_a}{x_a} = D_R\int_{R_0}^{R_B}\frac{dr}{r} = Cj;\ \left(j = 0,1,2,...,n-1\right). \tag{5.10}$$

Az eddigiek alapján a teljes makroszkopikus hatásintegrál a következő lesz:

$$S = D_T \int_{R_0}^{R_A} \frac{dr}{r} - D_R \int_{R_0}^{R_B} \frac{dr}{r} = C(n-j) > 0; \ (n = 1,2,3,..; \ j = 0,1,2,...,n-1). \tag{5.11}$$

Bevezetve a következő konstansokat:

$$C_T = C / D_T; \ C_R = C / D_R. \tag{5.12}$$

az (5.11) kvantumfeltétel a következőre egyszerűsödik:

$$\int_{R_0}^{R_A} \frac{dr}{r} - \int_{R_0}^{R_B} \frac{dr}{r} = C_T n - C_R j > 0; \ (n = 1,2,3,..; \ j = 0,1,2,...,n-1). \tag{5.13}$$

Az integrálásokat elvégezve:

$$\ln \frac{R_A}{R_B} = C_T n - C_R j > 0; \ (n = 1,2,3,..; \ j = 0,1,2,...,n-1), \tag{5.14}$$

amelyből a *két-kvantumváltozós bolygótávolság függés*:

$$\begin{gathered} R_A = R_B \exp(C_T n - C_R j) = R\alpha^n \beta^{-j}; \\ \alpha^n = \exp C_T n; \ \beta^{-j} = \exp(-C_R j); \ (n = 1,2,3,..; \ j = 0,1,2,...,n-1). \end{gathered} \tag{5.15}$$

Ez a képlet $j = 0$ esetben a (2.1) bolygótávolság képletét adja vissza:

$$a_n = a_0 \alpha^n; \ (a_n \equiv R_A; \ a_0 = R_B; \ n = 1,2,3,...). \tag{5.16}$$

A harmadik fejezetben bemutatott, nagy pontosságú, két-kvantumváltozós (3.3) képlet pedig azonos a levezetésünk végeredményével:

$$a_n = a_0 \alpha^n \beta^{-j}; \ (a_n \equiv R_A; \ a_0 = R_B; \ n = 1,2,3,..; \ j = 0,1,2,...,n-1). \tag{5.17}$$

6. Első lépés a kvantumgravitáció felé

A kapott eredmény helyes értelmezéséhez fel kell idéznünk a kvantummechanika múlt század eleji kialakulásának történetét. Az első, talán legfontosabb lépés *Max Planck* (1751-1833) nevéhez fűződik, aki pontosan az 1900-as év decemberében hozta nyilvánosságra a fekete test sugárzás máig érvényes elméletét, bevezetve a hőmérsékleti sugárzás kvantumos tulajdonságát jellemző Planck állandót. Az 1900-tól 1925-ig tartó időszakban Einstein Planck eredményét felhasználva értelmezni tudta a fotoelektromos hatást (1905), amiért Nobel díjat kapott 1921-ben. Az időszak másik fontos eredménye *Niels Bohr* (1885-1962) dán fizikus kvantált hidrogén atom modellje (1912), amelyben fontos szerep jutott a Planck állandónak. Sommerfeld nevéhez fűződik a Bohr-féle atommodell továbbfejlesztése újabb kvantumszámok bevezetésével, valamint az elmélet relativisztikus általánosítása. Ebben az időszakban a fizikusok úgy gondolták, hogy a klasszikus fizika törvényei a mikrovilágban is maradéktalanul érvényesek, csupán elegendő azokat speciális kvantumfeltételekkel kiegészíteni. Ennek a korszaknak legfontosabb végeredménye a Bohr-Sommerfeld kvantálási módszer, ami a (4.1) kvantumfeltétel általános alkalmazását jelenti. Ezt az elméleti periódust ma **régi kvantumelméletnek** szokás nevezni, mely a kvantummechanika kialakulásának első lépcsőjét jelentette. A kvantumfizika máig érvényes betetőzését, amint már említettük, a kvantummechanika teljesen új elméletének megszületése jelentette 1925-ben.

A fentiekben a Naprendszer bolygóira bevezetett hullámgravitációs modell, melynek egyszerűsége és pontossága figyelemreméltó, egyértelműen a régi kvantumelmélet talajára épült. A bolygópályák számítási módszere megmarad a klaszikus mechanika, illetve Newton gravitációs elméletének szintjén. Ugyanakkor a (4.1) Bohr-Sommerfeld kvantumfeltétel alkalmazása a *de Broglie*-féle anyaghullámokra már a klasszikus mechanika kereteinek túllépést jelenti. Ennek hangsúlyozása céljából a bemutatott elméleti konstrukciót *hullámgravitációs elméletnek* neveztem el, melynek angol rövidítése „*Wave-Gravitational Theory*" (WGT).

Fontos tehát megjegyezni, hogy a hullámgravitációs modellünk semmiképpen sem tekinthető a kvantummechanika makroszkopikus általánosításának, hiszen a kvantummechanika számos specifikus jellemzője a hullámgravitációs elméletben nem szerepel. Ennek oka azzal kapcsolatos, hogy a modell levezetése során a Planck állandó „kiesett" a B-S kvantumfeltételből. Ez azt jelenti, hogy az (5.5) kvantumfeltételben a C hatás dimenziójú konstans értéke speciálisan a Naprendszerre érvényes illesztési paraméter, és *nem egy univerzális állandó*, mint a kvantummechanikában. Ez a meglátás egyben kétségessé teszi egy bármilyen jövőbeli kvantumgravitációs elmélet megteremtését, legalábbis annak a szokásos felépítésű kvantummechanikai megvalósítását.

7. Összefoglalás

A dolgozatban a Titius-Bode (T-B) szabály egy lehetséges fizikai értelmezését adtuk meg, amely egyúttal kiinduló pontja lehet egy jövőbeli végleges kvantumgravitációs elméletnek. A bemutatott elmélet alapját a régi Bohr-Sommerfeld (B-S) kvantálás képezi. A relativisztikus B-S kvantumfeltételt de Broglie anyaghullámaira írtuk fel, amely az új hullámgravitációs modellre vezetett. A kvantálási feltételből, nem meglepő módon, Planck kvantumállandója kiesett. Ez csillantotta meg annak a lehetőségét, hogy ezt a kvantálási módot makroszkopikus fizikai rendszerre, speciálisan a Naprendszerre kiterjeszthessük. A centrális gravitációs erőtérre alkalmazott modellünk, hasonlóan a hidrogénatom relativisztikus B-S modelljéhez, mindössze két kvantumszámot tartalmaz. A hullámgravitációs elméletünk újszerű módon értelmezi a tapasztalati úton felismert Titius-Bode szabályt, ugyanakkor a bolygópályák számítása megmarad klasszikus fizika keretein belül. Az eddigi vizsgálataink szerint a modell alkalmazható a Naprendszerünk bolygóinak holdjaira is. A hullámgravitációs elméletünk sikere arra a felismerésre vezet, hogy az anyag hullámtermészete az anyag legalapvetőbb tulajdonsága, melynek hatása megjelenik mind a klasszikus, mind a kvantummechanikai leírásban, függetlenül a mikroszkopikus, vagy makroszkopikus méretektől és a fizikai kölcsönhatás fajtájától.

Az utóbbi években más, külső „naprendszerekben” felfedezett, ún. *exobolygókra* is exponenciális távolságeloszlásokat mértek [7.1,…,7.6]. Mind a jelen dolgozat eredményei, mind az eddig megfigyelt *exobolygók* exponenciális távolságeloszlása tovább erősíti meggyőződésünket a T-B szabály valós fizikai eredetében. Ez egyben azt is jelenti, hogy a hullámgravitációs modellünk egy új természeti törvény felismerését valószínűsíti.

8. Megjegyzések

8.1. A hullámgravitációs modellről

A sikeres modellünk a (3.3) képletnek megfelelően három konstans paramétert tartalmaz:

$$a_n \cong a_0\alpha^n\beta^{-j};\ \left(n=1,2,\ldots N;\, j=0,1,\ldots N-1\right), \tag{8.1.1}$$

amely paraméterekre a matematikai illesztés a következőket eredményezte:

$$a_0 = 0.220153\ldots;\ \alpha = 1.813371\ldots;\ \beta = 1.157176\ldots;\ \sigma = 0.0228\ldots = 2.28\%. \tag{8.1.2}$$

A számítások során észrevettem, hogy a β paraméter az α paraméter negyedik gyöke, tehát a hullámgravitációs modellünk két konstans paraméterrel is közelíthető:

$$a_n \cong a_0\alpha^{n-j/4};\ \left(n=1,2,\ldots N;\, j=0,1,\ldots N-1\right), \tag{8.1.3}$$

Ez ekvivalens azzal a feltételezéssel, hogy az (5.12) képlet helyett a következő áll fenn:

$$C_T = C / D_T;\ C_R = C_T / 4. \tag{8.1.4}$$

Hangsúlyozni kell, hogy ez nem bizonyított állítás, azaz nem következménye az általunk bevezetett anyaghullám kvantálásnak. További vizsgálatokra van tehát szükség, hogy vajon mennyire teljesül ez az egyszerű összefüggés mindazon esetekben, ahol az exobolygókra, illetve a Naprendszerünk holdjaira közelítő exponenciális távolságeloszlás teljesül.

Ha ez általánosan igaznak tűnik, ez gyakorlati szempontból azt jelenti, hogy a legjobb bolygótávolság eloszlást általános esetben is a (8.1.3)-hoz hasonló képlettel tudjuk leírni, egyedül az α paraméter változhat esetenként.
Naprendszerünk bolygóira elvégeztük a számítást az egyszerűbb (8.1.3) képlettel, és a következőt kaptuk:

$$a_0 = 0.220350\ldots;\ \alpha = 1.815535\ldots;\ \sigma = 0.0230\ldots = 2{,}3\%. \tag{8.1.5}$$

Megállapítható, hogy ez az eredmény pontosságban gyakorlatilag megfelel a (7.1.2) háromparaméteres képlet pontosságának. Az elvégzett számítás szerint a **2. Táblázat** eredményei lényegében nem változnak; a fő-, és mellék-kvantumszámok ugyanazok maradnak, csak a számított bolygótávolságok változnak elhanyagolható mértékben.

8.2. Az alfa paraméterről

A hullámgravitációs modell legfontosabb paramétere a (8.1.5) képletben számszerűen megadott alfa paraméter. Az a_0 együttható szerepe a dimenzionális illesztés, ez a paraméter adja meg, hogy a bolygótávolságokat méterben, millió kilométerben, vagy éppen csillagászati távolság-egységben adjuk meg. Amit az alfa paraméterrel kapcsolatban észrevettem, lehet, hogy véletlen, vagy sem, a következő:

$$\begin{gathered}\alpha^{1/3} = \sqrt[3]{1.815535\ldots} = 1.219930\ldots \cong 1+Q_0;\\ Q_0 = 2/9 = 0.2222\ldots\end{gathered} \tag{8.2.1}$$

Azt is észre lehet venni, hogy az a_0 értéke is közel van a $Q_0 = 0.222\ldots$ értékhez, de ez valóban csak a véletlennek tudható be. Ha nem csillagászati egységben számolunk, vagy ha például a Merkur-Nap távolságot választjuk a távolság egységének, az a_0 értéke egészen más lesz.

Évekkel ezelőtt vettem észre, hogy számos dimenziótlan fizikai állandó, illetve **nyílván véletlenül** SI rendszerben a legfontosabb fizikai állandók kifejezhetők $Q = 2/9$ szám **egész-számú hatványaival** (kisebb-nagyobb pontossággal). Erről régebben írtam egy részletes tanulmányt, amely 2009-ben megjelent egy USA folyóiratban:

Sarkadi, D., An Interesting Number in Physics, *Galilean Electrodynamics*, Vol. **20**, No. 6., 103. (2009)

Magyar nyelven: http://www.scribd.com/doc/19639170/QFizika-Aranymetszes-a-fizikaban-Update-2012-szeptember

Irodalom

1. Fejezet

[1.1] http://en.wikipedia.org/wiki/Titius%E2%80%93Bode_law
[1.2] Nieto, M. M., 1972: The Titius-Bode Law of Planetary Distances: Its History and Theory. *Pergamon Press, Oxford*. (1), pp 59-62. (1982)
[1.3] http://space.unibe.ch/staff/thomas/planetenphysik_1_10.pdf

[1.4] Lynch, P., On the significance of the Titius-Bode law for the distribution of the planets. *Monthly Notice of the Royal Astronomical Society*, **341**, Issue 4, pp. 1174-1178. (2003). http://adsabs.harvard.edu/abs/2003MNRAS.341.1174L

[1.5] Dermott, S. F., Bode's Law and the resonant structure of the solar system. Nature Physical Science, **244**, (132), pp. 18-21 (1973).

[1.6] Giné, J., On the origin of the gravitational quantization: The Titius--Bode Law. *Chaos, Solitons & Fractals*, **32**, (2), pp. 363–369, (2007). http://web.udl.es/usuaris/t4088454/ssd/Prepublicaciones/PS/bode2.pdf

[1.7] Perinova, V. et al., Distribution of distances in the solar system. http://vixra.org/pdf/0805.0002v1.pdf

[1.8] Agnese, A. G, Festa, R., Discretization on the cosmic scale inspired from the Old Quantum Mechanics. *Hadronic J.* **21,** pp. 237–253. (1998)

[1.9] Louise, R., A postulate leading to the Titius-Bode law. *Moon and the Planets*, **26**, (1), pp. 93-96. (1982) http://adsabs.harvard.edu/full/1982M%26P....26...93L

[1.10] Louise, R., Quantum formalism in gravitation quantitative application to the Titius-Bode law. *Moon and the Planets*, **27**, (1982) http://adsabs.harvard.edu/full/1982M%26P....27...59L

2. Fejezet

[2.1] Ortiz, J. L. et al., Possible patterns in the distribution of planetary formation regions. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **379**, (3), pp. 1222-1226. (2007)

[2.2] Hayes, W; Tremaine, S., Fitting Selected Random Planetary Systems to Titius-Bode Laws. *Icarus*. **135**, (2), pp. 549-557. (1998) http://arxiv.org/pdf/astro-ph/9710116v1.pdf

[2.3] http://en.wikipedia.org/wiki/Dermott's_law

3. Fejezet

[3.1] Pankovic, V. et al., De Broglie-Like Wave in the Planetary Systems. (2009) http://arxiv.org/pdf/0903.1729.pdf

[3.2] Scardigli, F., A Quantum-Like Description of the Planetary Systems. *Foundations of Physics*, **37**, (8), pp.1278-1295. (2007) http://iopscience.iop.org/1742-6596/67/1/012038/pdf/1742-6596_67_1_012038.pdf

[3.3] Zawislawski, Z. et al., On the regularities of the mean distances of secondary bodies in the solar system. *Astronomical and Astrophysical Transactions*, **19**, pp. 177-190. (2000) http://www.cbk.waw.pl/~kosek/z/zartykul.pdf

[3.4] Ragnarsson, S. I., Planetary distances: a new simplified model. *Astronomy and Astrophysics*, **301**, p.609. (1995) http://adsabs.harvard.edu/full/1995A%26A...301..609R

[3.5] Sarkadi, D., The structure of the physical mass. http://www.scribd.com/doc/64984275/

4. Fejezet

[4.1] http://en.wikipedia.org/wiki/Old_quantum_theory

[4.2] Messiah, A., Quantum Mechanics (Vol. I). English translation from French by G. M. Temmer. *North Holland, John Wiley & Sons. Cf.* Chpt. I., section IV. (1966)

[4.3] Krag, H., Relativity and quantum theory from Sommerfeld to Dirac. *Ann. Phys. (Leipzig)*, **9**, 11–12, 961 – 974. (2000)

[4.4] http://en.wikipedia.org/wiki/Louis_de_Broglie

[4.5] http://en.wikipedia.org/wiki/Davisson%E2%80%93Germer_experiment

7. Fejezet

[7.1] Tóth, Zs., Nagy, I., Dynamical stability of the Gliese 581 exoplanetary system. http://arxiv.org/pdf/1302.1322v1.pdf

[7.2] Flores-Gutierrez, J. D., Garcia-Guerra, C., A variant of the Titius-Bode Law. *Revista Mexicana de Astronomia y Astrofisica*, **47**, 173–184. (2011) http://www.scielo.org.mx/pdf/rmaa/v47n1/v47n1a12.pdf

[7.3] Lovis, C. et al., The HARPS search for southern extra-solar planets. http://arxiv.org/pdf/1011.4994v1.pdf

[7.4] Chang, H-Y., Titius-Bode's Relation and Distribution of Exoplanets. *Journal of Astronomy and Space Sciences.* **27**, (1), pp. 1-10. (2010) http://www.janss.kr/Upload/files/JASS/27_1_01.pdf

[7.5] European Southern Observatory: Richest Planetary System Discovered. http://www.eso.org/public/news/eso1035/

[7.6] Poveda, A., Lara, P., The Exo-planetary System of 55 Cancri and the Titius-Bode Law. http://arxiv.org/abs/0803.2240

Magyar nyelvű anyagok:

http://hu.wikipedia.org/wiki/Titius%E2%80%93Bode-szab%C3%A1ly
http://www.vilaglex.hu/Lexikon/Html/TiBoSzab.htm
http://astro.u-szeged.hu/szakdolg/csizmazia/xbolygo3.html
http://kvadromatika.fw.hu/eter/titius_bode_szabaly.doc
http://www.scribd.com/doc/52607640/Exobolygok
http://www.scribd.com/doc/105681801/Az atommag egyrészecske modellje
Joseph Norwood, Századunk fizikája, Műszaki Könyvkiadó Budapest, 1981. (Bohr-Sommerfeld kvantálás)

A T-B szabály vizsgálata exobolygó rendszerekben:

http://hirek.csillagaszat.hu/exobolygok/20080321-az-55-cancri-bolygorendszere-es-a-titius-bode-szabaly.html
http://astro.u-szeged.hu/szakdolg/TothPeter_nyari_vedes.ppt

Tisztelt Olvasók!
Szívesen várom észrevételeiket, javaslataikat a jelen munkámmal kapcsolatban!
Üdvözlettel: Sarkadi Dezső (dsarkadi@gmail.com)

Paks, 2013. március 17-én.