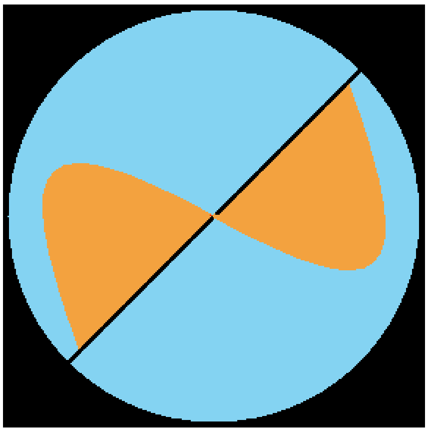
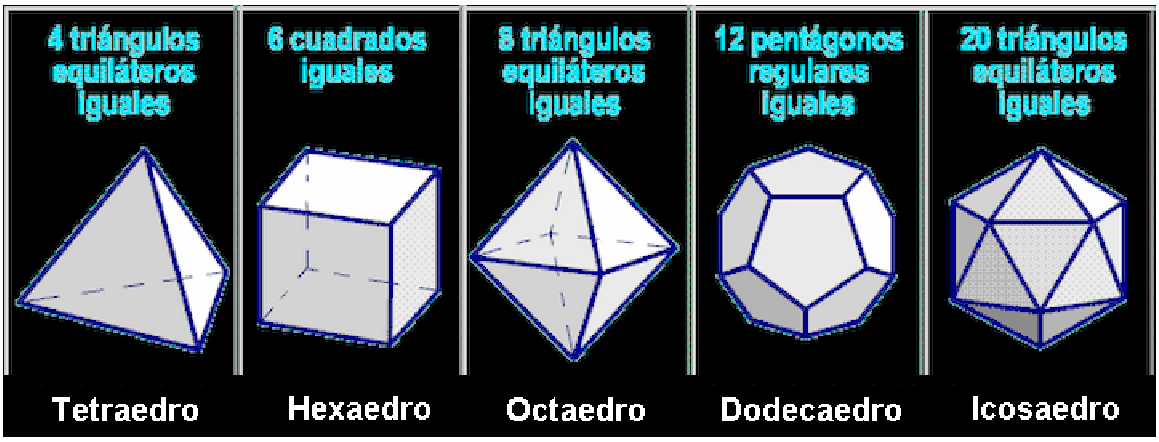
Poliedros regulares



CAPÍTULO 1 - Teorema de Euler

(1-a) Poliedros regulares convexos (solidos platónicos)



(1-b) Leonhard Paul Euler

- Demostró un teorema referido a los poliedros.
- Fue matemático y físico.
- Nació el 15 de abril de 1707 en Basilea (Suiza) y murió el 18 de septiembre de 1783 en San Petersburgo (Rusia).
- Se lo considera el matemático principal del siglo 18 y uno de los más destacados de todos los tiempos.

(1-c) La fórmula de Euler para los poliedros

Algunas propiedades del poliedro son visibles y expresables con números. Son las propiedades que aprendemos a mirar y comparar en la escuela primaria. Y aparecen en las aplicaciones de teorías fundamentales. Una de ellas es la topología.
Euler halló una relación general entre caras, aristas y vértices, cumplida por los 5 poliedros regulares convexos. Antes de mostrarla veamos los símbolos que usaremos en este documento.

- c $\rightarrow$ número de carras del poliedro
- a $\rightarrow$ número de aristas del poliedro
- v $\rightarrow$ número de vértices del poliedro
- l $\rightarrow$ número de lados de una cara

A cada poliedro regular le corresponden valores específicos de esos números, indicados en la tabla que sigue.

Tabla 1

Poliedro Regular	a	v	c	l
Tetraedro	6	4	4	3
Hexaedro	12	8	6	4
Octaedro	12	6	8	3
Dodecaedro	30	20	12	5
Icosaedro	30	12	20	3

El teorema de Euler demuestra que se cumple lo siguiente.

$$\boxed{a + 2 = v + c} \tag{1}$$

El número de lados de la cara no interviene en la ecuación (1) , aunque mirando los poliedros notamos que l no puede estar desconectado de las otras propiedades numerables.

CAPÍTULO 2 - El número l

(2-a) Observar la tabla

Este capítulo no contiene demostración alguna. Solamente mostraremos lo que se observa cuando miramos atentamente la tabla 1.

- En cada fila la suma $a + v$ y el producto $c.l$ difieren.
- Las 5 diferencias se ordenan en secuencia creciente,respetando el orden de los poliedros.
- En los 5 casos es $a + v < c.l$

Eso significa que en los 5 casos observamos lo siguiente.

$$c\,l - (a + v) = q \tag{2}$$

q $\rightarrow$ número natural

Ampliemos la tabla para incluir al número q .

Tabla 2

Poliedro Regular	a	v	c	l	q
Tetraedro	6	4	4	3	2
Hexaedro	12	8	6	4	4
Octaedro	12	6	8	3	6
Dodecaedro	30	20	12	5	10
Icosaedro	30	12	20	3	18

En los 5 casos de la tabla 2 observamos lo siguiente.

$$q = c - 2 \tag{3}$$

Aplicando (3) en (2) tenemos

$$\boxed{c\ l - (a + v) = c - 2} \tag{4}$$

Pasaje de términos.

$$c\ l - a + 2 = v + c \tag{5}$$

Aplicamos (1) en (4) .

$$c\ l - a + 2 = a + 2$$

Simplificamos

$$c\ l - a = a$$

Pasaje de términos.

$$\boxed{c\ l = 2a} \tag{6}$$

- La ecuación (4) expresa una observación. Es simplemente lo que vemos en la tabla 2 .
- La ecuación (6) no expresa una observación, porque para pasar de (4) a (6) hemos aplicado la ley de Euler.
- La ecuación (6) expresa una consecuencia del sistema de ecuaciones que forman ley de Euler y la observación (4) .
- La tabla permite comprobar que los 5 casos concuerdan con esa consecuencia.

La ecuación (4) no es una ley demostrada. Y 5 casos no son suficientes para proponerla como conjetura. ¿ Para que sirve una observación indemostrada cuando no podemos proponerla como conjetura ? Las personas amantes de la topología podrían verla como una invitación a demostrar la falsedad o la verdad de esa observación. Avancemos un poco más, para dar a la invitación un aspecto más tentador.

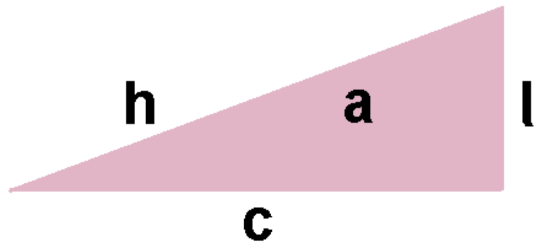
CAPÍTULO 3 - Representación abstracta

(3-a) Triángulo numérico

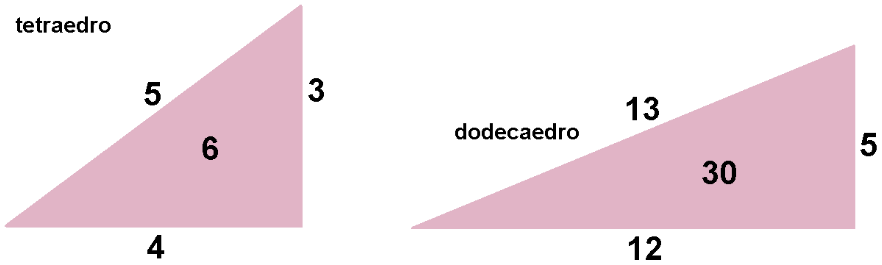
En (6) despejemos a .

$$a = \frac{c\ l}{2} \tag{7}$$

La ecuación (7) tiene la misma forma algebraica que la superficie de un triángulo. La base del triángulo mide c unidades y la altura mide l unidades. Por simplicidad propongamos un triángulo rectángulo.



En dos casos, tetraedro y dodecaedro, la hipotenusa h es natural. Son casos pitagóricos.



En los otros tres es irracional. ¿ Tiene eso relevancia matemática ? Lo ignoro. Solamente puedo decir que en los casos pitagóricos encuentro más armonía estética que en los otros.

(3-b) Operar con el sistema de ecuaciones

Miremos el sistema que forman (1) y (6) .

$$a + 2 = v + c \qquad (1)$$

$$a = \frac{c\ l}{2} \qquad (6)$$

Si usamos ese sistema para eliminar a y despejar c obtenemos

$$c = 2\ \frac{v-2}{l-2} \tag{8}$$

El número 2 aparece en tres lugares de la ecuación (8) . Ese número es la constante de la ley de euler.

$$k = 2 \tag{9}$$

Aplicando (9) en los tres lugares de (8) tenemos

$$c = k\ \frac{v-k}{l-k}$$

Operamos

$$c\ l - c\ k = v\ k - k^2$$

$$k^2 + c\ l - c\ k - v\ k = 0$$

$$k^2 - (c+v)\,k + c\ l = 0$$

Ha quedado una ecuación de segundo grado en k . La resolvemos, teniendo en cuenta que es $k < (c+v)$ en los 5 casos. Entonces corresponde signo negativo en la raíz..

$$\boxed{k = \frac{c+v\ \ - \sqrt{(c+v)^2 - 4\ c\ l}}{2}} \tag{10}$$

En (10) notamos los detalles siguientes.

- La raíz no puede dar como resultado un número imaginario. Eso exige que se cumpla

$$(c+v)^2 \geq 4\ c\ l \tag{11}$$

- En la tabla verificamos que los 5 casos cumplen la condición (11) .
- Mientras verificamos eso vemos que el hexaedro y el octaedro tienen el mismo valor de $c+v$ y el mismo valor de $c\ l$. Para la ecuación (10) ambos casos son equivalentes.
- También el dodecaedro y el icosaedro son equivalentes para esa ecuación.
- No hay caso equivalente al tetraedro. Para la ecuación (10) , este poliedro es un caso exclusivo.
- En la ecuación (10) la raíz debe ser igual a un número natural. Entonces los 5 poliedros de la tabla corresponden a soluciones de la ecuación siguiente.

$$(c+v)^2 - 4\ c\ l = n^2 \tag{12}$$

$n, c, v, l \quad \rightarrow \quad$ todos naturales

Sabemos que en todo esto lo único demostrado es la ley de Euler. El resto es simplemente observación. Igualmente la observación es interesante, porque si alguna vez fuese demostrada tendríamos criterios numéricos para clasificar a los poliedros regulares convexos.

CAPÍTULO 4 - ¿ Es concebible una relación mutua entre c y l ?

(4-a) Un poco de intuición geométrica

- Tenemos una caja llena de triángulos equiláteros iguales.
- Tenemos pegamento para adherir entre sí los lados de los triángulos.
- Queremos construir poliedros regulares convexos cuyas caras sean triángulos equiláteros iguales.

Acomodando piezas y uniendo lados entendemos que el tipo de piezas condiciona el número de caras de caras del poliedro. Con triángulos equiláteros iguales algunos números de caras son posibles y el resto no. Lo mismo sucede con las caras cuadradas y con las caras pentagonales. El número de caras está condicionado por el tipo de caras.

El armado práctico nos induce a creer que c y l deben estar mutuamente relacionados por una ecuación que no tenga otras variables. Pueden aparecer constantes, pero las únicas variables deben ser esas dos. ¿ Es eso posible ? Ignoro la respuesta y curso nuevamente una invitación a las personas que aman la topología.

Ignorar la respuesta no prohibe tomar la tabla y buscar maneras de acomodar los números en ecuaciones hipotéticas. Después de muchos intentos por ensayo y error, he logrado escribir 3 ecuaciones acordes con la tabla, una para cada tipo de cara.

$c \quad \rightarrow$ número de caras
$l \quad \rightarrow$ número de lados de una cara
$m \quad \rightarrow$ número correspondiente al modo de construir el poliedro

$$\textit{caras triangulares} \quad \rightarrow \quad c = 2 \ \left[\ l^{(m-1)} + 1 \ \right] \tag{13}$$

$$\textit{caras cuadradas} \quad \rightarrow \quad c = 2 \ [\ l^m - 1 \ ] \tag{14}$$

$$\textit{caras pentagonales} \quad \rightarrow \quad c = 2 \ [\ l^m + 1 \ ] \tag{15}$$

Con caras triangulares hay tres modos de construir un poliedro. Los tres valores posibles son $m = 1$, $m = 2$ y $m = 3$.

Con caras cuadradas hay solamente un modo de construir un poliedro. El único valor posible es $m = 1$.

Con caras pentagonales hay solamente un modo de construir un poliedro. El único valor posible es $m = 1$.

(4-b) Aplicar las fórmulas

- Caras triangulares $\rightarrow l = 3$ y tres modos

$$\textit{modo } 1 \ \rightarrow \quad c = 2 \ \left[\ 3^{(1-1)} + 1 \ \right] = 2 \ \left[\ 3^0 + 1 \ \right] = 2 \ [\ 1 + 1 \ ] = 4 \quad \rightarrow \quad \textit{tetraedro}$$

$$\textit{modo } 2 \ \rightarrow \quad c = 2 \ \left[\ 3^{(2-1)} + 1 \ \right] = 2 \ \left[\ 3^1 + 1 \ \right] = 2 \ [\ 3 + 1 \ ] = 8 \quad \rightarrow \quad \textit{octaaedro}$$

$$\textit{modo } 3 \ \rightarrow \quad c = 2 \ \left[\ 3^{(3-1)} + 1 \ \right] = 2 \ \left[\ 3^2 + 1 \ \right] = 2 \ [\ 9 + 1 \ ] = 20 \quad \rightarrow \quad \textit{icosaedro}$$

- Caras cuadradas $\rightarrow l = 4$ y solamente un modo

$$\textit{modo } 1 \ \rightarrow \quad c = 2 \ \left[\ 4^1 - 1 \ \right] = 2 \ [\ 4 - 1 \ ] = 6 \quad \rightarrow \quad \textit{hexaedro}$$

- Caras pentagonales $\rightarrow l = 5$ y solamente un modo

$$\textit{modo } 1 \ \rightarrow \quad c = 2 \ \left[\ 5^1 + 1 \ \right] = 2 \ [\ 5 + 1 \ ] = 12 \quad \rightarrow \quad \textit{dodecaedro}$$

(4-c) ¿ Qué vemos en las fórmulas modales ?

- El formato matemático básico es el mismo para caras triangulares, cuadradas y pentagonales, con el número de caras igual al doble de una suma. En ella un sumando es una potencia de l y el otro es un 1 con el signo correspondiente.
- La misma forma básica en todos los casos invita a pensar que si alguien lograse una demostración, podría utilizar en todos los casos el mismo metodo.
- Existen polinomios no convexos que no hemos examinado. Tal vez el mismo método de demostración pueda ser aplicado también a ellos.

CAPÍTULO 5 - Conclusión

Euler demostró una ley de los poliedros. La observación pemite suponer que hay más leyes demostrables. Las fórmulas obtenidas por ensayo y error, en caso de ser válidas, pueden ayudarnos a comprender qué necesitamos para lograr las demostraciones necesarias. Las personas amantes de la topología tienen en eso una oportunidad interesante.

Cuando hay acuerdo con los datos disponibles, las fórmulas que aparecen por ensayo y error pueden entusiasmarnos. El entusiasmo no estará justificado mientras falte un método que permita comprender y demostrar las leyes. Las observaciones invitan a creer que, en el futuro, toda una ciencia basada en los poliedros podría ser desarrollada.